КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51

Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Жукова Галина Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и моделирования систем ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет печати имени Ивана Федорова», г. Москва
gnzh@mail.ru

Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории

Аннотация. *Статья посвящена вопросам преподавания высшей математики студентам экономических специальностей. Автор предлагает знакомить учащихся с новыми математическими понятиями на примере экономической модели. Предлагаемая методика позволяет студентам не только овладеть новым математическим аппаратом, но и увидеть практическую пользу от изучения абстрактных математических понятий. Кроме того, обучаемые приобретают опыт построения, анализа и использования математических моделей экономических явлений.*
Ключевые слова: *преподавание высшей математики, математика для экономистов, математическая модель, экономическая модель.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Введение

Залог успешного освоения любой дисциплины – интерес обучаемого к предмету изучения. Хорошо, если этот интерес уже есть на момент начала обучения, только в жизни такое встречается нечасто. Обычно студентам интересен довольно узкий круг профильных предметов, а преподавателям приходится обучать их и тем дисциплинам, которые в этот набор не попали.

Автору пришлось излагать высшую математику студентам-экономистам, пришедшим в вуз из школы с довольно низкой математической подготовкой и отвращением к математике. Хотелось же преподавать так, чтобы первокурсники усвоили положенное по программе, получая удовольствие. Для достижения поставленной цели было решено перестроить порядок преподавания математики, а именно начинать с постановки интересной экономической задачи, строить для нее математическую модель, требующую для расчета новых теоретических сведений. После краткого изложения теории производился расчет модели, обсуждались полученные результаты, давалась их экономическая интерпретация.

Так, направление преподавания было изменено с традиционного (сначала теория, потом примеры) на противоположное – от практики к математическому аппарату. Это решение было принято под впечатлением от прекрасной книги [1].

Знакомство с дифференциальными уравнениями на экономических моделях

При подборе экономической модели, на примере которой студенты будут знакомиться с дифференциальными уравнениями, главными критериями были простота соответствующей математической модели и легкость ее построения. Такой выбор диктовался дефицитом лекционного времени и желанием успеть к концу лекции получить и обсудить результат. Конечно, упрощенная модель была далека от реальности, но ее можно было использовать как грубое приближение, это тоже особо обсуждалось на лекции. Под легкостью построения модели имеется в виду, насколько быстро можно по описанию экономической системы ввести переменные, параметры и функции и установить связи между ними.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Традиционно изучение дифференциальных уравнений начинается с наиболее простого типа – обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с разделяющимися переменными, поэтому первая экономическая модель должна была приводить именно к ним. В связи с этим для знакомства с ОДУ была выбрана модель естественного роста выпуска продукции (см. [2]).

Пример. Предприятие выпускает продукцию, причем скорость выпуска продукции увеличивается со временем за счет расширения производства. Предположим, что скорость выпуска продукции пропорциональна вложенным в расширение производства средствам, которые, в свою очередь, составляют фиксированную часть дохода от реализации ранее произведенной продукции. Исследуем, как будет зависеть от времени объем выпущенной продукции при условии, что рынок не насыщен, т. е. вся продукция будет продана.

Для определенности будем считать, что в расширение производства предприятие вкладывает 10% дохода, а также что вложение единицы денежных средств приводит к росту выпуска продукции на 2%.

Теперь построим математическую модель задачи. Пусть к моменту времени t реализовано $y(t)$ единиц продукции, причем каждая единица продукции приносит фиксированную прибыль p, не зависящую ни от времени, ни от количества произведенной продукции. Тогда суммарный доход составляет $py(t)$, причем 10% этой суммы (т. е. $I(t) = 0{,}1py(t)$) будет использовано для расширения производства.

Производительность предприятия (объем выпущенной продукции в единицу времени) приближенно равна производной объема произведенной на момент времени t продукции $y'(t)$. Поскольку предприятие расширяется, эта производная положительна, она выражает мгновенный прирост объема выпуска продукции, который, в свою очередь, определяется величиной инвестиций, поэтому $y'(t) = 0{,}02I = 0{,}02 = 0{,}002py(t)$.

Таким образом, получаем наше первое дифференциальное уравнение:

$$y'(t)=0{,}002py(t). \qquad (1)$$

В этом уравнении коэффициент 0,002 определяется нормой инвестиций (у нас 10% от прибыли) и соотношением между величиной инвестиций и ростом выпуска продукции, параметр p – прибыль в расчете на единицу выпущенной продукции.

Прежде чем решать это уравнение, важно обсудить его отличия от уравнений, встречавшихся в курсе математики раньше:

- уравнение содержит производную некоторой функции;
- неизвестным, которое требуется найти, является функция;
- решений или бесконечное количество, или их нет совсем.

Теперь можно дать строгое определение дифференциального уравнения, порядка ОДУ, общего и частного решения дифференциального уравнения и общего и частного интеграла и т. п. (см., например, [3]).

Для решения нашего уравнения (1) запишем его в дифференциальной форме

$$\frac{dy}{y} = 0{,}002pdt$$

и проинтегрируем обе части

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}002pdt,$$

Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

получим

$$\ln y = 0{,}002pt + C,$$

что дает

$$y = e^{0{,}002\,pt + C} = y_0 e^{0{,}002\,pt}. \qquad (2)$$

Вот и найдено решение дифференциального уравнения, неизвестная функция $y(t)$ получена в явном виде. Здесь следует обратить внимание слушателей на константу y_0. Если требуется вычислить объем продукции, произведенной за год после начала роста выпуска, то без знания y_0 мы ничего не сможем рассчитать. Подстановка (2) в уравнение (1) не поможет, при любом значении y_0 (2) обращает (1) в тождество.

Для выявления экономического смысла y_0 исследуем поведение нашего решения (2) в момент времени $t = 0$, т. е. в момент начала роста выпуска продукции. Имеем $y(0) = y_0$, т. е. наша константа равна объему продукции, выпущенной до начала ускорения производства, имеется в виду тот объем продукции, что 10% прибыли от его реализации вкладывается в расширение производства в момент $t = 0$.

Рассмотрим рост выпуска продукции в начале производства:

$$y' = 0{,}002py_0 e^{0{,}002\,pt},$$

$$y'(0) = 0{,}002py_0.$$

Рост выпуска продукции связан с размером инвестиций соотношением $y'(t) = 0{,}02I(t)$, так что при начальных вложениях I_0 имеем:

$$0{,}002py_0 = 0{,}02I_0, \quad y_0 = \frac{10I_0}{p}.$$

Окончательно получим

$$y = \frac{10I_0}{p} e^{0{,}002\,pt}, \quad t \ge 0.$$

Кажется, математическая часть темы подошла к концу, ведь дифференциальное уравнение составлено и решено. Однако кажется целесообразным обратить внимание на то, что экспоненту, стоящую в правой части, первокурсники представляют не так хорошо, как, например, параболу. Причина видится в том, что показательная функция обычно изучается в 11-м классе, когда основное внимание часто уделяется подготовке к ЕГЭ, а не освоению программы. В связи с этим уместно представить полученное решение графически при разных значениях параметров y_0, I_0 и p.

Теперь можно подвести итоги исследования экономической модели. Математическая модель роста выпуска продукции сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Такие ОДУ можно привести к виду, где в левой части присутствует только неизвестная функция и ее дифференциал, а в правой – только независимая переменная и ее дифференциал. Такое разделение переменных дает возможность проинтегрировать обе части уравнения, что превращает ОДУ в уравнение, не содержащее производной.

Линейная алгебра на примерах из полиграфии

Для введения в векторную алгебру можно воспользоваться задачей расчета суммарного выпуска продукции. В задаче использованы данные ОАО «Змеиногорская типография».

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Задача. На основании годового отчета по результатам работы за 2010 г. ОАО «Змеиногорская типография» рассчитать суммарный выпуск продукции за период с 2009 по 2010 г. и изменение выпуска продукции.

Таблица 1

Отчет ОАО «Змеиногорская типография»

Наименование, ед. изм.	***2009 г.***	***2010 г.***
Газеты, тыс. экз.	1413	1940
Бланки, тыс. л/отт.	140	527
Этикетка, тыс. л/отт.	53	48

Обозначим $a_{2009} = \begin{pmatrix} 1413 \\ 140 \\ 53 \end{pmatrix}$, $a_{2010} = \begin{pmatrix} 1940 \\ 257 \\ 48 \end{pmatrix}$ векторы выпуска продукции в 2009 и 2010 гг., тогда суммарный выпуск представляет собой их сумму:

$$a_{2009-2010} = a_{2009} + a_{2010} = \begin{pmatrix} 1413 \\ 140 \\ 53 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1940 \\ 257 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3353 \\ 397 \\ 101 \end{pmatrix},$$

а изменение выпуска рассчитывается как разность векторов:

$$\Delta_{2009-2010} = a_{2010} - a_{2009} = \begin{pmatrix} 1940 \\ 257 \\ 48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1413 \\ 140 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 527 \\ 117 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Если бы на 2010 г. было запланировано увеличение выпуска продукции на 5%, планируемый выпуск можно было бы рассчитать, умножая вектор a_{2009} на 1,05:

$$a_{2010}^{план} = 1{,}05 a_{2009} = 1{,}05 \begin{pmatrix} 1413 \\ 140 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1483{,}65 \\ 147 \\ 55{,}65 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, складывая векторы одинакового размера, мы получаем вектор такого же размера, то же наблюдается и при умножении вектора на число. Таким образом, векторы, рассматриваемые как столбцы фиксированного размера, состоящие из чисел, образуют линейное пространство.

Линейное пространство L – множество элементов, для которых выполняются условия

$$\forall a, b \in L \Rightarrow c = a + b \in L,$$

$$\forall a \in L, \forall p \in R \Rightarrow d = pa \in L,$$

т. е. для любых двух элементов линейного пространства определена их сумма, которая тоже является элементом того же линейного пространства; также для любого вектора из L и любого вещественного числа определено их произведение, оно тоже элемент L.

В любом линейном пространстве должны выполняться

Аксиомы линейного пространства

Для любых векторов *a, b, c* и любых вещественных чисел *p* и *q* выполняются следующие свойства:

1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность);

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

3) $\exists\,\theta \in L : \forall\, a \in L \Rightarrow a + \theta = a$ (существование нулевого вектора);

4) $\forall\, a \in L\ \exists -a \in L : a + (-a) = \theta$ (существование противоположного вектора);

5) $\forall\, a \in L \Rightarrow 1 \cdot a = a$;

6) $\forall\, p, q \in R, \forall\, a \in L \Rightarrow p(qa) = (pq)a$ (ассоциативность по отношению к числам);

7) $\forall\, p \in R, \forall\, a, b \in L \Rightarrow p(a+b) = pa + pb$ (дистрибутивность по отношению к умножению на число);

8) $\forall\, p, q \in R, \forall\, a \in L \Rightarrow (p+q)a = pa + qa$ (дистрибутивность по отношению к умножению на вектор).

Все аксиомы выполняются для векторов выпуска продукции, а также любых других векторов фиксированного размера; если слушателям это не очевидно, можно привести экономическую интерпретацию этих аксиом. Так, последняя аксиома означает, что увеличение выпуска продукции в $p + q$ раз эквивалентно суммарному увеличению в p и в q раз.

Удобство использования аппарата векторов заключается в том, что дает возможность сразу обобщить решение задачи для случая любого количества видов выпускаемых товаров, а также использовать математические системы для реальных практических задач, в которых данные не так удобны для устных расчетов, как в задачах из учебников.

Задача. Найти общий запланированный выпуск печатной продукции в 2013 г.

Таблица 2

Тематический план выпуска социально значимых изданий в 2013 г. РУП «Издательство “Белорусская энциклопедия им. П. Бровки”»

№	Автор, название	Язык	Уч.-и зд. л.	Общий тираж, тыс. экз.
1	Гарады I вёскі Беларусі: Мінская вобласць	Бел.	80	2
2	Регионы Беларуси. Гомельская область	Рус.	60	2
3	Природа Беларуси. Растения и животные. Экология	Рус.	65	3
4	Культура Беларусі. Энцыклапедыя	Бел.	80	2
5	Беларуская мова. Энцыклапедыя	Бел.	100	1,7
6	Тлумачальны слоунік беларускай літаратурнай мовы	Бел.	200	3,5
7	Кніжная спадчына Беларусі. Фотаальбом	Бел.	15	1,1
8	Энциклопедия для шк. и студентов. История Беларуси	Рус.	60	3
9	Политология. Энциклопедия	Рус.	60	1,1
10	Баркулабаускі летапіс. Кн. 1	Бел., рус., англ.	15	2
11	Баркулабаускі летапіс. Кн. 2	Бел., рус., англ.	20	2
12	Беларусь. Энергетика будущего	Рус.	25	2

На этом примере покажем, как можно ввести скалярное произведение векторов, матрицы и действия над ними, а заодно научить проводить вычисления с векторами и матрицами с помощью электронной таблицы Microsoft Excel.

Введем формулу =D4*E4 для расчета количества листов “Гарады і вёскі Беларусі”, распространим формулу на весь столбец, получим планируемое количество листов каждого наименования. Остается вычислить сумму в этом новом столбце, выделив нужные ячейки и нажав кнопку Σ.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Таблица 3

Тематический план выпуска социально значимых изданий в 2013 г. РУП «Издательство “Белорусская энциклопедия им. П. Бровки”»

№	Автор, название	Язык	Уч.-изд. л.	Общий тираж, тыс. экз.	Общий тираж, тыс. л.
1	Гарады I вёскі Беларусі: Мінская вобласць	Бел.	80	2	160
2	Регионы Беларуси. Гомельская область	Рус.	60	2	120
3	Природа Беларуси. Растения и животные. Экология	Рус.	65	3	195
4	Культура Беларусі. Энцыклапедыя	Бел.	80	2	160
5	Беларуская мова. Энцыклапедыя	Бел.	100	1,7	170
6	Тлумачальны слоунік беларускай літаратурнай мовы	Бел.	200	3,5	700
7	Кніжная спадчына Беларусі. Фотаальбом	Бел.	15	1,1	16,5
8	Энциклопедия для шк. и студентов. История Беларуси	Рус.	60	3	180
9	Политология. Энциклопедия	Рус.	60	1,1	66
10	Баркулабаускі летапіс. Кн. 1	Бел., рус., англ.	15	2	30
11	Баркулабаускі летапіс. Кн. 2	Бел., рус., англ.	20	2	40
12	Беларусь. Энергетика будущего	Рус.	25	2	50

Фактически было вычислено скалярное произведение вектора объемов изданий (в уч.-изд. л.) и вектора тиражей.

Применим скалярное произведение векторов к вычислению объема печатной продукции на белорусском языке. Вначале заполним столбец числами 0 (если язык не белорусский) и 1 (если белорусский), а затем вычислим скалярное произведение вектора-столбца «Общий тираж, тыс. л.» и вспомогательного столбца из нулей и единиц.

Заметим, что скалярное произведение векторов мы находили в два этапа, вначале перемножали соответствующие координаты векторов, формируя вспомогательный столбец, а затем находили сумму элементов этого столбца. Чтобы не загромождать таблицу вспомогательными столбцами, познакомимся с другим способом вычисления скалярного произведения. Этот способ основан на умножении матриц, т. е. таблиц, состоящих из чисел, векторы являются частым случаем матриц, которые, в свою очередь, можно представлять себе как столбцы одной длины, записанные друг рядом с другом.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\7\\8\\9\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\4\\-5\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\2 & 7 & 2\\3 & 8 & -3\\4 & 9 & 4\\5 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

В полученной объединением трех векторов матрице пять строк, столько, сколько координат у каждого из векторов.

Матрицы одинакового размера, т. е. с одинаковым количеством строк и столбцов, можно складывать, любую матрицу можно умножать на число, некоторые пары матриц (не все!) можно перемножать. Для того чтобы пару матриц A и B можно было перемножить, число столбцов у A должно быть таким же, как число строк у B. Если нужно найти скалярное произведение двух векторов одинаковой длины, то один из

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14182 УДК 378.147:51
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

них превратим в строку с помощью операции транспонирования (в Excel это функция TRANSPOSE()) и умножим эту строку на второй вектор с помощью функции MMULT(;). В нашей задаче достаточно ввести такую формулу:

=MMULT(TRANSPOSE(F4:F15);G4:G15).

Получим результат 1276,5 (тыс. л.) изданий на белорусском языке.

В качестве задания для самостоятельной работы можно предложить найти объем изданий на русском и английском языках (по отдельности и вместе).

Заключение

Изменение направления изложения предмета от применения к теории позитивно влияет на учебный процесс. Сразу становятся видны и практическая ценность излагаемого материала, и методика применения теории, и результат расчетов можно анализировать. Однако надо учитывать, что много лекционного времени тратится на описание экономического явления и составление модели, так что излагать теорию приходится очень кратко. Требуется тщательно планировать лекцию, чтобы успеть составить и проанализировать выбранную модель, изложить необходимые теоретические сведения, провести расчет и получить результат. Получение и обсуждение результата – самая приятная и интересная аудитории часть исследования, крайне нежелательно переносить ее на следующее занятие (все забудут, с чего все начиналось, и будет скучно) или оставлять для самостоятельной доработки (немногие справятся).

Следует отметить, что готовиться к экзамену или зачету по конспекту такой лекции не очень удобно, так что желательно составить (и предоставить слушателям) конспект теоретической части, может быть, несколько расширенный по сравнению с тем, что удалось успеть изложить в аудитории.

Предлагаемый подход к обучению будущих экономистов математике ориентирован на получение студентами навыков практического применения математического аппарата и на приобретение устойчивых остаточных знаний. Такой стиль преподавания математики позволяет создать приятную рабочую атмосферу в аудитории, пробудить интерес к использованию математических методов решения экономических задач.

Ссылки на источники

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 704 с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; под ред. В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
3. Свешников А. Г., Васильева А. Б., Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Galina Zhukova,
Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor at the chair of applied mathematics and system modeling, Moscow State University of Printing Arts, Moscow
gnzh@mail.ru

ISSN 2304-120X
07
9 772304 120142

Teaching of mathematics to students-economists: from practice to theory

Abstract. The article is devoted to the questions of mathematics teaching to the students that are specialized in economy fields. The author proposes to introduce the new mathematical conceptions by giving an economical model example. The offered method allows students not only to become proficient in mathematics but also to learn the practical benefit of abstract mathematical conceptions studying. The students gain in addition some experience in creation, analysis and application of the economical phenomena models.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
Жукова Г. Н. Преподавание математики студентам экономических специальностей: от практики к теории // Концепт. – 2014. – № 07 (июль). – ART 14182. – 0,4 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14182.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ART 14182 **УДК 378.147:51**
Key words: mathematics teaching, mathematics for economists, mathematical model, economical model.

References

1. Grjehem, R., Knut, D. & Patashnik, O. (1998) *Konkretnaja matematika. Osnovanie informatiki*, Mir, Moscow, 704 p. (in Russian).
2. Fedoseev, V.V. (ed.), Garmash, A.N. & Dajitbegov, D.M. et al. (1999) *Jekonomiko-matematicheskie metody i prikladnye modeli. Ucheb. posobie dlja vuzov*, JuNITI, Moscow, 391 p. (in Russian).
3. Sveshnikov, A.G., Vasil'eva, A.B. & Tihonov, A.N. (2005) *Differencial'nye uravnenija*, FIZMAT-LIT, Moscow (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»