ISSN 2304-120X

Концепт
научно-методический электронный журнал

2021, № 9 (сентябрь)

Раздел 5.8. Педагогика (13.00.00 Педагогические науки)

ART 211058 | DOI 10.24412/2304-120X-2021-11058 | УДК 378.147

Методика преподавания элементов динамики многокомпонентных и многофазных сред для специальности «Прикладная математика»*

Methods of teaching elements of multicomponent and multi-phase media dynamics in the framework of the specialty “Applied Mathematics”

Автор статьи

Тукмаков Дмитрий Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”», ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань, Россия
ORCID: 0000-0002-0335-8548
tukmakovda@imm.knc.ru

Author of the article

Dmitry A. Tukmakov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Federal Research Center, Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia
ORCID: 0000-0002-0335-8548
tukmakovda@imm.knc.ru

Конфликт интересов

Конфликт интересов не указан

Conflict of interest statement

Conflict of interest is not declared

Для цитирования

Тукмаков Д. А. Методика преподавания элементов динамики многокомпонентных и многофазных сред для специальности «Прикладная математика» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2021. № 09. С. 1–12. URL: http://e-koncept.ru/2021/211058.htm. DOI: 10.24412/2304-120X-2021-11058

For citation

D. A. Tukmakov, Methods of teaching elements of multicomponent and multi-phase media dynamics in the framework of the specialty “Applied Mathematics” // Scientific-methodological electronic journal "Concept". 2021. No. 09. P. 1–12. URL: http://e-koncept.ru/2021/211058.htm. DOI: 10.24412/2304-120X-2021-11058

Поступила в редакцию *Received*	04.05.21	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	25.06.21
Принята к публикации *Accepted for publication*	25.06.21	Опубликована *Published*	30.09.21

* Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Аннотация

Для профессионального образования специалистов, способных осуществлять научно-исследовательскую деятельность, важной задачей является адаптация программ высшего профессионального образования к современному состоянию науки. В исследованиях многих технологических процессов и явлений естественной природы часто используются методы математического моделирования. Одной из разновидностей физических процессов являются течения жидких или газообразных сред. При этом в прикладных исследованиях часто встречаются течения неоднородных сред, а в классическом курсе «Механики жидкости и газа» отсутствует методология моделирования динамики неоднородных «сложных» сред. Для специалистов по математическому моделированию необходимо помимо классических методов гидродинамики владеть методами математического моделирования динамики неоднородных сред. Целью данной работы является разработка методики преподавания раздела гидродинамики, касающегося течений неоднородных сред. Раздел курса «Гидродинамика» построен с позиции разработки математических моделей и методов их аналитического решения. Учащимся специальности «Прикладная математика» демонстрируются основные подходы к разработке математических моделей «сложных» течений, а также на простых примерах показаны точные решения систем уравнений. В рамках включения в курс «Гидродинамики» элементов динамики неоднородных сред демонстрируются различные концепции разработки моделей динамики неоднородных сред. Модели представлены в виде систем уравнений в частных производных, включающих в себя уравнения сохранения массы, импульса и энергии. С учетом специфики специальности «Прикладная математика» в данной работе рассматривается совместное применение методов теории уравнений в частных производных и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для специалистов по прикладной математике важно понимание основных методологий моделирования течений неоднородных сред. Методики отличаются различными подходами, что имеет значение для моделирования различных типов неоднородных сред, в зависимости от состава неоднородной среды и различных объемных содержаний компонент в общем объеме смеси. В работе представлены различные типы математических моделей на примере течений, допускающих простые аналитические решения. Изложенный в работе материал может быть полезен при составлении курса «Гидродинамика» специальности «Прикладная математика», в котором присутствовали бы элементы теории динамики неоднородных сред. Наличие такого раздела могло бы дать общее представление о математических моделях многофазных и многокомпонентных сред, также имеет значение и понимание методов упрощения моделей и интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова

прикладная математика, механика жидкости и газа, математическая физика, многофазные среды, теория и методика профессионального образования

Благодарности

Автор выражает благодарность кафедре прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета «КНИТУ-КАИ», г. Казань

Abstract

For the professional education of specialists who are able to carry out scientific and research activities, an important task is to adapt the programs of higher professional education to the modern condition of science. Methods of mathematical modeling are often used in studies of many technological processes and natural phenomena. One of the varieties of physical processes is the flow of liquid or gaseous media. At the same time, there are often flows of inhomogeneous media in applied research, and there is no methodology for modeling the dynamics of inhomogeneous "complex" media in the classical course "Fluid and gas mechanics". For specialists in mathematical modeling, it is necessary to know the methods of mathematical modeling of the inhomogeneous media dynamics in addition to the classical methods of hydrodynamics. The purpose of this work is to develop a methodology for teaching the section of hydrodynamics related to the flows of inhomogeneous media. The section of the course "Hydrodynamics" is designed from the standpoint of the development of mathematical models and methods for their analytical solution. Students of the specialty "Applied Mathematics" are shown the main approaches to the development of mathematical models of "complex" flows, as well as the exact solutions of systems of equations are shown using simple examples. As part of the inclusion of inhomogeneous media dynamics elements in the course of "hydrodynamics", various concepts of developing models of inhomogeneous media dynamics are demonstrated. The models are presented in the form of systems of partial differential equations, including the equations of conservation of mass, momentum and energy. Taking into account the specifics of the specialty "Applied Mathematics", this work considers the use of methods of both the theory of partial differential equations and the theory of ordinary differential equations. For specialists in applied mathematics, it is important to understand the basic methodologies for modeling flows of inhomogeneous media. The techniques differ in approaches, which is important for modeling various types of inhomogeneous media, depending on the composition of the inhomogeneous medium and different volumetric contents of the components in the total volume of the mixture. The paper presents various types of mathematical models on the example of flows that allow simple analytical solutions. The material presented in the work can be useful in compiling the course "Hydrodynamics" for the specialty "Applied Mathematics", which would include elements of the theory of inhomogeneous media dynamics. Such a section could give a general idea of the mathematical models of multiphase and multicomponent media, and the understanding of methods for simplifying models and integrating systems of differential equations is also important.

Key words

applied mathematics, fluid and gas mechanics, mathematical physics, multiphase media, theory and methods of vocational education

Acknowledgements

The author is grateful to the Department of Applied Mathematics and Informatics of Kazan National Research Technical University.

Введение / Introduction

Одной из важнейших проблем профессионального образования является интегрирование достижений современной науки в процесс обучения. Это связано прежде всего с тем, что на данном этапе развития научных дисциплин все большее значение приобретают междисциплинарные исследования. Следовательно, научная деятельность требует от специалиста одновременного знания и применения на практике вычислительной математики, дифференциальных уравнений, математической физики, теории функций комплексного переменного, механики сплошных сред, термодинамики и т. д. По этой причине необходима разработка учебных курсов, совмещающих в себе элементы сразу нескольких учебных дисциплин и методологию современного этапа развития данной научной дисциплины.

Обзор литературы / Literature review

Основу математического аппарата современной механики жидкостей и газов составляют дифференциальные уравнения в частных производных – уравнения математической физики. В изучении уравнений математической физики важно знание как математического анализа, так теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для технических вузов по сей день актуален учебник высшей математики Н. С. Пискунова [1], дающий приемлемые для технического специалиста знания в области дифференциального и интегрального исчислений, обыкновенных дифференциальных уравнений. В учебнике А. И. Егорова предполагается помимо изучения теории дифференциальных уравнений знакомство с областью применения этого раздела высшей математики [2]. В учебнике А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [3] подробно изложена классическая теория математической физики, также даются теоретические основы разделов физики сплошных сред: гидродинамики, акустики, теплофизики и электродинамики. Подробно курс динамики однородных жидкостей и газов представлен в монографии Л. Г. Лойцянского [4], имевшей множество изданий, однако монография не затрагивает некоторых современных разделов механики жидкости и газа. В учебном пособии М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата [5] описаны методы математического моделирования динамики жидкостей, основанные на теории функций комплексного переменного и применяемые исключительно к линейным моделям, в то время как многие течения сплошных сред описываются моделями, имеющими нелинейный характер. Особенностью механики жидкости и газа является то, что по ряду причин математические модели течений жидкостей и газов не допускают классических точных решений, следовательно, помимо общей теории и аналитических методов решения уравнений требуется обучать учащихся численным методам решения уравнений в частных производных. В учебном пособии К. В. Брушлинского [6] рассматриваются численные методы решений уравнений динамики жидкостей, газов и плазмы. В учебном пособии А. Б. Мазо [7] даются как аналитические, так и численные методы решения уравнений математических моделей гидродинамики, рассматриваются сеточные алгоритмы построения численных решений. В учебнике А. Фельдмайера [8] представлен курс динамики сплошных сред – газов и жидкостей, учитывающий современное состояние механики жидкости и газа. Классическая механика жидкости и газа предполагает однородность исследуемых сред, хотя многие промышленные технологии и явления естественной природы связаны с динамикой сред неоднородных по своему составу. В связи с этим важной задачей как фундаментальных исследований, так и технических приложений является моделирование динамики неоднородных сред. Таким образом, необходимо обучение методам не только классической гидродинамики, но и динамики неоднородных сред. В монографии Р. И. Нигматулина [9] излагаются основы теории механики многофазных сред. В учебном пособии Ю. С. Ходакова, Ю. П. Юдкина [10] представлены результаты исследований динамики неоднородных (дисперсных) сред применительно к процессам химических технологий, что имеет значение для специалистов химической промышленности. В учебном пособии Д. А. Губайдуллина [11] изложен курс динамики неоднородных – парокапельных сред, применительно к линеаризованным математическим моделям, основной целью работы является изложение теоретических методов исследования акустических явлений в неоднородных средах. Учебное пособие А. Л. Тукмакова, В. Г. Тонконога [12] представляет курс механики многофазных сред с фазовыми переходами, рассмотрены технические приложения, что может быть важно для обучения специалистов гидравлике, энергетике, ракетостроению. В монографии А. Г. Кутушева [13] численно исследуются ударно-волновые процессы в газовзвесях и газокапельных и порошковых средах, представлены полезные как студентам, так и аспирантам математические модели неоднородных сред с различными физико-механическими свойствами. Методики преподавания механики жидкости и газа разрабатываются как отечественными, так и зарубежными исследователями. В работе А. Самсудина и соавторов [14] рассматривается обучение студентов основам гидродинамики, предложена структура курса «Гидродинамика», в которой сочетается обучение теоретическим основам с проведением физических экспериментов. В статье Ф. Чжао [15] обсуждается улучшение методик преподавания дисциплины «Вычислительная гидродинамика» студентам и аспирантам инженерных специальностей. Работа К. Йетилмезсоя [16] рассматривает совместное преподавание экспериментальных методов гидродинамики и методов математического и компьютерного моделирования течений различных сред. Публикация К. Стерн и соавторов [17] посвящена методикам усовершенствования преподавания гидродинамики в рамках инженерного образования через наглядную демонстрацию физических опытов. В исследовании С. Зендехбуди и соавторов [18] обсуждаются проблемы преподавания методов математического моделирования специалистам технических специальностей, связанных с химической промышленность., нефтегазовой и энергетическими отраслями, предполагается объединение методов математического моделирования и теоретических основ физико-химических процессов при обучении разработке математических моделей сложных технических процессов. В статье. И. Д. Краснокутского, А. Б. Ваганова [19] излагаются методические основы преподавания механики жидкости и газа на основе физического и математического моделирования стационарного процесса движения жидкости в трубопроводах, в простейших гидравлических сопротивлениях и в свободных потоках. В работе А. К. Любимова [20] обсуждаются вопросы подготовки специалистов-механиков как специалистов в фундаментальной науке, анализируются различные вопросы методологии преподавания по дисциплине «Механика». В статье Г. В. Куповых и соавторов [21] выделяются проблемы, затрудняющие изучение гидромеханики студентами. Описывается методика нового подхода к отбору и структурированию учебного содержания на основе гидромеханических моделей в дополнении к традиционной методике обучения. В работе Р. А. Алмаева [22] высказывается необходимость самостоятельной работы студентов технических дисциплин, связанных с гидравликой. В статье [23] представлена структура курса по математическому моделированию гидродинамических явлений и процессов, учитывающая инженерную направленность обучающихся специалистов, высказывается предложение объединить в рамках одного курса теоретические основы гидромеханики и методы математического моделирования. В статье А. С. Кайгородовой, Н. В. Толстовой, И. Н. Семеновой [24] приведены примеры заданий при пошаговом решении системы уравнений, способствующие формированию умения сравнивать по заданным критериям для формулировки вывода о выборе наиболее простого решения познавательной задачи. В статье В. К. Жарова, Р. М. Тургунбаева [25] обсуждаются различные гуманитарные аспекты преподавания высшей математики, прежде всего преемственность между обучением математике в высшей и средней школе. В публикации С. В. Костина [26] описаны некоторые подходы к определению важного для математического анализа понятия первообразной. Предлагается определение этого понятия, которое обладает заметными преимуществами по сравнению с другими определениями. Отмечается необходимость более подробного обсуждения смысла и содержания понятия «первообразная». В работе В. Г. Гилева [27] рассматриваются вопросы преподавания метода обобщения при исследовании функций. Выявляются методические и математические основы метода обобщения. Приводятся причины, по которым желательно внедрение метода обобщения в систему математического образования. В статье М. Е. Степанова [28] обсуждаются вопросы методики преподавания высшей математики. Автор описывает проблемы преподавания математики специалистам по информационным технологиям. В статье В. Ю. Бодрякова, А. А. Быкова, Д. А. Ударцевой [29] описывается важность навыков построения оптимизируемых моделей реальных явлений и процессов для формирования специалиста по прикладной математике. В ходе исследований, описанных в статье, обнаружено, что экстремальные свойства квадратичной функции не только позволяют эффективно и неформально решать достаточно сложные оптимизационные задачи, но и заметно повышают уровень мотивации обучающихся к изучению математики. В статье С. В. Мечик [30] рассматривается методика преподавания высшей математики инженерам-технологам нефтехимической промышленности. Высказывается мнение, что процесс обучения математике должен определяться спецификой данной отрасли и заключается в формировании готовности к использованию математического аппарата для проведения анализа и оценки элементов химико-технологического процесса. Также предполагается включение в курс предмета «Высшая математика» задач, связанных с процессами гидравлики трубопроводных систем. В работе И. С. Астаховой [31] проводится сопоставление различных методик преподавания предмета «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для учащихся инженерных специальностей. В работе [32] представлена математическая модель динамики запыленной среды, имеющая одномерную геометрию течения, описанная в работе математическая модель может быть полезной в плане ознакомления с упрощениями, применяемыми в гидромеханике для разработки моделей. В работе [33] на примере математической модели, разработанной в публикации П. С. Федотова, М. А. Статкуса, Г. И. Цизина [34], демонстрируется методика приведения уравнений в частных производных к каноническому виду. В работе [35] представлена модель динамики электрически заряженной двухкомпонентной смеси, которая может быть наглядным примером при изложении методов вычислительной математики в курсе «Физика пылевой плазмы».

На данный момент в разработке методик преподавания сплошных сред (жидкостей и газов) основным является составление курса таким образом, чтобы общие теоретические основы дополнялись методами решения уравнений. При этом сама структура курса изменяется в зависимости от того, представители каких специальностей изучают теорию гидродинамики.

Обучение математическому моделированию гидродинамических процессов включает в себя обучение как физическим основам гидродинамики, так и методам решения уравнений математических моделей, при этом в одних учебниках делается упор на аналитические методы решения, а в других – на численные. Одновременно с этим в учебной литературе, посвященной различным математическим дисциплинам – обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики, также даются примеры практических приложений изложенных разделов математики, что приводит к необходимости привлечения теоретических основ из различных естественно-научных дисциплин. Также в некоторых исследованиях отмечается необходимость включения в учебные курсы современных разделов гидродинамики как развивающейся науки. Исходя из изложенного, можно предположить, что в курсе лекций «Гидродинамика» для специалистов по прикладной математике необходимо наличие такого раздела современной механики жидкости и газа, как «Динамика многокомпонентных и многофазных сред», изложение которого должно быть адаптировано к специфике данной специальности. Иными словами, данный раздел помимо общей теории должен обучать и методам построения математических моделей динамики неоднородных сред.

Методологическая база исследования / Methodological base of the research

В институте математики и механики Казанского (Приволжского) федерального университета уже многие годы преподаются дисциплины «Механика многофазных сред» и «Теория многофазных сред». В курсе лекций «Гидродинамика», читаемом в Казанском национальном исследовательском техническом университете для специалистов по инженерным специальностям, связанным с энергетикой, транспортными системами, авиа- и ракетостроением, даются отдельные элементы механики многофазных и многокомпонентных сред. При этом специалистов по прикладной математике, по причине ограниченности часов на изучение механики сплошных сред, можно ознакомить лишь с самыми ключевыми положениями теории механики жидкости и газа в целом. Поэтому при включении в курс «Гидродинамики» элементов динамики неоднородных сред необходимо ознакомить учащихся с самыми важными аспектами этой дисциплины. Главной целью раздела «Динамика многокомпонентных и многофазных сред» в рамках специальности «Прикладная математика» является обучение разработке математических моделей и методов решения систем уравнений полученных математических моделей. Необходимо продемонстрировать, на примере ряда простых моделей динамики неоднородных сред, взаимодействие методов математической физики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений при составлении математических моделей физических процессов. В общем курсе «Гидродинамики» для изучения теории динамики неоднородных сред возможно выделить четыре часа на лекционные занятия, посвященные общей теории, и шесть часов на лабораторно-практические занятия.

Результаты исследования / Research results

Преподавание раздела «Динамика многокомпонентных и многофазных сред» в курсе «Гидродинамика» для специалистов по прикладной математике преследует следующие цели:

1) обеспечение понимания будущими специалистами по прикладной математике основ динамики неоднородных сред;

2) выработка у студентов практических навыков разработки математических моделей динамики неоднородных сред;

3) формирование навыков получения аналитических решений математических моделей процессов, протекающих в естественной природе.

При преподавании динамики многофазных и многокомпонентных сред, прежде всего, необходимо опираться на уже усвоенный учащимися материал дисциплины «Механика жидкости и газа». Также необходимо объяснить, что различные типы математических моделей неоднородных сред имеют свою специфику применения – в зависимости от физических и механических свойств компонент смеси и соотношений объемных содержаний компонент. В то же время для многокомпонентных, но однородных сред применяются модели, которые не являются эффективными для многофазных сред – смесей, в которых компоненты имеют различное агрегатное состояние. В процессе преподавания раздела «Динамика многокомпонентных и многофазных» сред прежде всего нужно описать структуру математической модели. Основой моделирования течений неоднородных сред, так же как в классической гидродинамике, является решение системы уравнений динамики сплошной среды, состоящей из уравнений непрерывности массы, импульса и энергии. Отличие этого раздела гидродинамики заключается во введении коэффициентов и функций, которые описывают неоднородность сред. Также необходимо понимание учащимися того, что при описании многофазных сред основной задачей становится описание взаимодействия между компонентами, которое может быть односторонним либо двухсторонним, в зависимости от соотношений масс компонент смеси. Для моделирования течений смесей существует несколько подходов, один из которых – это диффузионный подход, в котором все уравнения гидродинамики, кроме уравнений непрерывности массы компонент смеси, решаются для всей смеси в целом [36], уравнение динамики одномерного течения вязкой смеси имело бы следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div\left(\rho_i \mathbf{V}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho V^k}{\partial t} + \nabla^i\left(\rho V^j V^i + \delta_{ij} p - \tau_{ij}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\left(\nabla T\right) - \lambda \Delta T = 0 \tag{3}$$

$$p = \left(\rho_1 R_1 + \rho_2 R_2\right) T, \tag{4}$$

$$\tau_{ii} = \mu\left(2\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{2}{3}D\right),$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right),\ D = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x}.$$

$$\mu = \frac{\rho_1}{\rho}\mu_1 + \frac{\rho_2}{\rho}\mu_2,\ \lambda = \frac{\rho_1}{\rho}\lambda_1 + \frac{\rho_2}{\rho}\lambda_2,\ \rho = \rho_1 + \rho_2,$$

ρ,λ,μ, $\mathbf{V}=(V_1,V_2,V_3)$, T – плотность, вязкость, теплопроводность, вектор скорости, температура смеси. Индексы «i» относятся к параметрам компонент смеси. Уравнения математической модели дополняются граничными и начальными условиями, записываемыми для плотностей компонент смеси отдельно:

$$\mathbf{V}(0,X_i)=\mathbf{V}_{0i},T(0,\mathbf{X})=T_{0i},\ \rho_1(0,\mathbf{X}_i)=\rho_{i10},\rho_1(0,\mathbf{X}_i)=\rho_{i10},$$

где $\mathbf{X}_i=\left(x^i{}_1,x^i{}_2,x^i{}_3\right)$ – граница физической области, в которой описывается течение.

Такой подход применяется, если не предполагается учитывать обмен импульсом и теплом между компонентами. Также часто применяется методика моделирования, в которой уравнения механики сплошной среды интегрируются для чистого газа, при этом динамика дисперсных включений описывается через сумму сил, приложенных к частицам со стороны несущей среды [37] (5)–(8):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{V})=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\rho V^k}{\partial t}+\nabla^i\left(\rho V^j V^i+\delta_{ij}p-\tau_{ij}\right)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{V}(\nabla T)-\lambda\Delta T=0, \tag{7}$$

$$\rho_1\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial t}=\mathbf{F}(\mathbf{V},\mathbf{V}_1). \tag{8}$$

Движение несущей компоненты смеси описывается одномерной нестационарной системой уравнений динамики сплошной среды – (5)–(7). Здесь $\boldsymbol{V}_1$ – скорость дисперсной компоненты, ρ_1- плотность дисперсной компоненты, $\boldsymbol{F}$- вектор силы, действующей на дисперсную компоненту со стороны несущей среды (8). Данный подход не предполагает учета взаимообратного межкомпонентного взаимодействия в среде, которое не является существенным при малых объёмных содержаниях дисперсных включений. Континуальный подход [38-40] предполагает, что для каждой из компонент смеси записывается полная гидродинамическая система уравнений. Системы уравнений связаны слагаемыми отвечающими за межкомпонентное взаимодействие – обмен импульсом и теплообмен (9)–(14):

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+div(\rho_1\mathbf{V}_1)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\rho V^k}{\partial t}+\nabla^i\left(\rho V^j V^i+\delta_{ij}p-\tau_{ij}\right)+(1-\alpha)\delta_{ij}\nabla^i p=F^i, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}+\mathbf{V}_1(\nabla T_1)-\lambda\Delta T_1=-Q, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+div(\rho_2\mathbf{V}_2)=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho_2 V_2^j}{\partial t}+\nabla^i\left(\rho_2 V_2^i V_2^j\right)=F_i-\alpha\nabla^i p, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{V}_1(\nabla T)=Q, \tag{14}$$

$$\rho_2=\alpha\rho_{20}. \tag{15}$$

Индексы «1» и «2» относятся к параметрам компонент смеси. Движение несущей компоненты смеси описывается одномерной нестационарной системой уравнений динамики сплошной среды (9)–(11). Динамика дисперсной компоненты смеси опısывается системой уравнений, включающей уравнение сохранения «средней плотности» – ρ_2, произведения физической плотности материала частиц ρ_{20} (постоянной величины) и объемного содержания дисперсной фазы– α (15), изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением дисперсных включений; уравнениями сохранения импульса (13) и энергии (14), записанными с учетом теплообмена и обмена импульсом с несущей компонентой. Функции $F=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$ и $Q=(T_1,T_2)$ описывают межкомпонентный обмен импульсом и межкомпонентный теплообмен. Математическая модель (9)–(15) описывает течения неоднородных сред, в которых массы компонент смеси – величины одного порядка, в этом случае существенным является взаимодействие компонент смеси. После общей теории динамики многофазных сред специалистам по прикладной математике необходимо получить практическое понимание по методологии разработки математических моделей. Для этого необходимо продемонстрировать примеры математических моделей определенных течений неоднородных сред и методы их решения. По большей части сложные математические модели имеют исключительно численное решение. Для получения точных решений применяются различные упрощения: уменьшение геометрической размерности моделируемых течений, линеаризация уравнений за счет пренебрежения какими-либо физическими свойствами моделируемой среды. В этом плане важно продемонстрировать применение методов математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики для получения решений уравнений математических моделей. Также немаловажно показать, каким образом в гидродинамике получают упрощенные модели. Рассмотрим гидродинамические упрощения на примере системы уравнений (1)–(3). Предположим, что течение гомогенной смеси движется со скоростью, которая существенно меньше скорости звука, вследствие чего можно наблюдать, что плотность компонент смеси не зависит от временной и пространственной переменных т. е. $\rho_1,\rho_2=\mathrm{const}$. В таком случае система уравнений (1)–(4) будет иметь вид:

$$\rho_i\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{16}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial \tau}{\partial x}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}=0, \tag{18}$$

$$p=(\rho_1R_1+\rho_2R_2)T,\ \tau=\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x},\mu=\frac{\rho_1}{\rho}\mu_1+\frac{\rho_2}{\rho}\mu_2,\ \lambda=\frac{\rho_1}{\rho}\lambda_1+\frac{\rho_2}{\rho}\lambda_2,\ \rho=\rho_1+\rho_2, \tag{19}$$

Для системы уравнений (16)–(19) задается краевая задача:

$$T(0)=T_{10}, T(L)=T_{20},\ u(0)=u_0\,. \tag{20}$$

Из уравнения (16) следует, что функция скорости не зависит от пространственной переменной. Из уравнения состояния термодинамически идеального газа – $p=\rho RT$ – и уравнения (17) вытекает соотношение $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$, следовательно, функция температуры смеси имеет вид линейной функции пространственного аргумента: $T(x,t)=T_1(t)+xT_2(t)$. С учетом (18) следует:

$$\frac{dT_1}{dt}+x\frac{dT_2}{dt}+uT_2=0, \tag{18*}$$

Из чего следует, что $\frac{dT_2}{dt}=0$, значит, T_2 = const, далее последовательно определяются искомые функции:

$$\rho\frac{du}{dt}+\rho RT_2=0, \tag{21}$$

$$\frac{du}{dt}=-RT_2, \tag{21*}$$

$$u=-RT_2t+u_0, \tag{21**}$$

$$\frac{dT_1}{dt}=-uT_2, \tag{22}$$

(22*)

$$T=\frac{RT_2^2t^2}{2}+u_0T_2t+T_0+xT_2, \tag{23}$$

Из граничных условий (20) получаем соотношения для искомых неизвестных величин:

$$T_0=T_{10},\left(T_{20}-T_0\right)/L=T_2, \tag{24}$$

Уравнения (21)–(23) описывают распределение поля скорости и температуру в течении несжимаемой газовой смеси. Функции (21**), (23), описывающие течение несжимаемой смеси двух сред, не ограничены по времени, что, вообще говоря, неверно. Но так в практических расчетах динамика среды изучается на конечных временных интервалах, то можно предположить, что такая модель может быть применена в ограниченном временном промежутке.

Рассмотрим результаты, полученные для одномерного несжимаемого течения в предположении, что модель учитывает силовое воздействие на дисперсную компоненту, но не учитывает взаимообратных эффектов, то есть реализует методологию моделирования (5)–(8).

Распределение скорости дисперсной компоненты можно отыскать из уравнения:

$$\frac{du_1}{dt}=\frac{a}{\rho_1}\left(u-u_1\right)=\frac{a}{\rho_1}\left(-RT_2t+u_0-u_1\right), \tag{25}$$

Коэффициент *a* определяется выражением [41]:

$$a=6\pi d\alpha\mu\rho,$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (25) можно интегрировать методом Лагранжа [42, 43], для этого нужно записать однородное дифференциальное уравнение (25*):

$$\frac{du_1}{dt}=-\frac{a}{\rho_1}u_1. \tag{25*}$$

Из уравнения (25*) выражение (25**)

$$u_1(t)=C(t)e^{-\frac{a}{\rho_1}t}. \tag{25**}$$

Подставляя выражение (25**) в выражение (25), получаем выражение для вспомогательной функции $C(t)$:

$$\frac{dC}{dt}=\frac{-aRT_2}{\rho_1}te^{\frac{a}{\rho_1}t}+u_0e^{\frac{a}{\rho_1}t}. \tag{26}$$

Для вычисления функции $C(t)$ необходимо вычислить интеграл:

$$C(t)=\int\left(\frac{-aRT_2}{\rho_1}te^{\frac{a}{\rho_1}t}+u_0e^{\frac{a}{\rho_1}t}\right)dt=\int\left(\frac{-aRT_2}{\rho_1}te^{\frac{a}{\rho_1}t}\right)dt+\frac{\rho_1u_0e^{\frac{a}{\rho_1}t}}{a}. \qquad (26^*)$$

Часть интеграла (26*) $\int\frac{-aRT_2}{\rho_1}te^{\frac{a}{\rho_1}t}dt$ является не табличным интегралом, для вычисления которого необходимо интегрирование по частям [44]:

$$\int te^{\frac{a}{\rho_1}t}dt=\frac{t\rho_1e^{\frac{a}{\rho_1}t}}{a}-\frac{\rho_1}{a}\int e^{\frac{a}{\rho_1}t}dt=\frac{t\rho_1e^{\frac{a}{\rho_1}t}}{a}-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2e^{\frac{a}{\rho_1}t}+C_1, \qquad (27)$$

Из выражения (27) следует формула для скорости дисперсной компоненты смеси:

$$u_1(t)=C_1e^{-\frac{a}{\rho_1}t}+\frac{u_0\rho_1}{a}+\frac{\rho_1RT_2}{a}-tRT_2, \qquad (28)$$

Для вычисления неизвестной C_1 необходимо использовать начальное значение скорости дисперсной компоненты:

$$u_1(0)=C_1+\frac{u_0\rho_1}{a}+\frac{\rho_1RT_2}{a}=u_{10}, \qquad (28^*)$$

$$C_1=u_{10}-\frac{u_0\rho_1}{a}-\frac{\rho_1RT_2}{a}. \qquad (28^{**})$$

Рассмотрим континуальную математическую модель динамики двухкомпонентной среды, состоящей из несущей и дисперсной компонент. Такая модель учитывает обмен импульсом и теплом между компонентами смеси, а эффекты межкомпонентного взаимодействия могут оказывать существенное влияние на течение неоднородной среды [45]. В частном случае возможно предположить [46], что течение несущей среды происходит за счет гравитационного осаждения частиц дисперсной фазы по причине межфазного обмена импульсом. При большом размере частиц, большой теплоемкости материала дисперсной фазы можно также сделать предположение, что температура несущей среды не изменяется: u_2, T_2 = const. В работе [47] приведена формула для скорости гравитационного осаждения частиц в суспензии, обозначения аналогичные формуле (29):

$$u_2=\frac{gd^2(\rho_1-\rho_{20})}{18\mu}. \qquad (29)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих движение несущей среды за счет гравитационного осаждения очень крупных частиц с большой теплоемкостью, в течение относительно небольшого периода времени:

$$\rho_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=0, \qquad (30)$$

$$\rho_1\frac{\partial u_1}{\partial t}+(1-\alpha)R\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial x}=-a_1(u_1-u_2), \qquad (31)$$

$$\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial T_1}{\partial x}-\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x^2}=-a_2(T_1-T_2), \qquad (32)$$

Из уравнения (31) следует, что, как и для диффузионной модели, поле скорости несущей среды имеет вид линейной функцией пространственной переменной: $T_1(x,t)=T_{11}(t)+xT_{12}(t)$.

В таком случае из уравнения (32) следует уравнение (32*):

$$\frac{dT_{11}}{dt}+x\frac{dT_{12}}{dt}+u_1T_{12}=-a_2(T_{11}-T_2)-a_2xT_{12}, \tag{32*}$$

Из уравнения (33*) следует дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, определяющее функцию $T_{12}(t)$:

$$\frac{dT_{12}}{\partial t}=-a_2T_{12} \tag{33}$$

$$T_{12}(t)=C_1e^{-a_2t} \tag{33*}$$

С помощью уравнений (33*) и (31) возможно определить функцию скорости несущей среды:

$$\rho_1\frac{du_1}{dt}+(1-\alpha)\rho_1RC_1e^{-a_2t}=-a_1(u_1-u_2) \tag{34}$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (34) интегрируется методом Лагранжа:

$$\rho_1\frac{du_1}{dt}=-a_1u_1 \quad u_1(t)=C(t)e^{\frac{-a_1}{\rho_1}t} \quad \frac{dC}{dt}=(\alpha-1)RC_1e^{t\left(-a_2+\frac{a_1}{\rho_1}\right)}+\frac{a_1u_2}{\rho_1}e^{\frac{a_1}{\rho_1}t},$$

$$C(t)=\frac{(\alpha-1)RC_1e^{\left(-a_2+\frac{a_1}{\rho_1}\right)t}}{-a_2+\frac{a_1}{\rho_1}}+\frac{a_1u_2}{\rho_1}e^{\frac{a_1}{\rho_1}t}+C_2e^{\frac{-a_1}{\rho_1}t},$$

$$u_1(t)=\frac{(\alpha-1)RC_1e^{-a_2t}}{-a_2+\frac{a_1}{\rho_1}}+u_2+C_2e^{\frac{-a_1}{\rho_1}t}. \tag{35}$$

Выражение (35) описывает распределение скорости несущей среды, при этом в выражениях (33), (35) присутствуют неизвестные величины C_1, C_2.

Из уравнений (35), (33) и уравнения (32) можно определить искомую функцию T^{11}:

$$\frac{dT_{11}}{dt}+u_1T_{12}=-a_2(T_{11}-T_2), \tag{36}$$

$$\frac{dT_{11}}{dt}=-a_2T_{11}+a_2T_2-u_1T_{12}. \tag{36*}$$

Уравнение (36*) с учетом выражений (35) и (33) имеет вид:

$$\frac{dT_{11}}{dt}=-a_2T_{11}+a_2T_2-\frac{(\alpha-1)RC_1e^{-2a_2t}}{-a_2+\frac{a_1}{\rho_1}}+u_2e^{-a_2t}+C_2e^{\left(\frac{-a_1}{\rho_1}-a_2\right)t} \tag{36**}$$

К уравнению (36**) также применяется алгоритм метода Лагранжа решения неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dT_{11}}{dt} = -a_2 T_{11},\ T_{11}(t) = C(t)e^{-a_2 t},\ \frac{dC}{dt} = a_2 T_2 e^{a_2 t} - \frac{(\alpha - 1)RC_1 e^{-a_2 t}}{-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}} + u_2 + C_2 e^{\left(\frac{-a_1}{\rho_1}\right)t},$$

$$C(t) = T_2 e^{a_2 t} + \frac{(\alpha - 1)RC_1 e^{-a_2 t}}{\left(-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}\right)a_2} + u_2 t + \left(\frac{-\rho_1}{a_1}\right)C_2 e^{\left(\frac{-a_1}{\rho_1}\right)t} + C_3,$$

$$\frac{dT_{11}}{dt} = T_2 + \frac{(\alpha - 1)RC_1 e^{-2a_2 t}}{\left(-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}\right)a_2} + u_2 t e^{-a_2 t} + \left(\frac{-\rho_1}{a_1}\right)C_2 e^{\left(\frac{-a_1}{\rho_1} - a_2\right)t} + C_3 e^{-a_2 t}. \qquad (37)$$

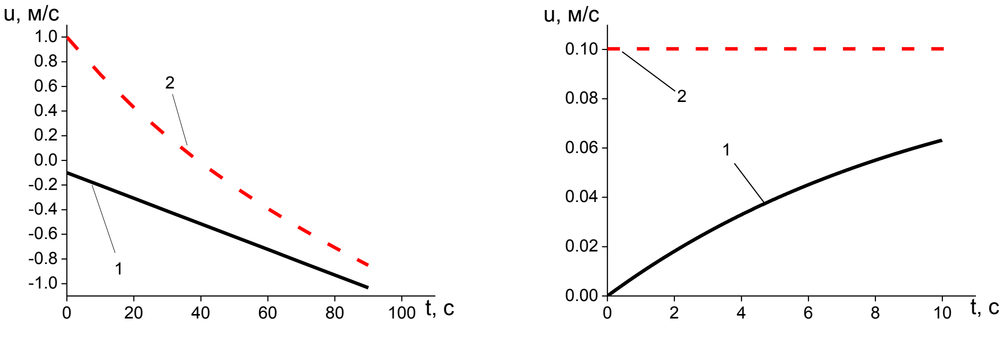
Для определения неизвестных величин C^1, C^2, C^3 решается система линейных алгебраических уравнений (38)–(40), получаемых из начальных и граничных значений для температуры и скорости несущей среды:

$$u_1(0) = \frac{(\alpha - 1)RC_1}{-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}} + C_2 + u_2 = u_{10}. \qquad (38)$$

$$T(0,0) = T_{11}(0) + 0 \cdot T_{12}(0) = T_2 + \frac{(\alpha - 1)RC_1}{\left(-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}\right)a_2} + \left(\frac{-\rho_1}{a_1}\right)C_2 + C_3 = T_{10}. \qquad (39)$$

$$T(0,L) = T_{11}(0) + L \cdot T_{12}(0) = T_2 + C_1\left(\frac{(\alpha - 1)R}{\left(-a_2 + \frac{a_1}{\rho_1}\right)a_2} + L\right) + \left(\frac{-\rho_1}{a_1}\right)C_2 + C_3 = T_{1L}. \qquad (40)$$

На рис. 1а и 1б продемонстрированы результаты расчетов скоростей течения компонент смеси.



а б

Рис. 1а – расчет скоростей компонент смеси по модели, учитывающей одностороннее влияние; 1б – расчет скоростей по континуальной модели, предполагающей неизменность физических параметров дисперсной компоненты. Кривые 1 и 2 относятся к параметрам несущей среды и дисперсной компоненты

Преподавание курса «Гидродинамика» для специалистов по прикладной математике осуществляется в виде лекционных и практических занятий. В предлагаемом разделе курса «Гидродинамика» предполагается обучение учащихся в результате как лекционных занятий, так и практических занятий и самостоятельной работы, в которой учащимся будет предложено построить математические модели смесей с компонентами, существующими в природе. В лекционных занятиях происходит ознакомление с общей теорией динамики неоднородных сред. В ходе практических занятий происходит формирование навыков разработки математических моделей – умений вывода систем уравнений математических моделей, навыков решения полученных уравнений аналитическими методами. Также предполагается развить у учащихся умения реализовывать математические модели в виде программных кодов, умение строить графики и анализировать полученные графические материалы. В качестве средств обучения предполагаются лекционные занятия, а также практические занятия, в ходе которых происходит применение полученных знаний общей теории и возникает понимание применения методов математического моделирования, основанных на методах математической физики и обыкновенных дифференциальных уравнений, также предполагается самостоятельная работа учащихся по построению компьютерных реализаций математических моделей.

Заключение / Conclusion

В работе разработана структура раздела курса «Гидродинамика», касающегося динамики многокомпонентных и многофазных сред. В курсе даются общие теоретические основы математического моделирования течений многофазных сред. Описаны основные методологии разработки математических моделей различных неоднородных сред. Кроме этого на примере нескольких течений кратко излагаются методы упрощения математических моделей, применяемых в гидродинамике. Для полученных упрощенных моделей записывалась краевая задача Коши. С помощью методов математической физики проводится анализ полученных упрощенных математических моделей, также описано применение методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений для решения уравнений динамики неоднородных сред. Описанные в работе примеры моделирования течений неоднородных сред помогут учащимся специальности «Прикладная математика» получить навыки математического описания течений неоднородных сред, практические навыки по применению методов математической физики и обыкновенных дифференциальных уравнений к получению решений систем уравнений математических моделей.

Таким образом, в статье описана часть курса «Гидродинамика» для специальности «Прикладная математика», в которой кратко излагаются основы механики многокомпонентных и многофазных сред, позволяющие понять теоретические основы данного раздела современной механики жидкости и газа, а также дающие понимание методов разработки математических моделей.

Ссылки на источники / References

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. – М.: Мифрил, 1996. – 416 с.
2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики (5-е изд.). – М.: Наука, 1977. – 735 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 784 с.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
6. Брушлинский К. В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. – М.: Интеллект, 2017. – 272 с.
7. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы: учеб. пособие. – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 165 с.
8. Feldmeier A. Theoretical Fluid Dynamics (Theoretical and Mathematical Physics). – Springer, 2020. – 585 p.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
10. Ходаков Г. С., Юдкин Ю. П. Седиментационный анализ высокодисперсных систем. – М.: Химия, 1981. – 192 с.
11. Губайдуллин Д. А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. – 153 с.
12. Тукмаков А. Л., Тонконог В. Г. Численное моделирование вскипающих потоков в каналах переменного сечения: учеб. пособие. – Казань: Печать-Сервис-XXI век, 2012. – 114 с.
13. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – СПб.: Недра, 2003. – 284 с.
14. Samsudin A., Fratiwi N., Amin N. et al. Improving students conceptions on fluid dynamics through peer teaching model with PDEODE (PTM-PDEODE) // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. – 1013. – P. 012040.
15. Zhao F Tian. Teaching and enhancement of critical thinking skills for undergraduate students in a computational fluid dynamics course // International Journal of Mechanical Engineering Education. – 2016. – Vol. 45. – Is. 1. – P. 76–88.
16. Yetilmezsoy K. IMECE-Implementation of mathematical, experimental, and computer-based education: A special application of fluid mechanics for civil and environmental engineering students // Computer Applications in Engineering Education. – 2017. – Vol. 25. – Is. 5. – P. 833–860.
17. Stern C., Echeverría C., Porta D. Teaching Physics through Experimental Projects // Procedia IUTAM. – 2017. – Vol. 20. – P. 189–194.
18. Zendehboudia S., Rezaeia N., Lohib A. Applications of hybrid models in chemical, petroleum, and energy systems:A systematic review // Applied Energy. – 2018. – Vol. 228. – P. 2539–2566.
19. Краснокутский И. Д., Ваганов А. Б. Применение методов вычислительной гидродинамики в курсах машиностроительной гидравлики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – № 7. – С. 11–15.
20. Любимов А. К. От специальности «механика» к направлению «механика и математическое моделирование» // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2012. – № 5 (1). – С. 24–35.
21. Куповых Г. В., Донскова Е. В., Полях Н. Ф. Особенности методики изучения гидромеханики в высшей школе // Известия волгоградского государственного педагогического университета. – 2020. – № 5. – С. 54–58.
22. Алмаев Р. А. Каким представляется образовательное пространство по техническим направлениям подготовки // Вестник Научно-методического совета по природообустройству и водопользованию. – 2018. – № 11. – С. 18–21.
23. Алмаев Р. А. Курс «Моделирование гидродинамических процессов» в подготовке магистров // Вестник учебно-методического объединения по образованию в области природообустройства и водопользования. – 2013. – № 5. – С. 103–107.
24. Кайгородова А. С., Толстова Н. В., Семенова И. Н. Формирование умения сравнивать при изучении различных способов решения систем уравнений // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2019. – № 4. – С. 242–246.
25. Жаров В. К., Тургунбаев Р. М. Проблема преемственности в методике преподавания математики и ее интерпретации в современных образовательных школах // Вестник РГГУ. Серия: Информатика. Информационная безопасность. Математика. – 2019. – № 2. – С. 52–74.
26. Костин С. В. Об определении понятия «первообразная» в курсе математического анализа // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2018. – № 20. – С. 130–146.
27. Гилев В. Г. Метод обобщения при исследовании функций как фактор исторического развития математики и методики ее преподавания // Заметки ученого. – 2021. – № 5-1. – С. 130–140.
28. Степанов М. Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики // Моделирование и анализ данных. – 2017. – Т. 1. – № 1. – С. 54–94.
29. Бодряков В. Ю., Быков А. А., Ударцева Д. А. Квадратичная функция как мотивирующий инструмент решения экстремальных задач // Педагогическое образование в России. – 2018. – № 8. – С. 55–63.
30. Мечик С. В. Профессиональная ориентация будущих инженеров нефтеперерабатывающей промышленности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. – 2019. – № 8. – С. 116–123.
31. Астахова И. С. Применение традиционных и интерактивных обучающих средств при подготовке бакалавров по техническим направлениям // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. – 2019. – № 15. – С. 62–67.

32. Тукмаков Д. А. Точное решение для системы уравнений нестационарной динамики одномерного потока несжимаемой теплопроводной среды с дисперсной компонентой // Амурский научный вестник. – 2019. – № 1. – С. 63–69.
33. Тукмакова Н. А., Тукмаков Д. А. Методика приведения к канонической форме уравнений в частных производных применительно к описанию нестационарного процесса в двухфазной смеси // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2020. – № 2. – С. 245–247.
34. Федотов П. С., Статкус М. А., Цизин Г. И. Исследование массопереноса элементов при их динамическом выщелачивании из почв и донных отложений // Журнал аналитической химии. – 2007. – № 8. – С. 802–806.
35. Тукмаков Д. А., Тукмакова Н. А. Конечно-разностные алгоритмы в приложении к моделированию динамики двухкомпонентной электрически заряженной смеси // Физическое образование в вузах. – 2020. – Т. 26. – № 3. – С. 33–45.
36. Нигматулин Р. И. Указ. соч.
37. Тукмаков А. Л. Численное моделирование дрейфа твердых частиц при резонансных колебаниях газа в открытом канале // Акустический журнал. – 2009. – № 2. – С. 247–255.
38. Нигматулин Р. И. Указ. соч.
39. Губайдуллин Д. А. Указ. соч.
40. Кутушев А. Г. Указ. соч.
41. Губайдуллин Д. А. Указ. соч.
42. Пискунов Н. С. Указ. соч.
43. Егоров А. И. Указ. соч.
44. Нигматулин Р. И. Указ. соч.
45. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния объемного содержания дисперсной компоненты газовзвеси на интенсивность межфазного скоростного скольжения при разлете газовзвеси в вакуум // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52. – № 1. – С. 41–50.
46. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсной фазы на генерацию течения газа, формирующегося при гравитационном осаждении аэрозоля // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13. – № 3. – С. 279–287.
47. Ходаков Г. С., Юдкин Ю. П. Указ. соч.

1. Piskunov, N. S. (1996). *Differencial'noe i integral'noe ischisleniya dlya vtuzov.* [Differential and integral calculus for technical universities]. *V. 1*, Mifril, Moscow, 416 p. (in Russian).
2. Egorov, A. I. (2005). *Obyknovennye differencial'nye uravneniya s prilozheniyami*, [Ordinary differential equations with applications]. 2-e izd., ispr, FIZMATLIT, Moscow, 384 p. (in Russian).
3. Tihonov, A. N. & Samarskij, A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics] (5-e izd.), Nauka, Moscow, 735 p. (in Russian).
4. Lojcyanskij, L. G. (2003). *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas] , Drofa, Moscow, 784 p. (in Russian).
5. Lavrent'ev, M. A. & Shabat, B. V. (1973). *Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli* [Problems of hydrodynamics and their mathematical models] , Nauka, Moscow, 416 p. (in Russian).
6. Brushlinskij. K. V. (2017). *Matematicheskie osnovy vychislitel'noj mekhaniki zhidkosti, gaza i plazmy* [Mathematical foundations of computational mechanics of liquid, gas and plasma] , Intellekt, Moscow, 272 p. (in Russian).
7. Mazo, A. B. (2018). *Vychislitel'naya gidrodinamika.* [Computational fluid dynamics]. *Chast' 1. Matematicheskie modeli, setki i setochnye skhemy: ucheb. posobie,* Kazan. un-t, Kazan', 165 p. (in Russian).
8. Feldmeier, A. (2020). *Theoretical Fluid Dynamics (Theoretical and Mathematical Physics),* Springer, 585 p. (in English).
9. Nigmatulin, R. I. (1978). *Osnovy mekhaniki geterogennyh sred* [Foundations of the mechanics of heterogeneous media.] , Nauka, Moscow, 336 p. (in Russian).
10. Hodakov, G. S. & Yudkin, Yu. P. (1981). *Sedimentacionnyj analiz vysokodispersnyh sistem* [Sedimentation analysis of highly dispersed systems] , Himiya, Moscow, 192 p. (in Russian).
11. Gubajdullin, D. A. (1998). *Dinamika dvuhfaznyh parogazokapel'nyh sred* [Dynamics of two-phase vapor-gas-droplet media] , Izd-vo Kazanskogo matemati-cheskogo obshchestva, Kazan', 153 p. (in Russian).
12. Tukmakov, A. L. & Tonkonog, V. G. (2012). *Chislennoe modelirovanie vskipayushchih potokov v kanalah peremennogo secheniya* [Numerical modeling of boiling flows in channels of variable cross-section]*: ucheb. posobie*, Pechat'-Servis-XXI vek, Kazan', 114 p. (in Russian).
13. Kutushev, A. G. (2003). *Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media] , Nedra, St. Petersburg, 284 p. (in Russian).

14. Samsudin, A., Fratiwi, N., Amin, N. et al. (2018). "Improving students conceptions on fluid dynamics through peer teaching model with PDEODE (PTM-PDEODE)", *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 1013, p. 012040 (in English).
15. Zhao F Tian (2016). "Teaching and enhancement of critical thinking skills for undergraduate students in a computational fluid dynamics course", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, vol. 45, is. 1, pp. 76–88 (in English).
16. Yetilmezsoy, K. (2017). "IMECE-Implementation of mathematical, experimental, and computer-based education: A special application of fluid mechanics for civil and environmental engineering students", *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 25, is. 5, pp. 833–860 (in English).
17. Stern, C., Echeverría, C. & Porta, D. (2017). "Teaching Physics through Experimental Projects", *Procedia IUTAM*, vol. 20, pp. 189–194 (in English).
18. Zendehboudia, S., Rezaeia, N. & Lohib, A. (2018). "Applications of hybrid models in chemical, petroleum, and energy systems:A systematic review", *Applied Energy*, vol. 228, pp. 2539–2566 (in English).
19. Krasnokutskij, I. D. & Vaganov, A. B. (2015). "Primenenie metodov vychislitel'noj gidrodinamiki v kursah mashino-stroitel'noj gidravliki" [Application of computational fluid dynamics methods in mechanical engineering hydraulics courses] , *Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal "Koncept",* № 7, pp. 11–15 (in Russian).
20. Lyubimov, A. K. (2012). "Ot special'nosti "mekhanika" k napravleniyu "mekhanika i matematicheskoe modelirovanie" [From the specialty "mechanics" to the direction "mechanics and mathematical modeling"] , *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo*, № 5 (1), pp. 24–35 (in Russian).
21. Kupovyh, G. V., Donskova, E. V. & Polyah, N. F. (2020). "Osobennosti metodiki izucheniya gidromekhaniki v vysshej shkole" [Some features of the methodology of studying hydromechanics in higher school], *Izvestiya volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, № 5, pp. 54–58 (in Russian).
22. Almaev, R. A. (2018). "Kakim predstavlyaetsya obrazovatel'noe prostranstvo po tekhnicheskim napravleniyam podgotovki" [What is the educational space in the technical areas of training] , *Vestnik Nauchno-metodicheskogo soveta po prirodoobustrojstvu i vodopol'zovaniyu*, № 11, pp. 18–21 (in Russian).
23. Almaev, R. A. (2013). "Kurs "Modelirovanie gidrodinamicheskih processov" v podgotovke magistrov" ["Modeling of hydrodynamic processes" in the preparation of masters] , *Vestnik uchebno-metodicheskogo ob"edineniya po obrazovaniyu v oblasti prirodoobustrojstva i vodopol'zovaniya,* № 5, pp. 103–107 (in Russian).
24. Kajgorodova, A. S., Tolstova, N. V. & Semenova, I. N. (2019). "Formirovanie umeniya sravnivat' pri izuchenii razlichnyh sposobov resheniya sistem uravnenij" [Formation of the ability to compare when studying various ways to solve systems of equations], *Aktual'nye voprosy prepodavaniya matematiki, informatiki i informacionnyh tekhnologij*, № 4, pp. 242–246 (in Russian).
25. Zharov, V. K. & Turgunbaev, R. M. (2019). "Problema preemstvennosti v metodike prepodavaniya matematiki i ee interpretacii v sovremennyh obrazovatel'nyh shkolah" [The problem of continuity in the methods of teaching mathematics and its interpretation in modern schools] , *Vestnik RGGU. Seriya: Informatika. Informacionnaya bezopasnost'. Matematika*, № 2, pp. 52–74 (in Russian).
26. Kostin, S. V. (2018). "Ob opredelenii ponyatiya "pervoobraznaya" v kurse matematicheskogo analiza" [On the definition of the concept "antiderivative" in the course of mathematical analysis] , *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, № 20, pp. 130–146 (in Russian).
27. Gilev, V. G. (2021). "Metod obobshcheniya pri issledovanii funkcij kak faktor istoricheskogo razvitiya matematiki i metodiki ee prepodavaniya" [The method of generalization in the study of functions as a factor in the historical development of mathematics and methods of teaching it] , *Zametki uchenogo*, № 5-1, pp. 130–140 (in Russian).
28. Stepanov, M. E. (2017). "Nekotorye voprosy metodiki prepodavaniya vysshej matematiki" [Some issues of the methods of teaching higher mathematics] , *Modelirovanie i analiz dannyh*, t. 1, № 1, pp. 54–94 (in Russian).
29. Bodryakov, V. Yu., Bykov, A. A. & Udarceva, D. A. (2018). "Kvadratichnaya funkciya kak motiviruyushchij instrument resheniya ekstremal'nyh zadach" [Quadratic function as a motivating tool for solving extreme problems], *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii*, № 8, pp. 55–63 (in Russian).
30. Mechik, S. V. (2019). "Professional'naya orientaciya budushchih inzhenerov neftepererabatyvayushchej promyshlennosti v processe obucheniya matematike" [Professional orientation of future engineers of the oil refining industry in the process of teaching mathematics] , *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii,* № 8, pp. 116–123 (in Russian).
31. Astahova, I. S. (2019). "Primenenie tradicionnyh i interaktivnyh obuchayushchih sredstv pri podgotovke bakalavrov po tekhnicheskim napravleniyam" [The use of traditional and interactive teaching tools in the preparation of bachelors in technical areas] , *Vestnik Pskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki*, № 15, pp. 62–67 (in Russian).
32. Tukmakov, D. A. (2019). "Tochnoe reshenie dlya sistemy uravnenij nestacionarnoj dinamiki odnomernogo potoka neszhimaemoj teploprovodnoj sredy s dispersnoj komponentoj" [Exact solution for the system of equations of

nonstationary dynamics of a one-dimensional flow of an incompressible heat-conducting medium with a dispersed component], *Amurskij nauchnyj vestnik*, № 1, pp. 63–69 (in Russian).
33. Tukmakova, N. A. & Tukmakov, D. A. (2020). "Metodika privedeniya k kanonicheskoj forme uravnenij v chastnyh proizvodnyh primenitel'no k opisaniyu nestacionarnogo processa v dvuhfaznoj smesi" [The method of reduction to the canonical form of partial differential equations as applied to the description of a non-stationary process in a two-phase mixture] , *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta,* № 2, pp. 245–247 (in Russian).
34. Fedotov, P. S., Statkus, M. A. & Cizin, G. I. (2007). "Issledovanie massoperenosa elementov pri ih dinamicheskom vyshchelachivanii iz pochv i donnyh otlozhenij" [Investigation of the mass transfer of elements during their dynamic leaching from soils and bottom sediments] , *Zhurnal analiticheskoj himii*, № 8, pp. 802–806 (in Russian).
35. Tukmakov, D. A. & Tukmakova, N. A. (2020). "Konechno-raznostnye algoritmy v prilozhenii k modelirovaniyu dinamiki dvuhkomponentnoj elektricheski zaryazhennoj smesi" [Finite-difference algorithms as applied to modeling the dynamics of a two-component electrically charged mixture] , *Fizicheskoe obrazovanie v vuzah*, t. 26, № 3, pp. 33–45 (in Russian).
36. Nigmatulin, R. I. (1978). Op. cit.
37. Tukmakov, A. L. (2009). "Chislennoe modelirovanie drejfa tverdyh chastic pri rezonansnyh kolebaniyah gaza v otkrytom kanale" [Numerical simulation of solid particle drift under resonant gas vibrations in an open channel] , *Akusticheskij zhurnal*, № 2, pp. 247–255 (in Russian).
38. Nigmatulin, R. I. (1978). Op. cit.
39. Gubajdullin, D. A. (1998). Op. cit.
40. Kutushev, A. G. (2003). Op. cit.
41. Gubajdullin, D. A. (1998). Op. cit.
42. Piskunov, N. S. (1996). Op. cit.
43. Egorov, A. I. (2005). Op. cit.
44. Nigmatulin, R. I. (1978). Op. cit.
45. Tukmakov, D. A. (2020). "Chislennoe issledovanie vliyaniya ob"emnogo soderzhaniya dispersnoj komponenty gazovzvesi na intensivnost' mezhfaznogo skorostnogo skol'zheniya pri razlete gazovzvesi v vakuum" [Numerical study of the influence of the volume content of the dispersed component of a gas suspension on the intensity of interphase high-speed sliding during the expansion of a gas suspension into vacuum] , *Prikladnaya matematika & Fizika*, t. 52, № 1, pp. 41–50 (in Russian).
46. Tukmakov, D. A. (2020). "Chislennoe issledovanie vliyaniya parametrov dispersnoj fazy na generaciyu techeniya gaza, formiruyushchegosya pri gravitacionnom osazhdenii aerozolya" [Numerical study of the influence of the dispersed phase parameters on the generation of a gas flow formed during the gravitational deposition of aerosol], *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*, t. 13, № 3, pp. 279–287 (in Russian).
47. Hodakov, G. S. & Yudkin, Yu. P. (1981). Op. cit.