

## Формирование структур математического мышления при обучении математике в цифровую эру

## On the formation of mathematical thinking structures in teaching mathematics in the digital era

### Автор статьи

**Тестов Владимир Афанасьевич**,  
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», г. Вологда, Российская Федерация  
vladafan@inbox.ru  
ORCID: 0000-0002-3573-574X

### Author of the article

**Vladimir A. Testov**,  
Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics and Computer Science, Vologda State University, Vologda, Russian Federation  
vladafan@inbox.ru  
ORCID: 0000-0002-3573-574X

### Конфликт интересов

В. А. Тестов является членом редакционного совета журнала «Концепт».

### Conflict of interest statement

V. A. Testov is a member of the editorial board of the "Koncept" journal.

### Для цитирования

Тестов В. А. Формирование структур математического мышления при обучении математике в цифровую эру // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2025. – № 03. – С. 204–217. – URL: <https://e-koncept.ru/2025/251047.htm> – DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11047

### For citation

V. A. Testov, On the formation of mathematical thinking structures in teaching mathematics in the digital era // Scientific-methodological electronic journal "Koncept". – 2025. – No. 03. – P. 204–217. – URL: <https://e-koncept.ru/2025/251047.htm> – DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11047

Поступила в редакцию <i>Received</i>	14.01.25	Получена положительная рецензия <i>Received a positive review</i>	05.03.25
Принята к публикации <i>Accepted for publication</i>	05.03.25	Опубликована <i>Published</i>	31.03.25



**Аннотация**

В настоящее время в обучении математике в школе на первый план выдвигается задача интеллектуального развития обучающихся, все большую актуальность приобретает развитие у них математического мышления. Целью статьи является анализ тех элементов в процессуально-познавательной стороне содержания обучения математике, которые выступают как мыслительные средства, методы математического познания. Методологической основой исследования являются системный, метапредметный и деятельностный подходы. В результате обучения математике в уме человека формируются структуры, соответствующие выделенным элементам содержания обучения математике, которые в статье называются математическими схемами мышления. К ним относятся логические, алгоритмические, комбинаторные и образно-геометрические когнитивные структуры. В статье дается их характеристика, описывается практический опыт их формирования у школьников. Все эти структуры обладают универсальностью, т. е. они используются независимо от конкретного математического материала, и имеют большое значение не только для обучения, но и для математического творчества. Все рассмотренные схемы математического мышления обладают одной общей характеристикой: их формирование можно осуществить лишь в течение длительного времени, используя сензитивные возможности их развития в каждом возрастном периоде. Проводится теоретический анализ соотношения процессов дифференциации и интеграции таких структур. Показано, что количественно в формировании таких структур должен преобладать процесс интеграции, постепенное, небольшими шагами накопление математических знаний. Однако качественные скачки, прорывы в рождении знаний могут происходить путем дифференциации, с помощью дедуктивного метода. Практическую значимость имеют приведенные в статье рекомендации учителям по формированию различных видов математических схем мышления у школьников разных ступеней обучения. Наибольшее внимание уделено образно-геометрическим схемам мышления и их роли в обучении математике. Отмечено, что большим подспорьем учителю при формировании таких схем мышления в условиях цифрового общества является использование в обучении систем компьютерной математики, которые также помогают при проведении компьютерных экспериментов и в исследовательском обучении.

**Abstract**

At present, the task of intellectual development of students comes to the forefront in teaching mathematics at school, and the development of their mathematical thinking is becoming increasingly relevant. The aim of the article is to examine those elements in the procedural-cognitive side of the content of teaching mathematics, which act as mental means and methods of mathematical knowledge. The methodological basis of the study is the systemic, meta-subject and activity-based approaches. As a result of learning mathematics, the mind of a person forms structures corresponding to the identified elements of the content of teaching mathematics, which are called mathematical thinking schemes in the article. These include logical, algorithmic, combinatorial and figurative-geometric cognitive structures. The article provides their characteristics and describes the practical experience of their formation in schoolchildren. All these structures are universal, i.e. they are used regardless of the specific mathematical material, and they are of great importance not only for learning, but also for mathematical creativity. All the considered schemes of mathematical thinking have one common characteristic: their formation can be carried out only over a long period of time, using the sensitive possibilities of their development in each age period. A theoretical analysis of the relationship between the processes of differentiation and integration of such structures is made. It is shown that the process of integration should prevail quantitatively in the formation of such structures, gradual, small-step accumulation of mathematical knowledge. However, qualitative leaps and breakthroughs in the creation of knowledge can occur through differentiation, using the deductive method. The recommendations given in the article to teachers on the formation of various types of mathematical thinking schemes in schoolchildren at different levels of education are of practical significance. The greatest attention is paid to figurative-geometric thinking schemes and their role in teaching mathematics. It is noted that the use of computer mathematics systems in teaching, which also help in conducting computer experiments and in research-based learning, is a great help to the teacher in forming such patterns of thinking in the conditions of a digital society.

**Ключевые слова**

средства математического познания, математические схемы мышления, наглядные образы, исследовательское обучение

**Key words**

means of mathematical cognition; mathematical schemes of thinking; visual images, exploratory learning

**Введение / Introduction**

Как хорошо известно, в содержание образования входят две стороны: информационная и познавательная. Таким образом, эффективность обучения математике зависит не только от глубины и прочности овладения обучающимися соответствующими знаниями, умениями и навыками, но и от степени развития их математического мышления, от уровня их готовности к самостоятельным действиям по приобретению новых знаний, а также к исследовательским и творческим действиям. Важно понимать, что сами по себе знания и умения еще не определяют уровень мышления человека, необходимо его подготовить к использованию таких знаний и умений в раз-

ных ситуациях, к самостоятельному решению возникающих проблем, причем не обязательно из области математики. Основной целью математического образования, как совершенно справедливо отмечал В. И. Арнольд, должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира [1].

Математическое развитие личности нельзя осуществить без продуманного отбора содержания математического образования, следования определенным стратегиям обучения и выполнения ряда дидактических принципов. Такие стратегии и принципы подробно были рассмотрены в монографии автора [2]. Современное состояние содержания математического образования и необходимость перемен, связанных с процессом цифровизации общества, рассмотрены академиком А. Л. Семеновым с соавторами в статье [3]. Из последних исследований можно также выделить работу А. В. Боровских, в которой обосновывается, что содержанием процесса математического образования должна являться система мыслительных средств и способов их использования [4].

В настоящей статье основное внимание обращено только на ту часть стратегии отбора содержания, которая нацелена на формирование таких внутренних умственных структур, которые выступают прежде всего как средства математического познания. Именно рассмотрение такого вида когнитивных математических структур (логических, алгоритмических, комбинаторных, образно-геометрических и др.) и рекомендаций по их формированию в условиях цифрового общества является основной целью данной статьи.

### Обзор литературы / Literature review

Все внутренние умственные математические структуры – отражение объективно существующих математических структур. Виды таких структур, являющихся упрощенными моделями математических объектов, были выделены группой французских ученых под псевдонимом Н. Бурбаки [5]. К ним относятся алгебраические, порядковые и топологические структуры. Их аналоги в человеческом мышлении были обнаружены швейцарским психологом Ж. Пиаже [6], и они выступают прежде всего как комплексы, средства хранения математических знаний.

Но многие авторы обращают внимание и на процессуальную, познавательную сторону образования. В частности, по мнению И. С. Якиманской, для овладения учебным материалом требуются две группы знаний. Одна из них состоит из знаний первого рода, включающих в себя научные сведения о предметах, явлениях и их взаимосвязях. Вторая группа состоит из знаний, это те знания, в которых нашли отражение путь и методы их получения [7]. В. В. Давыдов тоже считал, что знание следует рассматривать с двух сторон: и как результат мышления, и как процесс его получения [8]. Для умственных структур, заключающих в себе знания второго рода, У. Найссер предложил использовать термин «схема»: «Это структура действия, равно как и структура для действия» [9]. Именно этого вида структуры Ж. Пиаже называл операциями 2-го порядка, или операциями над операциями [10]. Два типа когнитивных структур, формирующихся по «горизонтальному» и «вертикальному» принципу, отмечает и М. А. Холодная [11]. Используя именно такие структуры, человек получает информацию, проводит анализ и синтез поступающей информации. Из психологических исследований, наиболее важных для нашей статьи, необходимо также выделить диагностику развития математического мышления, проведенную Р. А. Атахановым [12].

Проблема «Как мыслит человек?» волновала не только психологов, но и математиков. В частности, известный французский математик Ж. Адамар проводил специальное

анкетирование крупных математиков. Оказалось, что математики чаще всего думают не словами, а образами, преимущественно зрительными, которые могут быть также двигательными или другого типа. Очень характерным в этом отношении является самонаблюдение А. Эйнштейна, приведенное в книге Ж. Адамара: «Слова... не играют, видимо, ни малейшей роли в механизме моего мышления. Психологическими элементами мышления являются... знаки или образы...» [13] Большое внимание формированию различных видов математического мышления уделили и российские математики-методисты. В частности, А. А. Столяр рассмотрел педагогические проблемы развития у школьников различных видов математического мышления [14]. В. А. Гусев в своих исследованиях уделил основное внимание формированию пространственного мышления и разработал новый экспериментальный курс геометрии [15].

Практическими разработками различных подходов к изучению таких структур занимались и школьные учителя математики. В частности, такой курс для 5–7-х классов и банк задач был разработан Г. А. Маничевой [16]. Для начальной школы аналогичные исследования в более позднее время проводил А. З. Зак [17]. Проведенные им эксперименты подтвердили, что занятия по дополнительной программе «Логика» способствуют развитию доказательного логического мышления. Как показали Е. А. Кузьмичева и К. С. Шешенко [18], большим потенциалом для формирования алгоритмического мышления школьников обладает решение задач также в дисциплине информатика. Многие авторы отмечают, что лучшим инструментом для успешного формирования у школьников логического, алгоритмического и комбинаторного мышления является использование соответствующих типов задач. В частности, Ю. Л. Палехина таким образом развивала логическое, комбинаторное и алгоритмическое мышление учащихся начальной школы [19]. Е. Е. Беренчик предлагает делать это с помощью занимательных задач [20]. В ряде школ радикально расширяется изучаемый мир математики для начальных классов за счет базовых объектов современной математики и информатики. Как отмечают М. А. Посицельская, Т. А. Рудченко и А. Л. Семенов, в программу полезно ввести стратегии перебора, выигрыша в игре, алгоритмов в наглядной среде и т. п. [21] В другой статье М. А. Посицельской рассматривается связь этих задач с задачами вычислительной комбинаторики («подсчета количества вариантов»), переборными задачами теории сложности вычислений, а также с «большими идеями», т. е. общекогнитивными стратегиями и их присвоением учащимися [22]. По мнению академика А. Л. Семенова и Т. А. Руденко, в цифровом мире результаты образования должны отличаться от традиционных, необходимо шире применять динамическую геометрию, экспериментировать, решать задачи, которые «неизвестно-как-решать», а не заучивать чужие доказательства [23].

Средства формирования и развития образно-геометрических структур на разных этапах обучения рассматривались во многих исследованиях. В частности, Г. Г. Микерова и П. А. Горчарова изучали способы формирования пространственных представлений у учащихся начальной школы [24]. А. А. Батова и Л. П. Стойлова рассмотрели особенности развития пространственного мышления [25]. В настоящее время большим подспорьем учителю при формировании образно-геометрических схем может служить использование в обучении систем компьютерной математики, как пишет Н. В. Леонтьева [26]. Важным положительным моментом является использование возможностей таких систем при проведении компьютерных экспериментов, что отмечено Г. Б. Шабатом и А. Л. Семеновым в статье [27]. Такие компьютерные экс-

перименты особенно важны для применения исследовательского обучения, что хорошо показано в монографии А. В. Ястребова [28]. Способы применения компьютерных средств в вузовском обучении математике приведены в статье Н. А. Вавилова, В. Г. Халина и А. В. Юркова [29].

Произведенный обзор литературы показывает, что, хотя поднятая в статье проблема формирования математического мышления давно стоит перед исследователями, пути ее решения все время совершенствуются. Эта проблема получила новое звучание в современном мире, а ее решение исследователи все больше связывают с возможностями современных компьютеров и систем компьютерной математики.

### **Методологическая база исследования / Methodological base of the research**

Методологической базой исследования являются системный, деятельностный и генетический подходы; теоретической базой – анализ и обобщение научно-педагогической и методической литературы для систематизации содержащейся в ней информации.

### **Результаты исследования / Research results**

Но что же такое математическое мышление? Из каких элементов оно состоит и какими способами его развивать? На эти вопросы пытались дать ответы многие ученые. Все современные теории познавательных процессов основываются на представлении о человеке как системе, активно перерабатывающей информацию. Из ограниченности человеческих систем, перерабатывающих информацию, следует вывод о необходимости наличия достаточного времени для процессов осмысления и переработки информации. Поэтому при обучении тому или иному предмету, в том числе и математике, необходимо учитывать пределы человеческих возможностей. При слишком большом объеме информации могут наступить перегрузки, которые в результате приводят к различным трудностям при усвоении учебного материала.

Психологические исследования дают все основания считать, что носителями интеллектуальных процессов являются различные обобщенные продукты умственной переработки этой информации – когнитивные структуры, или когнитивные схемы. Это внутренние психологические структуры, которые складываются в процессе жизни и обучения в голове человека, это способ описания и хранения информации в долговременной памяти. Системы когнитивных структур представляют собой не только системы хранения знаний, но и средство познания. Они являются внутренними умственными формами, посредством которых человек познает действительность.

Эти теоретические положения подтверждаются целым рядом опытных данных. Каждый учитель может привести из своего опыта примеры, когда ученики, имеющие более основательную подготовку по математике, воспринимали и запоминали новый материал значительно лучше, чем плохо подготовленные учащиеся. Подготовленный ученик в буквальном смысле видит материал иначе – более глубоко и адекватно, чем плохо подготовленный. Это происходит по причине того, что имеющиеся у подготовленных учеников обобщенные схемы «накладываются» на воспринимаемый материал, позволяют им осуществлять значительно более глубокий и широкий анализ, что и приводит к закономерно лучшему пониманию и сохранению в памяти изучаемого материала.

В процессе изучения математики у человека складываются специфические когнитивные структуры, являющиеся отражением объективно существующих математических структур. Эти структуры могут быть поделены на два основных типа. К первому относятся алгебраические, порядковые и топологические структуры, которые



есть не что иное, как некоторые упрощения основных математических объектов. Их аналоги в человеческом мышлении выступают прежде всего как комплексы, средства хранения математических знаний. Про этот тип структур можно сказать, что они формируются по «горизонтальному» принципу.

Ко второму типу относятся те математические структуры, которые являются в первую очередь средствами математического познания. Среди них можно выделить логические, алгоритмические, комбинаторные и образно-геометрические когнитивные структуры. Этот тип структур образуется в мышлении человека на основе таких связей, которые являются общими для внешне совершенно непохожих объектов из самых разных разделов математики. Поэтому можно сказать, что они формируются по «вертикальному» принципу. Для таких структур будем преимущественно использовать термин «схемы».

Подчеркнем, что схемы математического мышления выделяются из всех математических когнитивных структур тем, что они обладают универсальностью, т. е. тем, что они работают независимо от конкретного содержания математического материала, и играют видную роль не только в обучении, но и в математическом творчестве. Комбинаторные и геометрические методы находят применение в самых разных областях современной математики. Отметим, что для математического развития школьников, их мышления наибольшее значение имеет именно процесс получения математических знаний, средства для их получения, то есть математические схемы. Такие схемы используются для развития математической одаренности школьников, что было показано автором в [30]. В другой статье автором было рассмотрено, как такие схемы применяются в обучении математике для получения метапредметных результатов [31].

Таким образом, для обучения математике в наличии должна быть не только программа традиционных предметных знаний, но и программа формирования тех мыслительных средств (действий), в нашей терминологии математических схем мышления, которые учащиеся используют в качестве средств решения различных задач, в том числе нестандартных, т. е. задач, которые «неизвестно-как-решать». Более того, из деятельностного подхода вытекает, что приоритет в обучении надо отдать формированию именно схемам, т. е. средствам математического мышления, математической деятельности.

Эти выделенные специфические схемы математического мышления мы подробнее рассмотрим ниже.

Под логическими схемами мышления будем понимать такие когнитивные структуры, с помощью которых из верных посылок можно получать верные выводы, находить верные следствия из имеющихся фактов. Такие схемы мышления отражаются в строгой последовательности рассуждений, в применении законов формальной логики, доказательства «от противного», использовании контрпримеров и других приемов доказательства.

Элементы логики в школу пробовали ввести многие ученые и педагоги, в частности А. А. Столяр. Формирование первых логических понятий лучше производить на возможно более ранней ступени обучения. Такое раннее знакомство с элементами логики вполне возможно осуществить с помощью игр.

Наш опыт работы со школьниками также свидетельствует о том, что формирование у учащихся логических схем начинать лучше с начальной школы, причем вести такую работу постепенно, поднимаясь от класса к классу. Основной способ формирования таких схем – это решение логических задач (задачи на истинность и ложность

высказывания, о правдолюбцах и лжецах и т. п.) с привлечением небольшого количества самых простых понятий логики. Учащихся 6–7-х классов уже необходимо познакомить с некоторыми логическими понятиями, такими как следование, равносильность, прямая и обратная теоремы, необходимое и достаточное условия. Имеется положительный опыт изучения на этой ступени и большего объема материала. В свое время такие эксперименты проводил А. А. Столяр. Однако для этой ступени он чрезмерно увлекался формальными логическими структурами. На этом уровне обучение должно идти прежде всего через задачи. Как показали эксперименты, элементы логики нецелесообразно изучать отдельно от других тем, а надлежит добиваться того, чтобы эти элементы были органически вплетены в изучаемый материал, стали вспомогательным инструментом обучения.

В старших специализированных математических классах или на факультативных занятиях можно начать изучать элементы математической логики (логические операции, формулы, таблицы истинности, законы логики, логическое следствие и т. п.), но опять-таки с использованием достаточного количества логических задач. Целью такого курса является систематизация, обобщение и расширение уже имеющихся у учащихся математических знаний, полученных ими и в курсе информатики. Такой курс неоднократно проводился нами в средней школе № 8 и естественно-математическом лицее г. Вологды.

В условиях цифровизации общества и образования логическое мышление играет особо важную роль, поскольку оно помогает разобраться в больших объемах информации, анализировать данные и принимать обоснованные решения на базе логических законов и принципов.

Под алгоритмическими схемами мы понимаем такие умственные структуры, которые позволяют как использовать уже известные алгоритмы и методы, так и построить новый алгоритм, т. е. спланировать некоторые действия, и реализовать построенный алгоритм. Умение формулировать, строить и применять алгоритмы – одно из важных качеств математического мышления. Такое умение важно и в обыденной жизни.

Как отмечают многие исследователи и как подтверждает наш опыт, работу по формированию таких схем мышления целесообразно начинать достаточно рано, на уровне начальной школы, решая с учащимися задачи на планирование действий. Наиболее известной задачей подобного типа является старая русская задача о волке, козе и капусте, переправляемых через реку, сюда же относятся задачи на переливания и взвешивания, различные игровые задачи.

Для более старшего возраста можно, не изменяя содержания основного курса, а только путем целенаправленного подбора ряда задач, познакомить учащихся со свойствами алгоритмов, с основными типами алгоритмических процессов (линейным, разветвляющимся, циклическим). Поэтому определенное место в курсе математики должно уделяться решению задач, которые «неизвестно-как-решать», приводящих к необходимости построения алгоритмов не вычислительных процессов, например задачи на взвешивания. Алгоритмические задачи на этом этапе целесообразно давать учащимся в виде серий (цепочек) постепенно усложняющихся задач, что позволяет выработать навык поэтапного решения.

Как показывает практика, алгоритмические схемы в памяти у школьников тоже не могут сохраняться длительное время, поэтому попытки их формирования за короткий промежуток времени чаще всего не имеют успеха. Требуется периодические тренировки, над этим надо работать длительное время.

Следует отметить, что имеется определенное сходство между алгоритмическим мышлением и одним из видов теоретического мышления, выделенных В. В. Давыдовым, а именно внутренним планированием действий.

Для третьего вида схем математического мышления – комбинаторных схем – трудно провести четко очерченные границы. Чаще всего под комбинаторикой понимается раздел математики, посвященный задачам выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами (Математическая энциклопедия, т. 2). По другому определению комбинаторика – это раздел дискретной математики, который рассматривает задачи на существование, построение, перечисление и оптимизацию различных объектов в значительном количестве. В эпоху цифровизации в связи с развитием информационных технологий и компьютерной техники существенно выросли возможности перебора таких объектов, что обусловило значительный рост комбинаторных исследований в самых разных областях. Для комбинаторного мышления характерны гибкость (смена первоначального плана действий, причем как на этапе поиска решения задачи, так и на этапе ее решения) и построение некоторым способом перебора всех возможных вариантов.

В школьном предмете математика содержание темы «Комбинаторика» было длительное время достаточно узким. В учебниках и пособиях для учителей предусматривалось изучение только трех видов комбинаций (размещения, сочетания, перестановки) без повторений и приводились формулы, позволявшие сосчитать их количество.

Как показывает анализ литературы и опыт преподавания, формирование комбинаторных схем имеет смысл проводить постепенно, в течение всего школьного курса через решение соответствующих задач. Начинать это делать лучше всего в начальных классах. Например, при изучении в начальной школе темы «Нумерация» можно решать задачи на составление различных комбинаций букв или цифр (например, попросить учеников написать все различные трехзначные числа из цифр 2, 5, 6, не используя повторения этих цифр). При решении такой задачи важно, чтобы ученики поняли, как следует выполнять такой перебор наиболее оптимальным способом.

В более старшем возрасте целесообразно рассмотреть со школьниками, как строится дерево всех возможных вариантов, а также два главных правила, позволяющих наилучшим способом делать подсчет количества всех возможных комбинаций: правила суммы и произведения. Рассматривать какие-либо формулы комбинаторики на этом этапе нецелесообразно. Удачным примером рассмотрения комбинаторных структур в учебной литературе на этом этапе стал комплект по математике для 5–6-х классов под ред. Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина.

С учащимися более старших классов целесообразно рассматривать простейшие формулы комбинаторики для подсчета числа размещений, перестановок и сочетаний и их применение, причем не только в теории вероятностей. Не имея достаточного уровня развития комбинаторного мышления, обучающиеся могут лишь формально усвоить курс теории вероятностей. Представляется также целесообразным один из школьных курсов по выбору целиком посвятить практикуму по комбинаторике. Целью такого практикума, помимо знакомства с комбинаторными формулами, является формирование комбинаторного мышления и комбинаторных навыков учащихся на базе различных комбинаторных методов. В их число должны быть включены бесформульные методы (метод систематического перебора объектов, комбинаторные принципы сложения и умножения, графы), которые служат подспорьем для достижения учащимися понимания сути комбинаторики.



Комбинаторные схемы применяются при решении не только задач по комбинаторике, но и самых разных других задач. Такие схемы имеют непосредственную взаимосвязь и с другими математическими когнитивными структурами, в частности с порядковыми.

Можно увидеть некую аналогию между рассмотренными выше тремя видами математических схем и тремя видами теоретического мышления, которые были выделены в исследованиях В. В. Давыдова: анализом, внутренним планом действий и рефлексией. Позднее Р. А. Атахановым было установлено, что анализ соответствует первому уровню теоретического мышления; реализация плана действий – это второй уровень, причем этот уровень уже подразумевает наличие анализа. Третьим же уровнем теоретического мышления является проведение рефлексии, причем на этом уровне уже подразумевается наличие и анализа, и планирования.

Очень похожее можно увидеть и в соотношении между тремя рассмотренными видами схем математического мышления. Так, в процессе построения алгоритма чаще всего требуется выделить все возможные частные случаи, а такую операцию мы относим к логическим схемам, т. е. для действенности алгоритмических схем ученик должен уже владеть некоторыми логическими схемами мышления. А для проведения перебора (одной из основных комбинаторных задач) требуется построить и реализовать некоторый алгоритм, т. е. для действенности комбинаторных схем мышления ученик должен обладать рядом логических и алгоритмических схем.

В стороне от трех рассмотренных выше видов схем, но не изолированно, стоят образно-геометрические схемы. Такие схемы играют ведущую роль в геометрическом воображении и интуиции. Наличие таких схем помогает ученику наглядно представить многие математические объекты и отношения, позволяет замещать абстрактные математические модели наглядными схемами и представлениями. Как уже отмечалось, большинство ученых-математиков мыслит образами. Такие образы позволяют донести до коллег или учеников значительно больше знаний и идей, чем слова. К сожалению, в течение десятилетий учеников отучали оперировать образами или картинками, потому что они «не строгие». Разумеется, они не строгие, но они являются важным вспомогательным средством, а такими средствами в обучении никогда не следует пренебрегать.

Дело в том, что образно-геометрические схемы в значительной степени представляют собой один из видов образного мышления, которое присуще правому полушарию человеческого мозга. В процессе обучения у человека происходит возрастание логической компоненты мышления и, соответственно, возрастание роли левого полушария. Но этот процесс должен происходить постепенно, по мере развития мышления обучающихся. Поэтому формирование геометрических схем должно происходить на протяжении всего периода обучения в школе. Из проведенных экспериментов вытекает, что для обеспечения формирования у школьников таких схем мышления следует проводить целенаправленную работу, начиная с начальной школы, заложив в качестве фундамента обучения наглядность, различные построения и т. п. В решении этой проблемы большую роль играют занимательные геометрические задачи (на конструирование, задачи со спичками, на развитие пространственного воображения и т. д.).

Но долгое время в школьном преподавании геометрии наблюдалась недооценка образной, наглядной стороны этого предмета. Предложения об усилении в преподавании геометрии опоры на наглядные образы, на геометрический эксперимент звучали еще в середине XX века, но не были поддержаны большинством математиков. В

60–70-е годы в отечественной школе возобладало стремление с помощью геометрии развить логическое и аксиоматическое мышление. Авторы учебников и пособий стремились все логически обосновать и доказать, в то время как при обучении геометрии необходимо было добиваться развития у учащихся не только логического мышления, но и образного (пространственного) мышления.

Для обогащения геометрических представлений учащихся, для ознакомления их с максимально богатым набором геометрических фигур (как плоских, так и пространственных) рядом ученых и педагогов было предложено в 90-е годы XX века еще до начала систематического курса геометрии изучать курсы наглядной и практической геометрии (в начальной школе и в 5–6-х классах) (В. А. Гусев, Г. Д. Глейзер, Г. Г. Левитас, Н. П. Долбилин и И. Ф. Шарьгин, Г. А. Клековкин и др.). Этими авторами для таких курсов были написаны учебники для школьников. В этих учебниках придавалось большое значение наглядности, рисункам, которые помогают уяснить свойства фигур, выдвинуть идею решения, понять идею доказательства, способствуют математическому развитию. По наблюдениям как учителей, так и психологов при запоздалом начале использования наглядности обучения способность учащихся применять геометрические образы может не только дальше не развиваться, но может даже ослабеть и погаснуть. Поэтому формирование образно-геометрического мышления учащихся не должно ограничиваться временными рамками школьного курса геометрии.

При формировании пространственного мышления часто возникают большие трудности. Умение мыслить пространственными образами недостаточно развито у значительной части как школьников, так и студентов, что объясняется недостаточной подготовкой учащихся к восприятию в старших классах стереометрии. Длительное время школьники изучают только плоские объекты. А при отсутствии даже эпизодов выхода в трехмерное пространство у учащихся в мышлении складываются двухмерные стереотипы, которые впоследствии мешают им мыслить трехмерными образами.

Раздельное изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве, по мнению ряда ученых, затрудняет формирование у ученика общих геометрических закономерностей. В значительной степени этот недостаток был преодолен в учебнике геометрии В. А. Гусева. Идея фузионизма нашла воплощение в учебниках и других авторов (А. Л. Вернера и Т. Г. Ходот, Г. Д. Глейзера и В. Г. Болтянского и др.).

В цифровую эру с появлением программных средств для обработки математических данных существенно увеличились возможности проведения экспериментов с объектами математических исследований, вычислительными экспериментами, заменяющими реальные натурные эксперименты. Использование систем компьютерной математики оказало заметное влияние на подходы к формированию математического мышления и на всю математическую парадигму. В печати все чаще обсуждается необходимость внедрения методов экспериментальной математики не только в научные исследования, но и в образовательный процесс. Эти методы рассматриваются как ключ к успешной реализации исследовательского обучения как в школьных, так и в университетских математических курсах.

Многие учителя предприняли шаги по обновлению методов и содержания обучения математике в соответствии с новой парадигмой, стремясь усилить экспериментальную составляющую и использовать с этой целью современные цифровые технологии. Подавляющее большинство из этих инициатив относилось к курсу геометрии с использованием систем GeoGebra, 1С: Математический конструктор, Живая математика и др.

Широкое распространение в научном мире в современном понимании термин «экспериментальная математика» получил лишь в последнее десятилетие XX века. С этим подходом связаны надежды на более глубокое вовлечение обучающихся в исследовательскую деятельность и развитие их аналитических способностей. В результате актуальность внедрения методов экспериментальной математики в учебный процесс становится все более очевидной, что открывает новые горизонты для повышения эффективности как школьного обучения, так и подготовки будущих специалистов.

В современном обществе все более отчетливым становится понимание того, что учащиеся в школах должны быть освобождены от необходимости вручную выполнять сложные символьные преобразования и запоминать обширные массивы информации. Образование должно сосредоточиться на развитии навыков творческого мышления, а не на овладении рутинными навыками.

Теоретический анализ и выводы из практики работы со школьниками и студентами показывают, что задачи, использующие компьютерную алгебру, должны быть нестандартными и носить исследовательский характер. Для усвоения теории важно вручную решить несколько упражнений, однако это не должно стать регулярной практикой. Основное применение компьютерных технологий в математике должно заключаться в том, чтобы акцентировать внимание на их роли в выполнении стандартных вычислений, которые при ручном режиме требуют слишком много времени. Кроме того, использование таких технологий должно углубить понимание математической природы изучаемого предмета.

Важным положительным моментом является использование возможностей компьютерных систем математики в исследовательском обучении. Как отмечено автором в статье [32], использование таких компьютерных систем упрощает решение учащимися целого ряда задач, решение которых традиционными средствами оказывается довольно сложным.

Разумеется, встаёт вопрос, какую систему компьютерной алгебры все же использовать в обучении. Чаще всего в качестве таких систем рассматривают Maple и Mathematica, однако их стоимость может стать препятствием для их лицензионного использования в образовательных целях. В настоящее время представляется, что оптимальным выбором является система SageMath. Ее ключевое преимущество состоит в том, что она доступна для бесплатного использования и основана на популярном ныне языке Python.

Отметим, что с системных позиций развитие когнитивных структур выступает как закономерный рост их внутренней организации, который происходит как за счет их расчленения, дифференциации, так и за счет образования новых структур путем интеграции. Как вытекает из генетического подхода, обучение математике в школе должно в сжатой форме воспроизводить исторический процесс рождения и становления знаний. Если же мы взглянем на процесс получения математических знаний, то увидим количественное преобладание метода от конкретного к абстрактному, постепенное, небольшими шагами накопление математических знаний, т. е. интеграции. Однако качественные скачки, прорывы в рождении знаний (например, создание неевклидовой геометрии) происходили путем дифференциации, с помощью дедуктивного метода.

### Заключение / Conclusion

Все рассмотренные схемы математического мышления имеют одну общую особенность: их становление возможно реализовать лишь в течение длительного периода времени, используя сензитивные возможности их развития в каждом возрасте.

Чем больше развиты у человека когнитивные структуры, тем больше возможности получения, анализа и синтеза информации, тем больше степень понимания человеком окружающего мира и самого себя.

Таким образом, в процессе обучения ученику нужно не просто сообщить «сумму знаний», а сформировать у него на соответствующем уровне систему взаимосвязанных знаний, образующих внутренне упорядоченную структуру. Однако формирование такой системы – дело достаточно трудоемкое и требующее много времени. Огромное количество детальных структур, при участии которых человек становится профессионалом, специалистом своего дела, требует того, чтобы ученье начиналось в самом раннем возрасте и продолжалось долгие годы, практически всю жизнь. Весь многолетний опыт преподавания такого предмета, как математика, свидетельствует о необходимости широкого использования при формировании структур математического мышления процесса интеграции структур с применением метода от конкретного к абстрактному, от частного к общему, особенно на ранних стадиях обучения. Логика изучения этого предмета такова, что далеко не всегда возможно первоначальное знакомство с математическими понятиями в их самом общем виде. В обучении оба способа изложения материала должны взаимно дополнять друг друга с постепенным возрастанием роли дифференциации когнитивных структур, метода от общего к частному.

#### Ссылки на источники / References

1. Арнольд В. И. Жесткие и мягкие математические модели. – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.
2. Тестов В. А. Стратегия обучения математике. – М.: Технологическая школа бизнеса, 1999. – 304 с.
3. Semenov A. L., Abylkassymova A. E., Polikarpov S. A. Foundations of Mathematical Education in the Digital Age // Doklady Mathematics. – 2023. – Vol. 107. – № S1. – S1–S9. DOI: 10.1134/S1064562423700564.
4. Боровских А. В. О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. – 2024. – Т. 22. – № 2. – С. 61–82. DOI: 10.55959/LPEJ-24-16.
5. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1965. – С. 245–259.
6. Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. – М.: Учпедгиз, 1960. – С. 10–30.
7. Якиманская И. С. Знания и мышление школьника. – М., 1985. – С. 10.
8. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. – М.: ИНТОР, 1996. – С. 152.
9. Найссер У. Познание и реальность. – М.: Прогресс, 1981. – С. 74.
10. Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления. – С. 13.
11. Холодная М. А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – Томск: Изд-во Том. ун-та; М.: Изд-во «Барс», 1997. – С. 145.
12. Атаханов Р. А. К диагностике развития математического мышления // Вопросы психологии. – 1992. – № 1–2. – С. 60–67.
13. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970. – С. 80.
14. Столяр А. А. Педагогика математики. – Минск: Вышейш. шк., 1969. – 368 с.
15. Гусев В. А. Новый экспериментальный курс геометрии // Математическое образование: традиции и современность: тез. федеральной науч.-практ. конф. – Н. Новгород, 1997. – С. 100.
16. Маничева Г. А. Методические рекомендации по изучению курса «Логика в математических рассуждениях» 5 класс. – Вологда: Изд-во Вол. ИПКиППК, 1996. – 84 с.
17. Зак А. З. Особенности формирования логического мышления в начальной школе // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2022. – № 7-1 (70). – С. 48–54.
18. Кузьмичева Е. А., Шешенко К. С. Формирование логического и алгоритмического мышления в школьном курсе информатики // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы: материалы XV Всерос. науч.-практ. конф. – Воронеж, 2021. – С. 242–247.
19. Палехина Ю. Л. Развитие мышления (логического, комбинаторного, алгоритмического) учащихся младшего школьного возраста на уроках математики // Молодой ученый. – 2024. – № 41 (540). – С. 367–370.



20. Беренчик Е. Е. Развитие математических способностей учащихся с помощью занимательных задач // Развитие математической одаренности младших школьников в современной образовательной среде: сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. – Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2022. – С. 158–162.
21. Posicelskaya M. A., Rudchenko T. A., Semenov A. L. Mathematical elements of elementary education // *Doklady Mathematics*. – 2023. – Vol. 107. – № S1. – S10–S41. DOI: 10.1134/S1064562423700576.
22. Posicelskaya M. A. Constructive Combinatorics in Elementary School Mathematics // *Doklady Mathematics*. – 2023. – Vol. 107. – № S1. – S52–S77. DOI: 10.1134/S1064562423700594.
23. Семенов А. Л., Рудченко Т. А. Задачи, которые «неизвестно-как-решать», в цифровом мире // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VII Междунар. науч. конф. – Красноярск, 2023. – С. 881–884.
24. Микерова Г. Г., Горчарова П. А. Формирование пространственных представлений младших школьников на уроках математики // Развитие математической одаренности младших школьников в современной образовательной среде: сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. – Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2022. – С. 128–134.
25. Батова А. А., Стойлова Л. П. Особенности развития пространственного мышления в младшем школьном возрасте // Педагогическое образование. – 2021. – Т. 2. – № 2. – С. 4–9.
26. Леонтьева Н. В. К вопросу о развитии пространственного мышления у обучающихся старших классов с использованием ИКТ // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2019. – Вып. 21. – С. 337–340.
27. Shabat G. B., Semenov A. L. Computer experiment in teaching mathematics // *Doklady Mathematics*. – 2023. – Vol. 107. – № S1. – S92–S116. DOI: 10.1134/S1064562423700618.
28. Ястребов А. В. Исследовательское обучение математике в школе: монография. – Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018. – 161 с.
29. Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V. The Skies Are Falling: Mathematics for Non-Mathematicians // *Doklady Mathematics*. – 2023. – Vol. 107. – № S1. – S137–S150. DOI: 10.1134/S1064562423700643.
30. Тестов В. А. Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования: международный электронный научно-практический журнал. – 2014. – № 6. – С. 60–67.
31. Тестов В. А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука. – 2016. – № 1. – С. 4–20. DOI: 10.17853/1994-5639-2016-1-4-20.
32. Тестов В. А., Попков Р. А. Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 4(53). – С. 52–68. DOI: 10.34130/1992-2752\_2024\_4\_52.

1. Arnol'd, V. I. (2008). *Zhestkie i myagkie matematicheskie modeli [Hard and soft mathematical models]*, 2-e izd, MCNMO, Moscow, 32 p. (in Russian).
2. Testov, V. A. (1999). *Strategiya obucheniya matematike [Mathematics Teaching Strategy]*, Tekhnologicheskaya shkola biznesa, Moscow, 304 p. (in Russian).
3. Semenov, A. L., Abylkassymova, A. E., & Polikarpov, S. A. (2023). “Foundations of Mathematical Education in the Digital Age”, *Doklady Mathematics*, vol. 107, № S1, S1–S9. DOI: 10.1134/S1064562423700564 (in English).
4. Borovskih, A. V. (2024). “O soderzhanii shkol'nogo matematicheskogo obrazovaniya. Ot soderzhimogo k soderzhaniyu: matematika kak sistema myslitel'nyh sredstv” [About the content of school mathematics education. From contents to the matter: mathematics as a system of thinking tools], *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 20: Pedagogicheskoe obrazovanie*, t. 22, № 2, pp. 61–82. DOI: 10.55959/LPEJ-24-16 (in Russian).
5. Burbaki, N. (1965). “Arhitektura matematiki” [Architecture of Mathematics], *Ocherki po istorii matematiki*, IL, Moscow, pp. 245–259 (in Russian).
6. Piazhe, Zh. (1960). “Struktury matematicheskie i operatornye struktury myshleniya” [Mathematical structures and operational structures of thinking], *Prepodavanie matematiki*, Uchpedgiz, Moscow, pp. 10–30 (in Russian).
7. Yakimanskaya, I. S. (1985). *Znaniya i myshlenie shkol'nika [Knowledge and thinking of a schoolchild]*, Moscow, p. 10 (in Russian).
8. Davydov, V. V. (1996). *Teoriya razvivayushchego obucheniya [Developmental learning theory]*, INTOR, Moscow, p. 152 (in Russian).
9. Najsser, U. (1981). *Poznanie i real'nost' [Cognition and reality]*, Progress, Moscow, p. 74 (in Russian).
10. Piazhe, Zh. (1960). Op. cit., p. 13.
11. Holodnaya, M. A. (1997). *Psihologiya intellekta: paradoksy issledovaniya [Psychology of Intelligence: Research Paradoxes]*, Izd-vo Tom. un-ta, Tomsk; Izd-vo “Bars”, Moscow, p. 145 (in Russian).
12. Atahanov, R. A. (1992). “K diagnostike razvitiya matematicheskogo myshleniya” [On diagnostics of the development of mathematical thinking], *Voprosy psikhologii*, № 1–2, pp. 60–67 (in Russian).



13. Adamar, Zh. (1970). *Issledovanie psikhologii processa izobreteniya v oblasti matematiki* [A study of the psychology of the invention process in the field of mathematics], Sovetskoe radio, Moscow, p. 80 (in Russian).
14. Stolyar, A. A. (1969). *Pedagogika matematiki* [Pedagogy of Mathematics], Vyshejsk. shk., Minsk, 368 p. (in Russian).
15. Gusev, V. A. (1997). "Novyj eksperimental'nyj kurs geometrii" [A new experimental geometry course], *Matematicheskoe obrazovanie: tradicii i sovremennost': tez. federal'noj nauch.-prakt. konf*, N. Novgorod, p. 100 (in Russian).
16. Manicheva, G. A. (1996). *Metodicheskie rekomendacii po izucheniyu kursa "Logika v matematicheskikh rassuzhdeniyah" 5 klass* [Methodological recommendations for studying the course "Logic in Mathematical Reasoning" 5th grade], Izd-vo Vol. IPKiPPK, Vologda, 84 p. (in Russian).
17. Zak, A. Z. (2022). "Osobennosti formirovaniya logicheskogo myshleniya v nachal'noj shkole" [Specific features of logical thinking development in primary school], *Mezhdunarodnyj zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, № 7-1 (70), pp. 48–54 (in Russian).
18. Kuz'micheva, E. A., & Sheshenko, K. S. (2021). "Formirovanie logicheskogo i algoritmicheskogo myshleniya v shkol'nom kurse informatiki" [Development of logical and algorithmic thinking in the school computer science course], *Informacionnye tekhnologii v obrazovatel'nom processe vuza i shkoly: materialy HV Vseros. nauch.-prakt. konf*, Voronezh, pp. 242–247 (in Russian).
19. Palekhina, Yu. L. (2024). "Razvitie myshleniya (logicheskogo, kombinatornogo, algoritmicheskogo) uchashchihsya mladshego shkol'nogo vozrasta na urokah matematiki" [Development of thinking (logical, combinatorial, algorithmic) of primary school students in mathematics lessons], *Molodoj uchenyj*, № 41 (540), pp. 367–370 (in Russian).
20. Berenchik, E. E. (2022). "Razvitie matematicheskikh sposobnostej uchashchihsya s pomoshch'yu zanimatel'nykh zadach" [Developing students' mathematical abilities through entertaining tasks], *Razvitie matematicheskoy odarennosti mladshih shkol'nikov v sovremennoj obrazovatel'noj srede: sb. materialov Vseros. nauch.-prakt. konf*, Mezhhregional'nyj centr innovacionnykh tekhnologij v obrazovanii, Kirov, pp. 158–162 (in Russian).
21. Posicelskaya, M. A., Rudchenko, T. A., & Semenov, A. L. (2023). "Mathematical elements of elementary education", *Doklady Mathematics*, vol. 107, № S1, S10–S41. DOI: 10.1134/S1064562423700576 (in English).
22. Posicelskaya, M. A. (2023). "Constructive Combinatorics in Elementary School Mathematics", *Doklady Mathematics*, vol. 107, № S1, S52–S77. DOI: 10.1134/S1064562423700594 (in English).
23. Semenov, A. L., & Rudchenko, T. A. (2023). "Zadachi, kotorye "neizvestno-kak-reshat", v cifrovom mire" [Problems that are "unknown-how-to-solve" in the digital world], *Informatizaciya obrazovaniya i metodika elektronnoho obucheniya: cifrovye tekhnologii v obrazovanii: materialy VII Mezhdunar. nauch. konf*, Krasnoyarsk, pp. 881–884 (in Russian).
24. Mikerova, G. G., & Gorcharova, P. A. (2022). "Formirovanie prostranstvennykh predstavlenij mladshih shkol'nikov na urokah matematiki" [Development of spatial thinking of primary school students in mathematics lessons], *Razvitie matematicheskoy odarennosti mladshih shkol'nikov v sovremennoj obrazovatel'noj srede: sb. materialov Vseros. nauch.-prakt. konf*, Mezhhregional'nyj centr innovacionnykh tekhnologij v obrazovanii, Kirov, pp. 128–134 (in Russian).
25. Batova, A. A., & Stojlova, L. P. (2021). "Osobennosti razvitiya prostranstvennogo myshleniya v mladshem shkol'nom vozraste" [Specific features of spatial thinking development in primary school age], *Pedagogicheskoe obrazovanie*, t. 2, № 2, pp. 4–9 (in Russian).
26. Leont'eva, N. V. (2019). "K voprosu o razvitii prostranstvennogo myshleniya u obuchayushchihsya starshih klassov s ispol'zovaniem IKT" [On the development of spatial thinking in high school students using ICT], *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, vyp. 21, pp. 337–340 (in Russian).
27. Shabat, G. B., & Semenov, A. L. (2023). "Computer experiment in teaching mathematics", *Doklady Mathematics*, vol. 107, № S1, S92–S116. DOI: 10.1134/S1064562423700618 (in English).
28. Yastrebov, A. V. (2018). *Issledovatel'skoe obuchenie matematike v shkole* [Research-based teaching of mathematics in school]: monografiya, RIO YaGPU, Yaroslavl', 161 p. (in Russian).
29. Vavilov, N. A., Khalin, V. G., & Yurkov, A. V. (2023). "The Skies Are Falling: Mathematics for Non-Mathematicians", *Doklady Mathematics*, vol. 107, № S1, S137–S150. DOI: 10.1134/S1064562423700643 (in English).
30. Testov, V. A. (2014). "Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie" [Mathematical giftedness and its development], *Perspektivy nauki i obrazovaniya: mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal*, № 6, pp. 60–67 (in Russian).
31. Testov, V. A. (2016). "O nekotorykh vidah metapredmetnykh rezul'tatov obucheniya matematike" [On some types of meta-subject learning outcomes in mathematics], *Obrazovanie i nauka*, № 1, pp. 4–20. DOI: 10.17853/1994-5639-2016-1-4-20 (in Russian).
32. Testov, V. A., & Popkov, R. A. (2024). "Issledovatel'skoe obuchenie matematike i sistemy komp'yuternoj algebrы" [Research-based Mathematics Learning and Computer Algebra Systems], *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vyp. 4(53), pp. 52–68. DOI: 10.34130/1992-2752\_2024\_4\_52 (in Russian).