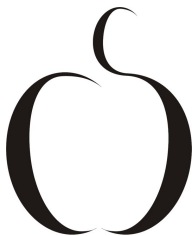


# с/к “Эффективные алгоритмы”

## Лекция 20: Максимальное паросочетание

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ  
<http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/>



# План лекции

## 1 Постановка задачи

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути
- 3 Случай двудольных графов

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути
- 3 Случай двудольных графов
- 4 Общий случай

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути
- 3 Случай двудольных графов
- 4 Общий случай

# Постановка задачи

## Определение

## Определение

- **Сочетанием** (matching) простого графа называется его подмножество рёбер, никакие два из которых не имеют общего конца.

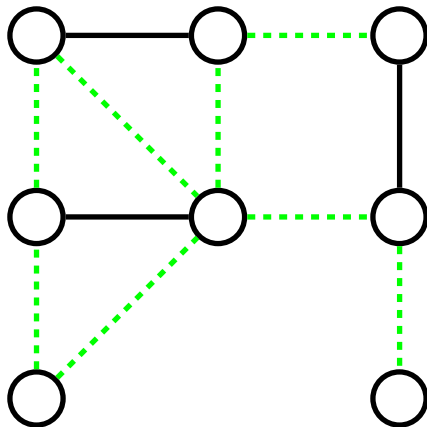


# Постановка задачи

## Определение

- **Сочетанием** (matching) простого графа называется его подмножество рёбер, никакие два из которых не имеют общего конца.
- **Задача о максимальном паросочетании** (matching problem) заключается в нахождении по данному графу сочетания максимального размера.

## Пример сочетания



# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути**
- 3 Случай двудольных графов
- 4 Общий случай

## Дополняющий путь

### Определение

## Дополняющий путь

### Определение

- Вершина называется **свободной относительно сочетания  $M$**  (free w.r.t. a matching  $M$ ), если она не является концом ребра из  $M$ .

## Дополняющий путь

### Определение

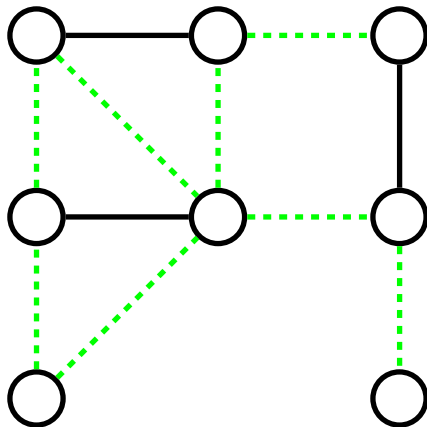
- Вершина называется **свободной относительно сочетания  $M$**  (free w.r.t. a matching  $M$ ), если она не является концом ребра из  $M$ .
- Путь в графе называется **чередующимся относительно  $M$**  (alternating w.r.t.  $M$ ), если в нем чередуются ребра из  $M$  и не из  $M$ .

# Дополняющий путь

## Определение

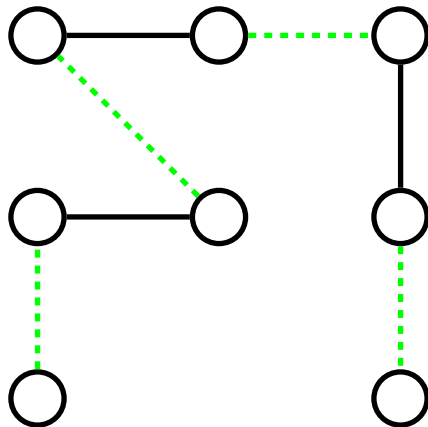
- Вершина называется **свободной относительно сочетания  $M$**  (free w.r.t. a matching  $M$ ), если она не является концом ребра из  $M$ .
- Путь в графе называется **чередующимся относительно  $M$**  (alternating w.r.t.  $M$ ), если в нем чередуются ребра из  $M$  и не из  $M$ .
- Путь называется **дополняющим относительно  $M$**  (augmenting w.r.t.  $M$ ), если он является простым чередующимся путём между двумя свободными вершинами.

## Пример дополняющего пути





## Пример дополняющего пути



## Основное свойство дополняющего пути

### Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

# Основное свойство дополняющего пути

## Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

## Доказательство

⇐ Если  $P$  — дополняющий путь, то симметрическая разность  $M \oplus P$  (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .

# Основное свойство дополняющего пути

## Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

## Доказательство

- ⇐ Если  $P$  — дополняющий путь, то симметрическая разность  $M \oplus P$  (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .
- ⇒ ▶ Пусть  $M, N$  суть не максимальное и максимальное паросочетания, соответственно.

# Основное свойство дополняющего пути

## Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

## Доказательство

- ⇐ Если  $P$  — дополняющий путь, то симметрическая разность  $M \oplus P$  (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .
- ⇒
- ▶ Пусть  $M, N$  суть не максимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
  - ▶ Рассмотрим симметрическую разность  $D = M \oplus N$ .

# Основное свойство дополняющего пути

## Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

## Доказательство

- ⇐ Если  $P$  — дополняющий путь, то симметрическая разность  $M \oplus P$  (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .
- ⇒
- ▶ Пусть  $M, N$  суть не максимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
  - ▶ Рассмотрим симметрическую разность  $D = M \oplus N$ .
  - ▶ Степень каждой вершины в  $D$  не превосходит 2.

# Основное свойство дополняющего пути

## Теорема

Паросочетание  $M$  не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно  $M$ .

## Доказательство

- ⇐ Если  $P$  — дополняющий путь, то симметрическая разность  $M \oplus P$  (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .
- ⇒
- ▶ Пусть  $M, N$  суть не максимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
  - ▶ Рассмотрим симметрическую разность  $D = M \oplus N$ .
  - ▶ Степень каждой вершины в  $D$  не превосходит 2.
  - ▶ Значит,  $D$  является объединением циклов и путей.

## Типы компонент симметрической разности

### Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания  $N$ , синим — рёбра  $M$ . Типы компонент:



## Типы компонент симметрической разности

### Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания  $N$ , синим — рёбра  $M$ . Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $N$ :



# Типы компонент симметрической разности

## Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания  $N$ , синим — рёбра  $M$ . Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $N$ :



- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $M$ :



# Типы компонент симметрической разности

## Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания  $N$ , синим — рёбра  $M$ . Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $N$ :



- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $M$ :



- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат разным сочетаниям:



# Типы компонент симметрической разности

## Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания  $N$ , синим — рёбра  $M$ . Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $N$ :



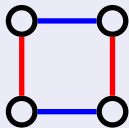
- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат  $M$ :



- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат разным сочетаниям:



- Цикл:



# Завершение доказательства

Завершение доказательства

## Завершение доказательства

### Завершение доказательства

- Поскольку  $|N| > |M|$ , есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих  $N$ , больше, чем рёбер, принадлежащих  $M$ .

## Завершение доказательства

### Завершение доказательства

- Поскольку  $|N| > |M|$ , есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих  $N$ , больше, чем рёбер, принадлежащих  $M$ .
- Единственной такой компонентой является путь, оба конечных ребра которого принадлежат сочетанию  $N$ .

## Завершение доказательства

### Завершение доказательства

- Поскольку  $|N| > |M|$ , есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих  $N$ , больше, чем рёбер, принадлежащих  $M$ .
- Единственной такой компонентой является путь, оба конечных ребра которого принадлежат сочетанию  $N$ .
- А это и есть дополняющий путь относительно  $M$ . □



# Общий вид алгоритма

## MAXIMUM-MATCHING( $G$ )

```
1  $M \leftarrow \emptyset$ 
2 repeat
3     if есть дополняющий путь  $P$  относительно  $M$ 
4         then  $M \leftarrow M \oplus P$ 
5         else return  $M$ 
```

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути
- 3 Случай двудольных графов**
- 4 Общий случай

# Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

# Случай двудольных графов

## Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли)  $V_1$  и  $V_2$ , так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.

# Случай двудольных графов

## Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли)  $V_1$  и  $V_2$ , так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.
- В двудольном графе каждый цикл имеет чётную длину.

# Случай двудольных графов

## Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли)  $V_1$  и  $V_2$ , так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.
- В двудольном графе каждый цикл имеет чётную длину.
- Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе сводится к задаче о максимальном потоке.

# Лемма Холла

## Определение

Паросочетание называется **совершенным** (perfect), если оно содержит все вершины графа.

# Лемма Холла

## Определение

Паросочетание называется **совершенным** (perfect), если оно содержит все вершины графа.

## Лемма Холла

Двудольный граф с долями  $V_1, V_2$  имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда  $|V_1| = |V_2|$  и  $(\forall U \subseteq V_1) |N(U)| \geq |U|$  (где  $N(U)$  — множество соседей вершин множества  $U$ ).



## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

### Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.

## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

### Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли  $V_1$ .

# Поиск дополняющего пути в двудольном графе

## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли  $V_1$ .
- Если на  $i$ -й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины  $L_i$  доли  $V_1$ , то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли  $V_2$ , соединенные с  $L_i$  и не рассматривавшиеся ранее.

# Поиск дополняющего пути в двудольном графе

## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

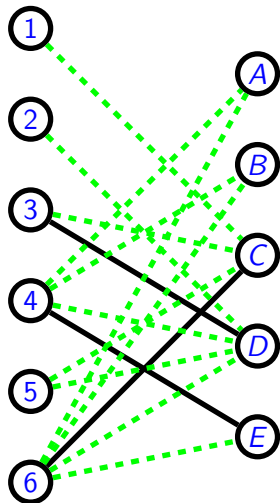
- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли  $V_1$ .
- Если на  $i$ -й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины  $L_i$  доли  $V_1$ , то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли  $V_2$ , соединенные с  $L_i$  и не рассматривавшиеся ранее.
- Если же рассматриваются вершины  $L_i$  доли  $V_2$ , то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли  $V_1$ , соединённые ребрами текущего паросочетания с вершинами  $L_i$ .

# Поиск дополняющего пути в двудольном графе

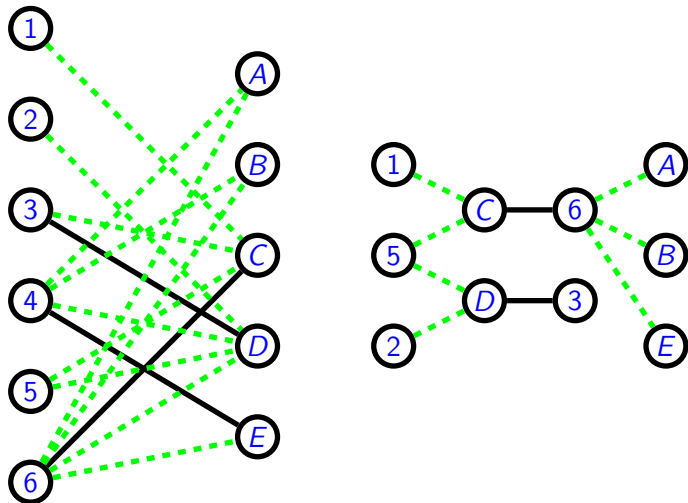
## Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли  $V_1$ .
- Если на  $i$ -й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины  $L_i$  доли  $V_1$ , то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли  $V_2$ , соединенные с  $L_i$  и не рассматривавшиеся ранее.
- Если же рассматриваются вершины  $L_i$  доли  $V_2$ , то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли  $V_1$ , соединённые ребрами текущего паросочетания с вершинами  $L_i$ .
- Нетрудно видеть, что если будет достигнута свободная вершина доли  $V_2$ , то найден дополняющий путь. Если же свободной вершины из  $V_2$  не нашлось, то дополняющего пути нет.

# Пример

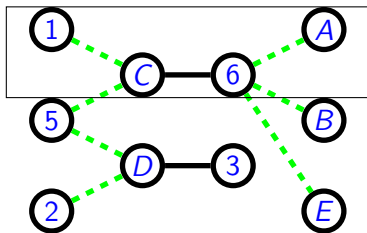
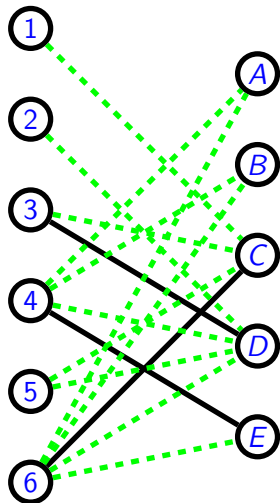


# Пример

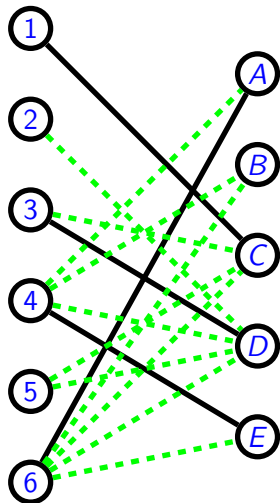




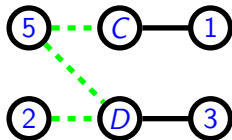
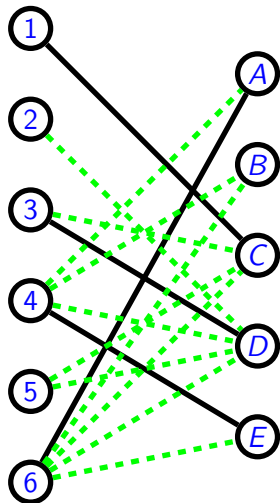
# Пример



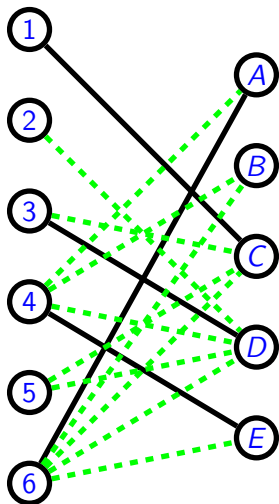
# Пример



# Пример



## Вершинное покрытие



Вершины  $\{4, 6, C, D\}$  являются минимальным вершинным покрытием.

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие  $X$ , размер которого не превосходит размера максимального паросочетания  $M$ .



# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие  $X$ , размер которого не превосходит размера максимального паросочетания  $M$ .
- Разобьём вершины графа на три части:

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие  $X$ , размер которого не превосходит размера максимального паросочетания  $M$ .
- Разобьём вершины графа на три части:
  - 1 Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли  $V_1$ .

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие  $X$ , размер которого не превосходит размера максимального паросочетания  $M$ .
- Разобьём вершины графа на три части:
  - 1 Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли  $V_1$ .
  - 2 Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли  $V_2$ .

# Теорема о вершинном покрытии

## Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

## Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие  $X$ , размер которого не превосходит размера максимального паросочетания  $M$ .
- Разобьём вершины графа на три части:
  - 1 Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли  $V_1$ .
  - 2 Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли  $V_2$ .
  - 3 Оставшиеся вершины.

## Доказательство (продолжение)

Доказательство

## Доказательство (продолжение)

### Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.

## Доказательство (продолжение)

### Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию  $M$ , причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.

## Доказательство (продолжение)

### Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию  $M$ , причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли  $V_2$  из первой части и вершины доли  $V_1$  из второй и третьей частей.



## Доказательство (продолжение)

### Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию  $M$ , причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли  $V_2$  из первой части и вершины доли  $V_1$  из второй и третьей частей.
- Несложно показать, что построенное множество вершин  $X$  является сечением и что разные вершины  $X$  принадлежат разным рёбрам  $M$ .

## Доказательство (продолжение)

### Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию  $M$ , причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли  $V_2$  из первой части и вершины доли  $V_1$  из второй и третьей частей.
- Несложно показать, что построенное множество вершин  $X$  является сечением и что разные вершины  $X$  принадлежат разным рёбрам  $M$ .
- Таким образом,  $|M| \geq |X|$ . □

# План лекции

- 1 Постановка задачи
- 2 Дополняющие пути
- 3 Случай двудольных графов
- 4 Общий случай**

Это были ягоды...

## Определение

Это были ягодки...

## Определение

- Цветком относительно паросочетания  $M$  (blossom w.r.t.  $M$ ) называется цикл нечётной длины с  $r$  рёбрами  $M$  и  $r+1$  ребром не из  $M$ .

Это были ягодки...

## Определение

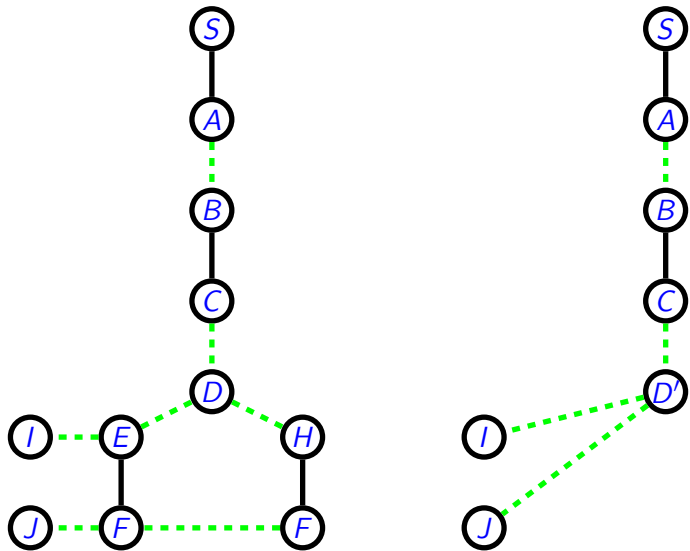
- **Цветком относительно паросочетания  $M$**  (blossom w.r.t.  $M$ ) называется цикл нечётной длины с  $r$  рёбрами  $M$  и  $r + 1$  ребром не из  $M$ .
- **Основанием цветка** (blossom base) называется вершина цветка, в которой встречаются два ребра не из сочетания.

## Это были ягоды...

### Определение

- **Цветком относительно паросочетания  $M$**  (blossom w.r.t.  $M$ ) называется цикл нечётной длины с  $r$  рёбрами  $M$  и  $r + 1$  ребром не из  $M$ .
- **Основанием цветка** (blossom base) называется вершина цветка, в которой встречаются два ребра не из сочетания.
- **Стянутым цветком** (shrunk blossom) называется вершина в стянутом графе, соответствующая цветку в исходном графе.

# Пример





## Стягивание цветков

### Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

## Стягивание цветков

### Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

### Доказательство

## Стягивание цветков

### Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

### Доказательство

- Допустим сперва, что  $M'$  не максимально в  $G'$ . Из этого следует, что в  $G'$  есть дополняющий путь  $P'$  (относительно  $M'$ ).

## Стягивание цветков

### Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

### Доказательство

- Допустим сперва, что  $M'$  не максимально в  $G'$ . Из этого следует, что в  $G'$  есть дополняющий путь  $P'$  (относительно  $M'$ ).
- Если  $P'$  не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно  $M$  в  $G$ .

## Стягивание цветков

### Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

### Доказательство

- Допустим сперва, что  $M'$  не максимально в  $G'$ . Из этого следует, что в  $G'$  есть дополняющий путь  $P'$  (относительно  $M'$ ).
- Если  $P'$  не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно  $M$  в  $G$ .
- Допустим, что  $P'$  содержит стянутый цветок  $B$ .

# Стягивание цветков

## Теорема

Пусть  $M$  — паросочетание графа  $G$ ,  $B$  — цветок в  $G$ . Предположим, что основание цветка не принадлежит  $M$ . Пусть граф  $G'$  и паросочетание  $M'$  получаются из  $G$  и  $M$  стягиванием цветка  $B$ . Тогда  $M'$  является максимальным в  $G'$  тогда и только тогда, когда  $M$  максимально в  $G$ .

## Доказательство

- Допустим сперва, что  $M'$  не максимально в  $G'$ . Из этого следует, что в  $G'$  есть дополняющий путь  $P'$  (относительно  $M'$ ).
- Если  $P'$  не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно  $M$  в  $G$ .
- Допустим, что  $P'$  содержит стянутый цветок  $B$ .
- Поскольку стянутый цветок  $B$  не пересекается с паросочетанием  $M'$ , он является конечной вершиной пути  $P'$ .

# Раскрытие цветка

Доказательство

# Раскрытие цветка

## Доказательство

- Легко видеть, что при раскрытии цветка путь  $P'$  можно дополнить до дополняющего в  $G$ .

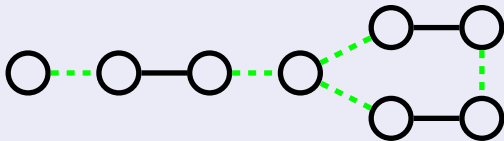
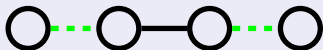


# Раскрытие цветка

## Доказательство

- Легко видеть, что при раскрытии цветка путь  $P'$  можно дополнить до дополняющего в  $G$ .

## Пример



## Продолжение доказательства

Доказательство

## Продолжение доказательства

### Доказательство

- Допустим теперь, что  $M$  не является максимальным в  $G$ .

## Продолжение доказательства

### Доказательство

- Допустим теперь, что  $M$  не является максимальным в  $G$ .
- Значит, в  $G$  есть дополняющий путь  $P$  относительно  $M$ .

## Продолжение доказательства

### Доказательство

- Допустим теперь, что  $M$  не является максимальным в  $G$ .
- Значит, в  $G$  есть дополняющий путь  $P$  относительно  $M$ .
- Считаем, что  $P$  пересекает цветок  $B$  (иначе всё и так ясно).

## Продолжение доказательства

### Доказательство

- Допустим теперь, что  $M$  не является максимальным в  $G$ .
- Значит, в  $G$  есть дополняющий путь  $P$  относительно  $M$ .
- Считаем, что  $P$  пересекает цветок  $B$  (иначе всё и так ясно).
- Поскольку цветок содержит ровно одну вершину не из паросочетания, хотя бы один из концов  $P$  (назовём его  $w$ ) не лежит в цветке.

## Продолжение доказательства

### Доказательство

- Допустим теперь, что  $M$  не является максимальным в  $G$ .
- Значит, в  $G$  есть дополняющий путь  $P$  относительно  $M$ .
- Считаем, что  $P$  пересекает цветок  $B$  (иначе всё и так ясно).
- Поскольку цветок содержит ровно одну вершину не из паросочетания, хотя бы один из концов  $P$  (назовём его  $w$ ) не лежит в цветке.
- Тогда путь от  $w$  до первого пересечения с цветком является дополняющим в  $G'$ .



# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма



# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через  $U$  множество вершин не из паросочетания  $M$ .

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через  $U$  множество вершин не из паросочетания  $M$ .
- Будем строить лес  $F$  (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину  $U$ .

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через  $U$  множество вершин не из паросочетания  $M$ .
- Будем строить лес  $F$  (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину  $U$ .
- Рёбра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин  $U$ .

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через  $U$  множество вершин не из паросочетания  $M$ .
- Будем строить лес  $F$  (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину  $U$ .
- Рёбра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин  $U$ .
- Вершины, находящиеся на чётном расстоянии, будут иметь степень  $2$  (одно ребро из паросочетания, второе — нет).

# Общие идеи алгоритма

## Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через  $U$  множество вершин не из паросочетания  $M$ .
- Будем строить лес  $F$  (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину  $U$ .
- Рёбра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин  $U$ .
- Вершины, находящиеся на чётном расстоянии, будут иметь степень  $2$  (одно ребро из паросочетания, второе — нет).
- Назовём такие вершины **внутренними**, оставшиеся — **внешними**.

## Описание алгоритма

### Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:



# Описание алгоритма

## Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

- 1 Внешняя вершина  $x$  соединена с вершиной  $y$  не из  $F$ .  
Добавить рёбра  $(x, y)$  и  $(y, z) \in M$  в  $F$ .

# Описание алгоритма

## Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

- 1 Внешняя вершина  $x$  соединена с вершиной  $y$  не из  $F$ .  
Добавить рёбра  $(x, y)$  и  $(y, z) \in M$  в  $F$ .
- 2 Соединены две внешние вершины из разных компонент.  
Корни этих компонент соединены дополняющим путём.

# Описание алгоритма

## Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

- 1 Внешняя вершина  $x$  соединена с вершиной  $y$  не из  $F$ .  
Добавить рёбра  $(x, y)$  и  $(y, z) \in M$  в  $F$ .
- 2 Соединены две внешние вершины из разных компонент.  
Корни этих компонент соединены дополняющим путём.
- 3 Соединены две внешние вершины  $x$  и  $y$  из одной компоненты. Рассмотрим цикл  $C$  компоненты, содержащий вершины  $x, y$ , а также путь, ведущий из корня компоненты в этот цикл. Изменить рёбра сочетания вдоль этого пути (размер сочетания при этом не изменится) и стянуть найденный цветок.

## Описание алгоритма

### Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

- 1 **Внешняя вершина  $x$  соединена с вершиной  $y$  не из  $F$ .**  
Добавить рёбра  $(x, y)$  и  $(y, z) \in M$  в  $F$ .
- 2 **Соединены две внешние вершины из разных компонент.**  
Корни этих компонент соединены дополняющим путём.
- 3 **Соединены две внешние вершины  $x$  и  $y$  из одной компоненты.** Рассмотрим цикл  $C$  компоненты, содержащий вершины  $x, y$ , а также путь, ведущий из корня компоненты в этот цикл. Изменить рёбра сочетания вдоль этого пути (размер сочетания при этом не изменится) и стянуть найденный цветок.
- 4 **Каждая внешняя вершина соединена только со внутренними вершинами.** Значит, текущее паросочетание максимально.

## Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?

## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть  $F$  содержит  $p$  внутренних вершин и  $q$  внешних.

## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть  $F$  содержит  $p$  внутренних вершин и  $q$  внешних.
- Ясно, что  $q - p = |U|$ .



## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть  $F$  содержит  $p$  внутренних вершин и  $q$  внешних.
- Ясно, что  $q - p = |U|$ .
- Итак, внешних вершин на  $|U|$  больше, чем внутренних.

## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть  $F$  содержит  $p$  внутренних вершин и  $q$  внешних.
- Ясно, что  $q - p = |U|$ .
- Итак, внешних вершин на  $|U|$  больше, чем внутренних.
- Но каждая внешняя вершина может сочтаться только со внутренней. Значит, хотя бы для  $|U|$  из них не найдется пары.

## Пояснение к последнему шагу

### Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть  $F$  содержит  $p$  внутренних вершин и  $q$  внешних.
- Ясно, что  $q - p = |U|$ .
- Итак, внешних вершин на  $|U|$  больше, чем внутренних.
- Но каждая внешняя вершина может сойтаться только со внутренней. Значит, хотя бы для  $|U|$  из них не найдется пары.
- Поскольку в текущем паросочетании пары нет как раз у  $|U|$  вершин, то оно максимально.

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер  $F$ , либо уменьшаем размер  $G$ , либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер  $F$ , либо уменьшаем размер  $G$ , либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более  $|V|$  раз.

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер  $F$ , либо уменьшаем размер  $G$ , либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более  $|V|$  раз.
- Стягивается не более  $|V|$  цветков.



# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер  $F$ , либо уменьшаем размер  $G$ , либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более  $|V|$  раз.
- Стягивается не более  $|V|$  цветков.
- Нахождение цветка или дополняющего пути требует времени  $O(|E|)$ .

# Анализ времени работы

## Лемма

Время работы представленного алгоритма есть  $O(|V|^4)$ .

## Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер  $F$ , либо уменьшаем размер  $G$ , либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более  $|V|$  раз.
- Стягивается не более  $|V|$  цветков.
- Нахождение цветка или дополняющего пути требует времени  $O(|E|)$ .
- Итого,  $O(|V|^2|E|)$ . □

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

## Что мы узнали за сегодня?

### Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.

## Что мы узнали за сегодня?

### Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.

## Что мы узнали за сегодня?

### Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.
- В двудольном графе размер максимального паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия.

## Что мы узнали за сегодня?

### Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.
- В двудольном графе размер максимального паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия.
- В общем случае максимальное паросочетание находится за время  $O(|V|^4)$ .

Спасибо за внимание!