Семинар по сложности булевых функций

Лекция 8: Суперполиномиальные нижние оценки для монотонных схем

А. Кноп

Computer Science клуб при ПОМИ
http://compsciclub.ru

20.11.11

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

Лемма о ромашках

Определение

Ромашка с p лепестками и центром E — это такой набор множеств $S_1, \ldots, S_p$, что для любых $i \neq j$ верно: $S_i \cap S_j = E$.

Лемма

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство н пустых множеств, мощность которых не превосходит ℓ. Тогда, если $|\mathcal{F}| > \ell!(p-1)^{\ell}$, то $\mathcal{F}$ содержит ромашку с p лепестками.

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

Функция клики

Определение

Функция клики — это такая функция $f_n = \mathrm{CLIQUE}(n, k)$ от $\binom{n}{2}$ аргументов $x_{i,j}$, по одному на каждое возможное ребро графа на n вершинах, что функция равна единице в том и только том случае, если в соответствующем графе есть клика из k вершин.

Индикатор клики и (m, l) - аппроксиматор

Определение

Для множества вершин X, индикатор клики X — это такая монотонная булева функция $\lceil X \rceil$ от $\binom{|X|}{2}$ переменных, что $\lceil X \rceil(E) = 1$ тогда и только тогда, когда граф E — клика:

$$\lceil X \rceil = \bigwedge_{i,j \in X : i<j} x_{i,j}.$$

Определение

Функция A — (m, ℓ)-аппроксиматор, если он равен дизъюнкции не более, чем m индикаторов клики, чьи множества вершин состоят не белее, чем из ℓ вершин:

$$A = \bigvee_{t=1}^{r} \lceil X_t \rceil = \bigvee_{t=1}^{r} \bigwedge_{i,j \in X : i<j} x_{i,j} \ (r \leq m, |X_t| \leq \ell).$$

Построение аппроксиматора

Определение

Пусть у нас есть множество $\mathcal{F}$ из более чем $m := \ell!(p-1)^\ell$ ℓ-элементных множеств. Тогда **выщипыванием** мы назовем следующую последовательность действий:

- Воспользуемся леммой о ромашках и найдем ромашку.
- Заменим все лепестки на центра ромашки.
- Если $|\mathcal{F}| > m$, то повторим процедуру.

Построение аппроксиматора

Будем строить аппроксиматор индукционно. Пусть $m = \ell!(p-1)^\ell$, тогда

- Если $C = x_{i,j}$, то аппроксиматор C это $\lceil\{i,j\}\rceil$
- Если $C = A \vee B$, где $A = \bigvee_{i=1}^{r} \lceil X_i \rceil$ и $B = \bigvee_{i=1}^{s} \lceil Y_i \rceil$ $(r, s \le m)$, то в качестве аппроксиматора C будем рассматривать $\bigvee_{i=1}^{t} \lceil Z_i \rceil$, где Z_i — это элементы множества $\{X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s\}$ после применения процедуры выщипывания.
- Если $C = A \wedge B$, где $A = \bigvee_{i=1}^{r} \lceil X_i \rceil$ и $B = \bigvee_{i=1}^{s} \lceil Y_i \rceil$, то аппроксиматором C будет $\bigvee_{i=1}^{t} \lceil Z_i \rceil$, где Z_i — это элементы множества $\bigcup_{i,j:|X_i \cup Y_j| \le \ell} \{X_i \cup Y_j\}$ после применения процедуры выщипывания.

План лекции

Положительные и отрицательные графы

Определение

Граф будем называть **положительным**, если он состоит из k клик и $n-k$ изолированных вершин.

Замечание

Положительных графов — $\binom{n}{k}$.

Определение

Граф будем называть **отрицательным**, если его вершины раскрашены в $k-1$ цвет, и вершины одинаковых цветов в нем не смежны.

Замечание

Отрицательных графов — $(k-1)^n$.

Негативная оценка

Зафиксируем схему F, вычисляющую $f_n = CLIQUE(n,k)$, и ее аппроксиматор F'. Покажем, что аппроксиматор должен совершать много ошибок.

Лемма

Любой аппроксиматор либо отвергает все графы, либо ошибочно принимает хотя бы $(k-1)^n \cdot (1 - \frac{\ell^2}{k-1})$ отрицательных графов.

Позитивная оценка

Теперь покажем, что если размер F мал, то аппроксиматор совершает мало ошибок.

Лемма

Количество положительных графов, ошибочно отклоняемых F', не превосходит $\mathrm{size}(F) \cdot m^2 \binom{n-\ell-1}{k-\ell-1}$.

Лемма

Количество отрицательных графов, ошибочно принимаемых F', не превосходит $\mathrm{size}(F) \cdot m^2 \ell^{2p}(k-1)^{n-p}$.

Теорема Разборова–Андреева

Теорема

Для $3 \le k \le \sqrt[4]{n}$ монотонная сложность $\mathrm{CLIQUE}(n,k)$ равна $n^{\Omega(\sqrt{k})}$.

Доказательство

Мы доказали, что любой аппроксиматор совершает много ошибок. Но также доказано, что если схема мала, то ее аппроксиматор совершает мало ошибок. Значит, схема большая. $\square$

Улучшения

Теорема (Alon–Boppana 1987)

Для фиксированного $k \ge 3$ монотонная сложность $\mathrm{CLIQUE}(n,k)$ равна $\Omega((\frac{n}{\log^2(n)})^k)$.

Теорема (Alon–Boppana 1987)

Для растущего $k \le \frac{1}{4}(\frac{n}{\log(n)})^{2/3}$ монотонная сложность $\mathrm{CLIQUE}(n,k)$ равна $2^{\Omega(\sqrt{k})}$.

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

Простые оценки

Теорема

Для $k \leq \frac{n}{2}$ любая монотонная схема, вычисляющая $\mathrm{CLIQUE}(n,k)$, имеет размер больше, чем $2^{\Omega(k^{1/3})}$.

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

Сопряженная функция

Определение

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — булева функция, тогда будем называть $f^*(x_1,\ldots,x_n) = \neg f(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)$ — сопряженной к $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Замечание

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ — монотнна, то $f^*(x_1,\ldots,x_n)$ тоже монотонна.

Сопряженная функция к функции клики

Определение

Введем обозначение: $VC(n,k) = (\mathrm{CLIQUE}(n,k))^*$.

Замечание

Функция $VC(n,k)$ принимает граф G тогда и только тогда, когда в G нет независимого множества с $n-k$ вершинами. Иначе говоря, $VC(n,k)$ принимает G, если и только если $\tau(G) > k$ ($\tau(G)$ — это минимальный размер контролирующего множества).

Несколько фактов о графах

Определение

Назовем граф G — τ-критическим, если для любого $e \in E(G)$ верно, что $\tau(G-e) < \tau(G)$.

Лемма

В любом τ-критическом графе G есть не более $2\tau(G)$ не изолированных вершин.

Теорема (Erdos–Hajnal-Moon 1964)

В любом τ-критическом графе G есть не более $\binom{\tau(G)+1}{2}$ ребер.

План лекции

1. Сложность детектирования маленьких клик
   - Вспомогательные факты
   - Основные определения
   - Оценки качества работы аппроксиматора
2. Легкость детектирования больших клик
   - Необходимые определения
   - Оценка сложности больших клик

Подготовка

Определение

Обозначим за $\mathrm{Crit}(n,k)$ множество всех τ-критических графов с множеством вершин $[n]$ и $\tau(H) = k+1$.

Определение

Пусть F — семейство функций $f : [n] \to [r]$, тогда $\Phi_F(X)$ — дизъюнкция по всем графам $H \in \mathrm{Crit(n,k)}$ и функциям $f \in F$ следующих формул:

$$K_{f,H}(X) = \bigwedge_{\{a,b\}\in E(H)} \bigwedge_{e \in f^{-1}(a)\times f^{-1}(b)} x_e.$$

Подготовка

Определение

Пусть F — семейство функций $f : [n] \to [r]$. Семейство F называется s-совершенным если для любого $S \subset [n]$ такого, что $|S| = s$ существует f из F такое, что $|f(S)| = |S|$.

Замечание

В литературе такие множества иногда называют (n, r, s)-совершенным семействами хэшей.

Лемма

Если F — (n, r, s)-совершенное семейство хэшей, $s = 2(k+1)$ и $r \geq s$, то Φ_F вычисляет $\mathrm{VC}(n, k)$.

Результат

Теорема

Для любого фиксированного k функция $\mathrm{CLIQUE}(n, n-k)$ может быть вычислена монотонной схемой ДеМоргана размера $O(n^2 \log(n))$. Схема остается полиномиальной по n, пока $k = O(\sqrt{\log(n)})$.

Спасибо за внимание!