КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Здоровенко Марина Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров
zdorovenki@ngs.ru

Зеленина Наталья Алексеевна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
sezel@mail.ru

Крутихина Марина Викторовна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
krumarvik@mail.ru

Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике

Аннотация. *Статья посвящена анализу типичных ошибок и затруднений школьников при решении неравенств различными способами на итоговой аттестации по математике.*
Ключевые слова: *обучение математике, неравенство, система неравенств, различные способы решения неравенств, Единый государственный экзамен по математике.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Линия уравнений и неравенств является одной из ведущих содержательно-методических линий школьного курса математики. Традиционно наибольшие затруднения у учащихся вызывает решение неравенств. В кодификаторе требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения Единого государственного экзамена по математике указано, что учащиеся должны уметь решать рациональные, показательные, логарифмические неравенства и их системы.

В последние годы в модели контрольно-измерительных материалов соответствующее задание содержится в части 2 и имеет повышенный уровень трудности. В частности, в 2014 г. требовалось решить систему, состоящую из логарифмического и показательного неравенств. По данным ЦОКО Кировской области [1], к решению задачи С3 приступило около 35% школьников, что говорит об определенной подготовке по этой теме (к решению задачи С4, например, приступило порядка 7%, С5 – 4% выпускников). Однако дать хотя бы частичное решение системы неравенств, а тем более решить ее полностью удалось далеко не всем. Так, по данным статистики, один первичный балл за решение задачи С3 (обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы) получили 22,12% учеников, приступивших к решению, два балла (обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы) – 1,44% школьников. Полные три балла за решение этой задачи (обоснованно полу-

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

чен верный ответ) выставлены 6,14% решавших. Средние показатели по стране соответственно равны 34, 8,8, 2,8 и 6,4% [2].

Опыт проверки развернутых ответов участников Единого государственного экзамена по математике показывает, что выпускники владеют различными методами решения неравенств, в том числе и выходящими за рамки школьной программы. Вместе с тем можно выделить типичные ошибки и затруднения учащихся при использовании различных способов решения неравенств. Обратимся к анализу этих ошибок на примере решения системы

$$\begin{cases} log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)\le 0, \\ 64^{x^2-3x+20}-0{,}125^{2x^2-6x-200}\le 0 \end{cases} \text{[3].}$$

Для решения логарифмического неравенства учащиеся выбирают следующие способы.

I. Переход к совокупности двух систем (расщепление неравенств)

$$log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} log_{11-x}(x+7)\ge 0 \\ log_{x+5}(9-x)\le 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} log_{11-x}(x+7)\le 0 \\ log_{x+5}(9-x)\ge 0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1) совокупности:

$$(1)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11-x>1 \\ x+7\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<11-x<1 \\ x+7\le 1 \\ x+7>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5>1 \\ 9-x\le 1 \\ 9-x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+5<1 \\ 9-x\ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<10 \\ x\ge -6 \end{cases} \\ \begin{cases} 10<x<11 \\ x\le -6 \\ x>-7 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-4 \\ x\ge 8 \\ x<9 \end{cases} \\ \begin{cases} -5<x<-4 \\ x\le 8 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -6\le x<10 \\ x\in\emptyset \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 8\le x<9 \\ -5<x<-4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-5;\ -4)\cup[8;9).$$

Решим систему (2) совокупности:

$$(2)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11-x>1 \\ x+7\le 1 \\ x+7>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<11-x<1 \\ x+7\ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5>1 \\ 9-x\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+5<1 \\ 9-x\le 1 \\ 9-x>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<10 \\ x\le -6 \\ x>-7 \end{cases} \\ \begin{cases} 10<x<11 \\ x\ge -6 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-4 \\ x\le 8 \end{cases} \\ \begin{cases} -5<x<-4 \\ x\ge 8 \\ x<9 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -7<x\le -6 \\ 10<x<11 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -4<x\le 8 \\ x\in\emptyset \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\ \emptyset.$$

Таким образом, $x\in(-5;\ -4)\cup[8;9)$.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Переход к совокупности двух систем в качестве способа решения логарифмического неравенства такого типа выбирают порядка 40% решающих. Этот способ требует от выпускников:

– знания свойств логарифмов и логарифмической функции;

– умения решать простейшие рациональные неравенства и их системы, находить объединения и пересечения множеств;

– понимания логической структуры решения и равносильности переходов.

Основным недостатком данного способа является его громоздкость. В то же время верно доведенное до конца решение показывает достаточно высокую математическую культуру учащихся. Обратим внимание на то, что при этом решении не требуется специально находить область допустимых значений неравенства, однако понимают это далеко не все ученики. Выписывание на первом шаге лишних условий в системе, так же как и отсутствие в записи решения значков равносильности и следствия, можно, на наш взгляд, не считать существенным недостатком. Основные ошибки учеников связаны с неверным раскрытием комбинаций совокупностей и систем, выбором ответа в случае пересечения и объединения множеств, включения/не включения в ответ концов промежутков в соответствии со строгостью знака неравенства. Заметим, что использование вместо значка совокупности союза «или» при записи решения неравенства значительно уменьшает количество логических ошибок.

Решение может быть существенно короче, если сначала найти область допустимых значений и заметить, что один из множителей на этом множестве всегда положителен.

Область допустимых значений неравенства определяется из системы

$$\begin{cases} 11-x>0, \\ 11-x\neq 1, \\ x+7>0, \\ x+5>0, \\ x+5\neq 1, \\ 9-x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<11, \\ x\neq 10, \\ x>-7, \\ x>-5, \\ x\neq -4, \\ x<9. \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-5;-4)\cup(-4;9).$$

При этих значениях переменной x $11-x>2, 2>1$ и $x+7>2, 2>1$. Отсюда $log_{11-x}(x+7)>0$ в области допустимых значений.

Следовательно, для того чтобы $log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)\leq 0$, достаточно, чтобы $log_{x+5}(9-x)\leq 0$ в области допустимых значений исходного неравенства. Решим последнее неравенство.

$$log_{x+5}(9-x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5>1 \\ 9-x\leq 1 \\ 9-x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+5<1 \\ 9-x\geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-4 \\ x\geq 8 \\ x<9 \end{cases} \\ \begin{cases} -5<x<-4 \\ x\leq 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\leq x<9 \\ -5<x<-4 \end{array}\right..$$

Таким образом, $x\in(-5;\ -4)\cup[8;9)$.

Последнее неравенство может быть также решено с помощью рационализации (см. далее).

Этим способом воспользовались примерно 10% учащихся, приступивших к решению.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

II. Метод интервалов

$$log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)\le 0.$$

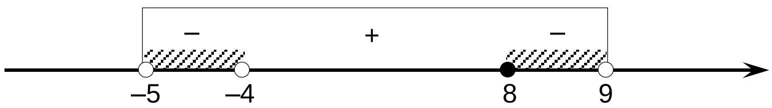
Рассмотрим функцию $y=log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)$, непрерывную на области определения.

Область определения этой функции совпадает с областью допустимых значений неравенства: $x\in(-5;-4)\cup(-4;9)$

Найдем нули функции: $log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}log_{11-x}(x+7)=0,\\ log_{x+5}(9-x)=0,\end{array}\right.\\ x\in(-5;-4)\cup(-4;9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+7=1,\\ 9-x=1,\end{array}\right.\\ x\in(-5;-4)\cup(-4;9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=8,\end{array}\right.\\ x\in(-5;-4)\cup(-4;9)\end{cases}\Leftrightarrow x=8.$$

Определим знак функции в каждом промежутке ее области определения:



Если $x=8{,}5$, тогда $log_{2,5}15{,}5\cdot log_{13,5}0{,}5<0$.

Если $x=0$, тогда $log_{11}7\cdot log_{5}9>0$.

Если $x=-4{,}5$, тогда $log_{15,5}2{,}5\cdot log_{0,5}13{,}5<0$.

Таким образом, решением неравенства являются $x\in(-5;\ -4)\cup[8;9)$.

Применение метода интервалов требует от участников экзамена:

– знания определения и свойств логарифмической функции;

– владения понятием нуля функции;

– умения решать простейшие рациональные неравенства, их системы и совокупности, находить объединения и пересечения множеств; сравнивать значения «невычисляющихся» логарифмов;

– понимания сути метода интервалов и его отдельных этапов.

Этот способ решения логарифмического неравенства выбирают порядка 30% выпускников.

Основная ошибка учащихся состоит в расстановке знаков на числовой прямой (после решения уравнений $log_{11-x}(x+7)=0$ и $log_{x+5}(9-x)=0$) без учета области определения функции. В результате функция «получает» знак на промежутках, в которых не определена. Причиной этого является формальное выполнение шагов метода интервалов без понимания его сути, слабое владение понятием «нуль функции». В качестве наиболее распространенных ошибок отметим также «автоматическое» чередование знаков, потерю одного из ограничений на основания логарифма при нахождении области определения функции, несоответствие между изображением концов промежутка на числовой прямой и записью этого промежутка.

III. Метод рационализации (декомпозиции, замены множителей)

В последнее время этот метод решения неравенств получил достаточно широкое распространение, хотя в школьных учебниках он, как правило, не рассматривается. Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете рациональное), при которой неравенство $G(x)\vee 0$ равносильно неравенству $F(x)\vee 0$ в области определения выражения $F(x)$.

Короткое и практически безошибочное решение получили те школьники, которые рационализировали произведение логарифмов, зная, что знак выражения

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

$log_h f \cdot log_p g$ в области его допустимых значений совпадает со знаком выражения $(h-1)(f-1)(p-1)(g-1)$.

В нашем случае

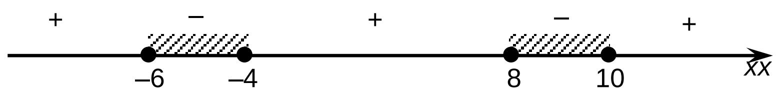
$$log_{11-x}(x+7) \cdot log_{x+5}(9-x) \le 0.$$

Область допустимых значений неравенства определяется условием: $x \in (-5;-4) \cup (-4;9)$.

В области допустимых значений логарифмическое неравенство равносильно следующему рациональному неравенству:

$$(10-x)\cdot(x+6)\cdot(x+4)\cdot(8-x) \le 0,$$

решение которого методом интервалов имеет вид:



С учетом области допустимых значений логарифмического неравенства получаем $x \in (-5;-4) \cup [8;9)$.

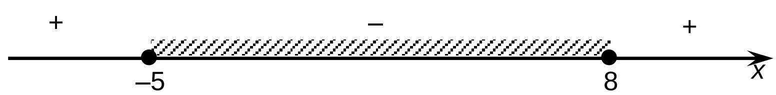
Отметим, что некоторые выпускники применяли метод рационализации для решения логарифмического неравенства в комбинации с расщеплением неравенств, то есть осуществляли переход

$$log_{11-x}(x+7)\cdot log_{x+5}(9-x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} log_{11-x}(x+7) \ge 0 \\ log_{x+5}(9-x) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} log_{11-x}(x+7) \le 0 \\ log_{x+5}(9-x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

и далее рационализировали каждое из четырех неравенств, исходя при этом из того, что знак логарифмической функции в ее области определения совпадает со знаком соответствующего рационального выражения (знак выражения $log_g f$ совпадает со знаком выражения $(g-1)(f-1)$ в области определения логарифмической функции).

Рационализацию для решения логарифмического неравенства выбирают примерно 20% учащихся из числа приступивших к решению.

Показательное неравенство $64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200} \le 0$ вызвало у участников экзамена гораздо меньше затруднений. В основном выпускники приводили степени к одному основанию, а затем использовали свойство монотонности показательной функции.



$$64^{x^2-3x+20} - 0{,}125^{2x^2-6x-200} \le 0 \Leftrightarrow 2^{6x^2-18x+120} \le 2^{-6x^2+18x+600} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x^2-18x+120 \le -6x^2+18x+600 \Leftrightarrow 12x^2-36x-480 \le 0 \Leftrightarrow x^2-3x-40 \le 0.$$

Решением последнего неравенства являются $x \in [-5;8]$.

Некоторые учащиеся для решения также использовали метод рационализации, исходя из того, что знак выражения $h^f - h^g$ $(h>0)$ в области его допустимых значений совпадает со знаком выражения $(h-1)(f-g)$.

В нашем случае $2^{6x^2-18x+120} - 2^{-6x^2+18x+600} \le 0 \Leftrightarrow (2-1)(12x^2-36x-480) \le 0$ на множестве действительных чисел.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Основным недостатком в записи такого решения являлась потеря первого множителя (это недопустимо, хотя при решении рассматриваемого неравенства дает правильный ответ) либо отсутствие обоснования того, что этот множитель не влияет на знак произведения.

Итак, решением первого неравенства являются $x \in (-5; -4) \cup [8; 9)$, второго неравенства – $x \in [-5; 8]$, решением системы неравенств – $x \in (-5; -4) \cup \{8\}$.

Отметим, что обучение различным методам решения неравенств на сегодняшний день является весьма актуальным, поскольку дает учащимся гораздо больше возможностей в решении задач, отчего напрямую зависит успешность прохождения ими различного рода аттестаций. Модель контрольно-измерительных материалов Единого государственного экзамена 2015 г. на профильном уровне предусматривает решение неравенства в части 2. Эта задача, как и в предыдущие годы, относится к задачам повышенного уровня сложности и оценивается теперь двумя первичными баллами.

В демоверсии контрольно-измерительных материалов Единого государственного экзамена 2015 г. по математике [4] в качестве примера приводится следующее логарифмическое неравенство и его решение:

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x^2-2x+1) \geq log_9(10-x).$$

Наш опыт проверки работ участников ЕГЭ позволяет предположить, что предложенный разработчиками путь решения школьники, скорее всего, не выберут.

Рассмотрим наиболее ожидаемые способы рассуждений учащихся при решении этого неравенства.

Найдем область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0, \\ x-1 \neq 1, \\ (x-1)^2>0, \\ 10-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x<10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (2; 10).$$

Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{1}{2}log_{x-1}(x+2) \cdot log_3(x-1)^2 - \frac{1}{2}log_3(10-x) \geq 0;$$
$$log_{x-1}(x+2) \cdot 2log_3|x-1| - log_3(10-x) \geq 0;$$

Учитывая, что в области допустимых значений неравенства $|x-1| = x-1$, и применяя формулу перехода к новому основанию, получаем

$$\frac{log_3(x+2)}{log_3(x-1)} \cdot 2log_3(x-1) - log_3(10-x) \geq 0;$$
$$2log_3(x+2) - log_3(10-x) \geq 0.$$

По свойствам логарифмов

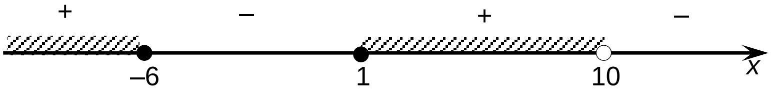
$$log_3\frac{(x+2)^2}{10-x} \geq 0.$$

Поскольку $3 > 1$,

$$\frac{(x+2)^2}{10-x} \geq 1; \qquad \frac{x^2+5x-6}{10-x} \geq 0.$$

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем



$$x \in (-\infty; -6] \cup [1; 10).$$

С учетом области допустимых значений решением неравенства являются $x \in (1;\ 2) \cup (2; 10)$.

Источником ошибок при таком решении является ситуация с переходом $log_3(x-1)^2 = 2log_3|x-1| = 2log_3(x-1)$. Одни учащиеся не записывают логарифм с модулем подлогарифмического выражения и ничего при этом не объясняют. Другие начинают раскрывать модуль по определению, что существенно удлиняет решение и приводит к новым ошибкам. Ошибочным часто бывает и решение неравенства $(x-1)^2 > 0$ при нахождении области допустимых значений.

Проведя анализ логарифмов и их произведений, некоторые ученики могут привести более лаконичное решение, а также воспользоваться обобщенным методом интервалов. Приведем эти рассуждения.

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x^2-2x+1) \geq log_9(10-x).$$

Областью допустимых значений неравенства являются $x \in (1; 2) \cup (2; 10)$.

На области допустимых значений

$$log_3(x^2-2x+1) = log_3(x-1)^2 = 2log_3|x-1| = 2log_3(x-1).$$

Далее, используя следствие из формулы перехода к новому основанию,

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a} \Rightarrow log_c a \cdot log_a b = log_c b,$$

получаем

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot 2log_3(x-1) = 2log_3(x-1) \cdot log_{x-1}\sqrt{x+2} = 2log_3\sqrt{x+2} == log_3(x+2) = log_{3^2}(x+2)^2.$$

Таким образом,

$$log_9(x+2)^2 \geq log_9(10-x).$$

Так как $9 > 1$, то

$$(x+2)^2 \geq 10-x,$$
$$x^2+5x-6 \geq 0,$$
$$x \in (-\infty; -6] \cup [1; +\infty).$$

С учетом области допустимых значений $x \in (1;\ 2) \cup (2; 10)$.

Заметим, что появления логарифма со знаком модуля можно избежать, если при найденной области допустимых значений рассуждать следующим образом:

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x-1)^2 \geq log_9(10-x).$$

Возведем в квадрат основание и подлогарифмическое выражение первого логарифма, затем воспользуемся формулой перехода к новому основанию.

$$log_{(x-1)^2}(x+2) \cdot \frac{1}{log_{(x-1)^2}3} \geq log_9(10-x);$$

$$\frac{log_{(x-1)^2}(x+2)}{log_{(x-1)^2}3} \geq log_9(10-x);\ log_3(x+2) \geq log_9(10-x);$$

$$log_9(x+2)^2 \geq log_9(10-x).$$

Далее решаем соответствующее квадратное неравенство и с учетом области допустимых значений получаем ответ.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

Решение неравенства обобщенным методом интервалов имеет следующий вид. Рассмотрим функцию

$$y = log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x^2 - 2x + 1) - log_9(10 - x),$$

непрерывную на области определения.

Область определения функции найдем из условий:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0, \\ x-1 \neq 1, \\ (x-1)^2>0, \\ 10-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow D(y) = (1;2) \cup (2;10).$$

Найдем нули функции, решив на области определения уравнение

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x^2 - 2x + 1) - log_9(10 - x) = 0.$$

$$log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot log_3(x^2 - 2x + 1) = log_9(10 - x),$$

$$\frac{1}{2}log_{x-1}(x+2) \cdot log_3(x-1)^2 = \frac{1}{2}log_3(10-x),$$

$$\frac{log_3(x+2)}{log_3(x-1)} \cdot 2log_3|x-1| = log_3(10-x).$$

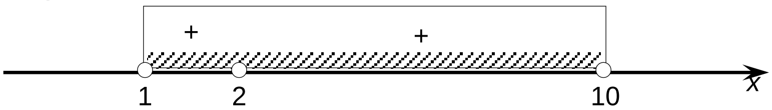
Так как $x - 1 > 0$ на области определения, то $|x-1| = x - 1$.

$$2log_3(x+2) = log_3(10-x),$$

$$(x+2)^2 = 10 - x,$$

$$x = 1 \notin D(y), x = -6 \notin D(y).$$

Рассматриваемая нами функция не имеет нулей. Определим ее знак в каждом промежутке области определения:



Если $x = 7$, тогда $log_6 3 \cdot log_3 36 - log_9 3 = log_6 36 - log_9 3 = 2 - \frac{1}{2} > 0.$

Если $x = \frac{4}{3}$, тогда $log_{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot log_3\frac{1}{9} - log_9\frac{26}{3} = -log_{\frac{1}{3}}\frac{10}{3} - log_9\frac{26}{3} = log_9\frac{100}{9} - log_9\frac{78}{9} = log_9\frac{107}{78} > 0.$

Таким образом, $x \in (1;\ 2) \cup (2; 10)$.

Рассмотренные выше способы решения неравенств и типичные ошибки выпускников помогут учителям более эффективно организовать работу по обучению решению логарифмических и показательных неравенств и подготовке к итоговой аттестации.

Ссылки на источники

1. Результаты единого государственного экзамена в Кировской области в 2014 году: стат. сб. – Киров: КОГБУ «Центр оценки качества образования», 2014 г. – 211 с.
2. Ященко И. В., Семенов А. В., Высоцкий И. Р. Методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания математики. – URL: http://www.fipi.ru.
3. Материалы для подготовки к ЕГЭ. – URL: http://alexlarin.net.
4. Демонстрационный вариант контрольно-измерительных материалов единого государственного экзамена 2015 года по математике. Профильный уровень. – URL: http://www.fipi.ru.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 14296 УДК 372.851
Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на Едином государственном экзамене по математике // Концепт. – 2014. – № 10 (октябрь). – ART 14296. – 0,5 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2014/14296.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
ISSN 2304-120X

Marina Zdorovenko,
candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor of applied mathematics and Informatics FGBOU VPO "Vyatka state University, Kirov
zdorovenki@ngs.ru
Natalia Zelenina,
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor of fundamental and com-puter-Noah mathematics FGBOU VPO "Vyatka state humanitarian University University", Kirov
sezel@mail.ru
Marina Krutikhina,
candidate of pedagogical Sciences, associate Professor of fundamental and computer-Noah mathematics FGBOU VPO "Vyatka state humanitarian University University", Kirov
krumarvik@mail.ru

Common mistakes and difficulties students when solving inequalities in a variety of ways on the Unified state exam in mathematics

Abstract. The article is devoted to the analysis of typical errors and problems school-nicknames when addressing inequalities in different ways on the final examination in mathematics.

Key words: mathematics education, inequality, system of inequalities, different ways of solving inequalities, the Unified state exam in mathematics.

References

1. (2014) *Rezul'taty edinogo gosudarstvennogo jekzamena v Kirovskoj oblasti v 2014 godu: stat. sb.*, KOGBU “Centr ocenki kachestva obrazovanija”, Kirov, 211 p. (in Russian).
2. Jashhenko, I. V., Semenov, A. V. & Vysockij, I. R. *Metodicheskie rekomendacii po nekotorym aspek-tam sovershenstvovanija prepodavanija matematiki*. Available at: http://www.fipi.ru (in Russian).
3. *Materialy dlja podgotovki k EGJe*. Available at: http://alexlarin.net (in Russian).
4. *Demonstracionnyj variant kontrol'no-izmeritel'nyh materialov edinogo gosudarstvennogo jekzamena 2015 goda po matematike. Profil'nyj uroven'*. Available at: http://www.fipi.ru (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук, главным редактором журнала «Концепт»