

Задание 9 (на 6.11).

CS 47. Предъявите функцию, которая существенно зависит от всех своих аргументов, детерминированная запросовая сложность которой не превосходит $\log(n)$.

CS 48. Постройте такую булеву схему, которая перемножает две квадратных булевых матрицы (сложение — *xor*, а умножением *and*), что ее глубина: а) $O(n^2)$ б) $O(\log(n))$.

CS 49. а) Сколько существует булевых функций от n переменных? б) Сколько существует булевых схем от n переменных размера s ? в) Докажите, что существует булева функция от n переменных, для подсчета которой необходима схема размером не менее $\frac{2^n}{100n}$

CS 50. Семейство булевых функций $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ имеет схемную сложность не более $s(n)$, если для любого n найдется такая булева схема размера не более $s(n)$, что она вычисляет функцию f_n . Докажите, что существует неразрешимый язык, схемная сложность которого не превосходит n .

CS 39. Докажите, что если $SAT \in PCP(o(\log(n)), 1)$, то $P = NP$.

CS 41. Докажите, что задача $2SAT$ лежит в $DSPACE[\log^2(n)]$.

CS 42. Определим кванторную пропозициональную формулу: она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где ϕ — пропозициональная формула от переменных x_1, \dots, x_n , а $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ — кванторы. Переменные x_i принимают значения $\{0, 1\}$, истинность формулы определяется естественным образом. Обозначим $TQBF$ — это множество истинных кванторных пропозициональных формул. Докажите, что $TQBF$ лежит в $PSPACE$.

CS 43. Докажите, что язык графов с циклом лежит в классе $DSPACE[\log(n)]$.

CS 45. Рассмотрим функцию $f = Maj(x_1, x_2, x_3)$, которая возвращает бит, который чаще встречается на входе. Докажите, что $R(f) \leq \frac{8}{3}$

CS 46. Рассмотрим функцию $f = \bigvee_{i=1}^n x_i$. Докажите, что $R(f) = n$.