КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51

Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Вечтомов Евгений Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», заслуженный работник высшей школы РФ, г. Киров
vecht@mail.ru

Петухова Ярослава Владимировна,
магистр физико-математического образования, г. Киров
iaroslawa1987@mail.ru

Решение логических задач как основа развития мышления

Аннотация. *В статье проанализировано понятие логической задачи. Логическая задача может быть стандартной или нестандартной, математической или не очень. Нестандартная логическая задача должна таить в себе некую неожиданность, обладать оригинальным характером. Решение таких задач развивает продуктивное мышление человека. Приведены разнообразные логические задачи, в основном с решениями или пояснениями.*
Ключевые слова: *логическая задача, нестандартная задача, решение.*

1. Введение

Вряд ли кто станет спорить, что человек отличается от животного лишь незначительной деталью: мозгом. Лишь умение мыслить, делать выводы, сопоставлять факты и находить взаимосвязи между вещами и явлениями, объектами и событиями и позволило нам занять лидирующее место в природе, роль «царя природы». Но, обладая таким великим инструментом, мы забываем, что любой инструмент имеет свойство приходить в негодность при ненадлежащем использовании.

Обучаясь в школе, развиваясь, познавая новую информацию, мы используем потенциал мозга в значительной степени, но, начиная «взрослую» жизнь – забываем о своем отличии от остального животного мира. Телевизор заменяет нам книги, пиво – общение, а зрелище – знание. И вот, через 3–4 года бывший блестящий выпускник ВУЗа, в свое время сдавший высшую математику на твердую пятерку, уже с трудом решает в уме банальную задачу по математике, с которой школьник расправится в считанные секунды. Безрадостно.

Любой вид человеческой деятельности есть череда вопросов и ответов, проблем и поисков их решения, новых задач и открытий. Математика – это сплошь задачи: простенькие примеры и «многоступенчатые» вычисления, наглядные построения и хитроумные абстракции, длительные наблюдения и мгновенные интуитивные прозрения, очевидные замечания и нерешенные проблемы. Очень важно начать решать и учиться решать задачи самостоятельно – «для того чтобы научиться плавать, надо самому оказаться в воде». Это согласуется с важнейшим правилом личности «Познай самого себя». Не будем забывать и другое правило, особенно важное для исследователя и мыслителя, – «Сомневайся во всем!». Существует, конечно, и методика решения задач, методика общая и методика частная. Следует отметить замечательные книги известного математика и прекрасного педагога математики Д. Пойа [1–3].

Интерес к математике у учащегося быстрее появляется и проявляется, если он участвует в различных математических состязаниях: кружках, олимпиадах, конкур-

Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

сах, турнирах, математических боях, и, конечно, самостоятельно, дополнительно к учебной программе занимается математикой, решая трудные или необычные задачи, читая научно-популярные и занимательные книги по математике.

При обучении математике особую функцию выполняют *нестандартные задачи* – задачи, требующие нетривиального подхода. Решение подобных задач не только вызывает неподдельный интерес к математике, но и приводит к более глубокому пониманию математики, овладению ей. Интерес к предмету и понимание предмета психологически тесно связаны между собой [4, § 26].

2. Что такое логическая задача?

В широком смысле под *логической задачей* мы понимаем любую задачу, для решения которой не нужны особые (специальные) знания, а достаточно только логических рассуждений. Такие задачи не обязаны быть математическими или нестандартными. Простейшие арифметические задачи можно отнести к классу логических задач.

Возьмем, например, следующую задачу: *на лужке пасётся* 70 *голов гусей и коз, имеющих в совокупности* 200 *ног. Сколько среди них гусей?*

Эта задача легко решается *алгебраически*: обозначим число гусей через x, тогда коз будет $70 – x$; получаем общее число ног $2x + 4(70 – x)=280 – 2x$, равное по условию 200, отсюда $x = 40$. А вот чисто арифметическое (*логическое*) решение: поскольку каждое животное (гусь и коза) имеет, по крайней мере, 2 ноги, то уже получаем $2·70 = 140$ ног; остальные $200 – 140 = 60$ ног принадлежат козам; поэтому имеется 30 коз и, соответственно, 40 гусей. Сравним данные решения. Алгебраическое решение стандартное и более универсальное, в настоящее время именно так решаются арифметические задачи в школе. Логическое решение заставляет учащихся думать, оно культивировалось в былые годы. Первый способ технологический, алгоритмический, согласуется с компетентностной моделью обучения. Второй способ требует осмысления задачной ситуации и её понимания, он отвечает знаниевому подходу в обучении. Умея разобрать и решить задачу логически, не составит никакого труда решить её и алгебраически. Безусловно, оба способа решения арифметических задач должны прививаться школьникам: сначала логический, а уже затем алгебраический. Но так называемое логическое решение задач значительно лучше развивает логическое мышление ребёнка, следовательно, и его мышление в целом.

В качестве иллюстрации приведём ещё пару арифметических задач.

Из города А в город Б и из города Б в город А на рассвете одновременно вышли две старушки. В 12 *часов они встретились. Потом продолжили свой путь. Одна пришла в конечный пункт в* 4 *часа дня, а другая – в* 9 *часов вечера. В каком часу рассвело в этот день?* (Ответ: в 6 часов утра.)

Укажем, что сформулированная задача произвела на будущего академика В. И. Арнольда – когда он учился в пятом классе – неизгладимое впечатление.

Маша живет от школы на расстоянии 2 км, а ее одноклассник Ваня – на расстоянии 5 км. На каком расстоянии друг от друга живут Маша и Ваня?

Эта тестовая задача предлагалась московским школьникам в 2004 году. Подавляющее большинство учеников не решили эту задачу, потому что они приучены к задачам с однозначным ответом. Даже ректор МГУ академик В. А. Садовничий возмущался её формулировкой, указывая на континуум решений. Но задача-то есте-

Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

ственная; подобные проблемы встречаются в реальной жизни. Если чуть-чуть творчески подойти к данной задаче, то ответ становится очевидным: множеством решений (в км) служит числовой отрезок [3; 7]. Можно также изобразить ситуацию геометрически, нарисовав две концентрические окружности радиусов 2 см и 5 см с центром в «школе». И все увидеть!

В узком смысле *понятие логической задачи* предполагает некую «изюминку», определённую нестандартность – будь то необычное условие задачи, оригинальная идея, неожиданное решение. Для их решения важно умение «увидеть» существо дела, которое само вырабатывается и формируется в процессе размышления над логическими задачами.

Многие олимпиадные математические задачи (вплоть до областного уровня) можно считать логическими. Существуют целые группы олимпиадных задач, формируемые по методам их решения. Отметим следующие наиболее часто встречающиеся подходы: принцип Дирихле, перебор случаев, составление логических таблиц, диаграммы Эйлера-Венна, метод графов, идея симметрии, выделение инварианта, математическая индукция, правило крайнего, чётность, метод включений и исключений и т. п. Все перечисленные методы носят явный логический характер. Нестандартные математические задачи принято также подразделять по «предметным» темам: взвешивания, переливания, игры, графы, комбинаторика, арифметика, делимость, элементарная алгебра, элементарная геометрия, функциональные уравнения, парадоксы, мудрецы, рыцари и лжецы, и т. д. Разумеется, классификации (разбиения) логических задач по методу и по теме не совпадают, но значительно налагаются друг на друга по сходным разделам (классам).

Логические задачи – это своеобразная «гимнастика для ума», средство для утоления естественной для каждого мыслящего человека потребности испытывать и развивать силу собственного разума и интеллекта в целом.

3. 3. Многоцветие логических задач

Мы рассмотрим целый букет нестандартных логических задач. Логические задачи хороши как для формирования продуктивного мышления [5], так и для воспитания устойчивого интереса к занятиям математикой и её популяризации.

Приведённые ниже задачи опубликованы под рубрикой «Логический сундучок» в областной газете «Вятский край» в 1995–1996 гг.: выпуск № 1 от 21 октября 1995 г.; выпуск № 2 от 4 ноября 1995 г.; выпуск № 3 от 18 ноября 1995 г.; выпуск № 4 от 9 декабря 1995 г.; выпуск № 5 от 30 декабря 1995 г.; выпуск № 6 13 января 1996 г.; выпуск № 7 от 27 января 1996 г.; выпуск № 8 от 10 февраля 1996 г.; выпуск № 9 от 2 марта 1996 г.; выпуск № 10 от 16 марта 1996 г.; выпуск № 11 от 6 апреля 1996 г.; выпуск № 12 от 5 мая 1996 г.; выпуск № 13 от 8 июня 1996 г.; выпуск № 14 от 27 июля 1996 г.

Многие из данных задач в том или ином виде известны ([6, 7] и др.), некоторые являются авторскими (например, [8]). Рекомендуем также задачные сборники [9, 10], занимательные книги Я. И. Перельмана, М. Гарднера и другие.

1. Мудрецы.

1.1. Задача о трех мудрецах. Путешествовали три мудреца. Устав, прилегли отдохнуть под дубом. Пока они спали, какой-то шутник вымазал их лица грязью. Проснувшись, мудрецы стали дружно смеяться друг над другом. Вдруг Наимудрейший перестал смеяться, поняв, что его лицо тоже грязное. Как он догадался? Восстановите ход мыслей Наимудрейшего.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Решение. *Наимудрейший рассуждает так. Если мое лицо запачкано, то смеяться как-то немудро. Предположим, у меня чистое лицо. Тогда смеющиеся коллеги А и В видели бы одному грязному и чистому лицу. И мудрец А перестал бы смеяться, сообразив, что его лицо грязное, ибо иначе нет причины смеяться. В – он видел бы только чистые лица. Значит, мое наимудрейшее лицо перепачкано.*

1.2. Задача об учёных колпаках. На логической конференции выступает Председатель. В зале присутствуют: Иванов – на 1 ряду, Петров – на 3 ряду, Сидоров – на 9 ряду и Трубаделов – на 13 ряду. У каждого из них на голове – по черному ученому колпаку с кисточкой из гардероба конференции. При этом они не видят цвет своего колпака, но знают, что в гардеробе было 7 колпаков: 3 белых и 4 черных с кисточкой. Председатель задал по очереди Трубаделову, Сидорову, Петрову и Иванову один и тот же вопрос: «Знаете ли вы цвет своего колпака?» На что были получены последовательно следующие ответы: от Трубаделова – нет, от Сидорова – нет, от Петрова – нет. А что тогда ответил Иванов?

1.3. Задача об обманутых визирях. У Великолепного султана было пять визирей, каждому из которых изменила младшая жена, о чем знали все придворные. Только, как водится, визири не ведали об измене своих жен. Султан призвал своих визирей и сказал им: «Кому-то из вас изменяет младшая жена. Повелеваю, что, как только он поймет это, пусть выгонит ее из города». На пятое утро все пять неверных жен были изгнаны. Почему?

1.4. Бедные логики. Сто членов братства логиков схвачены и рассажены в отдельные камеры тюрьмы. Их в произвольном порядке вызывают по одному в комнату, в которой каждый из узников может либо включить, либо выключить, либо не трогать находящуюся там лампу. Если кто-то из логиков вдруг понимает, что все они уже побывали в контрольной комнате, и сообщает об этом тюремщику, то их освобождают; в противном случае им грозит пожизненное заключение. На любой момент времени каждый узник может быть уверен, что его обязательно вызовут в данную комнату. Но вначале их собирают вместе и дают возможность обсудить ситуацию. Как логикам выбрать правильную стратегию, чтобы оказаться на свободе?

2. Задачи на взвешивания.

1) Среди 9 одинакового вида монет одна фальшивая – более легкая. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выделить фальшивую монету?

2) Из 4 одинаковых монет одна фальшивая – отличается по весу от нормальной, но неизвестно в какую сторону. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах: а) найти монету; б) узнать, легче ли она нормальной; в) то и другое?

3) Из 8 одинаковых монет одна легче или тяжелее остальных. Как за три взвешивания на чашечных весах найти эту монету?

4) Имеется 5 одинаковых монет, из которых 3 настоящих, 1 – легче и 1 – тяжелее. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

5) Дано 3 груза. За одно взвешивание можно сравнить вес любых двух из них. Какое наименьшее число взвешиваний необходимо сделать, чтобы наверняка упорядочить грузы по их весу?

6) В 10 мешках находятся сторублевые монеты. В одном из мешков каждая из монет стерлась на 1 грамм, а в остальных мешках монеты новенькие. Каким образом одним взвешиванием на электронных весах можно определить мешок с потертыми монетами?

7) На левой чашке чашечных весов располагается 63 грамма различных по весу гирек, каждая из которых весит целое число граммов. Убирая некоторые гирьки с весов, можно взвесить на правой чашке любой груз в 1, 2,…, 63 г весом. Что это могут быть за гирьки и каково их наименьшее число?

8) Известно, что с помощью 4 камней, каждый из которых весит целое число кг, на чашечных весах можно взвешивать грузы в 1, 2, …, 40 кг. Сколько весит каждый из камней?

Подумайте, как обобщить приведенные логические задачи?

Решения. *1) Положите на разные чашки весом по три монеты, после чего определится тройка монет, среди которых фальшивая. Далее кладем на чашки по одной монете из выбранной тройки монет. 2) а) Можно. б) Можно. в) Нельзя. 3) Монеты нумеруем. На одну чашку можно положить монеты с номерами 1, 2 и 3, а на другую – 4, 5 и 6. Далее анализируем возможности. 4)Начинаем со взвешивания по одной монете на чашках весов. 5) Три взвешивания. 6) Нумеруем мешки числами 1, 2, …, 10. Из первого мешка берем 1 монету, из второго – 2 монеты, …, из мешка № 10 – 10 монет. Все отобранные монеты взвешиваем. Число «недоданных» граммов и указывает номер мешка со стертыми монетами. 7) Оптимальный вариант дают 6 гирек весом в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г и 32 г. 8) Эти камни весят 1 кг, 3 кг, 9 кг и 27 кг.*

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

3. Логические миниатюры.

3.1. Парадокс лжеца. Некто произносит: я лгу. Лжет ли он на самом деле? Этот парадокс, известный еще со времен Эллады, можно четче выразить в следующей форме: «Высказывание, которое Вы читаете в настоящий момент, ложно». Верно ли утверждение, взятое в кавычки?

3.2. Парадокс Рассела. Множеством X называется произвольная совокупность объектов, называемых элементами X. Для любых объектов X и У можно утверждать, что либо X является элементом У, либо X не является элементом У. Так, множество всех множеств, будучи множеством, является элементом самого себя. А множество всех натуральных чисел – не число, и поэтому не является своим элементом. Знаменитый английский логик, математик, философ Бертран Рассел в 1902 году предложил рассмотреть множество М, элементами которого служат в точности множества самих себя. Вопрос о том, является ли множество М элементом самого себя, и приводит к парадоксу.

Решение. *Парадоксы лжеца и Рассела действительно являются логическими парадоксами (антиномиями). Так, расселовское множество М принадлежит самому себе тогда и только тогда, когда М не принадлежит М.*

3.3. Парадокс брадобрея. Это популярный остроумный вариант парадокса Рассела, также принадлежащий Расселу. В селе Волосатово живет парикмахер, который стрижет (бреет) всех тех и только тех жителей села (отдельный вариант: мужчин-односельчан), кто сам не стрижется. Стрижет ли парикмахер сам себя?

Решение. *Такого парикмахера не может существовать, так как его характеристическое свойство противоречиво (точно так же, как не найдется человека, который одновременно старше и младше данного возраста). В варианте мужского парикмахера ответ: этот парикмахер – женщина!*

3.4. Существование недоказуемых истин. Высказывание, которое Вы читаете в данный момент, нельзя доказать. Истинно ли это утверждение?

Решение. *Утверждение «Высказывание, которое Вы читаете в настоящий момент, нельзя доказать», не является ложным, ибо доказуемые утверждения заведомо истинны.*

Следует подчеркнуть, что приведенные парадоксы не являются простой игрой ума. Они заставили математиков XX века пересмотреть и уточнить логические основы своей науки.

4. Приколы.

1) Может ли всесокрушающее ядро пробить несокрушимую стену?

2) Одолеет ли все-таки всемогущий Бог непобедимого Сатану?

3) Крокодил (инквизитор, террорист) украл ребенка и предложил родителям угадать, вернет ли он им ребенка: если угадают – вернет, если не угадают – не вернет. Родители сказали, что крокодил не вернет им ребенка. Как поступит крокодил?

Решение. *Крокодил оказывается в безвыходном положении (ему следует застрелиться).*

4) Туземцы (скажем, члены парткома) отловили Логика и собрались на трапезу. Для того, чтобы решить, в каком виде скушать Логика, они милостиво разрешили Логику произнести любое высказывание. Если высказывание окажется истинным, то туземцы сварят Логика в своем священном котле, а если ложным – съедят его живьем. Что сказал Логик?

Решение. *Логик может сказать: «Вы меня живьем съедите». Тогда туземцы попадают в ситуацию крокодила!*

Как-то в детстве известный американский логик и популяризатор науки Рэймонд Смаллиан купился на шутку своего кузена. Кузен обещал Рэймонду, что в день рождения Рэймонда преподнесет ему сюрприз. Весь свой день рождения Рэймонд прождал обещанный сюрприз, но так ничего от кузена и не дождался. На следующий день кузен сказал, что в этом и заключается его сюрприз. Вопрос: получил ли Рэймонд сюрприз? Сам Смаллиан отмечает, что именно этот случай и подтолкнул его к серьезным занятиям математической логикой.

5. Страна Смаллиания. Представим себе, что в прекрасной стране Смаллиании живут смаллиане, что неудивительно. Каждый смаллианин либо является рыцарем, говорящим только правду,

Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

либо лжецом, т. е. постоянно лжет (что удивительно). Рыцарей, имеющих особые заслуги, называют признанными рыцарями. Смаллиане могут объединяться в различные клубы. Парламент страны регулярно обсуждает – то принимая, то отменяя – важные законы, касающиеся статуса клубов. Наиболее популярны следующие законы.

Закон Г, гласящий, что для каждого клуба существует смаллианин, утверждающий что он является членом этого клуба. Закон Д: все смаллиане, не состоящие членами какого-либо одного клуба, должны образовать свой клуб. Закон Р: все признанные рыцари образуют клуб. Закон Т: для любых клубов А и В существуют такие смаллиане Х и У, что Х говорит, что У – член клуба А, а У говорит, что Х – член клуба В.

Перед Смаллианией и перед нашими читателями стоят такие задачи:

1) Докажите, что выполнение закона Г логически равносильно тому, что все лжецы клуб не образуют.

2) Покажите, что одновременное соблюдение законов Г, Д и Р влечет существование непризнанного рыцаря (недоказуемой истины).

3) Убедитесь, что Г влечет Т. Верно ли обратное?

4) Проверьте, что принятие законов Т и Д должно повлечь и принятие закона Г.

Решения. 1) Докажем, что принятие закона Г равносильно тому, что все лжецы не образуют клуб. Предположим, что выполняется закон Г. Рассмотрим произвольный клуб А и покажем, что он не является клубом всех лжецов. По закону Г в Смаллиании живет гражданин Х, утверждающий свою принадлежность к клубу А. Смаллианин Х либо рыцарь, либо лжец. Если Х – рыцарь, то Х входит в клуб А. Если же Х – лжец, то Х не состоит членом клуба А. В обоих случаях А не является клубом всех лжецов. Проведем рассуждение в обратную сторону. Пусть все лжецы клуб не образуют и А – некоторый клуб. Значит, имеет место один из двух случаев (или оба вместе): в клубе А существует рыцарь; вне клуба А существует лжец. В обоих случаях такой смаллианин будет говорить, что он является членом клуба А. Следовательно, выполняется закон Г.

2) Допустим, что в Смаллиании одновременно выполняются законы Г, Д и Р. Докажем существование рыцаря, не являющегося признанным. По закону Р все признанные рыцари образуют клуб – обозначим его А. Тогда, согласно Д, все смаллиане, не состоящие в клубе А, образуют клуб – клуб В. Для клуба В закон Г предписывает существование гражданина Х, утверждающего свою принадлежность к В. Поскольку все лжецы входят в клуб В, то Х обязан быть рыцарем. Поэтому Х – член клуба В. Поскольку же в В нет признанных рыцарей, то Х – непризнанный рыцарь.

3) Закон Г влечет Т. Это доказывается перебором возможных случаев для клубов А и В – входят или не входят в них рыцари и лжецы. Закон Т не обязан влечь за собой закон Г. В самом деле, рассмотрим такое положение в стране, когда имеется всего один клуб – клуб всех лжецов. Тогда, на основании задачи 1, не выполняется Г. Однако, что легко проверить (проверьте!), имеет место закон Т.

4) Покажем, что законы Т и Д, вместе взятые, влекут Г. Будем рассуждать методом от противного. Предположим, что выполняются законы Т и Д, а закон Г не выполняется. Тогда (в силу задачи 1) множество всех лжецов образует клуб А. На основании Д множество всех рыцарей образует клуб В. По закону Т найдутся соответствующие смаллиане Х и У – см. текст закона Т. Если Х – рыцарь, то У – лжец и, значит, Х – лжец, противоречие. Если же Х – лжец, то У – рыцарь и, стало быть Х – рыцарь, что невозможно. Полученное противоречие и показывает, что законы Т и Д обязательно влекут Г.

6. Завуалированная информация.

6.1. Разминка. Числа 1, 2, 3, 4 и т. д. называются натуральными. Натуральное число называется простым, если оно имеет ровно два натуральных делителя, – это числа 2, 3, 5, 7,11 и т. д. Рассмотрим несколько предварительных задачек.

1) Каково должно быть произведение П двух натуральных чисел, чтобы, зная П, мы могли однозначно определить эти числа?

Решение. *П = 1 или П – простое число. Например, только натуральные числа 1 и 3 (или 3 и 1) дают П = 3. При П = 6 (составное число) возможны (по крайней мере) два случая: 1 и 6, 2 и 3. Укажите искомые П при дополнительном условии, что перемножаемые числа не равны 1.*

2) Чему должна быть равна сумма С двух натуральных чисел, чтобы по ней можно было указать эти числа? Скажем, при С = 4 мы не можем однозначно указать эти числа, поскольку имеются две возможности: С = 1 + 3 = 2 + 2.

3) Найти три натуральных числа, произведение которых равно 17. Найти все пары натуральных чисел, для которых П = 30. Укажите четыре различных натуральных числа, произведение которых равно 30.

4) Определите все тройки натуральных чисел, каждая из которых дает в сумме число 7.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Приведем три интересные задачи, в условиях которых, на первый взгляд, недостаточно информации для их решения, но которые, тем не менее, имеют каждая свой вполне определенный ответ.

6.2. Дети тёти Фени. После долгой разлуки встретились былые подруги Зина и Феня. Вспомнили прошлое, поговорили про жизнь, о детях. Выяснилось, что у Фени трое детей. «А сколько им лет?» – спросила Зина. Феня ответила загадкой: «Произведение их возрастов (в натуральных числах) равно 36, а сумма возрастов такова, сколько ступенек вон на той лестнице». (Показывает Зине). Задумалась Зина, а затем говорит, что этого (информации) ей недостаточно для определения возрастов детей. Тогда Феня добавляет: «А старший у меня – сын». Сколько лет каждому из детей тети Фени?

Решение. *Рассуждаем так. Произведение 36 имеет в точности следующие тройки натуральных чисел: 1, 1 и 36; 1, 2 и 18; 1, 3 и 12; 1, 4 и 9; 1, 6 и 6; 2, 2 и 9; 2, 3 и 6; 3, 3 и 4. Из них только две тройки обладают равными суммами: 1 + 6 + 6 = 13 = 2 + 2 + 9. Поэтому число ступенек на (еще той) лестнице равно 13, иначе Зина сразу бы догадалась о возрасте детей. Ну а когда Феня уточнила, что среди детей есть старший ребенок, Зина определила, что детям тети Фени соответственно 2 годика, 2 годика и 9 лет. Понятно?!*

6.3. Священник и дьякон. Как-то утром священник сказал дьякону: «У меня сегодня исповедовались три прихожанина. Произведение их возрастов равно 2 450, а сумма есть удвоенный Ваш возраст. Сколько лет каждому из них?». После обеда дьякон признался священнику, что не может ответить на его вопрос. Тогда священник уточнил: «Лишь один из трех прихожан старше меня». Сколько лет священнику? Дьякону? А утренним прихожанам?

Решение. *Рассуждение аналогично предыдущему. Лишь две тройки натуральных чисел имеют одинаковую сумму: 5 + 10 + 49 = 64 = 7 + 7 + 50. Поэтому дьякону 64 : 2 = 32 года, ибо при любой другой сумме возрастов прихожан (которая встречается только однажды) дьякон уже нашел бы эти числа. Предполагается, что уточнение священника о том, что только один из трех прихожан старше его, дает возможность дьякону точно определить возрасты прихожан. Но лишь число 49 обладает этим свойством. Следовательно, священнику 49 лет, а утренним прихожанам 7, 7 и 50 лет.*

6.4. Диалог. Дядя Боря знает произведение двух задуманных кем-то натуральных чисел, а дядя Витя знает их сумму. Между ними состоялся такой диалог.

Дядя Витя: «Борис, ты знаешь эти два числа? Я не знаю».

Дядя Боря: «Нет, не знаю».

Дядя Витя: «Теперь я знаю эти числа!»

Дядя Боря: «Ну, Виктор, тогда я тоже знаю!»

А) Читатель, назови задуманные числа, если тебе ясно, что эти дяди не шутят.

Б) Что это за числа, если заранее всем известно, что оба они не равны 1.

Решение. *А) Числа 2 и 2 удовлетворяют состоявшемуся диалогу между дядей Борей и дядей Витей. Другие пары натуральных чисел этому диалогу не удовлетворяют. Б) Числа 3 и 4.*

7. Коктейль, винегрет, пилюли и примочки.

1) Имеется цилиндрическая кастрюля, наполненная до краев водой. Как можно оставить в ней ровно половину воды, не пользуясь другими сосудами?

2) В прозрачный пузырек неправильной формы налито (что?) молоко. Как непосредственно узнать, заполняет ли молоко большую часть пузырька (или нет)?

3) Какое наибольшее число воскресений может быть в году? Приведите пример такого года.

4) В некотором месяце три субботы пришлись на четные дни. Какой день недели был 14 числа этого месяца?

5) Охотник находится в 100 метрах к югу от медведя, проходит 100 метров на восток, поворачивает ружье строго на север, стреляет и убивает медведя. Какого цвета шкура медведя?

6) Пингвин вышел на прогулку с Южного полюса, прошел 1 км на север, потом – 1 км на запад, а затем – 1 км на юг. Где закончилась его прогулка?

7) Какая фигура не меняется, если на нее смотреть через увеличительное стекло ясным взором?

8) У Чебурашки в кармане три монеты в сумме 50 рублей. Одна из них не 10 рублей. Что это за монеты?

9) Торговец купил некий товар за 7 долларов, продал его за 8, потом снова купил его за 9 долларов и опять продал уже за 10 долларов. Какую прибыль он получил?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

10) Санта-Клаус хочет поздравить мальчика, живущего на 72-м этаже 100-этажного дома. В доме установлен лифт с двумя кнопками. Если нажать на первую кнопку, лифт поднимается на 7 этажей вверх, а если нажать на вторую – опускается на 9 этажей вниз. Как Санта-Клаус должен нажимать кнопки, чтобы с 1 этажа попасть на 72 этаж?

11) Для снежных построек заготовлено меньше 100 комов снега. Их можно разделить поровну для постройки 2, 3 и 5 крепостей, но нельзя поровну разделить на 4 крепости. Сколько комов снега скатали ребята?

12) У Деда Мороза есть 21 шоколадка весом в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 21 г. Как Деду Морозу разложить их, не ломая, по трем подаркам так, чтобы вес шоколада во всех трех подарках был одинаков?

13) Снегурочка желает испечь новогодний торт, который может быть разделен одним прямолинейным разрезом на 1996 частей. Помогите ей выбрать форму торта.

14) Расшифруйте слова и исключите лишнее слово: КЕНСОЖ, КУЛЬСОСА, ЧОГУНЕКАРС, КЛЕПО, БРЕСАЙГ.

15) Может ли журналист жениться на сестре своей вдовы?

16) Предположим, что на границе между США и Канадой разбился самолет. В какой из двух стран похоронить уцелевших пассажиров?

17) На перроне вокзала встречаются двое – особа в чёрном и молодой человек. Особа в чёрном сообщает молодому человеку, что мать молодого человека умерла. Молодой человек – сын особы в чёрном. В чём тут дело?

18) Является ли старейший художник среди поэтов и старейший поэт среди художников одним и тем же лицом?

19) Однажды Федя выключил свет и успел добраться до постели, прежде чем комната погрузилась в темноту. От выключателя до кровати Феди – три метра. Как это ему удалось?

20) Из окна ресторана вывалилась три весельчака. Когда они окажутся в одной плоскости?

Решения. *1) Наклонить кастрюлю так, чтобы нижняя точка ее верха оказалась на одном горизонтальном уровне с верхней точкой ее днища. 2) Аккуратно перевернуть закупоренный пузырек. Если обеленной оказалась не вся внутренняя поверхность пузырька, то молоко заполняет меньшую часть пузырька. 3) Каждый год состоит из 52 полных недель и ещё одного-двух дней. Поэтому в году может быть 52 или 53 воскресенья. Если год начинается с воскресенья или високосный год начинается с субботы, то в таком году 53 воскресенья. 4) В указанном месяце должно быть 5 суббот, и первая из них приходится на 2-е число. Поэтому 14 числа был четверг. 5) Медведь находится точно на Северном полюсе. Значит, он – белый. 6) Пингвин вернется на Южный полюс. 7) Скажем, геометрическая фигур «угол» не меняется под увеличительным стеклом. Назовите другие такие фигуры. 8) У Чебурашки монеты в 20, 20 и 10 рублей. Стало быть, даже две из них не десятирублевые. 9) В каждой из двух операций купли-продажи торговец получил по 1 доллару – в результате его прибыль составила 2 доллара. 10) Санта-Клаус может 14 раз подряд нажать на кнопку «Вверх», после чего он окажется на 99 этаже, а затем 3 раза на кнопку «вниз». 11) Число заготовленных комов снега кратно произведению чисел 2, 3 и 5, т. е. кратно 30. Из чисел 30, 60 и 90 только 60 делится на 4. Значит, ребята скатали 90 комов (если не поленились) или 30 комов. 12) Общий вес дедморозовских шоколадок равен 21(1 + 21) : 2 = 231 г. Поэтому в каждом из подарков должно быть по 231 : 3 = 77 г шоколада. Дед Мороз может разложить в подарки по 7 шоколадок таким образом: в первый подарок шоколадки в 1 г, 2 г, 3 г, 11 г, 19 г, 20 г и 21 г; во второй подарок шоколадки в 4 г, 5 г, 6 г. 12 7, 15 г, 17 г и 18 г; оставшиеся шоколадки – в третий подарок. 13) Торт у Снегурочки может иметь форму четвертинки большого цветка с сохранившимися 1995 лепестками. А какую еще? 14) В семействе слов КЕНСОЖ (снежок), КУЛЬСОСА (сосулька), ЧОГУНЕКАРС (Снегурочка), КЛЕПО (пекло) и БРЕСАЙГ (айсберг) лишним, наверное, является слово… Какое? 15) К сожалению, уже не может. А вот сестры еще могут выйти замуж! 16) Не торопитесь хоронить уцелевших пассажиров. 17) Особа в черном – отец молодого человека. 18) Старейший художник среди поэтов и старейший поэт среди художников – это один человек, являющийся старейшим по возрасту среди лиц, одновременно рисующих и сочиняющих стихи. 19) Федя ложился спать засветло. 20) Три точки всегда находятся в одной плоскости (возможно, не единственной).*

8. Кому добавки?

1) Когда три данные точки находятся в нескольких плоскостях?

2) Какой угол образуют биссектрисы двух смежных углов, дающих вместе развернутый угол?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

3) Является ли величайший художник среди поэтов и величайший поэт среди художников одним и тем же лицом?

4) Если среди поэтов есть только один художник, то верно ли, что среди художников только один поэт?

5) Имеются предметы 3-х форм и 4-х цветов. Обязательно ли среди них найдутся два предмета, различающиеся как по форме, так и по цвету?

6) В мешке лежит кубики одного размера: 7 синих, 7 красных и 9 зеленых. Какое наименьшее число кубиков надо, не глядя, вынуть из мешка, чтобы среди них наверняка оказалось 5 зеленых кубиков?

7) В детском садике число мальчиков составляет ровно 80% от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек от числа мальчиков в этом садике?

Решения. *1) Три данные точки находятся одновременно в нескольких плоскостях (равносильно, в бесконечном множестве плоскостей) тогда и только тогда, когда они расположены на одной прямой. А когда на нескольких прямых? 2) Прямой угол. 3) Величайший художник среди поэтов может быть посредственным поэтом даже в среде художников. 4) Если среди поэтов есть только один художник, то он является единственным поэтом среди художников! 5) Да, найдутся. Достаточно, чтобы были предметы хотя бы двух форм и двух цветов. В самом деле, пусть X – любой из данных предметов. Возьмем предмет A, отличный от X по форме. Можно считать, что предметы A и X одного цвета, иначе задача уже решена. Далее берем предмет B, отличный от X по цвету. Если B и X различаются и по форме, то они дают искомую пару предметов. В противном случае, пара A и B – искомая. 6) Необходимо достать 7 + 7 + 5 = 19 кубиков. На каждых 5 девочек приходится по 4 мальчика. Следовательно, число девочек от числа мальчиков составляет (5 : 4)100% = 125%.*

8.1. Протагор и Эватл. Античный философ Протагор взялся обучить Эватла юридическому ремеслу с тем условием, что Эватл заплатит ему за курс обучения сразу после первого выигранного Эватлом судебного процесса.

После учебы Эватл заявил, что судебной практикой заниматься не намерен. Протагор ответил, что подаст на Эватла в суд. И если дело выиграет учитель, то Эватл заплатит ему по суду, а если дело выиграет ученик, то он заплатит Протагору по договору (условию). Эватл же заметил, что при любом решении суда платить ему не придется. Действительно, если суд решит, что Эватл платить не должен, то он и не будет платить, а если суд решит «платить!», то согласно договору Эватл не обязан платить после проигранного им процесса.

Как все-таки Протагору получить с Эватла праведно заработанные деньги?

Решение. *Текст задачи показывает, что договор между Протагором и Эватлом составлен не совсем чётко (двусмысленно, противоречиво). Однако справедливый выход есть. Можно провести два судебных процесса. В первом вынести приговор в пользу Эватла. А уже на втором принять решение о выплате Эватлом суммы за обучение.*

9. Арифметические задачки.

1) На лугу пасутся коровы и гуси – всего 40 голов и 100 ног. Сколько среди них коров?

2) Саше на покупку безделушки не хватает 3-х рублей. У Шуры в кармане позвякивают монетки. Но, даже если они сбросятся, им не удастся купить безделушку. Сколько им не хватает? Много ли денег было у Шуры?

3) Как с помощью трехлитровой и пятилитровой банок набрать ровно один литр воды?

4) Можно ли с помощью восьмилитрового и десятилитрового ведер набрать ровно пять литров медовухи?

5) 10 пиратов разделили между собой поровну 146 пленниц, а остальных посадили в лодку и отправили домой родителям. Сколько пленниц поплыло домой?

6) Разделить 6 яблок между шестью ребятами так, чтобы каждый получил по яблоку и одно яблоко осталось в вазе.

7) Увеличить число 666 в полтора раза, не производя над ним никаких арифметических действий.

Решения. *1) См. начало статьи. 2) Шурин карман содержит 2 рубля. 3) Наполнить трехлитровую банку и перелить всю воду из нее в пятилитровую банку. Затем снова наполнить трехлитровую банку и дополнить из нее пятилитровую банку. В трехлитровой банке останется один литр воды. 4) Можно набирать только четное число литров медовухи. 5) Шесть пленниц. 6) Одному из ребят достанется яблоко в вазе. 7) «Перевернув» число 666, получим число 999.*

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

9.1. Девушка и ростовщик. Старый ростовщик хотел жениться на прекрасной девушке, отец которой задолжал ростовщику крупную сумму денег. Ростовщик обещал простить долг, если девушка согласится тянуть жребий – камушек из шляпы, в которой будут находиться два камушка – белый и черный. Если девушка достанет белый камушек – она свободна, если черный – должна выйти замуж за ростовщика, к которому не питает никаких симпатий.

Ростовщик и девушка, согласившаяся тянуть жребий, вышли в сад. Он поднял с дорожки два камушка и положил их в свою шляпу. Девушка заметила, что оба камушка черные. Как быть девушке?

Решение. *Не нарушая правил игры, девушка может поступить следующим образом. Она достает из шляпы один из камушков и роняет его на садовую дорожку. Извиняясь, что не заметила цвет выбранного камушка, девушка говорит ростовщику: «Ну да ничего, мы узнаем его цвет по оставшемуся в шляпе камушку». В результате ростовщик окажется «в луже». Все-таки почему? Это типовая задача на продуктивное мышление.*

10. Из Царства смекалки.

1) Может ли дробь, числитель которой меньше знаменателя, равняться дроби, в которой числитель больше знаменателя?

2) Из шести спичек составить четыре равных разносторонних треугольника.

3) Фермеру нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но в лодке фермер может поместиться только или с волком, или с козой, или с капустой. Кроме того, если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как фермеру перевезти свой груз сохранным?

4) Каким образом можно двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемещая их после удара?

5) Как записать двойку тремя пятерками с помощью арифметических действий?

6) Портной имеет кусок сукна в 1996 метров, от которого он отрезает ежедневно по 8 метров. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

7) Три предпринимателя должны поделить между собой 21 бочонок, из которых 7 полных бочонков кваса, 7 наполовину полных и 7 пустых. Спрашивается, как они могут поделиться, чтобы каждый имел одинаковое количество и кваса, и бочонков (не переливая квас)?

Решения. *1) Любая дробь, числитель которой меньше знаменателя, равняется дроби, числитель которой больше ее знаменателя. Следует только поменять знаки у числителя и знаменателя исходной дроби. 2) Выложить из шести спичек в пространстве тетраэдр (треугольную пирамиду). На плоскости требуемую фигуру составить нельзя. 3) Сначала фермер перевозит козу. Затем волка, но забирает козу с собой. Далее перевозит капусту. И, наконец, перевозит козу окончательно. 4) Следует учесть, что подкова имеет ширину (между внутренней и внешней дугами-краями). 5) Имеем 2 = (5 + 5) : 5. 6) Через 249 = 1992 : 8 дней у портного останется последний «неотрезанный» кусок в 4 = 1996 – 1992 метра. 7) Каждому должно достаться по 7 «полубочонков» кваса (или пива, что там было?!). Первому и второму предпринимателям (на первого-третьего рассчитайсь) можно взять по 3 полных бочонка, по 1 наполовину полному и по 3 пустых бочонка. Тогда третьему достанется 1 полный бочонок, 5 наполовану полных и 1 пустой. Наверное, вот так.*

10.1. Где пожар? В Тьмутаракани три селения: Кривдино, Правдино и Середина-на-Половинине. Все жители Кривдино лгут, жители Правдино всегда говорят правду, а в Середине-на-Половинине каждый селянин через раз то лжет, то говорит правду. Дежурному пожарнику позвонили по телефону:

– Выезжайте! В нашем селении пожар!

– В какому селении? – уточнил дежурный.

– В Середине-на-Половинине, – ответили ему.

Где же случился пожар? Куда ехать пожарным?

Решение. *Правдинцы звонить не могли. Если звонили из Кривдино, то волноваться нечего, ибо там пожара нет. Если же звонивший из Середина-на-Половинине, то о пожаре он солгал. Следовательно, пожарные пока могут не беспокоиться.*

11. Давайте знакомиться.

1) Докажите, что среди любых шести людей найдутся трое попарно знакомых между собой человек или трое попарно незнакомых человек.

2) Верно ли предыдущее утверждение, если вместо шести человек взять пять человек? Взять семь человек?

Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

3) Останется ли верной задача 1, если вместо трех попарно знакомых или попарно незнакомых человек искать четырех таких человек?

4) Каждый из 18 ученых переписывается с каждым из остальных на одном из трех языков: русском, английском или немецком. Докажите существование трех ученых, переписывающихся друг с другом на одном и том же языке.

5) Докажите, что среди любых шести человек найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании. Обобщите эту задачу!

6) Вечером 23 февраля на дискотеке собралась молодежь. Каждый юноша танцевал в этот вечер ровно с двумя девушками, а каждая девушка танцевала ровно с двумя юношами. Докажите, что девушек и юношей на дискотеке было поровну.

7) Убедитесь, что число всех людей, сделавших 8 марта 2012 года нечётное число рукопожатий, чётно.

8) Можно ли 1001 телефон соединить между собой так, чтобы каждый из них был соединен ровно с 13 другими?

Решения. *1) Пусть X – любой из данных 6 человек. Среди 5 остальных X имеет либо троих знакомых, скажем, A, B и C, либо трех ему незнакомых. Рассмотрим первый случай (второй совершенно аналогичен). Если двое из A, B и C знакомы, например, A и B, то получаем тройку попарно знакомых людей – X, A и B. Иначе получаем тройку A, B и C попарно незнакомых людей. 2) Для 5 человек задача 1 неверна – приведите пример! Задача 1 верна также для 7 и более человек. Почему? 3) Не останется. Дайте пример. 4) Произвольный ученый X из данных 18 ученых переписывается с 17 остальными. Поэтому найдутся, по крайней мере, 6, с которыми X общается на одном языке, скажем, на английском. Если среди этих 6 имеются двое, переписывающихся на английском языке, то задача решена. В противном случае указанные 6 человек переписываются между собой на русском (знакомы) или немецком (не знакомы) языке. Теперь достаточно применить задачу 1. 5) Каждый из 6 данных людей имеет среди них 0, 1, 2, 3, 4 или 5 знакомых, т. е. имеет место один из 6 вариантов. Значит, если среди 6 человек нет двух с одинаковым числом знакомых, то найдутся X с 0 знакомых и Y с 5 знакомыми. Но тогда X не знаком с Y, а потому Y имеет не более 4 знакомых в данной компании. Полученное противоречие завершает решение задачи 5. Из решения видно, что эта задача верна для любого числа людей (вместо 6). 6) Дадим алгебраическое решение. Пусть x – число девушек на дискотеке, y – число юношей. Тогда 2x – число танцевавших пар девушка-юноша, а 2y – число танцевавших пар юноша-девушка. Поскольку 2x = 2y, то x = y. А как можно обойтись без уравнений? 7) Число всех человеко-рукопожатий, сделанных 8 Марта, четно, так как каждое рукопожатие считается дважды. Число рукопожатий, сделанных людьми с чётным числом рукопожатий, также чётно. Поэтому четным является и число рукопожатий, сделанных людьми с нечётным числом рукопожатий. Следовательно, таких людей должно быть чётное число. 8) Эта задача решается подобно предыдущей, на идее чётности.*

11.1. Подвезли. Повезло или подвели? Жених должен прибыть в церковь на венчание в назначенный срок. Он рассчитал, что если поедет на велосипеде, то успеет точно в срок. Только жених выехал, как догоняет его друг на «мерседесе». И подвозит жениха ровно до середины пути в церковь со скоростью, в 20 раз большей скорости велосипеда. А там как раз ехал на телеге его будущие тесть, тоже торопился на свадьбу. Сел жених на телегу и поехали они до места со скоростью, в 2 раза меньшей скорости велосипеда. Успел ли жених на венчание?

12. Граф – фигура важная.

Графом называется фигура, составленная из нескольких точек пространства, называемых его вершинами, и отрезков иди дуг, соединяющих некоторые пары вершин и называемых ребрами графа. Ребра графа могут быть направленными или нет. Например, куб можно рассматривать как граф, имеющий 8 вершин и 12 ребер. Другой пример. Возьмем правильный n-угольник. Его вершины объявим вершинами графа, а ребрами графа будем считать стороны и диагонали n-угольника. Кстати, сколько диагоналей имеет правильный n-угольник?

Маршрутом в данном графе называется направленная непрерывная линия, состоящая из целых ребер графа. Маршрут в графе назовем обходом графа, если он проходит по каждому ребру графа ровно один раз. Обход, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине графа, называется замкнутым обходом.

12.1. Существуют ли обходы, замкнутые обходы следующих графов: куба, тетраэдра, правильного n-угольника (начните с n = 3, 4, 5)?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

12.2. На рисунках изображены три фигуры, составленные из четырехугольников и пятиугольников. В каждом из этих случаев нужно выяснить, существует ли линия (замкнутая линия), проведенная карандашом без отрыва от бумаги и пересекающая ровно по одному разу стороны каждого из составляющих четырехугольников и пятиугольников (рис. 1).

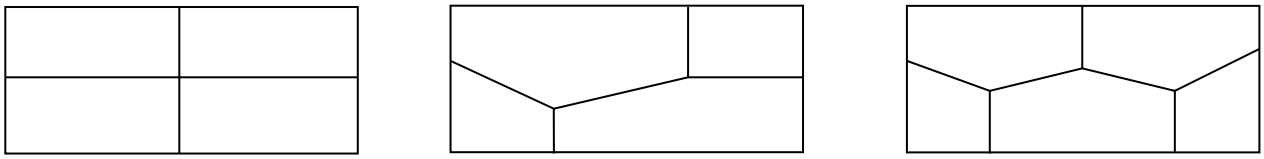

Рис. 1

Графы применяются при решении многих математических и прикладных задач. С их помощью можно решить и задачу 12.2. Попытайтесь!

Решение. *Для начала возьмем первую фигуру из задачи 12.2. Составляющие ее маленькие четырехугольники изобразим точками А, В, С и Д, а внешнюю – для большого четырехугольника – часть плоскости отметим точкой Е. Соединим две точки линией, если соответствующие четырехугольники имеют друг с другом или с внешней частью общую сторону. Так, точка Е оказывается соединенной с каждой из точек А, В, С, Д двумя дугами. В результате получаем граф, имеющий 5 вершин и 12 ребер.*

Аналогично поступим с фигурой 2 из задачи 2 и получим граф с 5-ю вершинами О, П, Р, С, и Т и 13-ю ребрами. Изобразим эти графы (рис. 2).

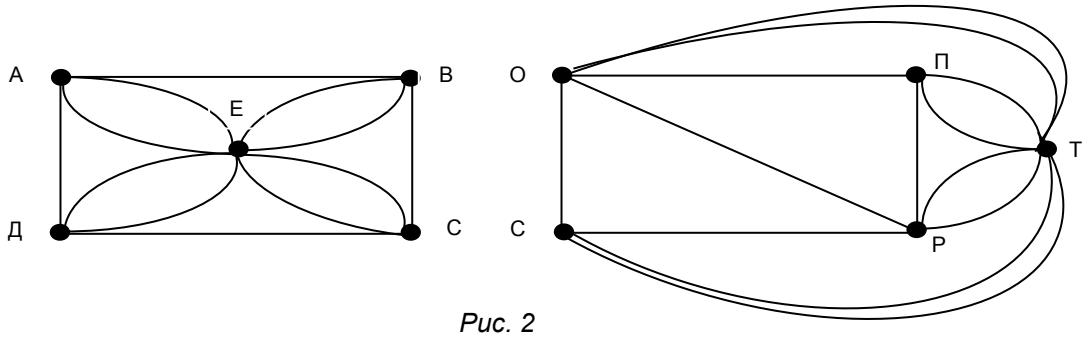

Рис. 2

Для первого графа легко указать замкнутый обход например, АВСДАЕСЕВЕДЕА. Для второго графа существует незамкнутый обход, скажем, ОТОПТПРТРОСТСР. Граф третьей фигуры из задачи 2 (нарисуйте его!) вообще не имеет обходов. В чем же дело? Когда данный граф имеет обход или замкнутый обход?

12.3. Мосты и Леонард Эйлер. Ответ на этот вопрос дал в 1736 году знаменитый математик Леонард Эйлер, размышлявший над известной задачей о кенигсбергских мостах. Эйлер, в частности, показал, что если граф обладает замкнутым обходом, то из каждой его вершины должно выходить (заходить) четное число ребер (см. первый рисунок). Если же граф допускает обход и найдется вершина, принадлежащая нечетному числу ребер, то таких вершин должно быть ровно две (на втором рисунке из вершин О и Р выходит по 5 ребер, из вершин П и С – по 4 ребра, из вершины Т – 8 ребер).

Порассуждаем вместе с Эйлером. Пусть дан граф, имеющий замкнутый обход, и Х – некоторая вершина графа. Зафиксируем какой-либо замкнутый обход данного графа и рассмотрим ребра, сходящиеся к вершине Х. Будем двигаться по указанному маршруту-обходу начиная с ребра, заходящего в Х. Тогда по другому – второму – ребру мы выйдем из Х. Если снова – уже по третьему ребру – зайдем в вершину Х, то по четвертому ребру выйдем из Х, и т. д. Таким образом, произвольная вершина Х данного графа принадлежит четному числу ребер.

Эйлер доказал и обратное утверждение: если каждая вершина графа принадлежит четному числу ребер, то такой граф обладает замкнутым обходом. Заметим невзначай, что решение Эйлером головоломки о кенигсбергских мостах послужило началом возникновения теории графов.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Сформулируем эту задачу о мостах. В парке Кенигсберга на речке Преголь было 7 мостов – схема приведена на следующем рисунке (рис. 3). Требовалось найти замкнутый маршрут, по которому каждый мост проходился бы ровно по одному разу.

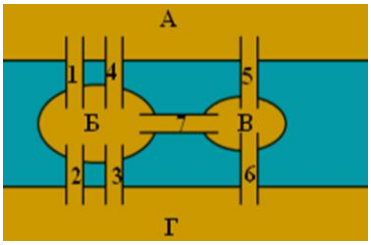

Рис. 3

13. Всякая всячина.

1) Имеет ли задача о кенигсбергских мостах решение?

2) Темная школьная доска испачкана мелом. Докажите, что на ней существуют две точки одного цвета (обе темные или обе белые), расстояние между которыми равно 10 см.

3) Как двум разбойникам разделить добычу «по справедливости», чтобы никто из них не остался в обиде на другого? А как быть трем разбойникам?

4) Сколькими способами куб можно мысленно самосовместить с самим собой?

5) Имея краски двух цветов, сколькими способами можно раскрасить правильный тетраэдр? Каждая грань целиком раскрашивается какой-либо одной краской.

6) Играют двое, кладя по очереди одинаковые монетки на поверхность прямоугольного стола. Проигрывает тот, кому некуда положить очередную монетку. Как надо играть начинающему игроку, чтобы выиграть?

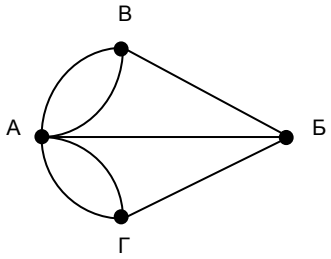

Рис. 4

Решения. *1) Задача о кенигсбергских мостах не имеет положительного решения: не существует не только замкнутого, но вообще никакого обхода «по мостам». В самом деле, обозначим острова буквами А и Б, а береговые части через В и Г – пусть это будут вершины графа, соединенные 7 дугами-мостами. В полученном графе из каждой вершины выходит нечетное число ребер. Такой граф не имеет обходов (рис. 4). 2) Отметим на школьной доске вершины какого-нибудь правильного треугольника со стороной 10 см. Для трех отмеченных точек возможны только 4 варианта: все три точки белые, 2 белые и 1 темная, 1 белая и 2 темные, 3 темные. В первых двух случаях имеются 2 белые (одного цвета) точки на расстоянии 10 см друг от друга, а в остальных случаях – 2 темные точки, расстояние между которыми равно 10 см. Обобщите задачу 2 на множества окрашенных в три цвета точек пространства. Скажем, дан воздушный шар, заполненный тремя инертными газами… 3) Один из двух разбойников, определенный жребием, делит всю добычу на две равные- на его взгляд – части, другой разбойник выбирает понравившуюся ему часть. Обобщите эту задачу на трех и более разбойников. 4) Куб имеет 6 граней. На каждую грань его можно поставить 4 способами. Следовательно, куб имеет 24 самосовмещения. 5) У правильного тетраэдра, как и у любого тетраэдра, 4 грани. Пусть имеются синяя и желтая краски. Возможны случаи: а) все 4 грани тетраэдра окрашены в синий цвет; б) 3 грани синие и 1 желтая; в) 2 грани синие и 2 желтые; г) 1 грань синяя и 3 желтые; д) все 4 грани желтые. В случаях а) и д) существует по одной раскраске. В каждом из случаев б) и 4) существует по 4 раскраски, но все они неразличимы, поскольку тетраэдр правильный. Наконец, в случае в) существует вроде бы 6 раскрасок – число сочетаний из 4 по 2, но они опять-таки неразличимы (надо учесть, что любые две грани тетраэдра – смежные). Итак, имеется всего 5 «неразличимых» раскрасок правильного тетраэдра с помощью двух красок. Если же считать все грани тетраэдра неодинаковыми, то будет 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 способов раскраски. 6) Начинающий игрок первым ходом кладет монетку точно в центр стола. Далее на любой очередной ход второго игрока начинающий кладет свою новую монетку строго симметрично относительно центра стола только что положенной (вторым игроком) монетке. Это выигрывающая стратегия для начинающего.*

14. Стратегические игры. Во всех рассматриваемых нами играх участвуют двое, которые делают свои ходы строго по очереди. Игру можно назвать стратегической, если у одного из игроков – начинающего или второго – теоретически существует выигрывающая стратегия. В предлагаемых задачах требуется найти выигрывающую стратегию.

1) В ряд выложено 2012 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре?

2) В кучке – 1001 спичка. Можно брать от 1 до 4 спичек за один ход. Проигрывает тот, кому нечего брать. Выиграет ли начинающий при правильной игре?

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

3) На окружности расставлено 20 точек. За один ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающем ранее проведенных хорд. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. У кого из игроков имеется выигрывающая стратегия?

4) Дан цветок с 111 лепестками. Можно срывать по лепестку или по два рядом растущих лепестка. Может ли начинающий сорвать последний лепесток при правильной игре? Сравните с задачей 1.

5) В кучке 2012 камешков. Одним ходом можно разделить любую из имеющихся кучек на две части. Проигрывает тот, кому нечего делить. Кто выигрывает при правильной игре?

6) Даны две кучки из 1612 и 1812 спичек. Разрешается брать из одной кучки спичку или из обеих кучек по спичке. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Выигрывает ли начинающий при правильной игре?

А на десерт сыграем в игру-угадывалку: Что такое 6 + 6 + «десерт» и чему это равно?

Решения. *1) Начинающий имеет выигрывающую стратегию. Первым ходом он берет две серединные монеты – 1006-ю и 1007-ю, получая при этом два ряда по 997 монет в каждом. Далее начинающий может применить так называемую симметрическую стратегию. Именно после очередного хода второго игрока начинающий берет соответствующие одну или две монеты из другого ряда монет. В результате начинающий заберет самые последние монеты и победно завершит игру. 2) Рассуждаем «с конца». Если остается от 1 до 4 спичек, то выигрывает делающий ход. При 5 спичках выигрывает второй игрок. Если спичек от 6 до 9, то снова побеждает делающий ход игрок, а при 10 спичках он проигрывает. Мы видим, что если число спичек в кучке не делится на 5, то выигрывает при правильной игре начинающий. В нашем случае – при 1001 спичке – начинающий должен взять 1 спичку, доведя число оставшихся спичек до 1000. Следующий своим ходом начинающий оставит в кучке 995 спичек и т. д. Чем обеспечит себе выигрыш. 3) Нумеруем по часовой стрелке точки на окружности 1, 2, …, 20. Соединяем хордой точки I и II, например. Это первый ход начинающего, ведущий его к победе. Проведенная хорда разбивает остальные 18 точек на два множества по 9 точек. Далее начинающий применяет симметрическую стратегию! Как при этом он должен играть? 4) При правильной игре побеждает второй игрок. После первого хода начинающего получается ряд из 109 или 110 лепестков. Далее второй игрок оказывается в роли начинающего, как и в задаче 1. Отрывая своим ходом 1 или 2 серединных лепестка, он образует две дуги по 54 лепестка. Применяется симметрическая стратегия. 5) Каждый ход увеличивает число кучек на 1. В начале игры имеется 1 кучка из 2012 камешков, а в конце игры будет 2012 кучек по 1 камешку. Начинающий последовательно получает 2 кучки, 4 кучки, …, 2012 кучек, чем и заканчивает игру в свою пользу. 6) Выигрывает начинающий, используя идею четности. Начинающий играет так, чтобы в каждой кучке оставалось по четному числу спичек. Через несколько ходов возникнет ситуация, когда перед ходом второго игрока в одной из кучек будет 2 спички, а в другой останется 2к спичек при некотором натуральном к. Если второй игрок возьмет 1 спичку из первой кучки только, то начинающий возьмет по 1 спичке из обеих кучек – в результате останется одна кучка с 2к-1 спичками, что ведет к победе начинающего. Случаи, когда второй игрок берет 1 спичку из второй кучки или по 1 спичке из обеих кучек, проанализируйте самостоятельно.*

14.1. Игра Ним. Два игрока по очереди берут несколько спичек из расположенных перед ними кучек. При этом каждый раз можно взять любое (ненулевое) число спичек из какой-то одной кучки. По условию выигрывает игрок, берущий последнюю спичку. Как игрокам выстроить правильную стратегию игры?

Ссылки на источники

1. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959. – 208 с.
2. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
3. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
4. Вечтомов Е. М. Метафизика математики. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.
5. Вертгеймер М. Продуктивное мышление. – М.: Прогресс, 1987. – 336 с.
6. Байиф Ж.-К. Логические задачи. – М.: Мир, 1983. – 172 с.
7. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981. – 239 с.
8. Вечтомов Е. М. Занимательная логика Смаллиана // Математика в образовании: сб. статей. Вып. 2. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2006. – С. 172–179.
9. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике: Задачи логического характера. – М.: Просвещение; Учебная литература, 1996. – 160 с.
10. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка. – М.: Дрофа, 2006. – 270 с.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12109 УДК 37.025:51
Вечтомов Е. М., Петухова Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. – 2012. – № 8 (август). – ART 12109. – 1,2 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77- 49965. – ISSN 2304-120X.

Vechtomov Evgeniy,
Doctor of Physics and Mathematics, head of the chair of algebra and discrete mathematics at Vyatka State University of Humanities, Kirov
vecht@mail.ru
Petuhova Yaroslava,
Master of Physics and Mathematics, Kirov
iaroslawa1987@mail.ru

Solution of logical problems as the basis of thought development

Abstract. The analysis of the logical problem concept is given in the article.The logical problem can be standart and original, mathematical and not. The original problem should have an unusual,sudden character. The solution of such problems develops efficient thinking. Various logical problems with solution and explanations are represented in the article.

Key words: logical problem, original logacal problem, solution.

ISSN 2304-120X
08
9 772304 120128