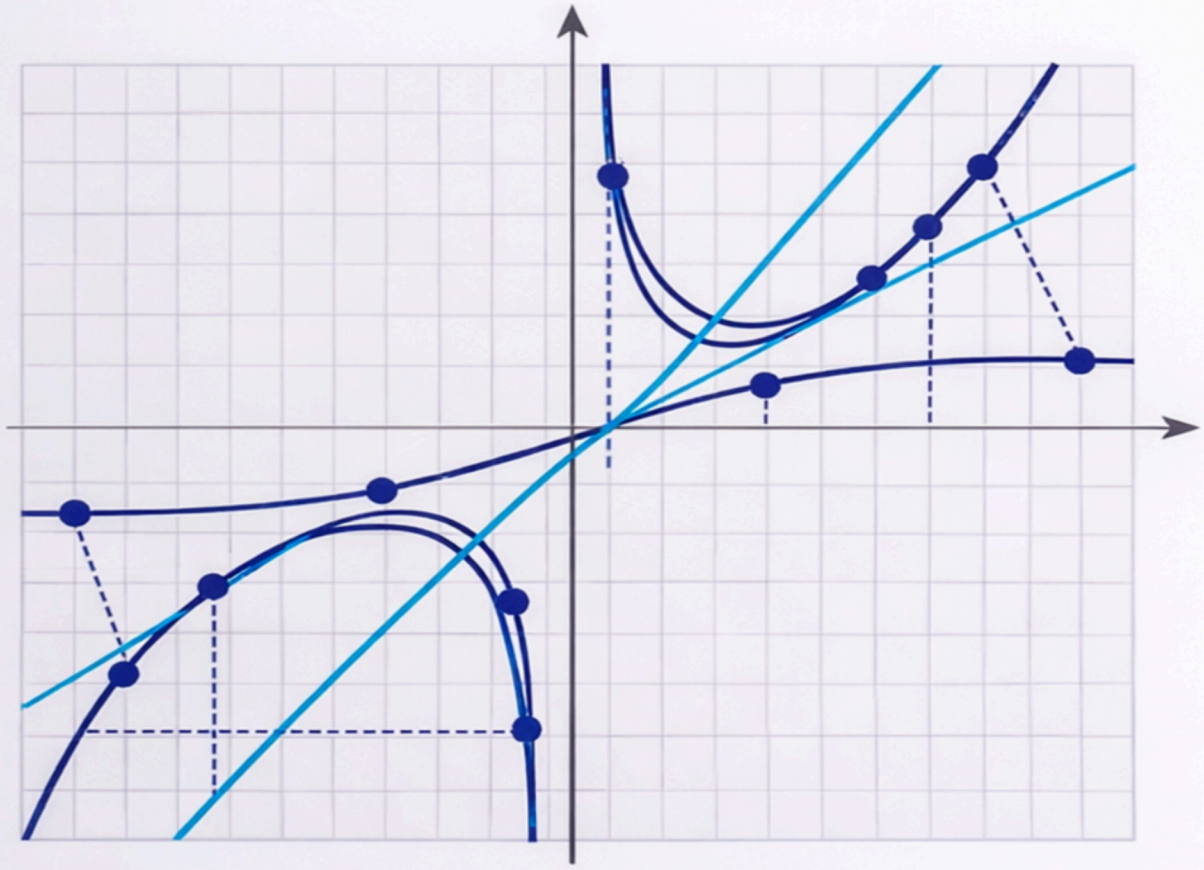
Математическая вертикаль

Тестирования учителей математики

проект «Математическая вертикаль»

Условия, ответы, решения и критерии

2017–2025



@school_maths_ru | vk.com/school_maths_ru

Введение

В сборнике представлены материалы тестирований учителей математики проекта «Математическая вертикаль» за 2017–2025 годы: условия, варианты, ответы, решения и критерии оценивания.

Сборник предназначен для подготовки к тестированию учителей математики, желающих работать в проекте «Математическая вертикаль».

Источники

Архив тестирований проекта «Математическая вертикаль»
https://vertical.sch-int.ru/kak-rabotat-v-proekte/arhiv-testirovanij/

Материалы проекта «Математическая вертикаль» (МГУ)
https://vertical.math.msu.ru/materialy/

Оглавление

2017

30.11.2017 Пилотное тестирование, вариант 1 - условия; решения и критерии 5

30.11.2017 Пилотное тестирование, вариант 2 - условия; решения и критерии 6

24.12.2017 Городское тестирование, вариант 1 - условия 17

2018

01.03.2018 Тестирование учителей математики - условия 19

28.05.2018 Тестирование учителей математики - варианты 1-2 20

03.06.2018 Тестирование учителей математики - вариант 1 21

03.06.2018 Тестирование учителей математики - вариант 2 22

10.06.2018 Тестирование учителей математики - вариант 1 23

10.06.2018 Тестирование учителей математики - вариант 2 24

11.09.2018 Тестирование учителей математики - варианты 1-2; ответы 25

27.09.2018 Резервное тестирование в РЦ «Интеллектуал» - алгебра и геометрия 27

27.09.2018 Подготовительный вариант - алгебра, демоверсия 29

27.09.2018 Геометрия. Пробный вариант - условия 30

13.12.2018 Квалификационная работа - варианты 1-2; ответы 31

2019

02.2019 МИРЭА, демоверсия - задачи для тестирования 33

02.2019 МИРЭА - вариант 1 34

02.2019 МИРЭА - вариант 2 35

24.03.2019 Городское тестирование - вариант 1 36

24.03.2019 Городское тестирование - вариант 2 38

18.04.2019 Квалификационная работа - варианты 1-2; ответы 40

26.08.2019 Квалификационная работа - вариант 1 42

26.08.2019 Квалификационная работа - вариант 2 43

26.08.2019 Квалификационная работа - ответы и критерии 44

28.11.2019 Квалификационная работа - вариант 1 45

28.11.2019 Квалификационная работа - вариант 2 46

2021

27.03.2021 Квалификационная работа - вариант 1 47
27.03.2021 Квалификационная работа - вариант 2 48
27.03.2021 Квалификационная работа - ответы и критерии 49
28.08.2021 Квалификационная работа - условия 50
28.08.2021 Квалификационная работа - ответы и критерии 51

2022

19.03.2022 Квалификационная работа - вариант 10 52
19.03.2022 Квалификационная работа - ответы и критерии 53
19.03.2022 Квалификационная работа - вариант 14 54
19.03.2022 Квалификационная работа - ответы и критерии 55
18.06.2022 Квалификационная работа - условия, решения, ответы и критерии 56
27.08.2022 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 58

2023

01.04.2023 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 60
15.04.2023 Квалификационная работа - условия 63
15.04.2023 Квалификационная работа - ответы и критерии 65
10.06.2023 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 68
26.08.2023 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 70

2024

06.04.2024 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 72
20.04.2024 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 74
22.06.2024 Квалификационная работа - условия; ответы и критерии 76
26.08.2024 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 78

2025

05.04.2025 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 80
19.04.2025 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 82
17.06.2025 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 84
26.08.2025 Квалификационная работа - условия, ответы и критерии 86

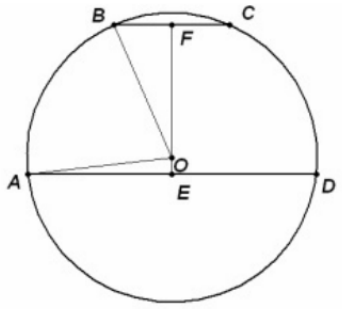
Код участника: _____

ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 1

1. Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-8n+17}{n-5}$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Вычислите $10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}+\dfrac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right)$.
3. Вычислите $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^5$.
4. Не находя корней уравнения $3x^2-4x-1=0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{5}-3$.
5. Найдите все числа вида $\overline{32a5b4}$, которые кратны 72.
6. Решите неравенство $\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-97}$.
7. Найдите все значения a, при которых неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполняется для всех $x \in [1;3]$.
8. Ахиллес догонял черепаху, и когда расстояние между ними сократилось в 19 раз и составило 6 м, черепаха остановилась. Какой путь с момента начала погони проделала черепаха, если её скорость в 37 раз меньше скорости Ахиллеса?
9. Найдите все значения a, при которых уравнение $4\sin x + 5\cos x = a^2$ имеет бесконечно много решений.
10. Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?
11. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.
12. Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

Задача. Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 25, имеют длину 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.



Решение.

Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 7$, а $AE = ED = 20$.

Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из ΔBOF находим $OF = \sqrt{25^2+7^2} = \sqrt{676} = 26$,

2) из ΔAOF находим $OE = \sqrt{25^2-20^2} = \sqrt{225} = 15$.

Отсюда длина искомого отрезка $EF = OE + OF = 41$.

Ответ: 41.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

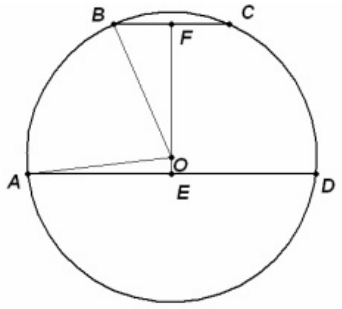
Код участника: _____

ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 2

1. Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-12n+30}{n-3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Вычислите $(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0{,}5})(2^{-1}+81^{-0{,}25})$.
3. Вычислите $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^5$.
4. Не находя корней уравнения $4x^2-5x-1=0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{3}-2$.
5. Найдите все числа вида $\overline{35a7b2}$, которые кратны 72.
6. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-1|} < \dfrac{1}{|2x+1|}$.
7. Найдите все значения a, при которых уравнение $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет 4 различных корня.
8. По окружности движутся два тела: первое тело проходит круг на 2 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности проходит каждое тело за 1 с?
9. Найдите все значения a, при которых уравнение $2\sin x - 3\cos x = -a^2$ имеет бесконечно много решений.
10. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?
11. Сформулируйте признаки параллелограмма.
12. Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

Задача. Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 17, имеют длину 16 и $4\sqrt{30}$. Найдите расстояние между этими хордами.



Решение.

Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 8$, а $AE = ED = 2\sqrt{30}$.

Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из ΔBOF находим $OF = \sqrt{17^2+8^2} = \sqrt{361} = 19$,

2) из ΔAOF находим $OE = \sqrt{17^2-120} = \sqrt{169} = 13$.

Отсюда длина искомого отрезка $EF = OE + OF = 32$.

Ответ: 32.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 1

Задача 1. (2 балла) Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-8n+17}{n-5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение $f(n) = \dfrac{n^2-8n+17}{n-5} = n-3+\dfrac{2}{n-5}$ принимает целые значения при $n-5 = \pm 1$ или $n-5 = \pm 2$, т. е. при $n = 6, n = 4, n = 3, n = 7$.

Имеем $f(3) = f(4) = -1$; $f(6) = f(7) = 5$.

Ответ: -1 (при $n = 3$ и $n = 4$); 5 (при $n = 6$ и $n = 7$).

Критерии:

верное решение — 2 балла;

есть верная последовательность всех шагов решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 2. (1 балл) Вычислите $10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \dfrac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right)$.

Решение.

$$10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right) = 10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{7}{2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{7\cdot(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})}{2+5} + \frac{3\cdot(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})}{2-5}\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}}\left((2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}) - (2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}) = -2 \cdot 10^{-\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} = -2.$$

Ответ: -2.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 3. (1 балл) Вычислите $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^5$.

Решение.

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}\right)^5 =$$

$$= \left(|\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1|\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Ответ: 32.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 4. (2 балла) Не находя корней уравнения $3x^2 - 4x - 1 = 0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{5} - 3$.

Решение. Пусть $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$. По теореме Виета произведение корней равно $-\frac{1}{3}$, поэтому корни разных знаков. Пусть x_1 — это меньший корень, тогда $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Заметим, что $\sqrt{5} - 3 < 0$, поэтому если $f(\sqrt{5} - 3) > 0$, то $x_1 > \sqrt{5} - 3$, а иначе $x_1 < \sqrt{5} - 3$. Поскольку $f(\sqrt{5} - 3) = 3(\sqrt{5} - 3)^2 - 4(\sqrt{5} - 3) - 1 = 3(5 - 6\sqrt{5} + 9) - 4\sqrt{5} + 12 - 1 = 53 - 22\sqrt{5} = \sqrt{2809} - \sqrt{2420} > 0$, получаем $x_1 > \sqrt{5} - 3$.

Ответ: $x_1 > \sqrt{5} - 3$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

задача сведена к сравнению значения функции в точке $\sqrt{5} - 3$ с нулём, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 5. (2 балла) Найдите все числа вида $\overline{32a5b4}$, которые кратны 72.

Решение. Число $\overline{32a5b4}$ кратно 72, если оно делится на 8 и на 9. По признаку делимости числа на 8 получаем, что число $\overline{5b4}$ должно делиться на 8, т. е. подходят $b = 0$, $b = 4$ и $b = 8$. Следовательно, числа $\overline{32a504}$, $\overline{32a544}$ и $\overline{32a584}$ должны делиться на 9. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Тогда получим, что для числа $\overline{32a504}$ подходит только $a = 4$; для числа $\overline{32a544}$ подходят $a = 0$ и $a = 9$; для числа $\overline{32a584}$ — только $a = 5$.

Получаем числа 324504, 320544, 329544, 325584.

Ответ: 324504, 320544, 329544, 325584.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

найдены три варианта ответа из четырёх — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 6. (2 балла) Решите неравенство $\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-97}$.

Решение.

$$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-97} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x+1|-1 > |x+1|-97; \\ |x+1|-97 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| \geqslant 97 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+1 \leqslant -97; \\ x+1 \geqslant 97 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant -98; \\ x \geqslant 96. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -98] \cup [96; +\infty)$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 7. (2 балла) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$(x-3a)(x+2a+1)<0$$

выполняется для всех $x\in[1;3]$.

Решение. Пусть $f(x)=(x-3a)(x+2a+1)$. Решением неравенства $f(x)<0$ является интервал $(x_1;x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x)=0$. Неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполняется для всех $x\in[1;3]\Leftrightarrow[1;3]\subset(x_1;x_2)\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)<0,\\ f(3)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-3a)(2a+2)<0,\\ (3-3a)(2a+4)<0.\end{cases}$

Отсюда находим $a\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Критерии:
верное решение — 2 балла;
присутствуют все шаги решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;
иначе — 0 баллов.

Задача 8. (2 балла) Ахиллес догонял черепаху, и когда расстояние между ними сократилось в 19 раз и составило 6 м, черепаха остановилась. Какой путь с момента начала погони проделала черепаха, если её скорость в 37 раз меньше скорости Ахиллеса?

Решение. Пусть v — скорость черепахи, тогда $37v$ — скорость Ахиллеса. Из условия следует, что изначально расстояние между Ахиллесом и черепахой было $19\cdot 6=114$ м. Пусть t — время погони Ахиллеса за черепахой. Тогда $t=\dfrac{114-6}{37v-v}=\dfrac{3}{v}$. Следовательно, черепаха за время погони проползла $S=t\cdot v=\dfrac{3}{v}\cdot v=3$ м.

Ответ: 3 м.

Критерии:
верное решение — 2 балла;
иначе — 0 баллов.

Задача 9. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение $4\sin x+5\cos x=a^2$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента. Имеем

$$4\sin x+5\cos x=\sqrt{41}\cdot\sin(x+\varphi),$$

где $\varphi=\arccos\frac{4}{\sqrt{41}}$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений, если $a^2\leqslant\sqrt{41}\Leftrightarrow a\in[-\sqrt[4]{41};\sqrt[4]{41}]$.

Ответ: $[-\sqrt[4]{41};\sqrt[4]{41}]$.

Критерии:
верное решение — 2 балла;
иначе — 0 баллов.

Задача 10. (2 балла) Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?

Решение. Сумма цифр десятизначного числа равна 3 в трёх случаях:

1) В записи одна 3 и остальные 0. Такое число единственно — 3000000000.

2) В записи одна 2, одна цифра 1 и остальные 0. Если 2 стоит на первой позиции, а 1 может стоять на остальных 9 позициях — таких чисел 9. Аналогично, 9 чисел, в которых 1 стоит на первой позиции, а 2 на остальных 9 позициях.

3) В записи числа три 1 и остальные 0. Одна 1 стоит на первой позиции, у второй единицы — 9 вариантов, а у третьей — 8 вариантов. Но поскольку две единицы одинаковы, все числа мы посчитали 2 раза. Таким образом, имеем $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ вариантов.

Итого получаем $1 + 9 + 9 + 36 = 55$ вариантов.

Ответ: 55.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется ошибка в подсчёте количества вариантов в одном из трёх случаев построения подходящего числа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 11. (1 балл) Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.

1) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2) В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

Критерии:

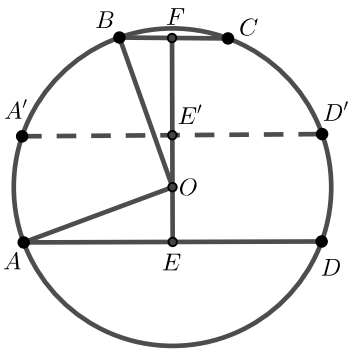
приведены оба основных свойства (равенство углов, совпадение медианы, биссектрисы и высоты) — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 12. (2 балла) Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

«**Задача.** Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 25, имеют длины 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.

Решение. В задаче возможны два расположения хорды AD (штриховой линией $A'D'$ обозначен второй случай). Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 7$, а $AE = ED = 20$.



Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из $\triangle BOF$ находим $OF = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{676} = 24$,

2) из $\triangle AOE$ находим $OE = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15$.

Отсюда длина искомого отрезка в первом случае $EF = OE + OF = 39$. Длина отрезка $E'F = OF - OE' = 24 - 15 = 9$.

Ответ: 49 и 9.»

Критерии:

найдена ошибка в теореме Пифагора, приведено верное решение задачи — 2 балла;

найдена ошибка в теореме Пифагора, одна из конфигураций рассмотрена и доведена до верного ответа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 2

Задача 1. (2 балла) Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-12n+30}{n-3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение $f(n) = \dfrac{n^2-12n+30}{n-3} = n-9+\dfrac{3}{n-3}$ принимает целые значения при $n-3 = \pm 1$ или $n-3 = \pm 2$, т. е. при $n = 4, n = 2, n = 0, n = 6$.

Имеем $f(4) = f(2) = -10$; $f(0) = f(6) = -2$.

Ответ: -10 (при $n = 0$ и $n = 2$); -2 (при $n = 4$ и $n = 6$).

Критерии:
верное решение — 2 балла;
есть верная последовательность всех шагов решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;
иначе — 0 баллов.

Задача 2. (1 балл) Вычислите $(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0{,}5})(2^{-1}+81^{-0{,}25})$.

Решение.

$$(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0{,}5})(2^{-1}+81^{-0{,}25}) = \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3} = \frac{35}{216}.$$

Ответ: $\dfrac{35}{216}$.

Критерии:
верное решение — 1 балл;
иначе — 0 баллов.

Задача 3. (1 балл) Вычислите $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^5$.

Решение.

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\right)^5 =$$
$$= \left(|\sqrt{3}+1|-|\sqrt{3}-1|\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Ответ: 32.

Критерии:
верное решение — 1 балл;
иначе — 0 баллов.

Задача 4. (2 балла) Не находя корней уравнения $4x^2 - 5x - 1 = 0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{3} - 2$.

Решение. Пусть $f(x) = 4x^2 - 5x - 1$. По теореме Виета произведение корней равно $-\frac{1}{4}$, поэтому корни разных знаков. Пусть x_1 — это меньший корень, тогда $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Заметим, что $\sqrt{3} - 2 < 0$, поэтому если $f(\sqrt{3} - 2) > 0$, то $x_1 > \sqrt{3} - 2$, а иначе $x_1 < \sqrt{3} - 2$. Поскольку $f(\sqrt{3} - 2) = 4 \cdot (\sqrt{3} - 2)^2 - 5(\sqrt{3} - 2) - 1 = 4(3 - 4\sqrt{3} + 4) - 5\sqrt{3} + 10 - 1 = 37 - 21\sqrt{3} = \sqrt{1369} - \sqrt{1323} > 0$, получаем $x_1 > \sqrt{3} - 2$.

Ответ: $x_1 > \sqrt{3} - 2$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

задача сведена к сравнению значения функции в точке $\sqrt{3} - 2$ с нулём, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 5. (2 балла) Найдите все числа вида $\overline{35a7b2}$, которые кратны 72.

Решение. Число $\overline{35a7b2}$ кратно 72, если оно делится на 8 и на 9. По признаку делимости числа на 8 получаем, что число $\overline{7b2}$ должно делиться на 8, т. е. подходят $b = 1$, $b = 5$ и $b = 9$. Следовательно, числа $\overline{35a712}$, $\overline{35a752}$ и $\overline{35a792}$ должны делиться на 9. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Тогда получим, что для числа $\overline{35a712}$ подходят $a = 0$ и $a = 9$; для числа $\overline{35a752}$ подходит только $a = 5$; для числа $\overline{35a792}$ — только $a = 1$.

Получаем числа 350712, 359712, 355752, 351792.

Ответ: 350712, 359712, 355752, 351792.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

найдены три варианта ответа из четырёх — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 6. (2 балла) Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-1|} < \dfrac{1}{|2x+1|}$.

Решение.

$$\frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{|2x+1|} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1| < |x-1|; \\ x \neq 1; \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 < (x-1)^2; \\ x \neq 1; \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x < 0; \\ x \neq 1; \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0; \\ x \neq 1; \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Ответ: $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Критерии:
верное решение — 2 балла;
иначе — 0 баллов.

Задача 7. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$$

имеет 4 различных корня.

Решение. Пусть $t=|x+1|$, тогда исходное уравнение принимает вид $2at^2-t+1=0$. Исходное уравнение имеет 4 корня, если уравнение $2at^2-t+1=0$ имеет два положительных корня, т. е.

$$\begin{cases} D>0; \\ t_1+t_2>0; \\ t_1t_2>0. \end{cases} \iff \begin{cases} D=1-8a>0; \\ a>0. \end{cases} \iff \begin{cases} a<\frac{1}{8}; \\ a>0. \end{cases} \iff a\in\left(0;\frac{1}{8}\right).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

Критерии:
верное решение — 2 балла;
присутствуют все шаги решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;
иначе — 0 баллов.

Задача 8. (2 балла) По окружности движутся два тела: первое тело проходит круг на 2 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности проходит каждое тело за 1 с?

Решение. Пусть x — время прохождения круга первым телом, тогда $x+2$ — время прохождения круга вторым телом. Длину круга возьмем за 1. Тогда скорости тел (части окружностей, проходимых телами за 1 с) равны $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+2}$, соответственно. Имеем уравнение:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}}=60 \quad\Leftrightarrow\quad x(x+2)=120 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=10; \\ x=-12. \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x=10$$

Отсюда находим $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$, $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 9. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение $2\sin x - 3\cos x = -a^2$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента. Имеем

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\cdot\sin(x-\varphi),$$

где $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений, если $|-a^2| \leqslant \sqrt{13} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt[4]{13};\sqrt[4]{13}]$.

Ответ: $[-\sqrt[4]{13};\sqrt[4]{13}]$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 10. (2 балла) Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?

Решение. Сумма цифр десятизначного числа равна 3 в трёх случаях.

1) В записи одна 3 и остальные 0. Такое число единственно — 3000000000.

2) В записи одна 2, одна цифра 1 и остальные 0. Если 2 стоит на первой позиции, а 1 может стоять на остальных 8 позициях — таких чисел 8. Аналогично, есть 8 чисел, в которых 1 стоит на первой позиции, а 2 на остальных 8 позициях.

3) В записи числа три 1 и остальные 0. Одна 1 стоит на первой позиции, у второй единицы — 8 вариантов, а у третьей — 7 вариантов. Но поскольку две единицы одинаковы, все числа мы посчитали 2 раза. Таким образом, имеем $\dfrac{8\cdot 7}{2} = 36$ вариантов.

Итого получаем $1 + 8 + 8 + 28 = 45$ вариантов.

Ответ: 45.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется ошибка в подсчёте количества вариантов в одном из трёх случаев построения подходящего числа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 11. (1 балл) Сформулируйте признаки параллелограмма.

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

3) Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Критерии:

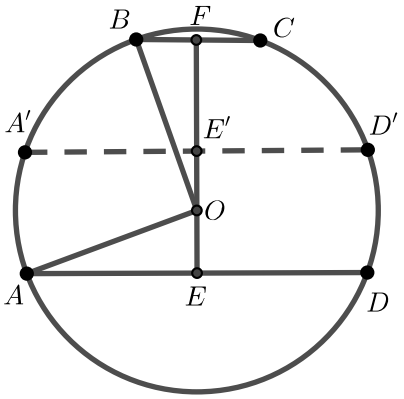
приведены три или более признаков — 1 балла;

если перепутан признак и определение параллелограмма (и при других логических ошибках) — 0 баллов.

Задача 12. (2 балла) Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

«**Задача.** Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 17, имеют длины 16 и $4\sqrt{30}$. Найдите расстояние между этими хордами.

Решение. В задаче возможны два расположения хорды AD (штриховой линией $A'D'$ обозначен второй случай). Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 8$, а $AE = ED = 2\sqrt{30}$.



Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 8$, а $AE = ED = 2\sqrt{30}$.

Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из $\triangle BOF$ находим $OF = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{361} = 15$,

2) из $\triangle AOE$ находим $OE = \sqrt{17^2 - 120} = \sqrt{169} = 13$.

Отсюда длина искомого отрезка в первом случае $EF = OE + OF = 28$. Длина отрезка $E'F = OF - OE' = 15 - 13 = 2$.

Ответ: 28 и 2.»

Критерии:

найдена ошибка в теореме Пифагора, приведено верное решение задачи — 2 балла;

найдена ошибка в теореме Пифагора, одна из конфигураций рассмотрена и доведена до верного ответа — 1 балл;

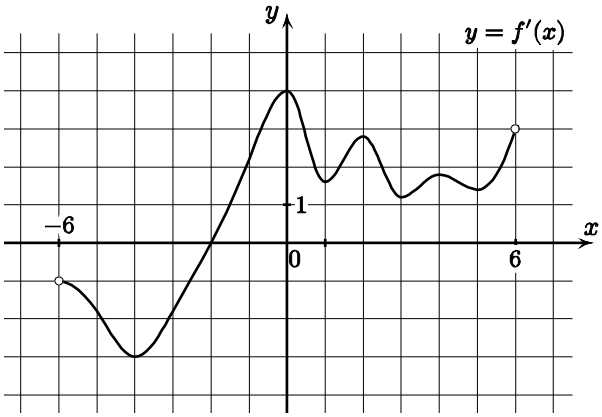
иначе — 0 баллов.

24 декабря 2017г.

Вариант №1

1. Решите уравнение $(3x-1)^2=(x+5)^2$.
2. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $120°$, а $CD=25$.
3. На экзамене было дано следующее задание.

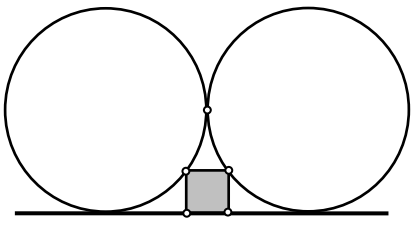
   На рисунке изображен график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка $[-1;4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



   После обработки результатов экзамена оказалось, что среди ответов наиболее часто встречаются четыре варианта: -4; -2; -1; 3.

   Какой из вариантов ответа правильный?

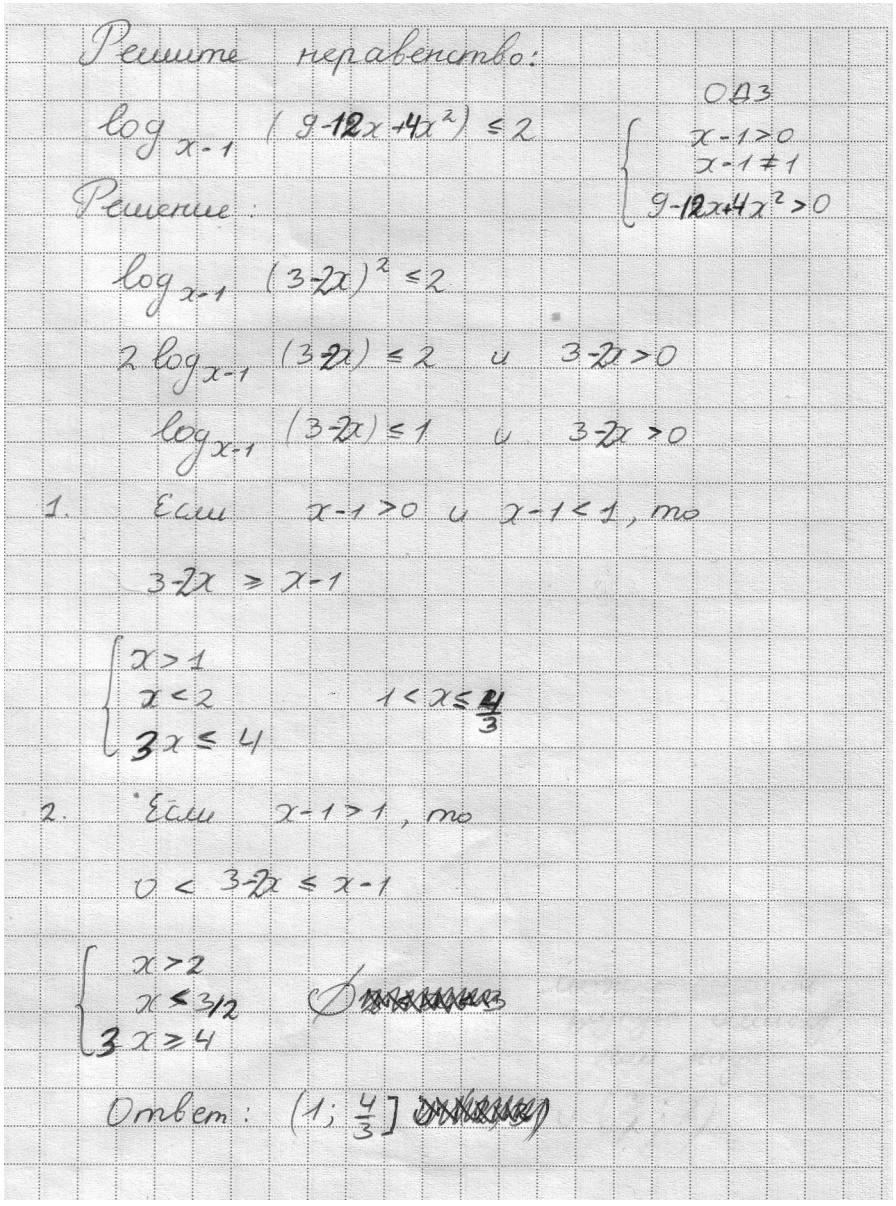
   В результате каких ошибок могли быть получены другие ответы из приведенного списка? Предложите вариант объяснения для каждого из них.
4. В пакете 10 воздушных шариков, среди них 4 красных, остальные зелёные. Найдите вероятность того, что из 5 случайно выбранных шариков красными окажутся ровно 3.
5. При изготовлении шоколадных батончиков номинальной массой 65 г вероятность того, что масса батончика будет в пределах от 63 г до 67 г, равна 0,45. Найдите вероятность того, что масса батончика отличается от номинальной более чем на 2 грамма.
6. Стороны четырехугольника, вписанного в окружность, равны последовательно 1, 2, 3 и 4. Найдите отношение его диагоналей.
7. Две окружности радиуса 1 касаются друг друга и одной прямой в разных точках. Найдите сторону квадрата, две соседние вершины которого лежат на данной прямой, а две другие – на данных окружностях.



8. Можно ли в прямоугольник 5×6 поместить прямоугольник 3×8?

9. Ниже приведено решение неравенства $\log_{x-1}\left(9-12x+4x^2\right)\le 2$.

   Кратко прокомментируйте решение. В своем комментарии укажите ошибки, описки и неточности, если они есть.



10. Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.
11. Известно, что каждое из двух квадратных уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имеет ровно один действительный корень, причем эти корни различны. Приведите пример таких функций, если известно, что уравнение $f(x) + g(x) = 0$ также имеет ровно один действительный корень?

Код участника: _____

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 1 марта 2018 года

1. Вычислите $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2}}$.
2. Сравните меньший корень уравнения $x^2-14x+28=0$ с бóльшим корнем уравнения $x^2-2x-1=0$.
3. Сколько делителей числа 277200 взаимно просты с числом 39?
4. Имеется два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора кислоты. Если растворы слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?
5. Решите неравенство $\frac{|x-10|}{x^2-3x+2}\geqslant\frac{|x-10|}{x^2-4x-5}$.
6. Решите неравенство $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{2+\frac{1}{x}}\geqslant 3$.
7. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?
8. Найдите все такие значения a, что неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ справедливо при всех положительных x?
9. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|3x-5|+|2y+7|\leqslant 6$.
10. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC=6$. Проведены три окружности радиусом 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Код участника: _____

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 1 марта 2018 года

1. Вычислите $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2}}$.
2. Сравните меньший корень уравнения $x^2-14x+28=0$ с бóльшим корнем уравнения $x^2-2x-1=0$.
3. Сколько делителей числа 277200 взаимно просты с числом 39?
4. Имеется два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора кислоты. Если растворы слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?
5. Решите неравенство $\frac{|x-10|}{x^2-3x+2}\geqslant\frac{|x-10|}{x^2-4x-5}$.
6. Решите неравенство $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{2+\frac{1}{x}}\geqslant 3$.
7. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?
8. Найдите все такие значения a, что неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ справедливо при всех положительных x?
9. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|3x-5|+|2y+7|\leqslant 6$.
10. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC=6$. Проведены три окружности радиусом 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 1 **Код участника: _____**

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 28 мая 2018 года

1. Решите неравенство $|x^2 - 6x + 9| < 2x - 6$.
2. Сократите дробь $\dfrac{2x^2 + (3a + 4b)x + a^2 + 3ab + 2b^2}{x^2 + (a + b - 2)x - 2a - 2b}$.
3. Решите уравнение $4\sqrt{3 - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{3x - 1}} = 3$.
4. После смешения двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой 20 г безводного йодистого калия, получили 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 4y = -9, \\ xy - 3x - 3y = 7. \end{cases}$
6. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2(a-1)x + 4a + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение, причём все корни уравнения удовлетворяют неравенству $x < 1$.
7. Докажите, что $7^n + 12n + 17$ кратно 18 при всех натуральных n.
8. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвёртый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии.
9. На стороне AC треугольника ABC взята такая точка N, что $3CN = AC$. Точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 2 : 3$. В каком отношении прямая CK делит отрезок BN?
10. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$. Найдите биссектрису AL и радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 2 **Код участника: _____**

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 28 мая 2018 года

1. Решите неравенство $x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$.
2. Сократите дробь $\dfrac{2x^2 + (4a - 6b - 1)x - 2a + 3b}{x^2 + (3a - 4b)x + 2a^2 - 5ab + 3b^2}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x - 1}{2x + 1}} + \sqrt{\dfrac{2x + 1}{x - 1}} = \dfrac{10}{3}$.
4. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта в трое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$
6. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2(a-1)x + a + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение, причём все корни уравнения удовлетворяют неравенству $x > 1$.
7. Докажите, что $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ кратно 8 при всех натуральных n.
8. Сумма первых одиннадцати членов арифметической прогрессии равна 110. Известно, что третий, девятый и шестой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии.
9. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята такая точка N, что $AC = 2CN$. Точка M лежит на стороне BC, причём $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?
10. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60°$. Найдите медиану AM и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Тестирование учителей математики

3 июня 2018 года

Вариант 1

1. Сколькими способами можно поставить крестики и нолики в клетки доски 8×8 так, чтобы в каждом квадратике 2×2 было чётное число крестиков?
2. 25 школьников разного роста стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.
3. В классе 25 человек. Может ли так случится, что у семи человек 3 друзей-одноклассников, у восьми человек — 4 друга, у десяти людей — 5 друзей?
4. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $1/2 \leqslant 1/(n+1)+1/(n+2)+\ldots+1/2n \leqslant 3/4$.
5. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) биссектриса BL в два раза короче биссектрисы CM. Найдите углы треугольника ABC.
6. На складе есть 10 разновидностей подарков. Пётр хочет подарить своему другу 7 разных подарков, а Василий хочет подарить своему товарищу 3 разных подарка. Кто из них может осуществить задуманное большим числом способов?
7. Пусть N − количество способов представить 30 в виде суммы не более чем 6 натуральных слагаемых, а M −число способов представить 30 в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых не превосходит 6. Докажите, что N=M. (Суммы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаем одинаковыми.)
8. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A=90^\circ$. BL − биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK=90^\circ$. Оказалось, что 3KC=2(BC−AB). Найдите $\angle C$.
9. Докажите, что в треугольнике медиана меньше полусуммы заключающих её сторон.
10. Сколькими способами 20 одинаковых шаров можно разложить в 4 разные корзины? В корзину можно не класть ни одного шара.

Тестирование учителей математики

3 июня 2018 года

Вариант 2

1. Сколькими способами чёрную и белую ладьи можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?
2. В каждой клетке таблицы 10×10 записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, между собой равны.
3. В стране из каждого города выходит три дороги. Может ли общее количество дорог равняться 1000?
4. Докажите, что в записи числа 2^{100} содержится ровно 31 цифра.
5. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне AB выбрана точка X такая, что $\angle MXB=\angle ABC$. Длина стороны BC равна a. Найдите длину отрезка MX.
6. Определите, в каком количестве точек пересекаются 10 прямых, если среди них есть только две параллельные и ровно три из этих прямых пересекаются в одной точке.
7. На бесконечной клеточной полоске сидит хромой жук. Он хочет сделать 2n прыжков, каждый раз прыгая на соседнюю клетку, и вернуться в начальную клетку. Сколькими способами он может это сделать?
8. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что CA+AI=BC. Найдите отношение $\angle BAC:\angle CBA$.
9. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если точка пересечения биссектрис одинаково удалена от середин двух сторон?
10. В лагерь приехали дети. У каждого из детей ровно 5 знакомых мальчиков и ровно 5 знакомых девочек. Докажите, что число детей делится на 4.

Тестирование учителей математики

10 июня 2018 года

Вариант 1

1. В стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7-ю другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, через другие города)
2. У Юли 22 одноклассника, причем все они имеют различное число друзей в этом классе. Сколько из них дружат с Юлей?
3. Докажите, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} > \frac{1}{15}$.
4. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC, причем ∠ABM=∠C и ∠CBN=∠A. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.
5. В треугольнике ABC длины высоты BH и медианы CM равны. Найдите ∠MCA.
6. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет цифр 2, 4, 5.
7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?
8. Сколькими способами можно разбить число 11 на три ненулевых слагаемых? (Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)
9. Число a не делится ни на 2, ни на 3. Найдите остаток от деления числа a^2 на 6. (найти все возможные варианты и доказать, что других нет.)
10. Найдите последнюю цифру числа 1999^{1999}.

Тестирование учителей математики

10 июня 2018 года

Вариант 2

1. Докажите, что если в графе не менее двух вершин, то в нем есть вершины одинаковой степени.
2. В стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что из одного города можно долететь самолетом в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр–названий городов, при делении на 5 дает остаток 1. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
3. Докажите, что для любого натурального n>1 верно неравенство $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{n(n+1)/2}$
4. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок AD=AB, а за точку C - отрезок CE=CB. Найдите углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC.
5. Один из углов треугольника на 120∘ больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведенная из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.
6. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых нет цифр 1, 6, 7, 8.
7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове ПАРАБОЛА?
8. Сколькими способами можно разложить 12 монет по 5 разным кошелькам, чтобы ни один не был пуст? (Класть один кошелек в другой не разрешается.)
9. Число *a* – четное, не кратное 4. Какой остаток даст число a^2 при делении на 32? (найти все возможные варианты и доказать, что других нет.)
10. Найти последнюю цифру числа 333^{333}.

Вариант 1 **Фамилия И. О.:** _____

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 11 сентября 2018 года

1. Решите уравнение $x^2 + 2x + 2|x+1| = 7$.
2. Упростите выражение $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$.
3. Докажите, что если $0 \leqslant x \leqslant 3$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$, то
$$0 \leqslant xy - 2x - 3y + 6 \leqslant 6.$$
4. Вовочка сбежал вниз по движущемуся вниз эскалатору и насчитал 45 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 105 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы Вовочка, спустившись по неподвижному эскалатору?
5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - (b+2)x + b + 4 = 0$ различны и удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = 36$.
6. Докажите, что $3^n - 2^n \geqslant n$, если $n \in \mathbb{N}$.
7. Сколько различных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, если x_1, x_2 и x_3 — натуральные числа.
8. Три различных числа a, b и c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа $a+b$, $b+c$ и $c+a$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
9. Пусть M — середина отрезка AB, M_1 — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что
$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}\right).$$
10. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Вариант 2 **Фамилия И. О.:** _____

ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 11 сентября 2018 года

1. Решите уравнение $x^2 - 2x - 5|x-1| + 5 = 0$.
2. Упростите выражение $\sqrt{\sqrt{17 + \sqrt{288}}}$.
3. Докажите, что если $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$, то
$$0 \leqslant xy - 4x - 2y + 8 \leqslant 8.$$
4. Длина обода переднего колеса экипажа на a метров меньше длины обода заднего колеса. Переднее колесо, проехав b метров, сделало столько же оборотов, сколько заднее, проехав c метров ($c > b$). Найдите длину обода каждого колеса.
5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - (b-2)x + b + 4 = 0$ различны и удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_2 = 9$.
6. Докажите, что $4^n \geqslant n^2 + 3^n$, если $n \in \mathbb{N}$.
7. Сколькими способами можно разложить 3 синих, 2 зелёных и 4 красных шаров по 4 пакетам (шары одного цвета между собой неразличимы, а некоторые пакеты могут остаться пустыми).
8. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено ещё одно число так, что все три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.
9. Пусть $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ — медианы треугольника ABC. Докажите, что
$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}.$$
10. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведён диаметр CC_1. Прямая, проходящая через точку C_1 параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Найдите $C_1M : MP$.

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Ответы к варианту 1

1. $x \in \{-3; 1\}$.
2. $\sqrt{3} - 1$.
4. 63 ступеньки.
5. $b = -18$.
7. $\frac{9!}{2!7!}$.
8. -2.
10. $90°$.

Ответы к варианту 2

1. $x \in \{-3; 0; 2; 5\}$.
2. $1 + \sqrt{2}$.
4. $\dfrac{ab}{c-b}$ (переднее) и $\dfrac{ac}{c-b}$ (заднее).
5. $b = -4$.
7. $\frac{12!}{3!2!4!3!}$.
8. 27.
10. 1.

Алгебра

1. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-5}{4}$;

б) $6x - (x+3)^2 = 4x - (x+2)^2 - 5$;

в) $3^{2x^2-2} = 1$.

2. Запишите множество значений переменной a, при которых выражение $\frac{a^2+2a-3}{5a-a^2} - \frac{a^2+3a}{1{,}21a^2-49}$ не имеет смысла.

3. Упростите выражение $\frac{(-2a^2)^4 \cdot (-ab^2)^3}{8 \cdot (a^3b)^3}$ и найдите его значение при $a = \frac{7}{8}$, $b = -1\frac{1}{7}$.

4. Пешеход рассчитал, что, двигаясь с определенной скоростью, он пройдет намеченный путь за 2,5 ч. Но, увеличив скорость на 1 км/ч, он прошел этот путь за 2 ч. Найдите длину пути.

5. Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3-x, \text{ если } 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$

По графику определите:

а) наибольшее и наименьшее значения функции;

б) сумму целых значений аргумента, при которых значения функции положительны.

6. Разложите на множители выражение $(a-2b)(a+b)^2 + (a-b)^3 + 3b^3$.

7. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y = 2$ и $2y - x = 1$ и параллельной графику уравнения $3(x-y+1) = x - 2(y+5)$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x+y-z=2, \\ 2x-y+z=1. \end{cases}$

Геометрия

9. Семиклассник Миша Мишкин попытался сформулировать признак равенства треугольников: «Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны».

Существуют ли треугольники, удовлетворяющие этому утверждению – и не являющиеся равными?

10. а) Докажите, что отрезок, соединяющий точку основания равнобедренного треугольника с его вершиной, не больше боковой стороны.

б) Во внутренней области равностороннего треугольника ABC взята точка D.

Докажите, что $DA < DB + DC$.

11. а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к другому катету.

б) Постройте остроугольный треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них.

Подготовительный вариант

1. Решите уравнение:

   а) $\frac{6x-1}{5} - \frac{2-x}{4} = \frac{3x+2}{2}$;

   б) $20x - (2x+1)^2 = 4(x+2) - (2x-3)^2$;

   в) $7^{4x^2-1} = 1$.

2. Запишите множество значений переменной a, при которых выражение $\frac{a^2+2}{0{,}5a+2a^2} + \frac{a^2+a}{81a^2+4}$ не имеет смысла.

3. Упростите выражение $\frac{(-a^2b)^5 \cdot (4ab^3)^3}{(-8a^6b^7)^2}$ и найдите его значение при $a = -7{,}8$, $b = 3\frac{1}{3}$.

4. Поезд был задержан в пути на 1 ч. Увеличив скорость на 30 км/ч, он через 3 ч прибыл на конечную станцию точно по расписанию. Какова была скорость поезда до остановки?

5. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x-1, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2, \text{ если } 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$

   По графику определите:

   а) наибольшее и наименьшее значения функции;

   б) сумму целых значений аргумента, при которых значения функции положительны.

6. Разложите на множители выражение $(a-b)(a+2b)^2 - (a+b)^3 + b^3$.

7. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y = 0$ и $x - y = -3$ и параллельной графику уравнения $7(y - x + 1) - x = 3(2x + 1)$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x + 2y + z = -1, \\ x - y - 2z = 2. \end{cases}$

Математическая вертикаль: Геометрия Пробный вариант

(тестирование учителям)

1) Один равнобедренный треугольник находится внутри другого равнобедренного треугольника. Верно ли, что боковые стороны внутреннего меньше боковых сторон внешнего?

2) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, не больше бОльшей из двух других сторон.

3) а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к другому катету.

б) Постройте остроугольный треугольник АВС по стороне АВ, высоте АН и углу А.

Вариант 1 **Фамилия И. О.:** _____

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 13 декабря 2018 года

1. Решите уравнение $\sqrt{14+|x|}=\sqrt{x^2-16}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

3. В банк положили некоторую сумму, и через 2 года она увеличилась на 63 тыс. рублей. Сколько денег положили в банк, если вкладчикам начисляется 10% годовых, и по окончании года начисленные проценты причисляются к сумме вклада?

4. Кривая на координатной плоскости состоит из всех точек, равноудалённых от точки $F(4;-1)$ и прямой $y=2$. Задайте эту кривую уравнением и изобразите её.

5. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых все цифры расположены в порядке возрастания?

6. По окружности, длина которой 384 м, движутся два тела в одном и том же направлении. Одно тело проходит полную окружность на 16 мин быстрее второго. Известно, что через каждые 32 мин тела встречаются. Найдите скорости тел.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-2x)^2-(a+2)(x^2-2x)+3a-3=0$$

имеет четыре различных решения.

8. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задаётся формулой $S_n=3n^2+5n$, $n\in\mathbb{N}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

9. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка K. Прямая BK пересекает сторону AC в точке L. Найдите отношение площадей треугольников BMK и AKL, если $AK:KM=1:3$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса CD и высота CH. Найдите CH, если $AD=3$, $BD=5$.

Вариант 2 **Фамилия И. О.:** _____

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 13 декабря 2018 года

1. Решите уравнение $\sqrt{3|x|+3}=\sqrt{x^2-25}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{|x+2|}{x^2-5x+4}\geqslant\frac{|x+2|}{x^2-4x-5}.$$

3. В банк положили некоторую сумму. По окончании каждого года начисленные проценты причисляются к сумме вклада. Через год сумма вклада увеличилась на 3200 рублей, а ещё через год — на 3600 рублей. Под какой процент годовых положили деньги в банк?

4. Кривая на координатной плоскости состоит из всех точек, равноудалённых от точки $F(1;4)$ и прямой $y=3$. Задайте эту кривую уравнением и изобразите её.

5. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых все цифры расположены в порядке убывания?

6. По окружности, длина которой 96 м, движутся в одном направлении два тела. Через каждые 4 с тела встречаются. Найдите скорости тел, если известно, что одно из них проходит окружность на 2 с быстрее второго.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x+2)^2(x^2+4x+3+a)=4a+12$$

имеет четыре различных решения.

8. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задаётся формулой $S_n=2n^2+7n$, $n\in\mathbb{N}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

9. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На прямой AC отмечена точка P так, что отрезок BP делит отрезок AD в отношении $3:1$, считая от точки A. Найдите отношение площадей треугольников BAP и BPC.

10. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке N. Известно, что AC = 2, AB = 3, AM : MB = 2 : 3. Найдите AN.

Ответы к варианту 1

1. ± 6.
2. $[-4;1] \cup \{2\}$.
3. 300 тыс. руб.
4. $y = \frac{1}{2} - \frac{(x-4)^2}{6} = -\frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}x - \frac{13}{6}$.
5. $C_9^3 = 84$.
6. 24 м/мин, 12 м/мин.
7. $(0;4) \cup (4;+\infty)$.
8. При $n \geqslant 2$ имеем $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 5n - 3(n-1)^2 - 5(n-1) = 6n + 2 = a_1 + (n-1)d$, где $a_1 = S_1 = 8$, $d = 6$.
9. 21 : 1.
10. $\frac{60}{17}$.

Ответы к варианту 2

1. ± 7.
2. $\{-2\} \cup (-1;1) \cup (4;5) \cup [9;+\infty)$.
3. 12,5%.
4. $y = \frac{7}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + 4$.
5. $C_{10}^3 = 120$.
6. 48 м/с, 24 м/с.
7. $(-\infty;-7) \cup (-7;-3)$.
8. Доказательство: см. вариант 1.
9. 3 : 2.
10. $\frac{24}{\sqrt{145}}$.

Задачи для тестирования

1. Найти все натуральные числа p, q, r, не являющиеся составными такие, что $p^2 \quad q^2 \quad r^2 \quad 6p$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $DAC \quad ABC \quad BCD \quad 45$. Найти угол между прямыми AC и BD.

3. Вычислить $\sqrt{8 \quad 2\sqrt{7}} \quad \sqrt{8 \quad 2\sqrt{7}}$.

4. Решить уравнение $x \quad 2^{\ 2} \quad x^2 \quad 4x \quad 12$.

5. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?

6. В уравнении $x^2 \quad 2x \quad a \quad 0$ квадрат разности действительных корней равен 16. Найти a.

7. Решить систему $\begin{matrix} x^2 \quad 2y^2 \quad 7 \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \quad 13 \end{matrix}$.

8. Предположим, что вы забыли пароль от электронной почты, но помните, что это пятизначный номер, в котором были числа 41 и 74. Какое наименьшее количество номеров надо перебрать, чтобы наверняка открыть почтовый ящик?

9. Доказать неравенство $\sqrt[3]{5 \quad \sqrt[3]{5}} \quad \sqrt[3]{5 \quad \sqrt[3]{5}} \quad 2\sqrt[3]{5}$.

10. Изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y \quad 5^{\ 2} \quad x \quad 1^{\ 2}$.

11. Решить неравенство $x \quad 3 \quad \sqrt{x^2 \quad 3x \quad 2} \quad 0$.

12. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM \quad 4:1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Тест

Вариант 1

1. Найти все натуральные числа p, q, r, не являющиеся составными такие, что $p\ p\ 6\ r^2\ q^2$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $DAB\ 30$, $ABC\ 60$, $BCD\ 30$. Найти угол между прямыми AC и BD.

3. Вычислить $\sqrt{17\ 12\sqrt{2}}\ \sqrt{17\ 12\sqrt{2}}$.

4. Решить уравнение $x^2\ 4x^{\ 2}\ x\ 6\ 2\ x$.

5. Какое наименьшее число участников может быть на семинаре "Математическая вертикаль", если известно, что мужчин, участвующих в нем, меньше 3,1%, но больше 2,9%?

6. В уравнении $x^2\ 2ax\ 4\ 0$ сумма кубов действительных корней равна 144. Найти a.

7. Решить систему $\begin{matrix} x^2\ 32\ y^2 \\ x^2\ 3xy\ 2y^2\ 64 \end{matrix}$.

8. Предположим, что вы забыли пароль от электронной почты, но помните, что это шестизначный номер, в котором были числа 386 и 53. Какое наименьшее количество номеров надо перебрать, чтобы наверняка открыть почтовый ящик?

9. Доказать неравенство $\sqrt[3]{2019\ \sqrt[3]{2019}}\ \sqrt[3]{2019\ \sqrt[3]{2019}}\ 2\sqrt[3]{2019}$.

10. Изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2y\ 3^{\ 2}\ 4\ x\ 4^{\ 2}$.

11. Решить неравенство $x^2\ 5x\ 6\ \sqrt{x^2\ 7x\ 12}\ 0$.

12. В треугольнике ABC на его медиане AM отмечена точка K и прямая CK пересекает сторону AB в точке P так, что $S_{ACK} : S_{KPBM}\ 15:11$. Прямая CK пересекает сторону AB в точке P. Найдите отношение $AK : KM$.

Вариант 2

1. Найти все натуральные числа p, q, r, не являющиеся составными такие, что $p\ p\ 8\ r^2\ q^2$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $DAB\ 15$, $ABC\ 75$, $BCD\ 15$. Найти угол между прямыми AC и BD.

3. Вычислить $\sqrt{34\ 24\sqrt{2}}\ \sqrt{34\ 24\sqrt{2}}$.

4. Решить уравнение $x^2\ 8x^{\ 2}\ x\ 2\ 10\ x$.

5. Какое наименьшее число участников может быть на семинаре "Математическая вертикаль", если известно, что женщин, участвующих в нем, меньше 84%, но больше 83,1%?

6. В уравнении $x^2\ 3ax\ 4\ 0$ сумма кубов действительных корней равна 144. Найти a.

7. Решить систему $\begin{matrix} x^2\ 21\ y^2 \\ x^2\ 3xy\ 2y^2\ 42 \end{matrix}$.

8. Предположим, что вы забыли пароль от электронной почты, но помните, что это шестизначный номер, в котором были числа 178 и 21. Какое наименьшее количество номеров надо перебрать, чтобы наверняка открыть почтовый ящик?

9. Доказать неравенство $\sqrt[3]{2018\ \sqrt[3]{2018}}\ \sqrt[3]{2018\ \sqrt[3]{2018}}\ 2\sqrt[3]{2018}$.

10. Изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $3y\ 2^{\ 2}\ 9x\ 4^{\ 2}$.

11. Решить неравенство $x^2\ 4x\ 5\ \sqrt{x^2\ 5x\ 6}\ 0$.

12. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка M так, что $AM:BM\ 3:2$. На стороне BC взята точка N так, что продолжение NM за точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в точке L, причем $AL\ AC$. Найдите отношение площади треугольника MBN к площади четырёхугольника $AMNC$.

"Математическая Вертикаль" 24 марта 2019г., г.Москва

Вариант 1

1. Если затраты на покупку акций выросли на 95%, а стоимость акции увеличилась на 30%, то как изменилось количество купленных акций (в процентах)? В ответе укажите: уменьшилось или увеличилось и на сколько процентов?

2. Решите уравнение: $17\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=8$.

3. Решите неравенство:
$$\frac{\left(x-\log_{\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)\right)^5}{x^3}\geqslant 0$$

4. Допуская, что стрелки часов движутся без скачков, опередилите, через какое время после того, как часы показывали 4ч, минутная стрелка догонит часовую.

5. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения
$$x^2-2ax-4a+5=0$$
будет наименьшей?

6. Постройте график (схематично):
$$f(x)=\left(\sqrt{5-2x}\right)^2-\sqrt{4x^2-4x+1}$$

7. При каких значениях параметра a система имеет бесконечное множество решений:
$$\begin{cases}2x+ay=3\\(a+2)x+4y=-3\end{cases}$$

8. В условиях плохой связи телефон пытается передать СМС. Если попытка неудачна, то телефон делает новую. Вероятность успеха при каждой отдельной попытке равна 0,02. Количество попыток ограничено сотней. Какова вероятность того, что СМС удастся передать? (Не обязательно производить вычисление до конца).

9. Посетителей кинотеатра после сеанса попросили оценить просмотренный фильм по шкале от 1 до 5. Опросом занимались двое людей: один узнал мнение зрителей, сидевших в левой, а другой – в правой половине зала, а затем результаты объединили. Какая средняя оценка (с точностью до второго знака после запятой) при этом получилась?
Результаты опроса левой половины зала:
– Количество опрошенных: 27
– Средняя оценка 3,74.
Результаты опроса правой половины зала даны в таблице:

Оценка	Количество опрошенных
1	0
2	8
3	8
4	11
5	3

10. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника с углом 30°, к радиусу вписанной в этот треугольник окружности.

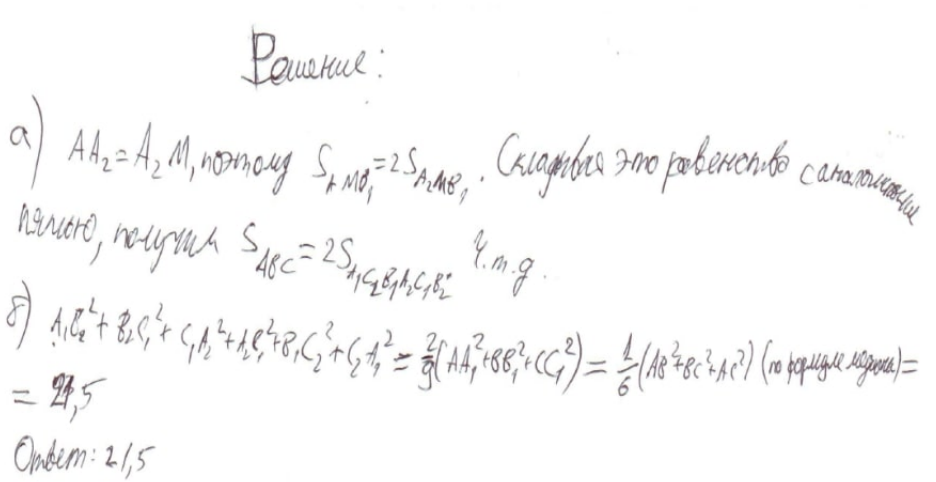
11. Дан параллелограмм $ABCD$, точка O – точка пересечения диагоналей, точка K– середина стороны AD, отрезок BK пересекает диагональ AC в точке N. Площадь четырехугольника $NODK$ равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

12. Дана задача и ее решение учеником:

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.


Решение:

а) $AA_2=A_2M$, поэтому $S_{AMB_1}=2S_{A_2MB_1}$. Складывая это равенство с аналогичными, получим $S_{ABC}=2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$. ч.т.д.

б) $A_1B_2^2+B_2C_1^2+C_1A_2^2+A_2B_1^2+B_1C_2^2+C_2A_1^2=\frac{2}{9}(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2)=\frac{1}{6}(AB^2+BC^2+AC^2)$ (по формуле медианы)$=$

$=24,5$

Ответ: 24,5

Приведены критерии оценки решения этой задачи:

Содержание критерия, задание №16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

– Оцените представленное решение задачи по критериям (в таблице), то есть поставьте баллы за приведенное решение.
– Обоснуйте свое решение по критериям.
– Если решение неверное, то приведите свое полное решение (старайтесь быть краткими).

"Математическая Вертикаль" 24 марта 2019г., г.Москва

Вариант 2

1. Если затраты на покупку акций выросли на 98%, а стоимость акции увеличилась на 20%, то как изменилось количество купленных акций (в процентах)? В ответе укажите, уменьшилось или увеличилось и на сколько процентов?

2. Решите уравнение: $x + \frac{1}{x} - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8 = 0$.

3. Решить неравенство:
$$\frac{\left(x - \log_{\frac{\pi}{8}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\right)^3}{x^5} \geqslant 0$$

4. Допуская, что стрелки часов движутся без скачков, опередилите, через какое время после того, как часы показывали 2ч, минутная стрелка догонит часовую.

5. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения
$$x^2 - ax - 7a - 3 = 0$$
будет наименьшей?

6. Постройте график (схематично):
$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \left(\sqrt{7 - 3x}\right)^2$$

7. При каких значениях параметра a система не имеет решений:
$$\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ (a+2)x + 4y = -3 \end{cases}$$

8. В условиях плохой связи телефон пытается передать СМС. Если попытка неудачна, то телефон делает новую. Вероятность успеха при каждой отдельной попытке равна 0,03. Количество попыток ограничено пятьюдесятью. Какова вероятность того, что СМС удастся передать? (Не обязательно производить вычисление до конца).

9. Посетителей кинотеатра после сеанса попросили оценить просмотренный фильм по шкале от 1 до 5. Опросом занимались двое людей: один узнал мнение зрителей, сидевших в левой, а другой – в правой половине зала, а затем результаты объединили. Какая средняя оценка (с точностью до второго знака после запятой) при этом получилась?
Результаты опроса левой половины зала:
– Количество опрошенных: 31
– Средняя оценка 2.87
Результаты опроса правой половины зала даны в таблице:

Оценка	Количество опрошенных
1	0
2	8
3	8
4	11
5	3

10. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника с углом 45°, к радиусу вписанной в этот треугольник окружности.

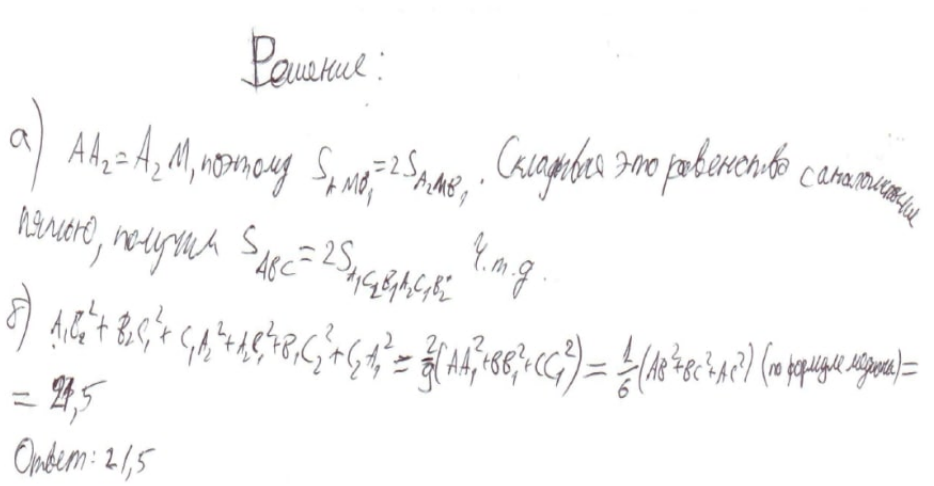
11. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

12. Дана задача и ее решение учеником:

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.


Решение:

а) $AA_2=A_2M$, поэтому $S_{AMB_1}=2S_{A_2MB_1}$. Складывая это равенство с аналогичными, получим $S_{ABC}=2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$. ч.т.д.

б) $A_1C_2^2+B_2C_1^2+C_1A_2^2+A_2B_1^2+B_1C_2^2+C_2A_1^2=\frac{2}{9}(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2)=\frac{1}{6}(AB^2+BC^2+AC^2)$ (по формуле медианы)=

$=24,5$

Ответ: 24,5

Приведены критерии оценки решения этой задачи:

Содержание критерия, задание №16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

– Оцените представленное решение задачи по критериям (в таблице), то есть поставьте баллы за приведенное решение.
– Обоснуйте свое решение по критериям.
– Если решение неверное, то приведите свое полное решение (старайтесь быть краткими).

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 18 апреля 2019 года

Вариант 1

1. В результате испарения из раствора 2 кг воды концентрация соли в нём возросла на 20%, а после добавления к получившемуся раствору 10 кг воды — стала вдвое меньше первоначальной. Найдите первоначальную концентрацию соли.

2. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны 6 и 4 соответственно. В каком отношении медиана BM разбивает биссектрису AL?

3. Дана функция $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-4} : \left(\dfrac{x-2}{3x^2+5x-2} - \dfrac{4}{4-x^2}\right)$.
   а) Найдите $f(0{,}3)$.
   б) Постройте график функции $f(x)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{7}{\sqrt{x-1}+5} < 1 + \dfrac{2}{5-\sqrt{x-1}}$.

5. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ x^2y - xy^2 = -20. \end{cases}$

7. Существуют ли такие числа, что сумма их квадратов рациональна, а разность их квадратов иррациональна? Ответ обоснуйте.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\frac{x^2 + (3a-1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$
имеет единственное решение.

9. Докажите, что длина любой диагонали четырёхугольника меньше половины периметра этого четырёхугольника.

10. Сколько 9-значных чисел, кратных 5, можно составить, переставляя цифры числа 377 353 752?

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 18 апреля 2019 года

Вариант 2

1. К водному раствору кислоты добавили 1 кг воды, отчего его концентрация уменьшилась в 5/3 раза. Во сколько раз уменьшится концентрация полученного раствора, если добавить к нему 2 кг воды?

2. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 4 и 8 соответственно. На стороне AB отмечена точка R так, что $AR = 1$. В каком отношении отрезок CR разбивает биссектрису BL?

3. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-1} : \left(\dfrac{x-1}{2x^2+3x+1} + \dfrac{1}{1-x^2}\right)$.
   а) Найдите $f(-0{,}4)$.
   б) Постройте график функции $f(x)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{5}{\sqrt{x+2}+4} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-4}$.

5. Найдите расстояние от вершины A до центра вписанной окружности треугольника ABC, если $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$

7. Существуют ли такие числа, что их произведение рационально, а разность их квадратов иррациональна? Ответ обоснуйте.

8. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение
$$\frac{x^2 + (3b-5)x + 4 - 4b^2}{x^2 + 2x - 3} = 0$$
имеет единственное решение.

9. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше полупериметра этого четырёхугольника.

10. Сколько 9-значных чётных чисел можно составить, переставляя цифры числа 919 541 413?

Таблицу не заполнять!

Код участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Ответы к варианту 1

1. 0,6.
2. $\frac{5}{3}$.
3. а) $-\frac{1}{3}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 3 - \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-8; -2; \frac{1}{3}; 2$.
4. $(1; 26) \cup (82; +\infty)$.
5. $\sqrt{5}/2$.
6. $(4; -1), (1; -4)$.
7. Да, например $\sqrt{2} \pm 1$ или $\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$ (примеров много).
8. $-5; -1; 0; \frac{3}{2}; 3$.
9. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{3!3!} = 1120$.

Ответы к варианту 2

1. 1,8.
2. $\frac{9}{2}$.
3. а) $-\frac{1}{2}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 2 + \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-\frac{1}{2}; -1; 1; 4$.
4. $(-2; 14) \cup (34; +\infty)$.
5. $\sqrt{7}$.
6. $(2; -1), (-1; 2)$.
7. Да, например $\sqrt{2} + 1$ и 0 или $\sqrt[4]{2}$ и 0 (примеров много).
8. $-4; 0; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}$.
9. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{2!3!} = 3360$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 1**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

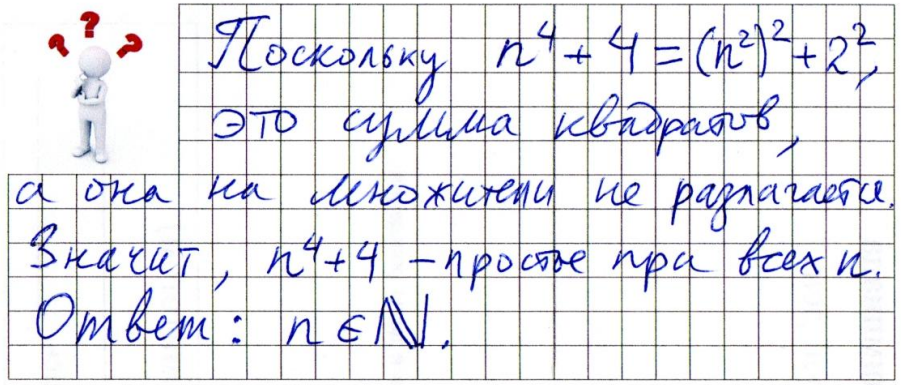
1. Решите уравнение $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0$.
2. Прямая l_1 проходит через точки $(-3, 2)$ и $(1, 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5, 4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.
3. Решите неравенство
$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geqslant -1.$$
4. Ученик шёл от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 4 км/ч и пришёл за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ученику нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока, если он выходит из дома каждый раз в одно и то же время?
5. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть 3 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?
6. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$ образуют четырёхугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найдите сумму квадратов длин всех сторон четырёхугольника $EFGH$, если $AB = BC + \frac{3}{2}$.
7. Докажите неравенство
$$\frac{ad + bc}{bd} + \frac{bc + ad}{ac} \geqslant 4,$$
если $a, b, c, d > 0$.
8. Поместится ли треугольник со сторонами 5, 6 и 7 в круге диаметром $\sqrt{50}$?
9. За 2017 год число книг в фонде библиотеки посёлка увеличилось на 0,4%, а за 2018 год — на 0,8%, оставаясь при этом всегда меньше 60 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки посёлка за 2018 год?
10. Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения
$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$
имеется ровно один отрицательный.

Часть 2

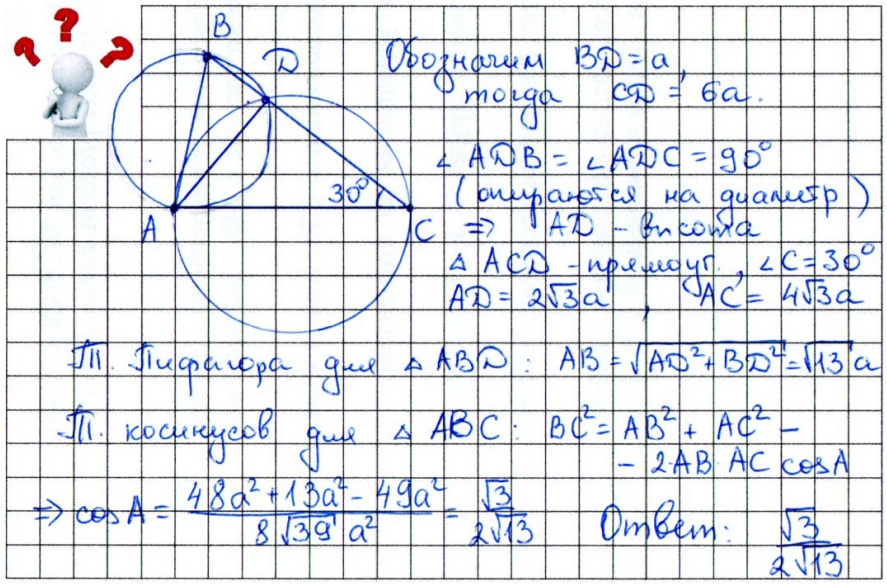
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Найдите все такие натуральные числа n, что значение выражения $n^4 + 4$ является простым числом.



12. Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите косинус угла A.



Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 2**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

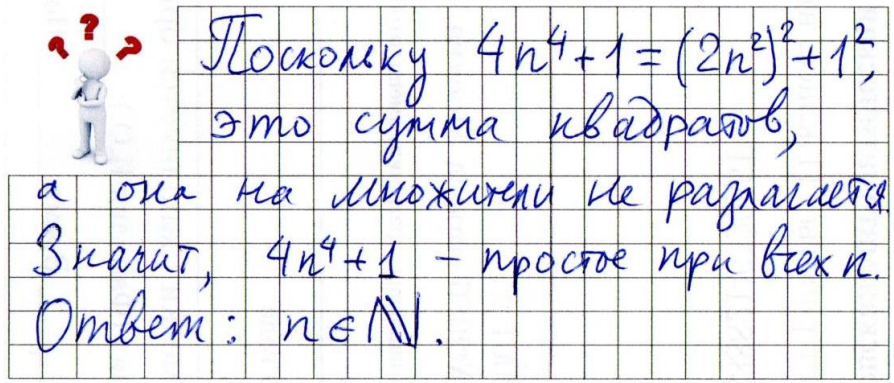
1. Решите уравнение $\sqrt{3x+7}\,(x^2-5|x|+6)=0$.
2. Прямая l_1 проходит через точки $(4,5)$ и $(7,6)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(3,-5)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.
3. Решите неравенство
$$\frac{(x+1)(x+4)(x+8)}{(x-1)(x-4)(x-8)}\geqslant -1.$$
4. Студент шёл от общежития до университета со скоростью 4 км/ч и опоздал на лекцию на 5 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 5 км/ч и пришёл за 1 мин до начала лекции. С какой скоростью студенту нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу лекции, если он выходит из общежития каждый раз в одно и то же время?
5. Сколькими способами можно сформировать туристическую группу, состоящую из одного руководителя, трёх мальчиков и двух девочек, если имеются 2 руководителя, 7 мальчиков и 8 девочек?
6. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $KLMN$ образуют четырёхугольник $PQRS$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найдите сумму квадратов длин всех сторон четырёхугольника $PQRS$, если $KL-LM=\sqrt{7}$.
7. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geqslant 4,$$
если $a,b,c,d>0$.
8. Поместится ли круг радиусом 1,2 в треугольник со сторонами 4, 5 и 7?
9. Численность населения города, не превышавшая 50 тысяч человек, за 1994 год сократилась на 1,2%, а за 1995 год — на 2,4%. На сколько человек сократилась численность населения города за 1995 год?
10. Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения
$$(a-1)x^2-(a+3)x+a=0$$
имеется ровно один положительный.

Часть 2

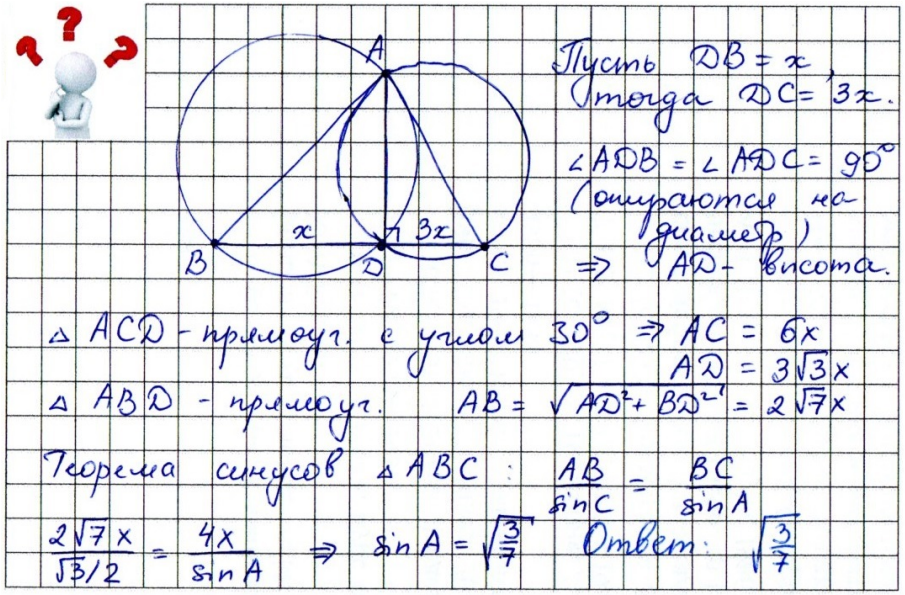
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Найдите все натуральные числа n, при которых значение выражения $4n^4+1$ является простым числом.



12. В треугольнике ABC угол C равен 60°. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности, D — точка пересечения этих окружностей, отличная от точки A. Найдите синус угла A, если $DB:DC=1:3$.



Критерии проверки работ

Каждая задача оценивается, исходя из 2 баллов. 1 балл ставится, если решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка.

Ответы к варианту 1

1. $-\frac{23}{4}$, -1, 1, 6.
2. $(-\frac{91}{17}, \frac{44}{17})$.
3. $(-\infty; -8) \cup (-5; -2) \cup [0; +\infty)$.
4. 3,2 км/ч.
5. 1680.
   1 балл — найдено верное выражение, но не упрощено.
6. $\frac{9}{2}$.
   1 балл — доказано, что четырёхугольник $EFGH$ — прямоугольник.
7. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством о средних.
8. Нет.
   1 балл — верно найден радиус описанной окружности треугольника, допущена ошибка в сравнении чисел.
9. 251.
10. $(-1; 0] \cup \{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\}$.
    1 балл — ответ отличается от верного исключением одной точки (не рассмотрен случай $D = 0$ или линейный случай).
11. 1. Решение неверно, данное выражение можно разложить на множители: $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. При натуральных n второй множитель больше единицы, поэтому для того, чтобы выражение равнялось простому числу, необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось равенство $n^2 - 2n + 2 = 1$, откуда $n = 1$. Выполняем проверку: $n^4 + 4 = 5$ — простое число.
    1 балл — указано неверное утверждение и верно получено разложение на множители.
12. $\frac{3\sqrt{39}}{26}$, $\frac{\sqrt{39}}{26}$. В решении не разобран второй случай — точка D лежит на продолжении стороны BC. В этом случае аналогично получаем $BC = 5a$, $AC = 4\sqrt{3}\,a$, $AB = \sqrt{13}\,a$. По теореме косинусов для треугольника ABC находим $\cos A = \frac{48a^2+13a^2-25a^2}{8\sqrt{3}\sqrt{13}a^2} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$.
    1 балл — верно найдена ошибка в представленном решении (нарисован или описан второй случай).

Критерии проверки работ

Каждая задача оценивается, исходя из 2 баллов. 1 балл ставится, если решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка.

Ответы к варианту 2

1. $-\frac{7}{3}$, -2, 2, 3.
2. (0,1, 3,7).
3. $(-\infty; 0] \cup (1; 4) \cup (8; +\infty)$.
4. 4,8 км/ч.
5. 1960.
   1 балл — найдено верное выражение, но не упрощено.
6. 14.
   1 балл — доказано, что четырёхугольник $PQRS$ — прямоугольник.
7. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством о средних.
8. Да.
   1 балл — верно найден радиус вписанной окружности треугольника, допущена ошибка в сравнении чисел.
9. 741.
10. $(0; 1] \cup \{\frac{5+2\sqrt{13}}{3}\}$.
    1 балл — ответ отличается от верного исключением одной точки (не рассмотрен случай $D = 0$ или линейный случай).
11. 1. Решение неверно, данное выражение можно разложить на множители: $4n^4 + 1 = (2n^2 + 1)^2 - (2n)^2 = (2n^2 - 2n + 1)(2n^2 + 2n + 1)$. При натуральных n второй множитель больше единицы, поэтому для того, чтобы выражение равнялось простому числу, необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось равенство $2n^2 - 2n + 1 = 1$, откуда $n = 1$. Выполняем проверку: $4n^4 + 1 = 5$ — простое число.
    1 балл — указано неверное утверждение и верно получено разложение на множители.
12. $\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\frac{\sqrt{21}}{7}$. В решении не разобран второй случай — точка D лежит на продолжении стороны BC. В этом случае аналогично получаем $BC = 2x$, $AC = 6x$, $AB = 2\sqrt{7}\,x$. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{2\sqrt{7}x}{\sqrt{3}/2} = \frac{2x}{\sin A}$. Отсюда находим $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$.
    1 балл — верно найдена ошибка в представленном решении (нарисован или описан второй случай).

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

28 ноября 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 1**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите все значения x, при которых чи́сла $x+\sqrt{2x}-4$ и $4+\sqrt{2x}-x$ имеют противоположные знаки?
2. На столе лежат 27 экзаменационных билетов с номерами от 1 до 27. Студенты по очереди тянут (без возвращения) по одному билету. Какова вероятность того, что третьему студенту достанется билет из первых десяти, если первый студент вытянул билет № 3, а второй — билет № 24?
3. Медианы KP и LQ треугольника KLM равны и пересекаются в точке O. Найдите высоту MH треугольника KLM, если $MO=4$.
4. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью? (В ответе укажите все возможные варианты.)
5. Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 244 раза меньше суммы десяти её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.
6. Решите неравенство $|1-x|\leqslant\frac{21-3x}{|x-1|}$.
7. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\frac{(x+3)(x+12)}{6x}$ на луче $x>0$.
8. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ. Известно, что $MD=\frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\cos\angle MDQ=\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника DEF.
9. Докажите, что число n^4+2n^2+9 составное при любом натуральном n.
10. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+a(x+b)=0 \end{cases}$$

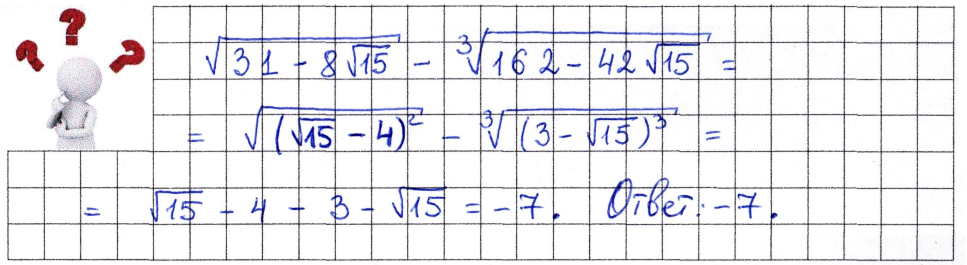
имеет ровно два различных решения.

Часть 2

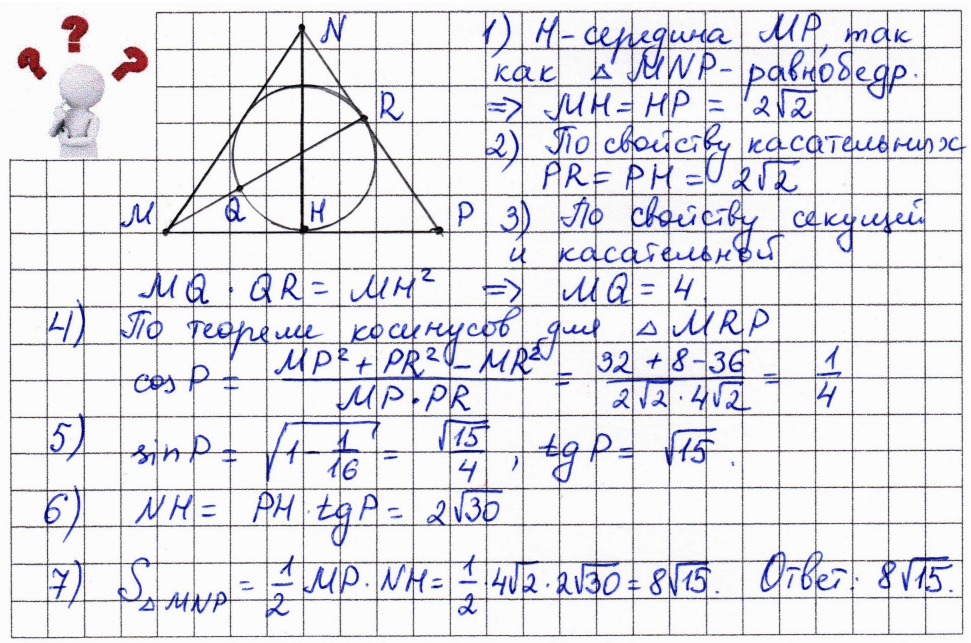
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Найдите значение выражения $\sqrt{31-8\sqrt{15}}-\sqrt[3]{162-42\sqrt{15}}$.



12. В равнобедренном треугольнике MNP с основанием MP вписанная окружность касается боковой стороны NP в точке R. Отрезок MR пересекает вписанную окружность в точке Q. Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что $MP=4\sqrt{2}$, $QR=2$.



Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

28 ноября 2019 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 2**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите все значения x, при которых чи́сла $3+\sqrt{4x}-x$ и $x+\sqrt{4x}-3$ имеют противоположные знаки?
2. В соревновании участвуют 17 спортсменов, все из разных стран. Очерёдность выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что спортсмен из России будет выступать в числе первых десяти, если известно, что спортсменам из Англии и США выпали номера 2 и 15?
3. Медианы AM и BN треугольника ABC равны и пересекаются в точке O. Найдите высоту CH треугольника ABC, если $OH=6$.
4. Один дом в микрорайоне, состоящем из 7 домов, имеет в среднем 19 этажей, причём число этажей каждого из домов не превышает 21. Сколько этажей может иметь при этих условиях самый низкий дом в этом микрорайоне? (В ответе укажите все возможные варианты.)
5. Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трёх её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.
6. Решите неравенство $\frac{10+x}{|x-2|}\geqslant|2-x|$.
7. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\frac{(x+4)(x+9)}{6x}$ на луче $x>0$.
8. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу опущены медиана AM и высота AH. Известно, что $AH=\frac{6}{\sqrt{13}}$ и $\cos\angle MAH=\frac{12}{13}$. Найдите катеты треугольника ABC.
9. Докажите, что число n^4+n^2+25 составное при любом натуральном n.
10. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5x-6y+5=0,\\ y+bx+a=0 \end{cases}$$

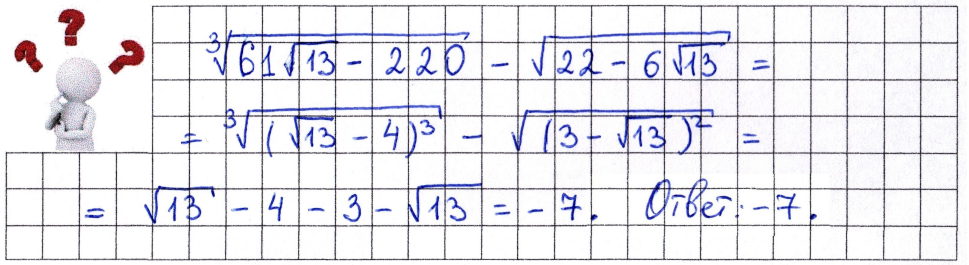
имеет ровно два различных решения.

Часть 2

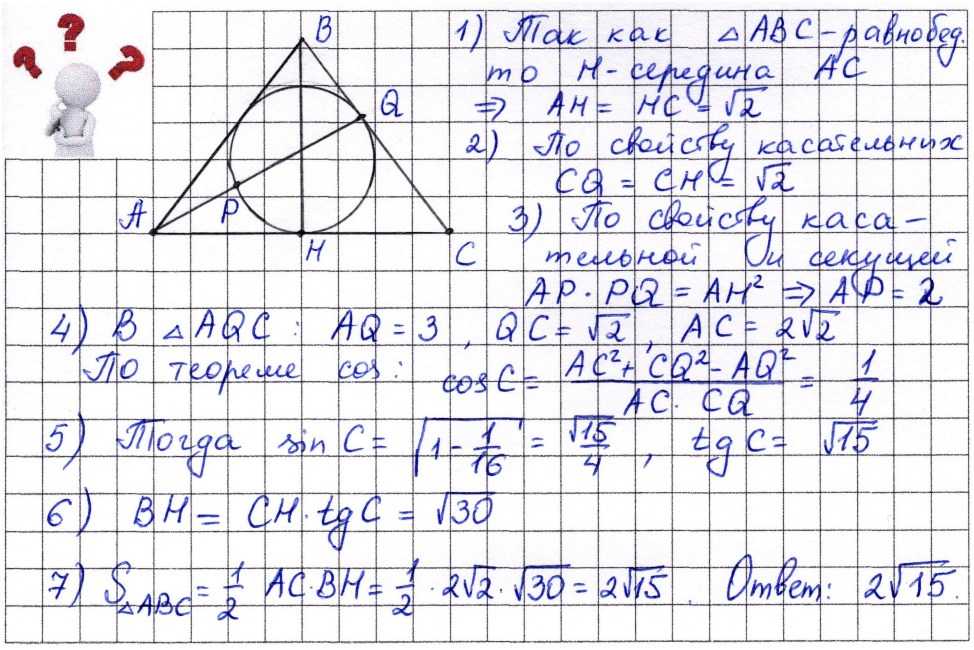
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{61\sqrt{13}-220}-\sqrt{22-6\sqrt{13}}$.



12. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольнике ABC с основанием AC, касается боковой стороны BC в точке Q. Отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AC=2\sqrt{2}$, $PQ=1$.



Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

27 марта 2021 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 1**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

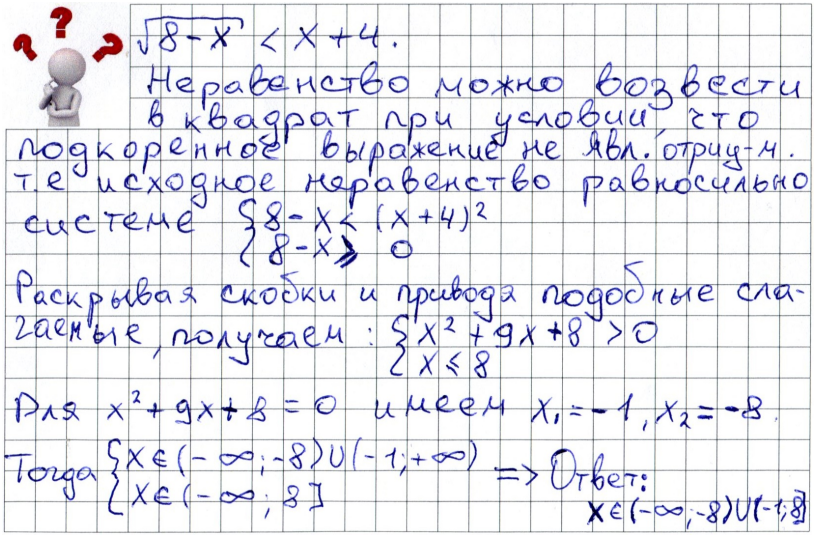
1. Решите уравнение $|\sin \pi x| + |1 + x - 2x^2| = 0$.
2. Найдите все пары простых чисел, разность между которыми равна 21.
3. Влад открыл банковский вклад и внёс 7000 рублей. Проценты начисляются в последний день года и суммируются с текущей величиной вклада. Ровно через один год друг Влада — Паша, открыл такой же вклад на ту же сумму. А через ещё один год Влад и Паша закрыли оба вклада. Известно, что Влад получил на 367 рублей 50 копеек больше чем Паша. Найдите процент, предлагаемый банком по вкладу.
4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые делятся на 11.
5. В студенческой группе 24 человека: 11 юношей и 13 девушек. Для участия в спортивном мероприятии необходимо выбрать трёх студентов одного пола (либо трёх юношей, либо трёх девушек). Сколькими способами это можно сделать?
6. В параллелограмме $MNPQ$ точка K — середина стороны MN, O — точка пересечения отрезков MP и QK. Найдите площадь треугольника MOK, если $OM = 2$, $MQ = 8$ и $\angle PMQ = 30°$.
7. Саша и Кирилл едут на самокатах по двум перпендикулярным друг другу дорогам. До пересечения дорог им обоим осталось ехать ровно по 20 километров. Скорость движения Саши 7 км/ч, а Кирилла — 4 км/ч. Через какое время мальчики будут ближе всего друг к другу? Расстояние измеряется на плоскости.
8. Команда «Балтика» оказалась в зоне вылета в низшую лигу за 2 матча до окончания чемпионата. Чтобы остаться в текущей лиге команде необходимо набрать не менее 4 очков в двух оставшихся матчах. В случае победы команда получает 3 очка, при ничейном результате — 1 очко, в случае проигрыша — 0 очков. Найдите вероятность того, что «Балтика» сохранит место в текущей лиге, считая, что вероятности победы и поражения в каждом матче одинаковы и равны 0,35. Ответ округлите до сотых.
9. Около четырёхугольника $MNPQ$ со сторонами $MN = 4$, $NP = 5$, $PQ = 6$, $QM = 2$ описана окружность. Найдите длину диагонали MP.
10. Найдите все значения q, при каждом из которых множество решений неравенства $(q^2 - 6q + 8)x - q + 4 \geq 0$ содержит полуинтервал $[4; 6)$.

Часть 2

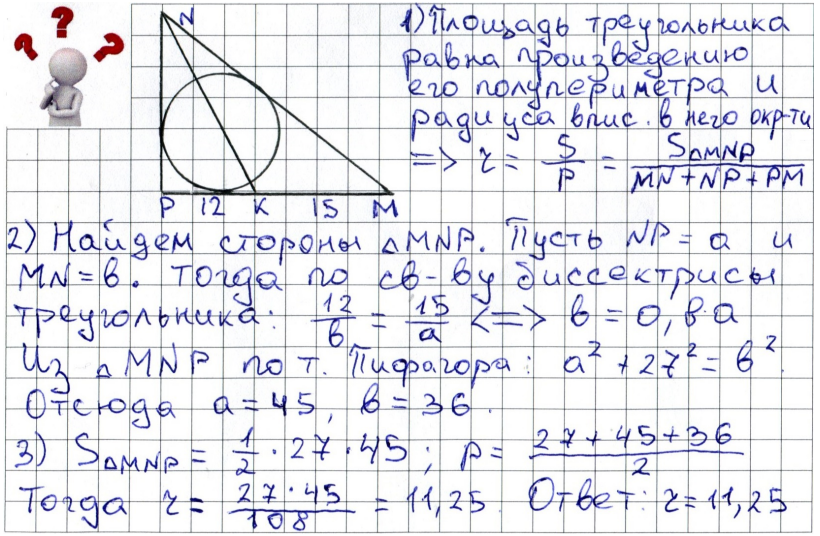
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Решите неравенство $\sqrt{8 - x} < x + 4$.



12. Биссектриса NK прямоугольного треугольника MNP с прямым углом P делит сторону MP на отрезки $MK = 15$ и $KP = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MNP.



Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

27 марта 2021 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 2**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Вычислите
$$\left(0{,}875 : 0{,}75^2 - 1{,}75 \cdot 0{,}(6)\right) \cdot \frac{4{,}8 \cdot 7{,}5}{187 : 11 - 9{,}(9)}.$$

2. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 4$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Пункты A и B расположены на реке на некотором расстоянии, а пункты C и D на озере на таком же расстоянии. Катер проплывает от A до B за 2 часа, а от B до A — за 3 часа. За какое время катер проплывёт от C до D? Катер движется с постоянной собственной скоростью.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вписанная окружность разбивает гипотенузу на отрезки длиной 1 и 3. Найдите площадь треугольника.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 4} < x + 3$.

6. Прямая касается окружности в точке C и параллельна хорде $AB = 10$. Найдите радиус окружности, если $AC = 13$.

7. Два натуральных числа таковы, что их разность равна 96, а их наименьшее общее кратное равно 630. Найдите эти числа (укажите все варианты).

8. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $x^2 + y^2$ при условии, что x и y удовлетворяют неравенству $|x + 2| + |y - 4| \leqslant 2$.

9. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист три раза попал в мишени и два раза промахнулся.

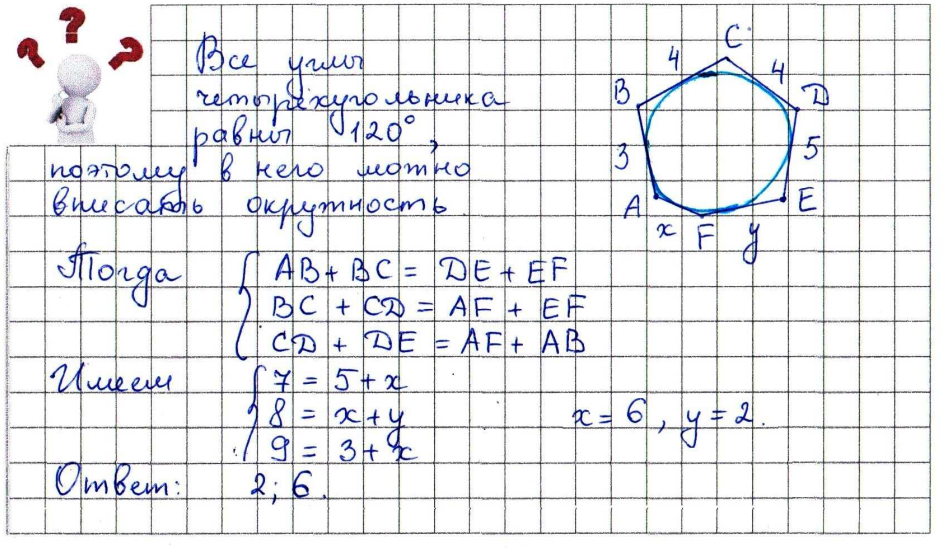
10. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x^2 - 2(2a + 1)x + 3a^2 - 3}{x^2 - 10x + 9} = 0$$
имеет ровно один корень.

Часть 2

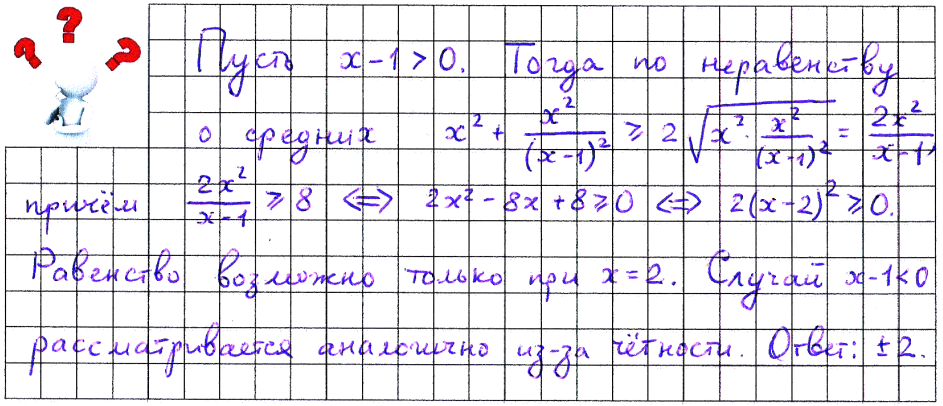
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. В выпуклом шестиугольнике все углы равны 120°. Четыре последовательные стороны имеют длины 3, 4, 4, 5. Найдите две оставшиеся стороны шестиугольника.



12. Решите уравнение $x^2 + \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 8$.



Критерии проверки работы

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов.

2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами.

1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче.

0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 2.
2. 17.
3. 2 ч 24 мин.
4. 3.
5. $\left(-\frac{13}{6}; -2\right] \cup \left[2; +\infty\right)$.
6. $\frac{169}{24}$.
7. 126 и 30.
8. 8 и 40.
9. $0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot C_5^2 = 0{,}2048$.
10. $-2; -2/3; 10$.
11. Получен правильный ответ: 2; 6. Тем не менее, решение нельзя считать правильным.
    Ошибка 1. Утверждение о том, что в шестиугольник можно вписать окружность неверно.
    Ошибка 2. Для описанного шестиугольника необязательно выполняются равенства системы.
    1 балл — верно указаны ошибки в представленном решении, но верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.
    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана не полностью.
12. Утверждение о том, что случай $x - 1 < 0$ рассматривается аналогично, неверно, так как функция $x^2 + \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ не является чётной. Правильный ответ: 2; $-1 \pm \sqrt{3}$.
    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении, но верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.
    1 балл — верно решено уравнение, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

28 августа 2021 года **Продолжительность 120 минут**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Один водяной насос может наполнить бассейн за 10 часов, а второй — за 8 часов. Спустя ровно 4 часа после того, как насосы вместе начали накачивать воду в бассейн, первый насос сломался. Через какое время после этого момента второй насос заполнит весь бассейн?

2. Известно, что числа $\frac{x}{2}$, $3-2x$, $\frac{18}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, а его гипотенуза равна 10. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в $60°$. От двух причалов A и B, расположенных на разных реках, одновременно вышли байдарка и лодка, собственные скорости которых равны 10 км/ч и 3 км/ч соответственно. Байдарка достигла озера через 2 часа, а лодка — через 4 часа. Найдите скорость течения рек, если $AB = 28$ км.

5. Решите неравенство
$$\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} \leqslant \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} + (x-1)^3.$$

6. Решите уравнение $40k + n = 5kn$, где k, n — целые числа.

7. Буквы слова ВЕЛИКАН нарезали на карточки (по одной букве на каждой), карточки перемешали, а затем случайным образом выложили в ряд. Какова вероятность, что получилось слово ВАЛЕНКИ? Ответ дайте в процентах, округлив результат до сотых.

8. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7.

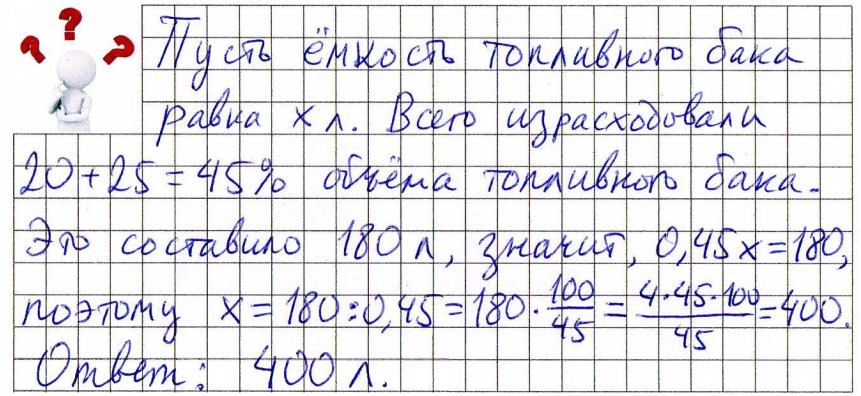
9. На стороне BC треугольнике ABC выбрана такая точка K, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причём $AN = BC$. Докажите, что $\angle MBC = \angle ANM$.

10. График функции $f(x) = |x-2|+1$, где $x \in \mathbb{R}$, и график функции $g(x)$ симметричны относительно точки $(1, 3)$. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $f(x-a) = g(x+a)$ имеет бесконечно много решений.

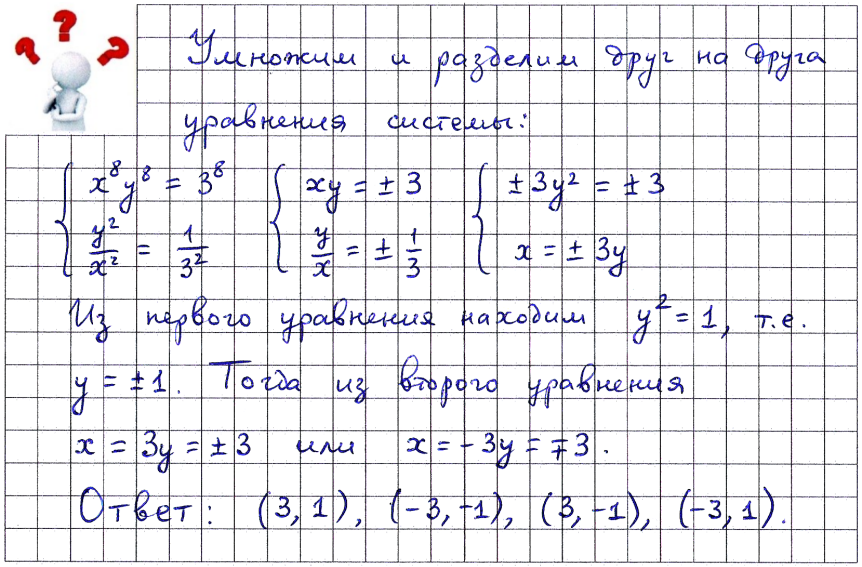
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. В грузовой автомобиль залили полный бак бензина. В первую поездку израсходовали 20% бензина, а во вторую — 25% остатка. Всего израсходовали 180 л бензина. Какова ёмкость топливного бака?



12. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3y^5 = 27, \\ x^5y^3 = 243. \end{cases}$



За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов.

2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами.

1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче.

0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 48 минут.
   1 балл — в ответ записано время от начала (4 часа 48 минут).
2. $-\dfrac{52}{25} = -2{,}08$
   1 балл — верно найден $x = \frac{25}{8}$, знаменатель прогрессии не найден или найден неверно.
   0 баллов — выписано и решается уравнение $3 - 2x = \sqrt{\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{18}{x} + 1\right)}$.
3. 2.
   1 балл — верно найдены катеты прямоугольного треугольника, но радиус вписанной окружности не вычислен или вычислен неверно.
4. 4 км/ч
   1 балл — правильно написано уравнение для нахождения скорости реки, но само уравнение решено неверно.
5. 1.
   1 балл — верно найдена область определения неравенства, но само неравенство не решено.
6. $(0, 0)$, $(1, 10)$.
   1 балл — получено разложение на множители, но решение не окончено или содержит ошибку.
   1 балл — найдены оба ответа, но не обосновано отсутствие других вариантов.
7. 0,02%.
   1 балл — верно найден ответ в виде $\dfrac{1}{7!}$, но округление не сделано или сделано неверно.
8. *1 балл* — .
9.
10. -3; 1.
    1 балл — верно построены графики функций f и g, найдено уравнение, задающее $g(x)$.

    В задачах 11—12 за описание всех ошибок выставляется 1 балл и за верное решение также выставляется 1 балл.

11. *Ошибка* состоит в том, что находить количество израсходованного за две поездки бензина, складывая проценты, нельзя, поскольку эти проценты взяты от разных величин: от полного бака и от остатка. Приведём правильное решение.
    Пусть объём бака равен x л. Тогда после первой поездки осталось $(1 - 0{,}2)\,x = 0{,}8x$ л бензина. После второй поездки осталось $(1 - 0{,}25) \cdot 0{,}8x = 0{,}75 \cdot 0{,}8x = 0{,}6x$ л бензина. Значит, было израсходовано $0{,}4x$ л бензина, что по условию составляет 180 л. Таким образом, $0{,}4x = 180$ л, поэтому $x = 450$ л.
    Ответ: 450 л.
    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении.
    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.
12. *Ошибка* состоит в том, что после умножения и деления уравнений системы получаются уравнения-следствия, система из которых не равносильна исходной. Поэтому для всех найденных решений необходима проверка с помощью подстановки в исходную систему.
    Ответ: $(3, 1)$, $(-3, -1)$.
    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении.
    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

19 марта 2022 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 10**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. После выпуска акций их цена сначала дважды повышалась на 10%, а затем снизилась на 20% и составила 484 рубля за штуку. Какова была начальная цена одной акции?

2. Решите уравнение $\dfrac{15x^3 - 23x^2 + 9x - 1}{\sqrt{3x^2 - 10x + 3}} = 0.$

3. Остатки при делении натурального числа n на 4 и 6 в сумме дают 8. Найдите все возможные остатки при делении числа n на 12.

4. Решите неравенство
$$\frac{x + 22}{|x| - 21} \leqslant -1.$$

5. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 60 и 58, а средняя линия равна 5.

6. Рассматриваются натуральные числа вида $2^a 3^b 5^c 7^d$, где a, b, c, d — попарно различные цифры. Сколько среди них кратных 60?

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Градусные меры дуг AB и CD равны соответственно $45°$ и $75°$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. В треугольник AED вписана окружность с центром в точке O, $OE = 6$. Найдите радиус окружности с центром в точке O.

8. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $\sqrt{7} - 2$. Найдите p и q, если известно, что они рациональны.

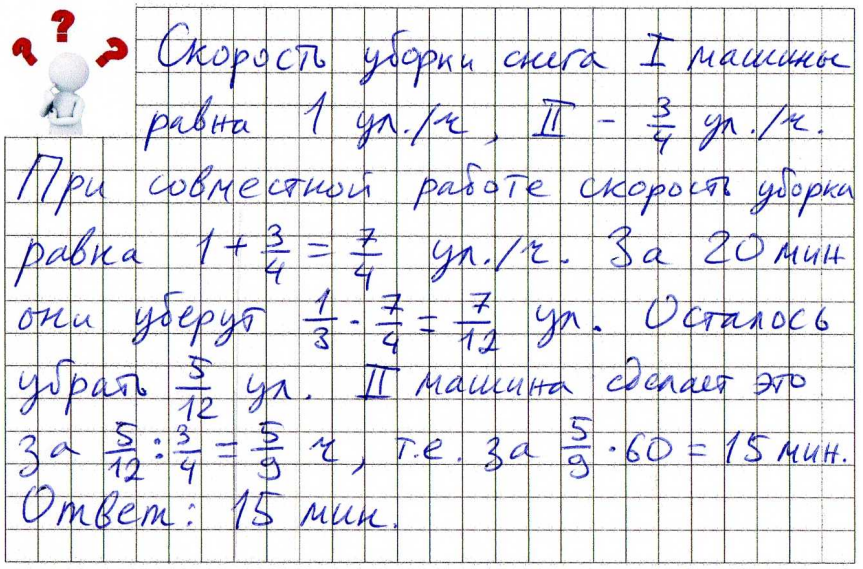
9. Незнайка помогает Знайке написать книгу. Знайка диктует весь текст. После этого Знайка случайным образом выбирает 3 написанные страницы. Если оказывается, что Незнайка ошибся хотя бы в двух из них, то Знайка заставляет его переписывать весь текст. Найдите вероятность того, что Незнайке придётся переделывать работу, если вероятность, с которой он может ошибиться на одной странице, равна 0,2.

10. Найдите все значения a, при которых прямая, задаваемая уравнением $ax + (1 - a)y = 2a$, имеет хотя бы одну общую точку с границей квадрата с вершинами $(0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1)$.

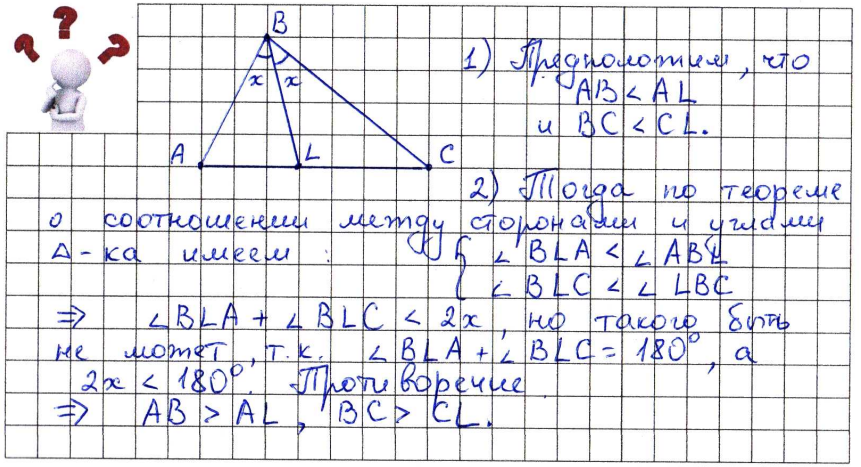
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Одна снегоуборочная машина могла бы убрать улицу за 1 час, а вторая — за 45 минут. Начав убирать снег одновременно, две машины проработали вместе 20 минут, после чего первую машину вызвали на другой объект. Через какое время вторая машина закончила уборку снега?



12. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Докажите, что $AB > AL$ и $BC > CL$.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 500 р.

2. $\frac{1}{5}$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением ровно одного из чисел $\frac{1}{3}$ или 1.

3. 11.
   1 балл — верно найдены остатки при делении числа n на 4 и на 6.
   0 баллов — верный ответ получен в результате рассмотрения частных случаев.

4. $(-21; 21)$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением точек ± 21.

5. 288.

6. $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 = 3136$.
   1 балл — верно найдены возможные диапазоны значений для всех переменных a, b, c, d.
   1 балл — найдено количество чисел $(8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10 = 6480)$ без учёта различности цифр a, b, c, d.
   2 балла — выписано произведение $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7$ (или другое равное ему выражение, вытекающее из хода решения), но его значение найдено неверно или не найдено.

7. $3\sqrt{3}$.
   1 балл — верно найден $\angle AED = 120^\circ$ и указано, что точка O лежит на биссектрисе этого угла.

8. $p = 4$, $q = -3$.
   1 балл — получен верный ответ, при этом в решении указано, что второй корень $-\sqrt{7} - 2$, но не доказано, что других вариантов нет.

9. $0{,}104 = \frac{13}{125}$.
   1 балл — при составлении выражения $0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2$ (или выражения $1 - 0{,}8^3 - 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$) не учтено число комбинаций, приведшее к потере множителя, равного 3.
   2 балла — верно и обоснованно выписано выражение $0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2$ (или другое равное ему выражение, вытекающее из хода решения), но его значение найдено неверно или не найдено.

10. $a \in [0; \frac{1}{2}]$.
    1 балл — задача сведена к рассмотрению взаимного расположения прямой, проходящей через точку $(2; 0)$, и квадрата.
    1 балл — ответ отличается от верного исключением одной или двух граничных точек.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание всех ошибок, указание способа исправить ошибки и получить верное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны все ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка 1.* Скорость уборки снега второй машины равна не $\frac{3}{4}$, а $\frac{4}{3}$ ул/ч. *Ошибка 2.* В последнем действии решения часы в минуты переведены неверно.
    Решение. Рассмотрим скорость уборки снега. У первой машины она равна 1 ул/ч, у второй $\frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$ ул/ч, а при совместной работе скорость уборки снега равна $1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ ул/ч. За 20 минут машины уберут $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$ улицы. Значит, останется убрать $\frac{2}{9}$ улицы. У второй машины на это уйдёт $\frac{2}{9} : \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$ часа, или 10 минут.
    1 балл — верно указана **хотя бы одна из** ошибок в представленном решении, верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.

12. В п. 1 представленного решения неверно построено отрицание к доказываемому утверждению (правильное отрицание: $AB \leqslant AL$ **или** $BC \leqslant CL$). Ошибка также может быть описана по-другому: после слова «Противоречие» неверно сформулировано отрицание к предположению (должно быть $AB \geqslant AL$ **или** $BC \geqslant CL$). Таким образом, рассуждение не является искомым доказательством.
    Решение. По теореме о внешнем угле треугольника BLC имеем $\angle ALB = \angle LBC + \angle BCL > \angle LBC = \angle ABL$. Следовательно, $AB > AL$. Аналогично, $BC > CL$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

19 марта 2022 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 14**

Часть 1

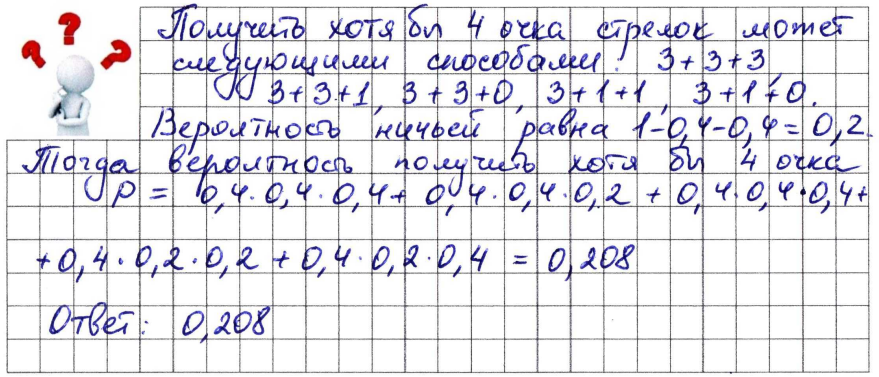
Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё треть пути и снова снизил скорость в два раза, проехав с этой скоростью оставшуюся часть пути. Какой из автомобилей быстрее преодолел весь путь и во сколько раз?
2. Найдите натуральное число n, для которого верно равенство
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=123{,}4(9).$$
3. В треугольнике углы образуют арифметическую прогрессию, причем отношение большего угла к меньшему равно 3. Найдите отношение радиуса описанной окружности этого треугольника к радиусу вписанной.
4. Остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2-7x+10$ равен $4-3x$. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $x-5$.
5. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана такая точка K, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причем $AN=BC$. Найдите отношение $BK:KN$.
6. Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{y+2z-3x}{x}=\dfrac{4y-3z+9x}{z}=1$. Найдите $\dfrac{z}{x}$.
7. Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей. Ответ обоснуйте.
8. Решите неравенство $\sqrt{9x^4-6x^2+1}\geqslant 2x$.
9. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC, E — точка пересечения прямых AM и CD, K — точка пересечения AM и BD. Найдите площадь треугольника KDE, если $AB=8$, $BC=12$, $\angle BAD=45^\circ$.
10. Найдите все действительные значения a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2-2x=3-x^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

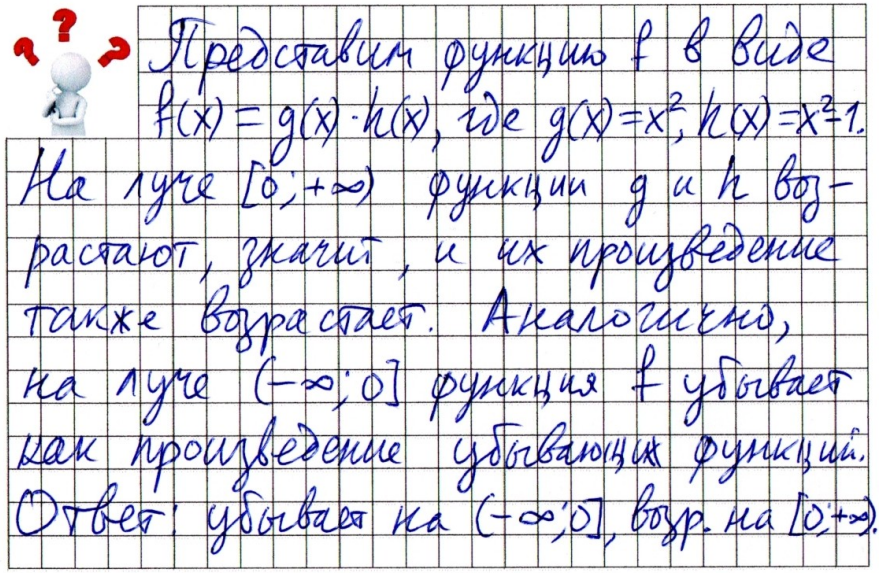
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Стрелок участвует в соревновании, где для того, чтобы пройти в следующий круг, нужно набрать хотя бы 4 очка в трёх этапах. В каждом этапе вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4. Если стрелок выигрывает в данном этапе, он получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что у стрелка получится выйти в следующий круг соревнований.



12. Исследуйте функцию $f(x)=x^2(x^2-1)$ на монотонность.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. Второй, в $\frac{18}{11}$ раза.
   1 балл — верно определён, какой из автомобилей быстрее преодолел весь путь, но в ответе указано, что он быстрее в $\frac{11}{18}$ раза.
2. 246.
   1 балл — левая часть верно преобразована к виду $\frac{n+1}{2}$.
3. $1+\sqrt{3}$.
   1 балл — верно найдены углы и радиус одной из окружностей.
4. -11
   1 балл — в результате верных рассуждений и деления с остатком в ответ записано 11.
5. 1.
6. $\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$.
7. $3^6=729$.
   1 балл — приведён верный ответ, но отсутствуют обоснования.
   1 балл — приведён пример нетрёхзначного числа (например, $2^6=64$ или 5^6) и присутствует обоснование.
8. $(-\infty;\frac{1}{3}]\cup[1;+\infty)$.
   1 балл — верно получено неравенство с модулем и верно решено неравенство хотя бы в одном случае раскрытия модуля.
   0 баллов — при извлечении корня в левой части потерян модуль.
9. $32\sqrt{2}$.
   1 балл — верно найдено отношение $AK:KE=1:2$.
   1 балл — верно найдена площадь $S_{AKD}=16\sqrt{2}$.
10. $(-3;-1)\cup(1;3)$.
    1 балл — верно найдены только положительные значения параметра: $1<a<3$.
    1 балл — ответ отличается от верного включением ±1 и/или ±3.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание всех ошибок, указание способа исправить ошибки и получить верное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны все ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не учтена последовательность получения очков. Все слагаемые (кроме отвечающего за три победы) должны входить в сумму с некоторыми коэффициентами.
Решение. Вероятность двух побед и одной ничьей:

$$P(3+3+1)=3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}2,$$

так как существуют три варианта для расположения ничьей в последовательности этапов. Аналогично,

$$P(3+3+0)=3\cdot 0{,}4^3,\quad P(3+1+1)=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2^2.$$

Вероятность победы, проигрыша и ничьей:

$$P(3+1+0)=3!\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}2,$$

где 3! — количество перестановок множества из трёх элементов без повторений. Тогда вероятность получить хотя бы 4 очка равна

$$P=0{,}4^3+3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}4^3+3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2^2+3!\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}2=0{,}592.$$

12. *Ошибка.* Данное рассуждение верно только на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, на которых обе функции g и h положительны. На отрезке $[-1;1]$ так рассуждать нельзя, так как на нём функция h отрицательна.
Решение. Чтобы исследовать функцию f на монотонность, представим её в виде $f(x)=x^4-x^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. На луче $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ функция $f_1(x)=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ (а значит, и f) возрастает как композиция возрастающих функций, а на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$ функция f_1 возрастает как композиция убывающих функций. На каждом из промежутков $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ функция f_1 есть композиция возрастающей и убывающей функций и поэтому убывает.
Ответ: возрастает на $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$ и на $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и на $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

18 июня 2022 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 18**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите сумму цифр частного чисел $\underbrace{9\ldots9}_{\text{100 девяток}}$ и 3333.

2. Решите уравнение $x^2 + 4xy + 13y^2 - 6y + 1 = 0$.

3. Найдите радиус окружности, если вписанный в неё угол, сторонами которого служат хорды длины 2 и 3, опирается на дугу в 120°.

4. Саша и Паша бегают по стадиону. Если они бегут в одном направлении, то встречаются через каждые 5 минут 4 секунды, а если в противоположных направлениях — через каждые 1 минуту 16 секунд. Во сколько раз скорость одного мальчика больше скорости другого?

5. Решите неравенство $2\sqrt{x+2} < \frac{9}{x+4} - 1$.

6. Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 12.

7. Для работы в классах проекта «Математическая вертикаль» необходимо выполнить квалификационную работу. Известно, что на эту работу каждый сотый учитель не успевает вовремя зарегистрироваться, каждый тридцать третий зарегистрировавшийся не приходит, а успешно выполняет работу лишь каждый четвёртый из пришедших. Найдите вероятность того, что случайно выбранный учитель успешно выполнит квалификационную работу.

8. Может ли дискриминант квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами равняться 2022?

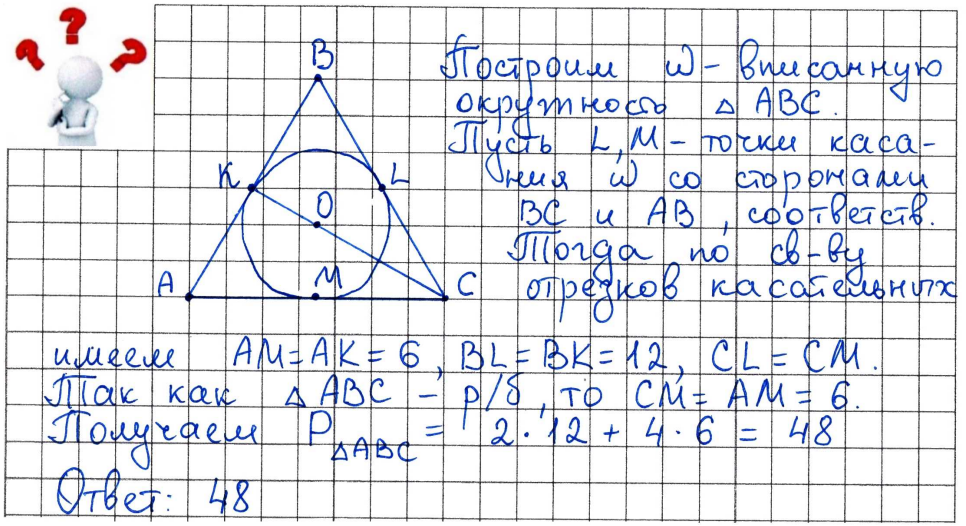
9. Проценты спирта в первом, втором и третьем растворе образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в соотношении 5 : 3 : 2, то получится 20%-й раствор, а если в соотношении 1 : 3 : 6, то 40%-й. Какова доля спирта в каждом растворе?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$(x^2 - (1+a)x - 2a^2 + 2a)\sqrt{x-3} = 0$$
имеет ровно одно решение.

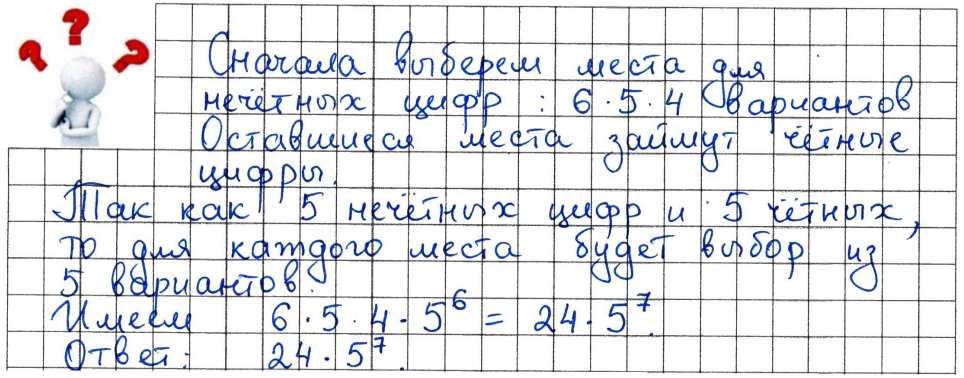
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CK. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK = 6$, $KB = 12$.



12. Сколько существует шестизначных чисел, которые состоят из трёх чётных и трёх нечётных цифр?



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 75.
   1 балл — верный ответ без обоснования;
   1 балл — найдено частное чисел ($300030003\ldots0003$) и верно указано количество цифр в нём.
2. $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$.
3. $\sqrt{\frac{7}{3}}$.
   1 балл — верно найдена хорда, стягивающая дугу ($\sqrt{7}$);
   1 балл — получен ответ $\sqrt{\frac{19}{3}}$ из-за неверно найденного угла между хордами.
4. В $\frac{5}{3}$ раза.
5. $[-2;-1)$.
   1 балл — при правильном ходе решения ответ отличается от верного включением точки -1 или исключением точки -2.
6. $(0;36]$.
   2 балла — при правильном ходе решения ответ отличается от верного включением точки 0;
   1 балл — при правильном ходе решения получен верный ответ, но не доказано, что наибольшее значение площади достигается, если треугольник равнобедренный.
7. 0,24.
   1 балл — выписано верное выражение $\left(\frac{99}{100}\cdot\frac{32}{33}\cdot\frac{1}{4}\right)$, но его значение не найдено или найдено неверно.
8. Нет.
   1 балл — доказано, что коэффициент b должен быть чётным.
9. $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$ и $\frac{9}{16}$ (или 0,0625, 0,1875, 0,5625).
   2 балла — ответ записан в виде 6,25%, 18,75%, 56,25%.
   1 балл — верно выписана система уравнений, но система не решена или при её решении допущена арифметическая ошибка.
10. $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$.
    1 балл — при правильном ходе решения ответ отличается от верного исключением одного или обоих концов отрезка.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Нельзя утверждать, что точка K является точкой касания вписанной окружности со стороной AB.
    Решение. По свойству биссектрисы получаем $BC=2AC$. Поскольку $BC=AB=18$, находим $AC=9$. Отсюда $P_{ABC}=45$.
12. *Ошибка 1.* Неверно найдено число вариантов для выбора трёх мест для нечётных цифр (должно быть C_6^3).
    Ошибка 2. Неверно найдена расстановка чисел по местам, так как нуль не может стоять на первом месте.
    Решение. Пусть на первом месте стоит нечётная цифра. Тогда для выбора мест для двух других нечётных цифр имеем $C_5^2=\frac{5\cdot4}{2}=10$ вариантов. Для любой позиции будет выбор из 5 цифр. Следовательно, получаем $10\cdot5^6$ чисел с нечётной цифрой на первом месте. Пусть на первом месте стоит чётная цифра. Тогда для выбора мест для двух других чётных цифр имеем $C_5^2=\frac{5\cdot4}{2}=10$ вариантов. На первой позиции может стоять одна из четырёх чётных цифр (так как число не может начинаться с нуля), на остальных — одна из пяти цифр. В этом случае получаем $10\cdot4\cdot5^5$. Итого $10\cdot5^6+10\cdot4\cdot5^5=18\cdot5^6=281250$ чисел.
    1 балл — верно указана *хотя бы одна* ошибка в представленном решении, при этом верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

27 августа 2022 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 20**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Дима читает в час 20 страниц, а Саша — 21 страницу. Они одновременно начали читать одну и ту же книгу, и Саша прочёл книгу быстрее Димы на 12 минут. Сколько страниц в книге?

2. Цена капусты сначала повысилась на 30%, а потом понизилась на 60%. На сколько процентов понизилась цена капусты по сравнению с первоначальной?

3. Стороны треугольника равны $2\sqrt{37}$, 6, 8. Найдите величину большего из углов треугольника.

4. Решите уравнение $\sqrt{6x^2 - x - 21} = 2x$.

5. Датчик случайных чисел генерирует двузначные числа. Вероятность того, что сгенерированное число окажется меньше 16, равна 0,31, а вероятность того, что сгенерированное число окажется больше 14, равна 0,76. Найдите вероятность того, что датчик сгенерирует число 15.

6. Найдите все значения, которые принимает функция $f(a) = \dfrac{11}{2a^2 - a + 7}$, если переменная a пробегает полуинтервал $(-1; 3]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E так, что $BE : EC = 2 : 3$. Расстояние от точки E до прямой AB равно 5. Найдите расстояние от точки E до прямой AC, если $AB = 12$, $AC = 13$.

8. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 4, а в остатке 6. Если же в делимом поменять цифры местами, а делитель оставить прежним, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите исходное двузначное число (укажите все возможные варианты).

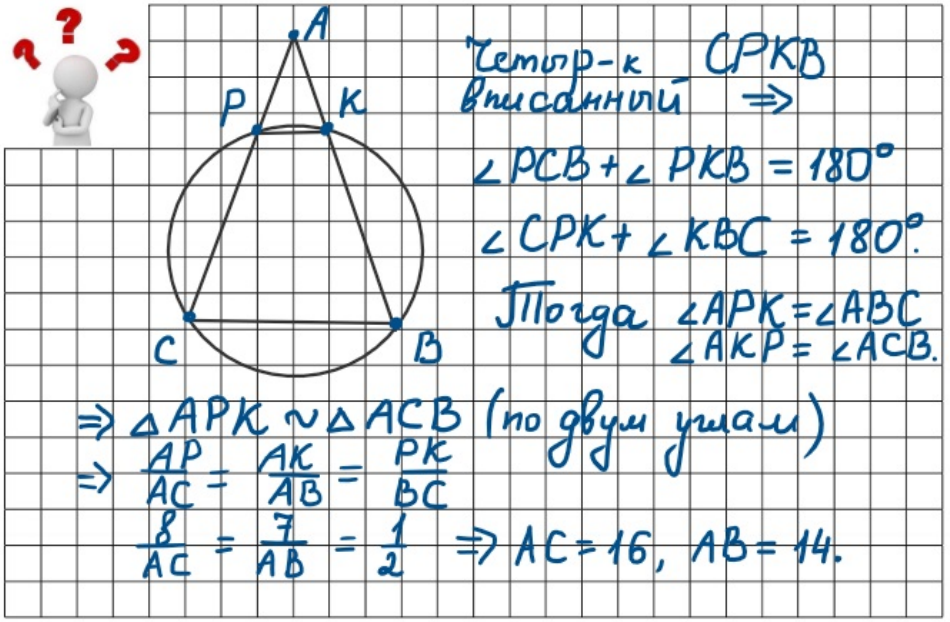
9. Для участия в соревнованиях «Весёлые старты» необходима команда из 4 человек, один из которых является капитаном. Сколькими способами можно выбрать команду из класса, в котором 21 учащийся?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$|x^2 - 4x + a^2 - 14| + (a - 2x + 1)^2 = 0$$
имеет хотя бы одно решение.

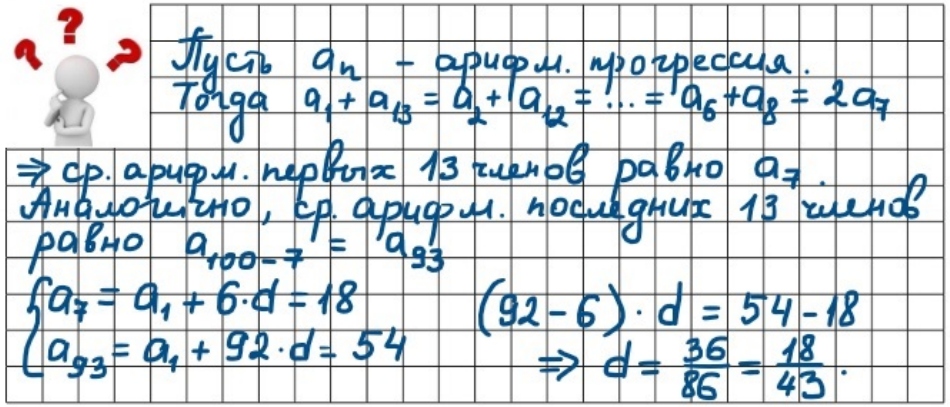
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках K и P соответственно. Найдите стороны AB и AC, если $AK = 7$, $AP = 8$, $PK = 5$, $BC = 10$.



12. Арифметическая прогрессия состоит из 100 членов. Среднее арифметическое первых 13 членов равно 18, среднее арифметическое последних 13 членов равно 54. Найдите разность прогрессии.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 84.
2. На 48%.
   1 балл — допущена одна вычислительная ошибка.
3. $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$.
   1 балл — верно найден косинус нужного угла, угол не найден или найден неверно.
4. 3,5.
5. 0,07.
6. [0,5; 1,6]
   1 балл — ответ отличается от верного исключением одного из концов отрезка.
7. $\frac{90}{13} = 6\frac{12}{13}$.
8. 54.
   1 балл — дан верный ответ, но не доказано, что других решений нет.
9. $21 \cdot C_{20}^3 = C_{21}^4 \cdot 4 = 23940$.
   2 балла — получено верное выражение с биномиальным коэффициентом.
10. -3; 4,2.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. $AC = 14$, $AB = 16$.
    Ошибка. Неверно выписано отношение длин сторон (должно быть $\frac{AP}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{PK}{CB}$).
12. $\frac{12}{29}$.
    Ошибка. Среднее арифметическое последних 13 чисел найдено неверно (должно быть a_{94}).

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1 апреля 2023 года Продолжительность 150 минут Вариант 21

……

Часть 1

В задачах 1 – 5 оценивается только верный ответ.
В задачах 6 – 10 необходимы полные обоснованные решения задач.

1. (1 балл) Первый робот и второй робот разгружают вагон 52 минуты. Второй робот и третий робот могут выполнить то же задание за 39 минут, а третий и первый роботы — за 26 минут. За сколько минут роботы разгрузят вагон, работая втроем?

2. (1 балл) Упростите выражение $\sqrt[4]{105\sqrt{3}+215+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

3. (1 балл) Каждое основание *KN* и *LM* трапеции *KLMN* продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов *L* и *K* этой трапеции пересекаются в точке *A*. Биссектрисы внешних углов *M* и *N* пересекаются в точке *B*. Найдите периметр трапеции *KLMN*, если длина отрезка *AB* равна 32.

4. (1 балл) Числа *x*, *y*, *z* таковы, что $\frac{3y+z-2x}{x}=\frac{4y-2z+5x}{z}=1$. Найдите $\frac{y}{x}$.

5. (1 балл) Укажите все пары целых чисел *(n,m)*, для которых $2nm+n=14$ и $mn\geq 8$.

6. (2 балла) Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

7. (2 балла) Решите уравнение $\frac{sinx}{sin^2\frac{x}{2}}=4cos^2\frac{x}{2}$

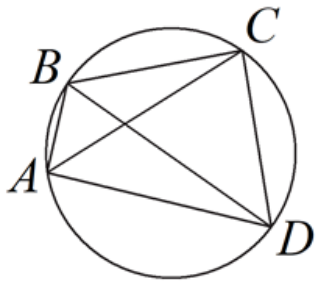
8. (2 балла) Через середину *K* медианы *BM* треугольника *ABC* и вершину *A* проведена прямая, пересекающая сторону *BC* в точке *P*. Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади четырёхугольника *KPCM*.

9. (4 балла) Найдите все значения a, при каждом из которых значения функции $f(x)=(2-a)|x|+3+a$ будут положительны на всем отрезке $-2\leq x\leq 2$.

10. (2 балла) Касательная к графику функции $f(x)=3x^3-18x^2+37x-3$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Найти координаты точки касания.

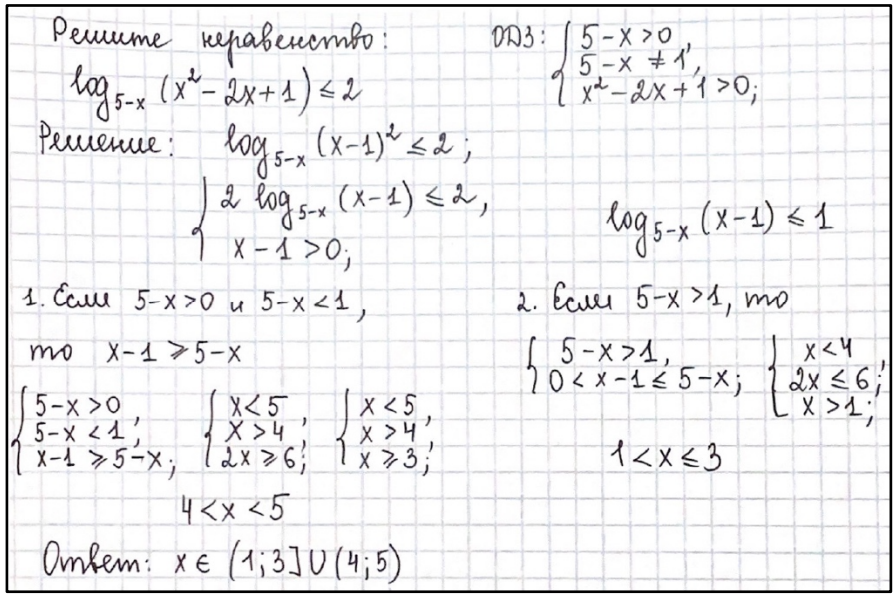
Часть 2

11. На экзамене было дано задание. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *BDC* равен 41°, угол *CAD* равен 46°. Найдите градусную меру угла *BCD*.



Среди ответов наиболее часто встречались значения 87, 98, 93 и 90.
а) (1 балл) Какой ответ правильный?
б) (2 балла) В результате каких ошибок могли быть получены другие ответы из приведенного списка? Предложите вариант объяснения для каждого из них.

12.Представлено решение ученика.
(1 балл) Кратко прокомментируйте это решение. В своем комментарии укажите ошибки и неточности, если они есть. Объясните, в чем состоят эти ошибки и к каким последствиям привели.
(1 балл) Исправьте эту ошибку (ошибки) и доведите (допишите) решение до верного ответа. (Оценивается решение, соответствующее логике решения ученика, но верное. Оформление не оценивается.)
(2 балла) Решите данное неравенство графическим способом. (построение графика необходимо объяснить – достаточно кратких пояснений).



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

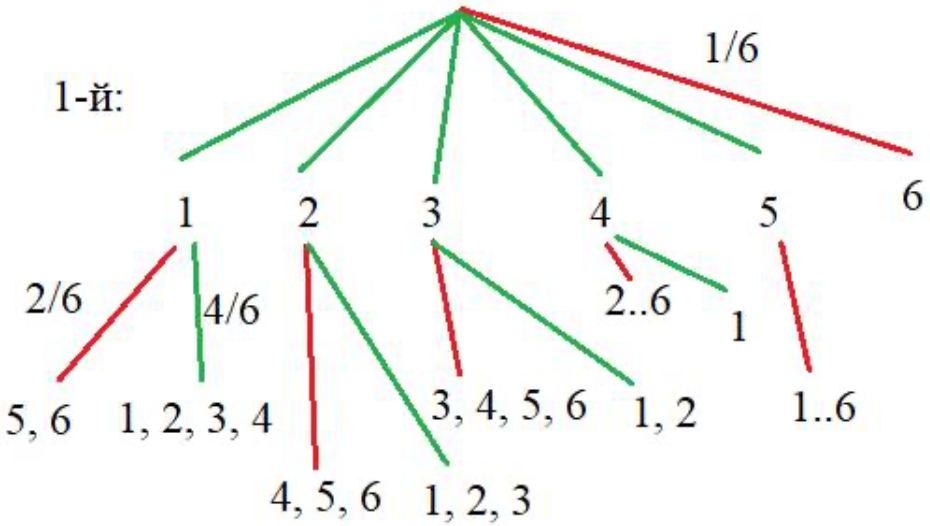
В задачах 1–5 оценивается только верный ответ – 1 балл.

1	2	3	4	5
24	$\mathbf{2\sqrt{3}+1}$	**64**	$\mathbf{\frac{4}{13}}$	$\mathbf{(-14;-1)\ \ (-2;-4)}$

6. Ответ: **0,56**

2 балла – приведено верное решение, построено дерево или словами правильно объясняется формула.
1 балл – приведена только верная формула и ответ или есть арифметическая ошибка.
0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Построим дерево решений при двух бросках, пока число очков не превысило в сумме 5:



Нас интересует возникновение любого «красного» исхода при втором броске. Это есть не что иное, как сумма вероятностей этих исходов. Имеем:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{2+3+4+5+6}{36}=\frac{5}{9}\approx 0{,}56$$

7. Ответ: $\boldsymbol{x=\pi+2\pi k, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}}$

2 балла – приведено верное обоснованное решение.
1 балл – приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов или верное решение с арифметической ошибкой (не более двух).
0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Заметим, что в силу формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, справедлива формула $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Откуда $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2 x$.

Имеем:

$$\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}=4\cos^2\frac{x}{2}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin^2\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin x=4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2},\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin x=\sin^2 x,\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=1,\end{array}\right.\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\frac{x}{2}\neq\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\end{cases}\ k,n\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x\neq 2\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\end{cases}\ k,n\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\ k\in\mathbb{Z}.$$

8. Ответ: **0,6**

2 балла – приведено верное решение с доказательством всех фактов (арифметические ошибка не считаются).
1 балл – приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов.
0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Проведём отрезок *MT*, параллельный *AP*. Тогда *MT* – средняя линия треугольника *APC* и *CT=TP*, а *KP* – средняя линия треугольника *BMT* и *TP=BP*. Обозначим площадь треугольника *BKP* через *S*. Тогда площадь треугольника *KPC*, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна 2*S*. Значит, площадь треугольника *CKB* равна 3*S* и равна площади треугольника *CMK* (треугольники имеют одну высоту, проведённую из вершины *C*, и равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника *AMK*. Площадь треугольника *ABK* равна площади треугольника *AMK*. Итак, $S_{BKP}=S$, $S_{KPC}=2S$, $S_{CMK}=3S=S_{AMK}=S_{ABK}$, $S_{KPCM}=5S$. Значит, $S_{ABK}:S_{KPCM}=3:5=0{,}6$.

9. Ответ: $-3 < a < 7$

4 балла – приведено верное обоснованное решение.
3 балла – с помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением концов.
2 балла – получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.
1 балл – задача верно сведена к исследованию двух прямых.
0 баллов – в остальных случаях.

Решение. Проверить концы отрезков для $x > 0$ и $x < 0$. Теорема, если на концах отрезка значения функции положительны, то и весь отрезок даст положительные значения линейной функции (док-ва не требуется, но факт должен быть сформулирован).

10. Ответ: **(2; 23)**

2 балла – приведено верное обоснованное решение.
1 балл – ход рассуждений верный, но допущена арифметическая ошибка.
0 баллов – в остальных случаях.

Решение. $f'(x_0) = 9{x_0}^2 - 36x_0 + 37 = tg\,45° = 1 \implies 9{x_0}^2 - 36x_0 + 37 = 1 \implies 9{x_0}^2 - 36x_0 + 36 = 0 \implies (x_0 - 2)^2 = 0 \implies x_0 = 2.$

Тогда $f(x_0) = 3 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 37 \cdot 2 - 3 = 24 - 72 + 74 - 3 = 23$

11а. Ответ: **93**

1 балл – верный ответ.
11б.
2 балла – приведены 3 верных объяснения.
1 балл – приведены 2 верных объяснения.
0 баллов – в остальных случаях.
Решение. Возможны различные правдоподобные объяснения. Например, 98 могло появиться в результате деления угла пополам с ошибкой.

12.
1) *1 балл –верно указана ошибка, приведены обоснования.*

Ошибка: неравносильный переход из $log_{5-x}(x-1)^2 \le 2$, верный переход к $2log_{5-x}|x-1| \le 2$. В результате потеряны решения $x < 1$.

2) Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 3] \cup (4; 5)$

1 балл – приведено решение (начиная с ошибочного перехода) или просто рассмотрен потерянный случай и получен верный ответ.

3) *2 балла – верно построен график функции $log_{5-x}(x-1)^2$, $log_2\frac{|x-1|}{5-x}$ или $log_{5-x}|x-1|$, верно найдены решения неравенства, есть пояснения к построению.*
1 балл – на графике нет ключевых точек: пересечения с осями, выколотые точки, не указаны асимптоты (или нет пояснений к ним).
0 баллов – в остальных случаях.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

15 апреля 2023 года Продолжительность 150 минут Вариант 22

……...……...

Часть 1

В задачах 1 – 5 оценивается только верный ответ.
В задачах 6 – 10 необходимы полные обоснованные решения задач.

1. (1 балл) Студент взялся читать учебник в ночь перед экзаменом. Первую треть учебника он читал со скоростью 60 страниц в час, вторую, после того, как притомился, - со скоростью 45 страницу в час а последнюю треть, изрядно устав под утро, - со скоростью 9 страниц в час. Найдите среднюю скорость (в страницах в час) чтения учебника в ночь перед экзаменом.

2. (1 балл) Вычислите $\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{10})$.

3. (1 балл) В треугольнике *ABC* стороны *AB* и *AC* равны соответственно 4 и 13, $\cos\angle BAC = -\frac{5}{13}$. Найдите расстояние от основания высоты, проведенной из вершины *B*, до середины стороны *BC*.

4. (1 балл) Найдите наименьшее возможное значение выражения $5x^2+2y^2$, если x и y - положительные числа, сумма которых равна 2.

5. (1 балл) Найдите все целые n, при которых выражение $\frac{n^3-n^2+21n}{n^2-n}$ является целым числом.

6. (2 балла) Экзамен по теории вероятности сдают 15 студентов третьего курса и несколько студентов второго курса. Можно считать, что для любого студента третьего курса вероятность сдать экзамен составляет 0.75, в то время как для студентов второго курса вероятность сдать – 0.45. Принимающий профессор рассчитал, что вероятность того, что случайный студент экзамен не сдаст, составляет 0.325. Студент Вова этот экзамен сдал, найдите вероятность того, что Вова – второкурсник.

7. (2 балла) Решите уравнение $6\sin^3 x+\sin^2 x-4\sin x+1=0$

8. (2 балла) В неравнобедренном треугольнике *ABC* проведены медиана *CM* и высота *CH*. Оказалось, что $\angle ACM = \angle BCH$. Найдите угол *C* этого треугольника.

9. (4 балла) При каких значениях параметра b уравнение $|x-3|+|x+b|=4$ имеет бесконечно много решений?

10. (2 балла) Найдите угол между графиками $y=x^2-9x+26$ и $y=\frac{24}{x}$ в точке с абсциссой 3.

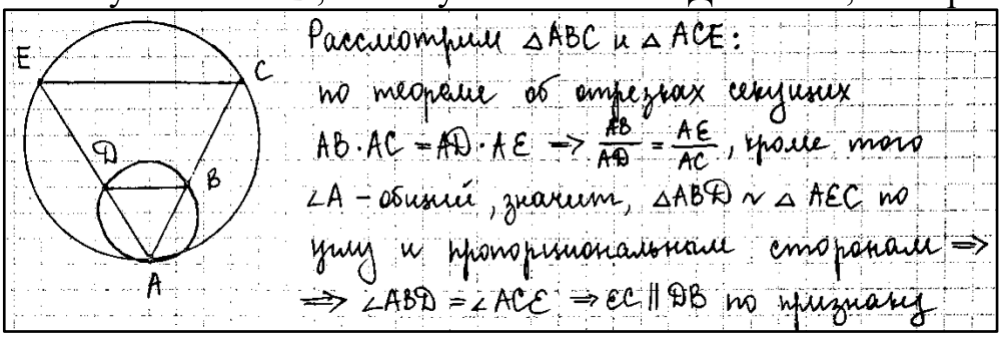
Часть 2

11. Представлено решение ученика.

(1 балл) Проверьте решение и опишите все найденные ошибки.

(2 балла) Предложите правильное решение.

Условие. Две окружности разных радиусов касаются внутренним образом в точке *A*. Через точку *A* проведены две прямые, пересекающие данные окружности: одна из них пересекает меньшую окружность в точке *B*, а большую – в точке *C*, другая пересекает меньшую в точке *D*, большую – в точке *E*. Докажите, что прямые *BD* и *CE* параллельны.



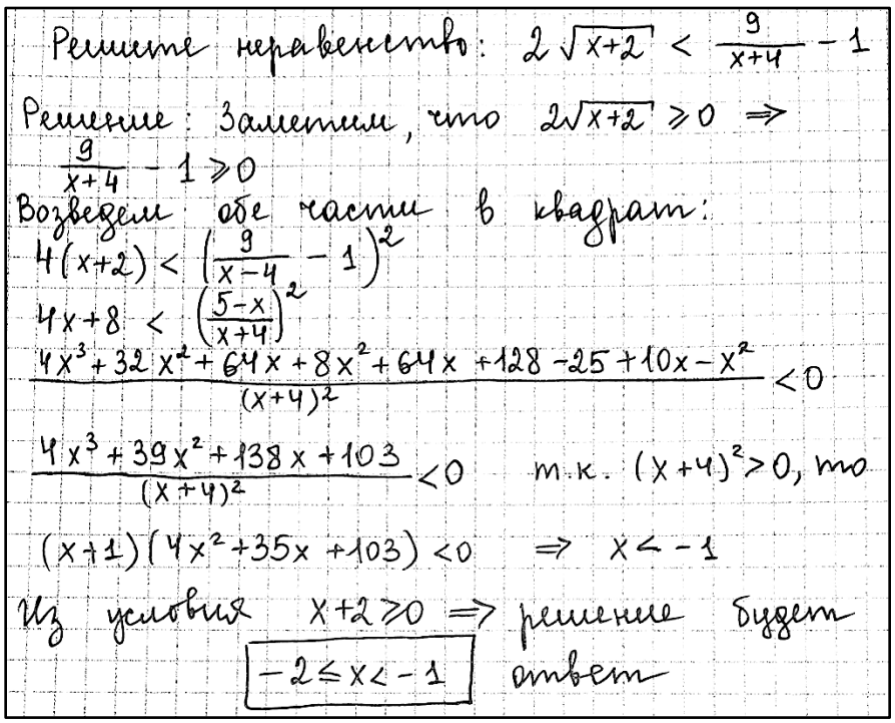
Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACE$:
по теореме об отрезках секущих
$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, кроме того
$\angle A$ – общий, значит, $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ по
углу и пропорциональным сторонам $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACE \Rightarrow EC \parallel DB$ по признаку

12. Представлено решение ученика.

(1 балл) Кратко прокомментируйте это решение. В своем комментарии укажите ошибки и неточности, если они есть. Объясните, в чем состоят эти ошибки и к каким последствиям привели.

(1 балл) Исправьте эту ошибку (ошибки) и доведите (допишите) решение до верного ответа. (Оценивается решение, соответствующее логике решения ученика, но верное. Оформление не оценивается.)

(2 балла) Решите данное неравенство графическим способом. (построение графика необходимо объяснить – достаточно кратких пояснений).



Решите неравенство: $2\sqrt{x+2} < \frac{9}{x+4} - 1$

Решение: Заметим, что $2\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow$
$\frac{9}{x+4} - 1 \geq 0$

Возведем обе части в квадрат:

$4(x+2) < \left(\frac{9}{x-4} - 1\right)^2$

$4x+8 < \left(\frac{5-x}{x+4}\right)^2$

$\frac{4x^3+32x^2+64x+8x^2+64x+128-25+10x-x^2}{(x+4)^2} < 0$

$\frac{4x^3+39x^2+138x+103}{(x+4)^2} < 0$ т.к. $(x+4)^2 > 0$, то

$(x+1)(4x^2+35x+103) < 0 \Rightarrow x < -1$

Из условия $x+2 \geq 0 \Rightarrow$ решение будет

ответ $\boxed{-2 \leq x < -1}$

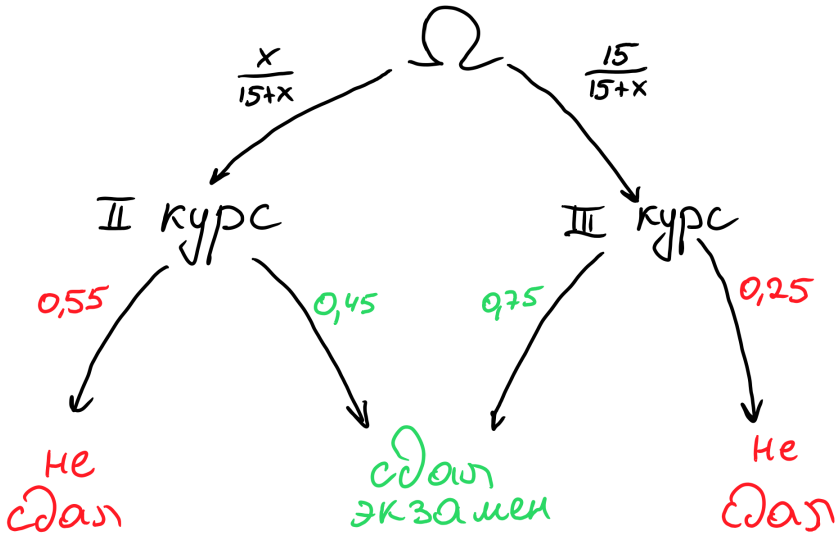
ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

В задачах 1–5 оценивается только верный ответ — 1 балл.

1	2	3	4	5
20	-8	7.5	$\frac{40}{7}$	$\{-20; -6; -2; 2; 4; 8; 22\}$

6. Ответ: $\frac{1}{6}$.

2 балла — приведено верное решение, построено дерево или есть правильное текстовое объяснение (за арифметическую ошибку баллы не снижаются);
1 балл — приведен только верный ответ или верно найдено количество второкурсников;
0 баллов — в остальных случаях.



Пусть второкурсников x человек. Тогда вероятность того, что случайный студент, сдающий экзамен — второкурсник составляет $\frac{x}{15+x}$, а вероятность того, что случайный студент, сдающий экзамен — третьекурсник составляет $\frac{15}{15+x}$. Построим дерево событий и укажем известные вероятности на его рёбрах. По условию $\mathbb{P}(\textit{не сдать экзамен}) = 0.325 = 1 - \mathbb{P}(\textit{сдать экзамен})$, откуда $\mathbb{P}(\textit{сдать экзамен}) = 0.675$, но из формулы полной вероятности имеем уравнение:

$$\frac{x}{15+x} \cdot \frac{45}{100} + \frac{15}{15+x} \cdot \frac{75}{100} = 0.675,$$

откуда $x = 5$. Осталось вычислить условную вероятность

$$\mathbb{P}\left(\textit{второкурсник} \middle| \textit{сдал экзамен}\right) = \frac{\mathbb{P}(\textit{второкурсник сдал экзамен})}{\mathbb{P}(\textit{студент сдал экзамен})} = \frac{0.25 \cdot 0.45}{0.625} = \frac{1}{6}.$$

7.

2 балла — приведено верное обоснованное решение (не снижаем баллы за использование одинаковых букв при записи корней тригонометрического уравнения);
1 балл — приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов или верное решение с арифметической ошибкой (двумя или более);

0 баллов — в остальных случаях.

Пусть $k = \sin x$, тогда уравнение имеет вид $6k^3 + k^2 - 4k + 1 = 0$. Раскладываем многочлен на множители, например используя следствие из теоремы Безу:
$(k+1)(2k-1)(3k-1) = 0$, откуда получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \dfrac{1}{2},\\ \sin x = \dfrac{1}{3};\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l,\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \qquad k,l,m,n,t \in \mathbb{Z}.\\ x = \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\\ x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi t,\end{array}\right.$$

8. Ответ: $90°$.
2 балла — приведено верное решение с доказательством всех фактов;
1 балл — приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов;
0 баллов — в остальных случаях.

Воспользуемся тем, что центр описанной окружности лежит на прямой, симметричной высоте относительно биссектрисы, то есть в нашем случае в точности на медиане треугольника. При этом центр описанной окружности суть точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника, но из условия треугольник неравнобедренный, а значит пересечение медианы, проведённой к AB и серединного перпендикуляра к этой же стороне - единственная точка M, откуда следует, что треугольник ABC — прямоугольный.

Достаточно также провести среднюю линию треугольника MM_A и показать, что точки M_A, M, H, C лежат на одной окружности.

9. Ответ: $\{1; -7\}$.
4 балла — полное и обоснованное решение;
3 балла — полное и обоснованное решение с вычислительной ошибкой;
*2 балла — найдены $b = 1$ **и** $b = -7$ без доказательства отсутствия других значений параметра;*
*1 балл — найдено $b = 1$ **или** $b = -7$;*
0 баллов — в остальных случаях.

Сумма расстояний на числовой прямой от x до 3 и от x до $-b$ должна быть равна 4. Таким образом для бесконечного числа решений достаточно, чтобы расстояние между числами $-b$ и 3 было равно 4, откуда $b = 1$ или $b = -7$.

10. Ответ: $\arctan\dfrac{1}{27}$. *2 балла — обоснованно найден угол между касательными (не снижаем баллы, если найден тангенс угла);*
1 балл — найдены уравнения касательных в точке $(3; 8)$ предварительно проверено, что точка $(3; 8)$ — общая, или приведено верное решение, но не проверено, что точка $(3; 8)$ — общая;
0 баллов — в остальных случаях.

Угол между кривыми в их точке пересечения суть угол между их касательными в этой точке. Для нахождения ответа достаточно найти производные данных функций в точке с абсциссой 3, предварительно проверив, что точка $(3; 8)$ - общая. Пусть $f(x) = x^2 - 9x + 26$,

$g(x) = \dfrac{24}{x}$. Тогда $f'(3) = -3$, $g'(3) = -\dfrac{8}{3}$, осталось найти угол между касательными. Пусть $f'(x) = -3 = \operatorname{tg}\alpha$, $g'(3) = -\dfrac{8}{3} = \operatorname{tg}\beta$, тогда искомый угол $\varphi = |\alpha - \beta|$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\left|-\frac{8}{3} + 3\right|}{1 + 8} = \dfrac{1}{27}$.

11. Ошибки:

- Некорректно применена теорема об отрезках секущих;
- После "доказательства" подобия треугольников указано равенство не соотвествующих углов.

а) 1 балл – верно указана хотя бы одна ошибка;
б) 2 балла – представлено верное доказательство;
1 балл – приведено верное доказательство, но не доведено до конца.

Решение: Достаточно провести общую касательную в точке A и воспользоваться равенством угла между касательной и секущей и вписанных углов.

12. Ошибки:

- Неравносильный переход при возведении в квадрат;
- Нет проверки $x + 4 \neq 0$.

Комментарий: в решении используется знак $\Longrightarrow$ вместо $\Longleftrightarrow$.

а) 1 балл — верно указана ошибка, приведены обоснования.
б) 1 балл — приведено верное решение или просто рассмотрено место с ошибкой и получен верный ответ;
в) 2 балла -– верно построен график функции, верно найдены решения неравенства, есть пояснения к построению;
1 балл — на графике нет ключевых точек: пересечения с осями, выколотые точки, не указаны асимптоты (или нет пояснений к ним);
0 баллов – в остальных случаях.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

10 июня 2023 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 23**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Дано выражение
$$A(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4}{x-2\sqrt{x}-3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{3}{3-\sqrt{x}}.$$
а) Найдите все значения x, при которых выражение $A(x)$ имеет смысл.
б) Упростите выражение $A(x)$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\cos^2 x+\sin x+4$ и все значения аргумента, при которых оно принимается.

3. Докажите, что при всех значениях переменных x, y справедливо неравенство $2x^2+13y^2\geqslant 10xy$. При каких значениях x, y достигается равенство?

4. Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

5. Решите уравнение $x^2+4x+1+2\sqrt{x+2}=0$.

6. Окружность касается сторон $AB=5$ и $BC=7$ прямоугольника $ABCD$ и проходит через его вершину D. Найдите радиус окружности.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-3ax+a^2+5=0$ имеет два корня, один из которых равен 3.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $AC=6$. На стороне BC отмечена такая точка K, что $\angle AKC=\angle BAC$ и $BK:KC=2:1$. Найдите BC.

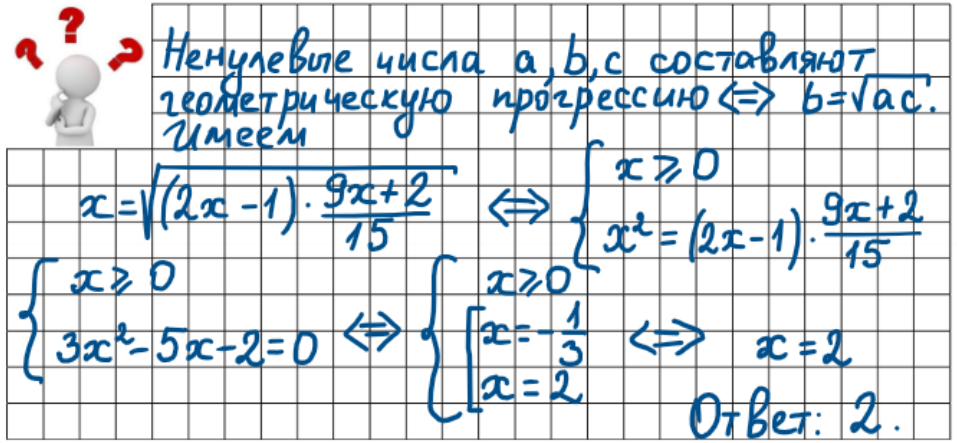
9. Решите систему неравенств
$$\begin{cases}\dfrac{1}{|x-2|}\geqslant 4;\\ x^4\leqslant 4x^2+5.\end{cases}$$

10. Натуральные числа a и b независимо друг от друга случайным образом выбираются из отрезка $[1;1000]$. Найдите вероятность того, что значение выражения a^2+b^2 окажется кратно 5.

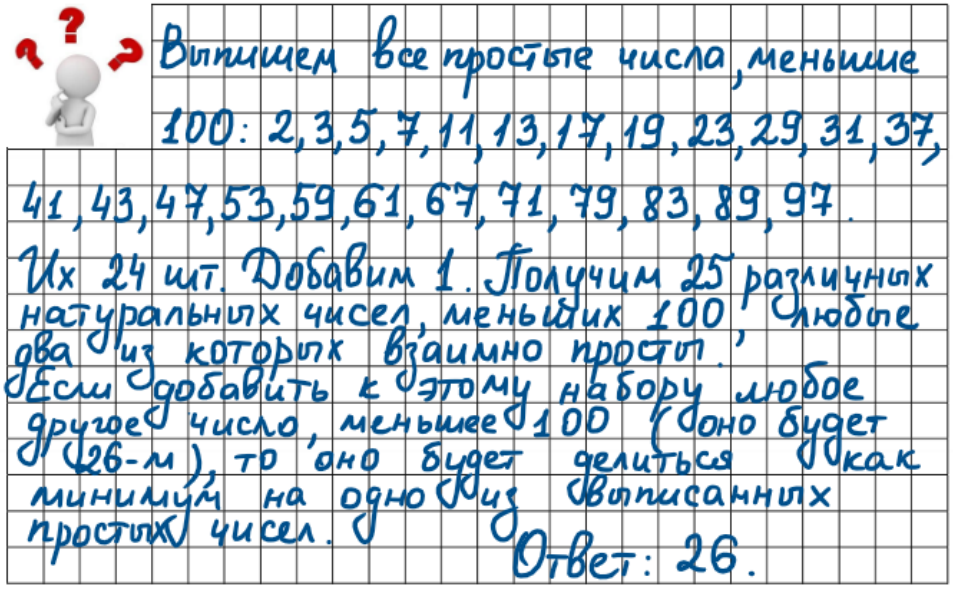
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Числа $2x-1$, x и $\frac{9x+2}{15}$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите x.



12. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого из любых n различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. а) $0 \leqslant x \neq 9$; б) 1.
   ▷ по *1 баллу* за каждый верно выполненный пункт.

2. $5\frac{1}{4}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$.
   ▷ *1 балл* — верно и обоснованно получено наибольшее значение, значения аргумента не найдены или найдены неверно.

3. (0; 0). ▷ *1 балл* — неравенство доказано, но значения переменных не найдены или найдены неверно.

4. 90 км.

5. -1.

6. $12 - \sqrt{70}$. ▷ *1 балл* — получен ответ $12 \pm \sqrt{70}$.

7. 7. ▷ *1 балл* — подставлено значение $x = 3$, верно найдены оба корня квадратного уравнения относительно a, но проверка наличия двух корней не выполнялась или выполнена неверно.

8. $6\sqrt{3}$.

9. $[1\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$.
   ▷ *1 балл* — ответ отличается от верного включением точки 2.

10. 0,36.
    ▷ *1 балл* — доказано, что $a^2 + b^2$ кратно 5 лишь в следующих двух случаях:
    а) оба числа a и b кратны 5;
    б) одно из чисел даёт при делении на 5 остаток 1 или 4, а другое — 2 или 3.
    Дальнейшие продвижения или отсутствуют, или содержат ошибки.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. ▷ *Ошибка.* Неверно написано условие, чтобы три числа составляли геометрическую прогрессию (правильно $b^2 = ac$).
    Ответ. 2, $-\frac{1}{3}$.

12. ▷ *Ошибка 1.* Пропущено простое число 73, поэтому, следуя приведённому решению, можно построить набор из 26 чисел, меньших 100, любые два из которых взаимно просты.
    Ошибка 2. В решении не доказано, что если $n \geqslant 27$, то из *любых* n различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми: рассмотренный пример добавления одного числа к конкретному множеству ничего не доказывает.
    Решение. Среди любых 27 различных натуральных чисел, меньших 100, как минимум 26 чисел больше единицы, а следовательно, каждое из 26 чисел имеет хотя бы один простой делитель. Всего простых чисел в промежутке от 1 до 99 ровно 25 (выписанные в «решении» и 73), поэтому какие-то два числа имеют общий простой делитель, а значит, не являются взаимно простыми. Таким образом, искомое число равно 27.
    1 балл — верно указана *хотя бы одна* ошибка в представленном решении, при этом верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2023 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 24**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите наименьшее целое число, которое больше числа $\frac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$.
2. Произведение двух натуральных чисел равно 225. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих чисел?
3. Решите неравенство $\frac{2-7x}{(x+2)(1-x)} \geqslant 1 + \frac{2}{x-1}$.
4. По туристическому маршруту из пункта A вниз по реке, скорость течения которой 3 км/ч, отправился плот с туристами. Через час после отплытия плота для доставки лекарства одному из туристов был отправлен катер, который догнал плот и через 24 минуты после отправления вернулся обратно в пункт A. Найдите собственную скорость катера.
5. Найдите $\cos x$, если $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$.
6. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle B = \angle D = 90°$ и $AB = BC$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если расстояние от вершины B до стороны AD равно $\sqrt{3}$.
7. На складе допускается установка пожарных извещателей двух моделей: противодымного А и теплового В. При возникновении пожара вероятность сработки извещателя А составляет 0,91, а извещателя В — 0,94. На складе решили установить оба извещателя А и В. Какова вероятность сработки только одного из них при возникновении пожара?
8. В одном посёлке телевизионные передачи транслируются по трём каналам. Каждый из трёх каналов смотрит по половине населения поселка, ровно два канала — также половина населения, а все три канала смотрят 300 человек. Сколько человек в поселке не смотрят телевизор?
9. На окружности, описанной около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, выбрана такая точка P, что хорда CP пересекает диагональ BD в точке M, а сторону AD — в точке K. Найдите длину диагонали BD, если $CM = 3$, $MK = 4$ и $KP = 5$.
10. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x^2 + x - 6)\sqrt{x - a} = 0$ имеет ровно два корня.

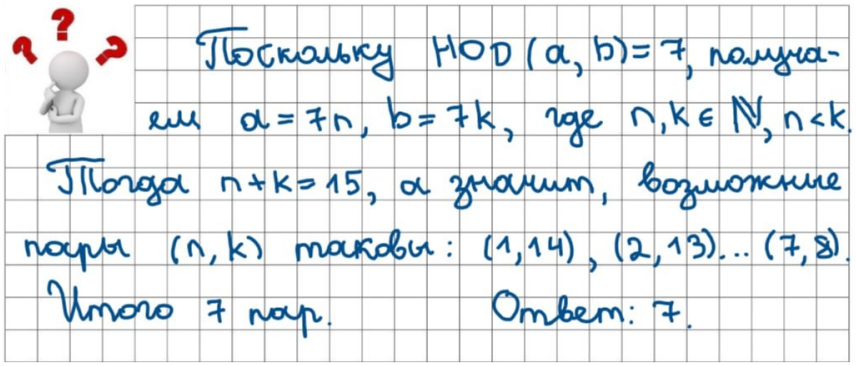
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

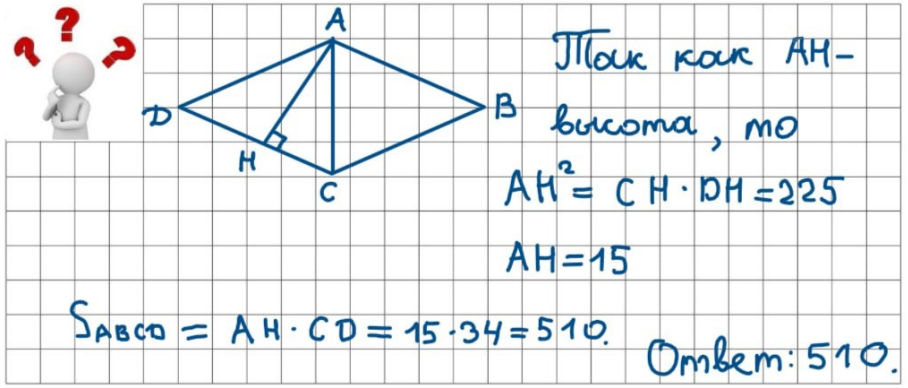
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*

2) *Предложите правильное решение.*

11. Найдите количество таких пар натуральных чисел (a, b), что $a < b$, НОД$(a, b) = 7$ и $a + b = 105$.



12. Найдите площадь ромба $ABCD$, если его высота AH делит сторону CD на отрезки $DH = 25$ и $CH = 9$.



Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 3.
2. 226.
   1 балл — получен верный ответ, но обоснование неполное, неверное или отсутствует.
3. $(-2;1)\cup\{2\}$.
   1 балл — ответ отличается от верного исключением точки 2.
4. 18 км/ч.
   1 балл — задача верно сведена к решению уравнения, но уравнение не решено или решено неверно.
5. $-\frac{5}{\sqrt{26.}}$
   1 балл — верно найден $\cos^2 x$.
6. 3.
7. 0,1392.
8. 600.
   0 баллов — приведён верный ответ, но обоснование отсутствует.
9. $\frac{21}{2}=10{,}5$.
10. $[-3;2)$.
    1 балл — ответ отличается от верного включением точки 2 или исключением точки -3.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не учтена взаимная простота n и k. Из 7 выписанных пар условию задачи удовлетворяют только $(1,14)$, $(2,13)$, $(4,11)$, $(7,8)$.
    Ответ. 4.
12. *Ошибка.* Неверно найдена высота AH. Указанная формула верна только для высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе.
    Ответ. $102\sqrt{59}$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

6 апреля 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 25**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Сколько различных целых значений принимает функция
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 11 \sin x?$$

2. Игральный кубик бросается дважды. Какие значения может принимать сумма выпавших чисел, если вероятность выпадения этой суммы равна $\frac{1}{9}$?

3. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором значение выражения $\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n}$ меньше, чем 0,01.

4. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 7$, $BC = 8$, $BM = 5{,}5$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4^x - 7, \\ 2^{x-1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

6. Найдите все целочисленные решения уравнения $6x^2 - 3xy + y^2 = 4$.

7. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащие точки B, равны 60° и 90° соответственно. В каком отношении отрезок BD делится стороной AC?

8. Найдите все такие пары $(p; q)$, что многочлен $x^3 + 4x^2 + x - 6$ делится на трёхчлен $x^2 + px + q$.

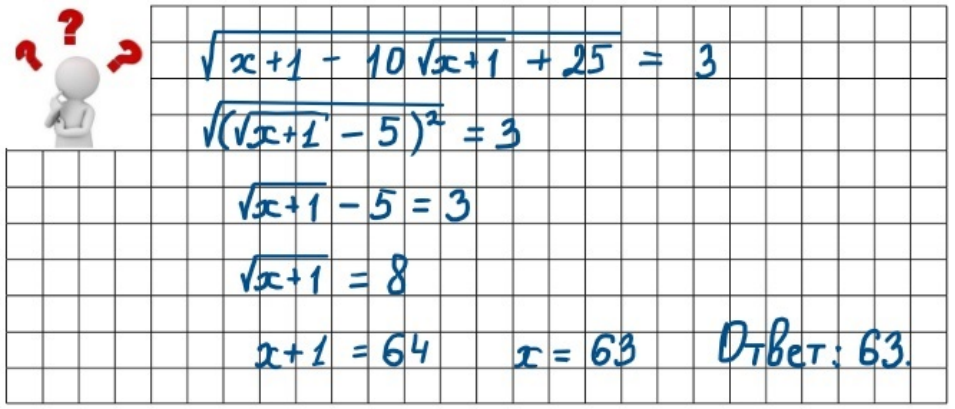
9. Найдите все значения a, при которых уравнение $|2x - 3| = x + a$ имеет ровно два решения.

10. Железные дороги, соединяющие пункты A и B и пункты B и C, — равные отрезки, причём угол ABC равен 60°. Из A в B выехал первый поезд, в это же время из B в C выехал второй. Когда первый поезд проехал 100 км, треугольник, вершинами которого являются два поезда и пункт B, в первый раз оказался прямоугольным (поезда и пункты считаются материальными точками). Когда второму поезду останется проехать 30 км до пункта C, указанный треугольник во второй раз станет прямоугольным. Найдите длину AB. (Поезда движутся с постоянными скоростями.)

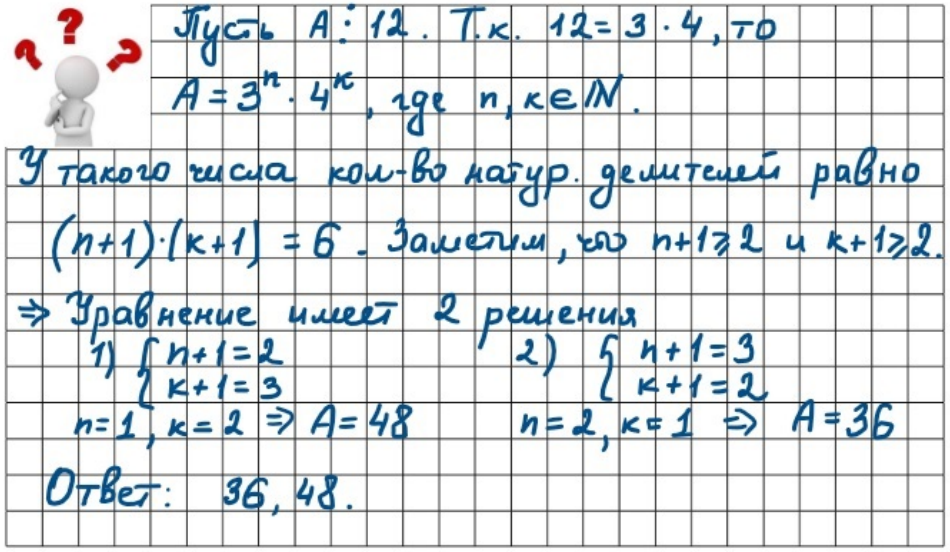
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Решите уравнение $\sqrt{x + 26 - 10\sqrt{x+1}} = 3$.



12. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 12 и имеют ровно 6 различных натуральных делителей.



Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 20.
   1 балл — при верном ходе решения получен ответ, отличающийся от верного на 1.

2. 5 и 9.
   1 балл — найден только одно из возможных значений.

3. 2000.
   1 балл — получен верный ответ, но обоснование минимальности является недостаточным.

4. $2\sqrt{195}$.

5. $(2; -3)$.

6. $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(-1; -1)$, $(-1; -2)$.
   1 балл — верно найдены все возможные значения только одной из переменных.

7. $\sqrt{3}$.

8. $(1; -2)$, $(2; -3)$, $(5; 6)$.
   1 балл — верно найдены только две из трёх пар.

9. $(-\frac{3}{2}; +\infty)$.
   1 балл — при верном ходе решения получен ответ, который отличается от верного включением точки $-\frac{3}{2}$.

10. 450 км.
    1 балл — ответ также содержит число 20, которое возникает при решении квадратного уравнения, но не подходит по условию.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Неверно найден корень из квадрата: $\sqrt{(\sqrt{x+1}-5)^2} = |\sqrt{x+1}-5|$. Отсутствие ОДЗ ошибкой в данной задаче не является!
    Ответ. 3 и 63.

12. *Ошибка 1.* Неверно записан вид числа A. Не все числа, кратные 12, можно представить в таком виде.
    Ошибка 2. Неверно найдено количество натуральных делителей числа A. Для нахождения количества натуральных делителей следует представить число A в виде $3^n \cdot 2^{2k}$. Тогда получаем $(n+1)\cdot(2k+1)$ делителей.
    1 балл — найдена хотя бы одна из ошибок в представленном решении.
    Ответ. 12.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

20 апреля 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 26**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Мастер и ученик, работая вместе (каждый на своём станке), изготавливают за 3 часа столько же деталей, сколько мастер в одиночку изготавливает за 4 часа. Сколько времени потребуется ученику, чтобы в одиночку изготовить это же количество деталей?

2. Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число будет иметь сумму цифр, равную 13.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x(x^2+12y^2) = y(6x^2+8y^2)+1, \\ 2^{2x-3y} = 16\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Красная Шапочка испекла пирожки и понесла их бабушке. По дороге ей встретился сначала медведь, потом заяц. Медведю она отдала треть имеющихся у неё пирожков, а зайцу — 12% оставшихся пирожков. Сколько пирожков испекла Красная Шапочка, если их было меньше 100?

5. Найдите на графике уравнения $x^2+y^2+6y = 4(x+3)$ точку, ближайшую к точке $A(8;5)$.

6. Решите неравенство $|7-3x-5x^2| \leqslant 1$.

7. Величины углов образуют арифметическую прогрессию: $6°, 13°, 20° \ldots$ Какое наименьшее число подряд идущих членов этой последовательности, начиная с первого, следует взять, чтобы сумма их косинусов была равна нулю?

8. На прямой отмечено 11 точек, а на параллельной ей прямой — 9 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

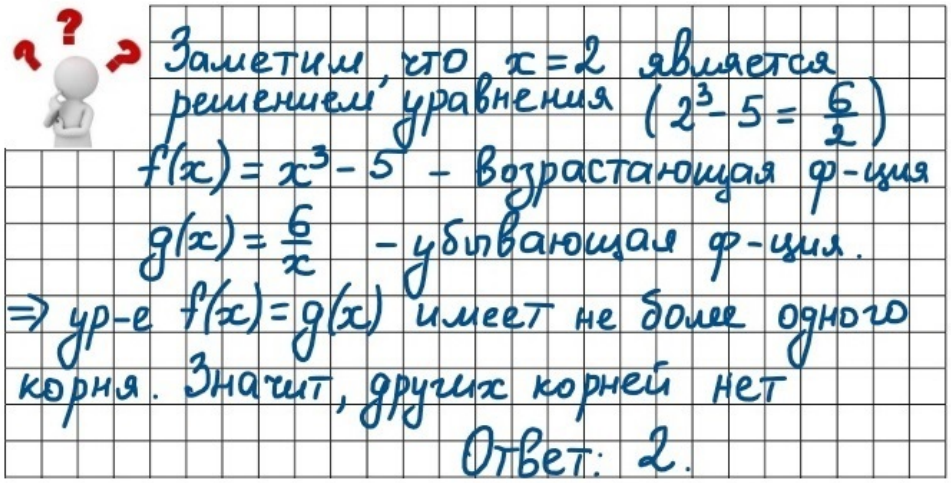
9. Высоты AK и BH остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $BO : OH = 2 : 1$. Найдите BH, если $AH = 6$, $CH = 11$.

10. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\sqrt{3x+a} = x$$
имеет ровно одно решение.

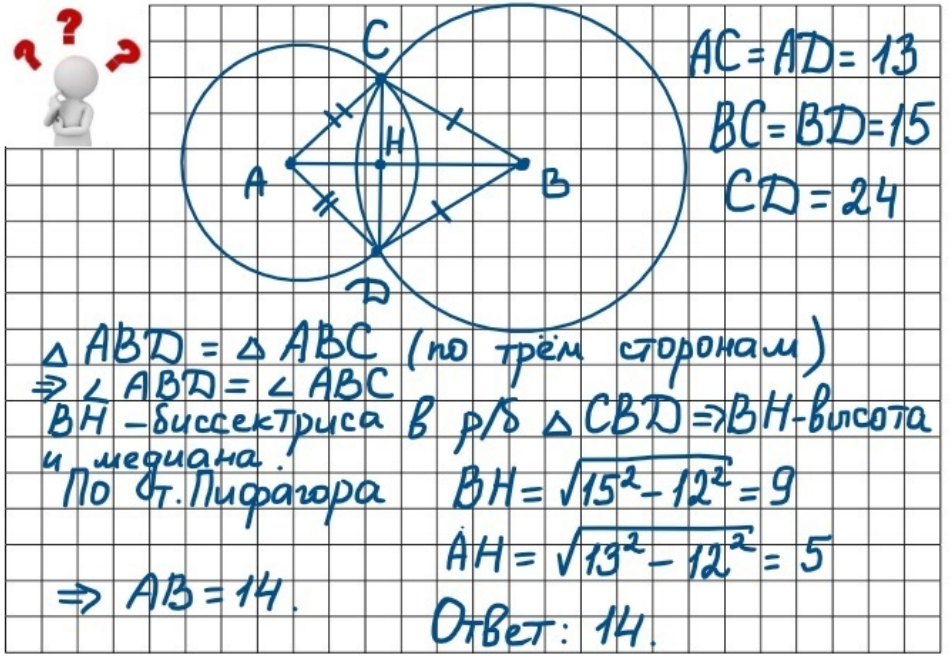
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Решите уравнение $x^3 - 5 = \frac{6}{x}$.



12. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 12 ч.
2. $\frac{1}{15}$.
3. $(6; 2\frac{1}{2})$.
4. 75.
5. $(5; 1)$.
   1 балл — задача верно сведена к нахождению точки пересечения окружности и прямой, проходящей через точку A и центр окружности, заданной данным уравнением.
6. $\left[-1{,}6; -\frac{3+\sqrt{129}}{10}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{129}-3}{10}; 1\right]$.
   1 балл — обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одного или нескольких концов отрезков.
   1 балл — взаимное расположение на числовой прямой точек (концов отрезков) не обосновано.
7. 25.
   1 балл — дан верный ответ, но отсутствует обоснование минимальности.
8. 891.
   1 балл — обоснованно получено выражение $11 \cdot C_9^2 + 9 \cdot C_{11}^2$, но его значение не найдено или найдено неверно.
9. $3\sqrt{22}$.
10. $\{-\frac{9}{4}\} \cup (0; +\infty)$.
    1 балл — при верном ходе решения ответ отличается от верного исключением точки $-\frac{9}{4}$ или включением точки 0.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Функция $g(x)$ не является убывающей на области определения.
    Ответ. -1, 2.
12. *Ошибка.* Не рассмотрен второй случай расположения окружностей.
    Ответ. 4 и 14.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

22 июня 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 27**

Часть 1

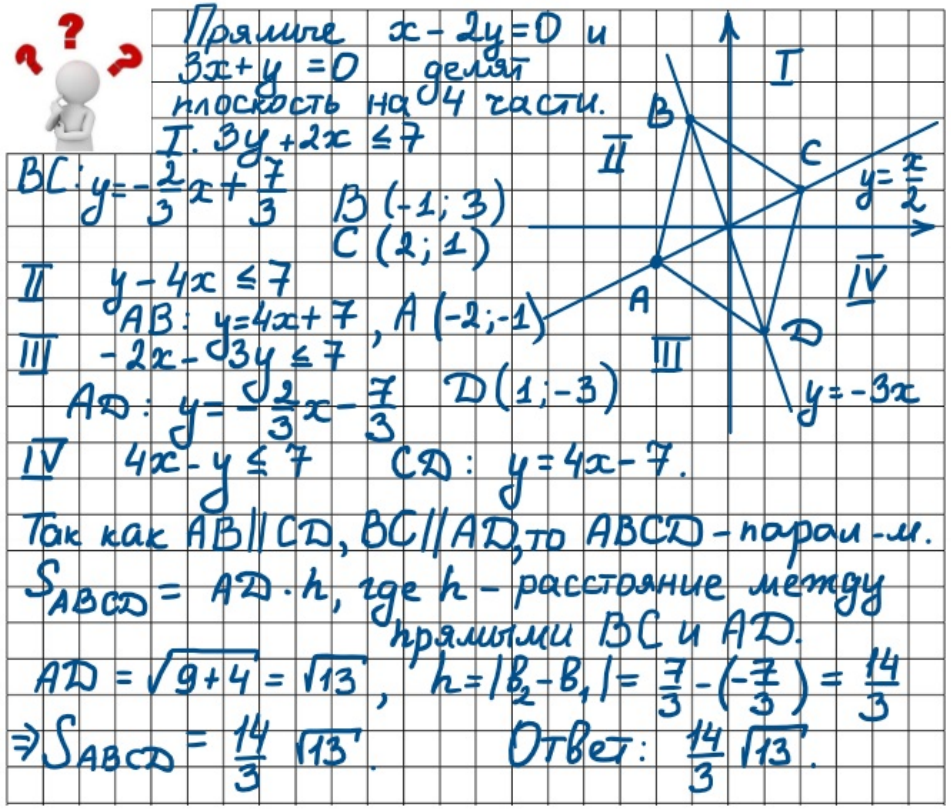
Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Решите уравнение $(2x^2 - 3x - 5)\sqrt{2x - 3} = 0$.
2. Кандидат в депутаты имеет право на одно бесплатное выступление в газете, увеличивающее число его сторонников на 1000 человек, а также на выступление по радио и телевидению, увеличивающие число сторонников соответственно на 20% и 40% соответственно и стóящие 54 и 86 тысяч рублей соответственно. В каком порядке и количестве нужно выступать кандидату в этих средствах массовой информации, чтобы израсходовав не более 200 тысяч рублей, приобрести наибольшее число сторонников?
3. Докажите, что при любых допустимых x, y выполняется неравенство
$$\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2 + y^2} < 4.$$
4. Около четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 6$ и $AD = 3$ можно описать окружность. Найдите AC.
5. Можно ли составить бесконечную геометрическую прогрессию, используя различные положительные решения (необязательно все) уравнения $\sin \frac{1}{x} = 0$? Ответ обоснуйте.
6. Код к сейфу представляет собой последовательность из четырёх различных цифр. За сколько попыток можно гарантировано открыть сейф, если известно, что в коде точно есть цифры 3 и 4?
7. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна $\sqrt{5}$. Найдите гипотенузу, если один из острых углов треугольника равен 15°.
8. Аркадий задумал натуральное число от 1 до 10 и предложил Варваре угадать его, используя не более трёх попыток. Какова вероятность того, что у Варвары это получится?
9. Произведение двух натуральных чисел уменьшили на 26. Затем результат разделили с остатком на сумму исходных чисел, при этом в частном получили 5, а в остатке 60. Найдите исходные числа.
10. Найдите все значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x) = ax^2 - 2x + 6a$ равно 5.

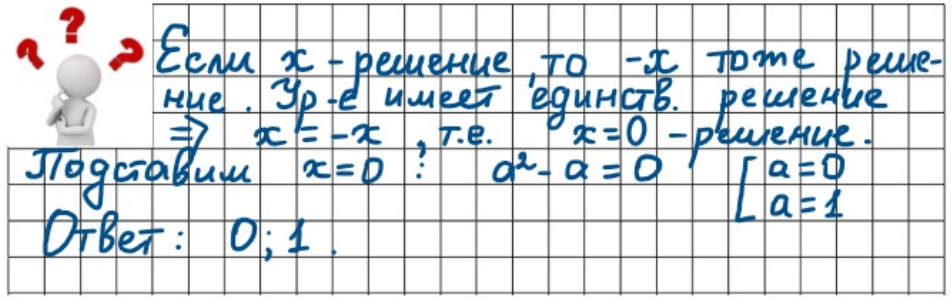
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|x - 2y| + |3x + y| \leqslant 7$.



12. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$ имеет единственное решение.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$.
2. Сначала выступление в газете, потом в любом порядке два выступления по радио и одно по телевидению.
3. *0 баллов* — решение сведено к доказательству неравенства $x^2 + y^2 - xy \geqslant 0$, дальнейшие продвижения неверны или отсутствуют.
4. $3\sqrt{\frac{91}{19}}$.
   1 балл — верно найден косинус угла ABC или CDA.
5. Да, например, $a_n = \frac{1}{2^n \pi}$.
   1 балл — верно найдены все положительные решения уравнения.
6. $4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 672$.
7. $4\sqrt{5}$.
   1 балл — ответ верный, но содержит тригонометрические функции от $15°$.
8. 0,3.
9. 6 и 116.
   1 балл — ответ отличается от верного, включением пары $(8, 42)$.
10. $-\frac{1}{6}$.
    1 балл — верно разобраны все случаи, кроме $a = 0$;
    1 балл — ответ отличается от верного включением точки 1.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Неверно найдено расстояние между прямыми BC и AD: $h = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$.
    Ответ. 14.
12. *Ошибка.* Необходима проверка, что при полученных значениях a уравнение не имеет других решений, кроме $x = 0$.
    Решение. При $a = 0$ уравнение принимает вид $x^{10} = 0$ и $x = 0$ — единственное решение. При $a = 1$ получаем уравнение $x^{10} - |x| = 0$, которое помимо $x = 0$ имеет также решение $x = 1$. Следовательно, $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.
    Ответ. 0.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 28**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. В мае Влад ездил на электросамокате со скоростью, равной целому числу километров в час. Известно, что он проезжал 60 км за целое число часов. В июне вышло обновление в прошивке самоката и скорость движения снизилась на 5 км/ч, но Влад снова проезжал 60 км за целое число часов. Такая же ситуация повторилась в июле и в августе. С какой скоростью ездил Влад в мае? Предполагается, что Влад в течение каждого месяца ездит с постоянной скоростью.
2. Две стороны треугольника равны 1,3 и 2,1. а) Найдите все значения, которые может принимать длина третьей стороны. б) При каком значении длины третьей стороны площадь треугольника будет наибольшей?
3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, которые записаны цифрами 1, 2, 3, 4 (все эти цифры должны быть использованы в каждом числе).
4. Решите неравенство $f(f(x)) \leqslant 0$, если $f(x) = \frac{4}{x} - 1$.
5. Вкладчик в начале первого квартала кладёт на счёт в банке некоторую сумму. В конце квартала на неё начисляется $n\%$, после чего он снимает половину исходной суммы. На оставшуюся часть суммы на счёте в конце второго квартала начисляется $k\%$, где $n + k = 60$. При каком значении n сумма на счёте вкладчика в конце второго квартала будет максимальной?
6. Найдите все значения $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых числа $\sin\alpha$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha$, взятые в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию.
7. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на стороне $AC = 20$, а две другие — на сторонах $AB = 7$ и $BC = 15$. Найдите сторону квадрата.
8. Игральный кубик изготовлен из неоднородного материала: вероятность выпадения каждой грани обратно пропорциональна числу, которое на ней написано. Найдите вероятность выпадения нечётного числа.
9. Решите уравнение $(x-1)(x+2) + 3(x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} = 4$.
10. На координатной плоскости изображены множества решений трёх уравнений: $y = |y|$, $x - a = -|x - a|$, $|y - x| = x - y$. При каждом натуральном значении a найдите количество точек с целыми координатами, принадлежащих всем трём множествам.

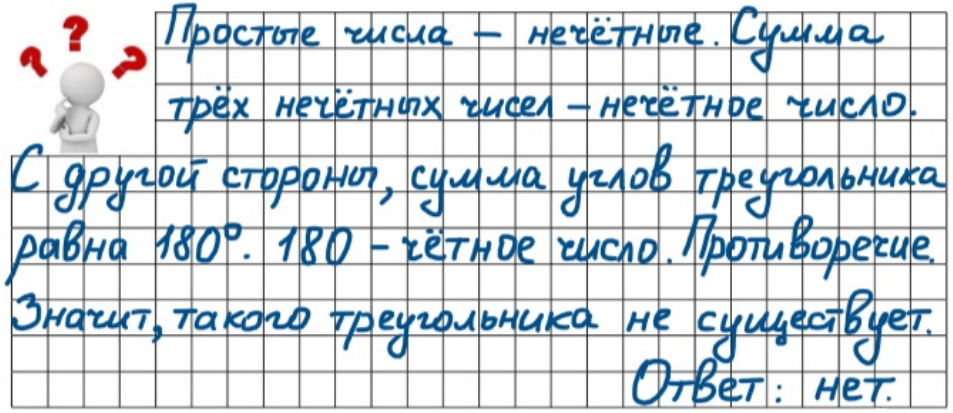
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

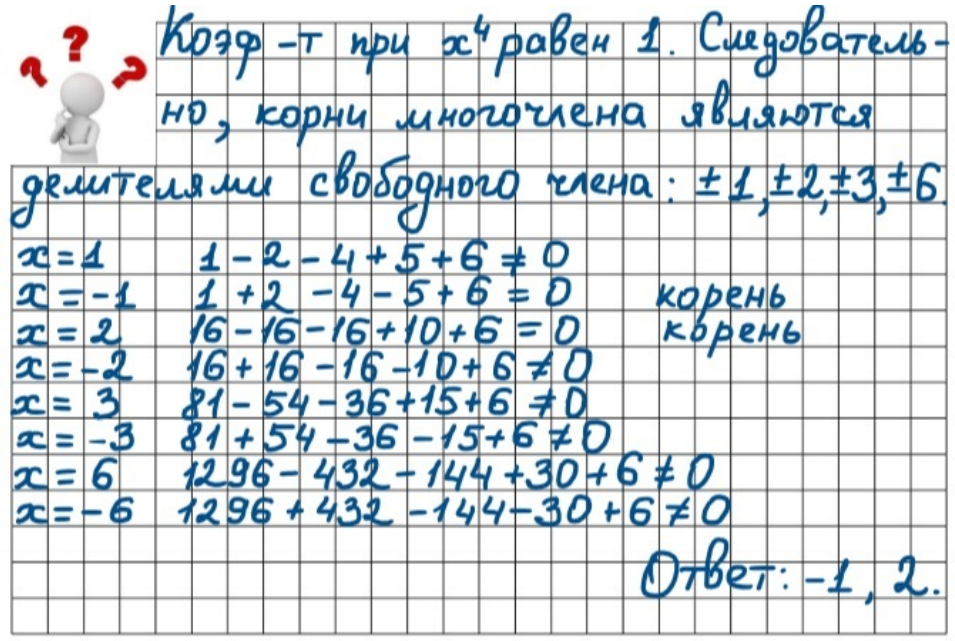
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*

2) *Предложите правильное решение.*

11. Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом?



12. Решите уравнение $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = 0$.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 20 км/ч.
2. а) $(0{,}8; 3{,}4)$; б) $\sqrt{6{,}1}$.
   1 балл — верно решён только один из пунктов.
3. $3! \cdot 10 \cdot 1111 = 66660$.
4. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{5}\right] \cup (4; +\infty)$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением точки 0;
   1 балл — ответ отличается от верного исключением точки $\frac{4}{5}$.
5. 55.
   1 балл — точка экстремума найдена с помощью производной, но не обосновано, что это точка максимума.
6. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. $\frac{420}{121} = 3\frac{57}{121}$.
8. $\frac{92}{147}$.
   1 балл — верно найден коэффициент пропорциональности $k = \frac{20}{49}$, ответ не получен или получен неверно.
9. $\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.
   1 балл — верно найден один из корней уравнения, второй корень не найден или найден неверно.
10. $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$.
    1 балл — верно изображено на координатной плоскости пересечение трёх множеств (границы должны быть подписаны), дальнейшие продвижения отсутствуют или неверны.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не все простые числа нечётные: 2 — простое чётное число.
    Ответ. Существует. Например,
    $$(2°, 79°, 79°), \quad (2°, 5°, 173°), \quad (2°, 11°, 167°), \quad (2°, 29°, 149°),$$
    $$(2°, 41°, 137°), \quad (2°, 47°, 131°), \quad (2°, 71°, 107°).$$
    Достаточно привести один пример!
12. *Ошибка.* Только рациональные (целые) корни являются делителями свободного члена. У многочлена могут быть иррациональные корни, которые таким способом найти нельзя.
    Решение. Для поиска остальных корней разделим многочлен на
    $$(x-2)(x+1).$$
    Имеем $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (x-2)(x+1)(x^2 - x - 3)$. Решая уравнение $x^2 - x - 3 = 0$, находим ещё два корня $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.
    Ответ. -1, 2, $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

5 апреля 2025 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 29**

Часть 1

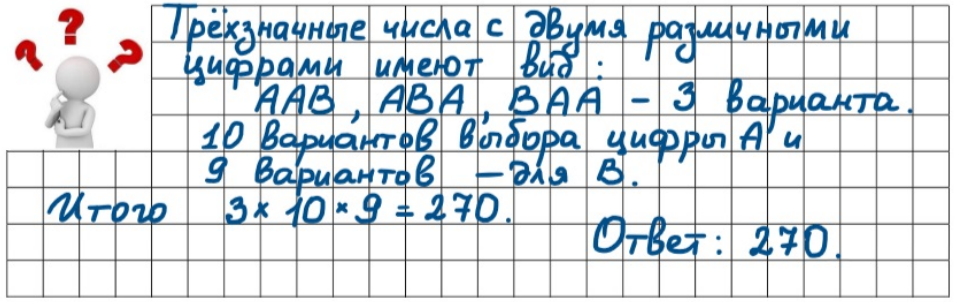
Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 99 литров?
2. Приведите пример бесконечной геометрической прогрессии, сумма членов которой равна 0,(54).
3. Петя заметил, что скорый поезд прошёл мимо него за 24 с, а мост длиной 100 м — за 28 с. Найдите скорость поезда (в м/с), считая её постоянной в течение всего времени наблюдения.
4. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?
5. Дан отрезок длины 1. Изобразите множество точек, расстояние от которых до ближайшей точки отрезка не превосходит 1, и вычислите площадь получившейся фигуры.
6. Найдите все натуральные числа m, n, при которых верно равенство
$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{10}.$$
7. Дан параллелограмм $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABD касается стороны CD и пересекает сторону BC в точке E. Известно, что $BE:EC=3:1$. Найдите площадь параллелограмма, если $CD=2\sqrt{3}$.
8. Имеются два набора по 11 карточек, на каждой карточке написано по одному числу. На карточках первого набора написаны числа от 5 до 15, а на карточках второго набора — числа от 15 до 25. Берут по одной карточке из каждого набора, перемножают написанные на них числа и записывают результат на листе бумаге. Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, если из этих карточек таким образом составят всевозможные пары?
9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x^4-8x^2+16}{x^2-4}-\frac{4x^2-9}{3+2x}=a$$
имеет ровно одно решение.
10. Решите неравенство $|x^2-4x+2|\geqslant\sqrt{4x^4-4x^2+1}$.

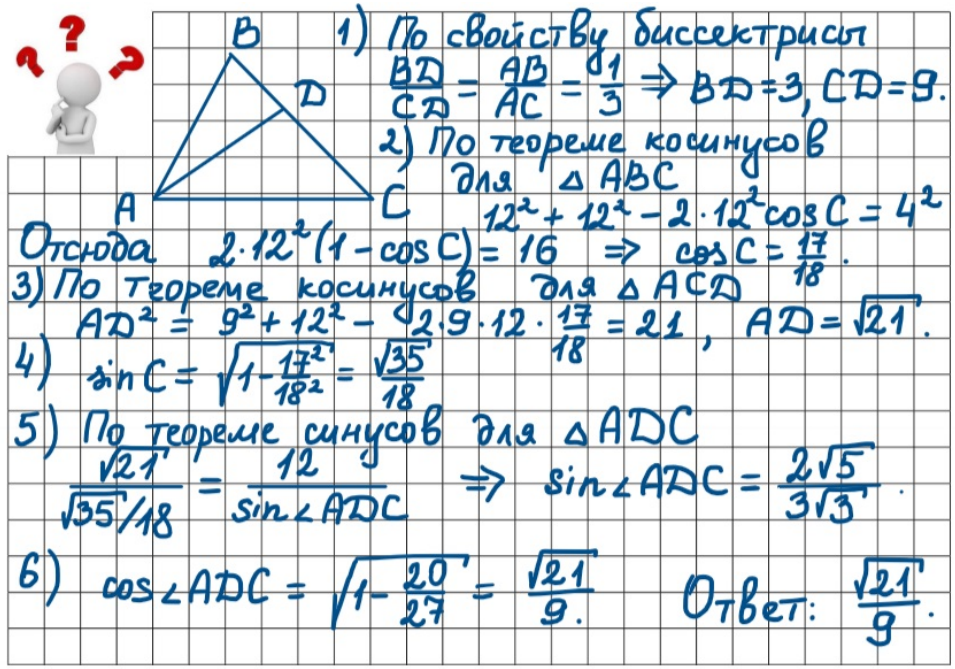
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых присутствуют ровно две различные цифры?



12. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите $\cos\angle ADC$, если $AB=4$ и $AC=BC=12$.



Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 10.
2. Например, $b_1 = 0{,}54$, $q = \frac{1}{100}$.
   Внимание! Существует много различных примеров.
3. 25.
4. 0,3.
   1 балл — ответ в два раза меньше верного вследствие ошибочного учёта порядка фломастеров.
5. $2 + \pi$.
   1 балл — верно изображено множество точек, удовлетворяющих условию задачи.
6. $m = 9, n = 90$; $m = 8, n = 40$; $m = 6$, $n = 15$; $m = 5, n = 10$.
   1 балл — верно найдены ровно три решения уравнения (из четырёх).
7. $6\sqrt{15}$.
   1 балл — верно найдены BE и EC.
8. 24200.
   1 балл — показано, что искомая величина представляет собой произведение $(5 + \ldots + 15)(15 + \ldots + 25)$.
9. -2, -1, $\frac{17}{4}$, 7.
10. $[-2 - \sqrt{7}; \frac{1}{3}] \cup [-2 + \sqrt{7}; 1]$.
    1 балл — задача была верно доведена до ответа методом интервалов, но из-за неверного расположения чисел $-2 \pm \sqrt{7}$, 1 и $\frac{1}{3}$ на числовой оси полученный ответ неверен.
    1 балл — ответ отличается от верного исключением точек $-2 \pm \sqrt{7}$, 1 и $\frac{1}{3}$.
    0 баллов — при извлечении корня из полного квадрата потерян модуль.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не учтено, что трёхзначное число не может начинаться с нуля, поэтому число вариантов для цифр A и B указано неверно.
    Решение. Всего трёхзначных чисел 900, из них 9 чисел, для записи которых используется только одна цифра, и $9 \cdot 9 \cdot 8$ чисел, все цифры которых различны. Значит, существуют $900 - 9 - 9 \cdot 9 \cdot 8 = 243$ трёхзначных числа, в записи которых присутствуют ровно две различные цифры.
    Ответ. 243.
12. *Ошибка.* Неверно найден косинус угла ADC: знак «плюс» перед корнем соответствует острому углу, однако, в данной задаче угол ADC тупой.
    Решение. Вместо пп. 4–6 решения достаточно воспользоваться теоремой косинусов для треугольника ADC
    $$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC$$
    и выразить $\cos \angle ADC$, используя найденные длины сторон.
    Ответ. $-\frac{\sqrt{21}}{9}$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

19 апреля 2025 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 30**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. В случайном эксперименте бросают две игральные кости: красную и синюю. Найдите вероятность того, что на красной кости выпадет больше очков, чем на синей.

2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x-7+\dfrac{9}{x-1}>0; \\ \sqrt{5-x}<\sqrt{x-2}. \end{cases}$$

3. У Миши дома есть игрушечная машинка с прицепом, есть маленькая машинка и есть зелёная машинка без прицепа. У Вити дома есть машинка без прицепа и маленькая зелёная с прицепом, а у Коли — большая машинка и маленькая синяя с прицепом. Однажды Миша, Витя и Коля принесли в детский сад по одной из своих машинок. Оказалось, что все три машинки одинаковые. Каков у этих машинок вид: цвет, размер и наличие прицепа?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE. Найдите AC, если $AD=12$, $BE=11{,}2$ и $BD:DC=5:9$.

5. У Димы 7 разных моделей самолётов, у Никиты 9 разных моделей вертолётов. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом тремя моделями?

6. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если $\angle ADC=30^\circ$, $AB=5$, $BC=6$, $AC=9$?

7. Решите уравнение $(x^2+3x-4)(x^2-x-6)=144$.

8. Рассматриваются всевозможные пары целых чисел (m,n), для которых верно равенство $4m+11n=2025$. Найдите наименьшее положительное значение суммы $m+n$.

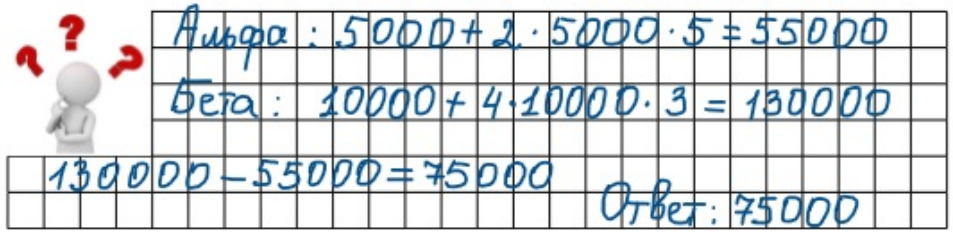
9. Для некоторого $x\neq 0$ число $x+\frac{1}{x}$ является целым. Докажите, что для всех натуральных n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ тоже целое.

10. Найдите все значения x, при которых существует хотя бы одно значение a, удовлетворяющее уравнению
$$x^2+2\cos 2a+2=4|x|\cos a.$$

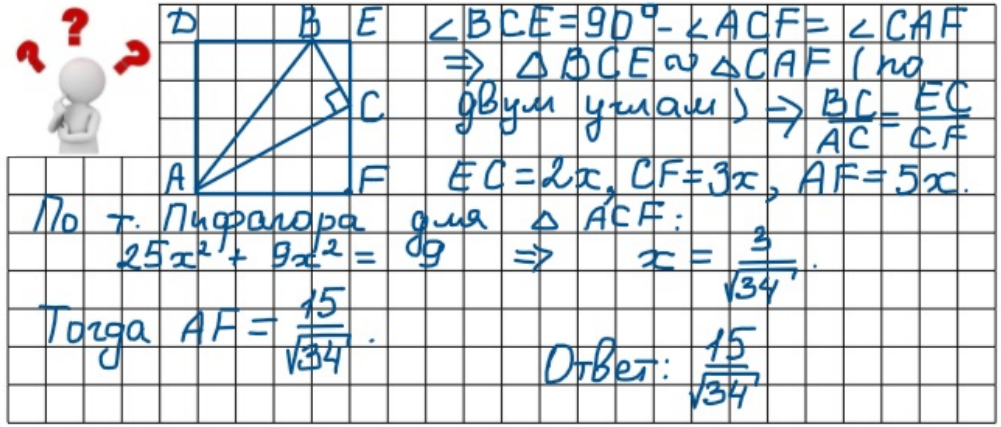
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 тугриков. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. Компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 тугриков, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составлявшую 400% от капитала предыдущего года. На сколько тугриков капитал компании «Бета» оказался больше капитала компании «Альфа» к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?



12. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$ и $BC=2$ вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B и C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A. Найдите сторону квадрата.



Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. $\frac{5}{12}$.
2. $(3{,}5; 4) \cup (4; 5]$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением точки 4.
3. Зелёная, большая, без прицепа.
   1 балл — верно указаны только два параметра из трёх.
4. 15.
5. 2940.
   1 балл — верно выписано выражение искомой величины через биномиальные коэффициенты $C_7^3 \cdot C_9^3$, но численное значение получено неверно или не получено.
6. Нельзя.
7. -5; 4.
8. 4 (достигается при $n = 287$, $m = -283$).
9.
10. $[-2; 2]$.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* В решении проценты начисляются на первоначальную сумму. Не учтено, что прибыль из оборота не изымается.
   Решение. Прибыль у компании «Альфа» составляет 200%, поэтому ежегодно капитал возрастает в 3 раза. Таким образом, к концу 2006 года капитал компании «Альфа» составит $5000 \cdot 3^5$ тугриков. Аналогично, капитал компании «Бета» будет равен $10000 \cdot 5^3$ тугрикам. Находим разницу:
   $$10000 \cdot 5^3 - 5000 \cdot 3^5 = 1250000 - 1215000 = 35000.$$
   Ответ. 35000.
12. *Ошибка.* Неверно выписано отношение сторон в подобных треугольниках.
   Решение. Из подобия прямоугольных треугольников BCE и CAF получаем $\frac{EC}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$. Положим $EC = 2x$, $AF = 3x$, тогда $CF = x$. По теореме Пифагора для треугольника ACF имеем $x^2 + (3x)^2 = 3^2$. Отсюда $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $AF = \frac{9}{\sqrt{10}}$.
   Ответ. $\frac{9}{\sqrt{10}}$.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

17 июня 2025 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 31**

Часть 1

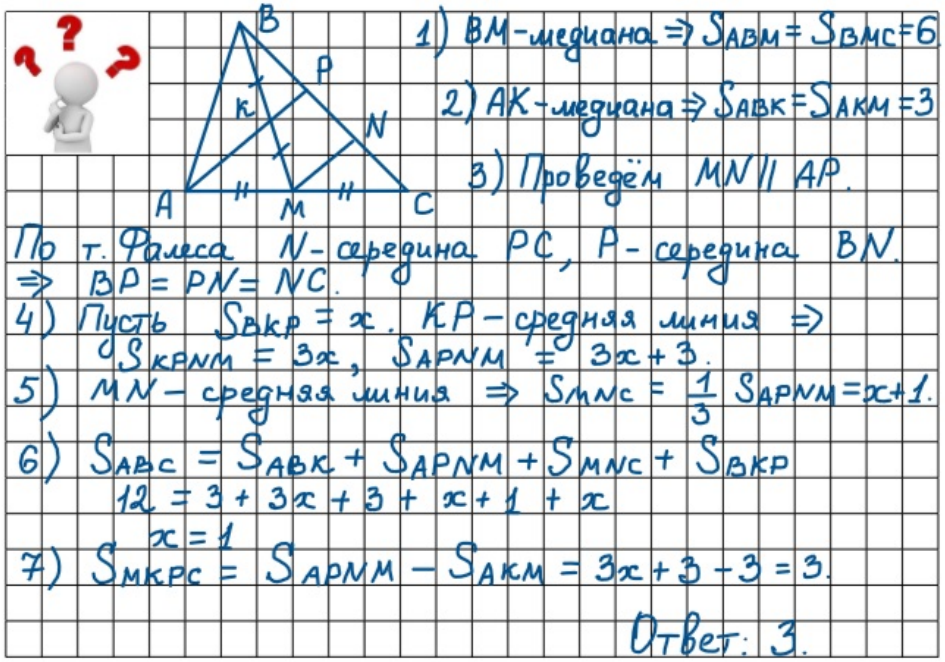
Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите 2025-ю цифру после запятой в десятичной записи обыкновенной дроби $1/13$.
2. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.
3. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом $\sqrt{17}$. На дуге AB окружности взята точка M. Найдите $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$.
4. Из деревни Анашкино в село Бугры вышел пешеход. Через 20 минут вслед за ним выехал велосипедист и приехал в Бугры на 5 минут раньше пешехода. Какую долю пути прошёл пешеход к моменту встречи с велосипедистом?
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=6; \\ x^2+y^2=26. \end{cases}$$
6. Напишите уравнения всех прямых на координатной плоскости, проходящих через точку $(1,3)$ и не имеющих общих точек с графиком функции
$$y=\frac{2x^2-x-3}{x+1}.$$
7. Решите в целых числах уравнение $6x-xy+2y=5$.
8. Ваня написал на своей карточке двузначное число, кратное 5, а Маша на своей — двузначное число, кратное 7. Какова вероятность того события, что числа Вани и Маши будут отличаться не более, чем на 1.
9. Прямая, параллельная стороне $AB=7$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если $MN=4$.
10. Найдите все значения a, при которых неравенство
$$(2x+1)(3x-2)^2(x-a)\leqslant 0$$
не имеет ни одного целого решения.

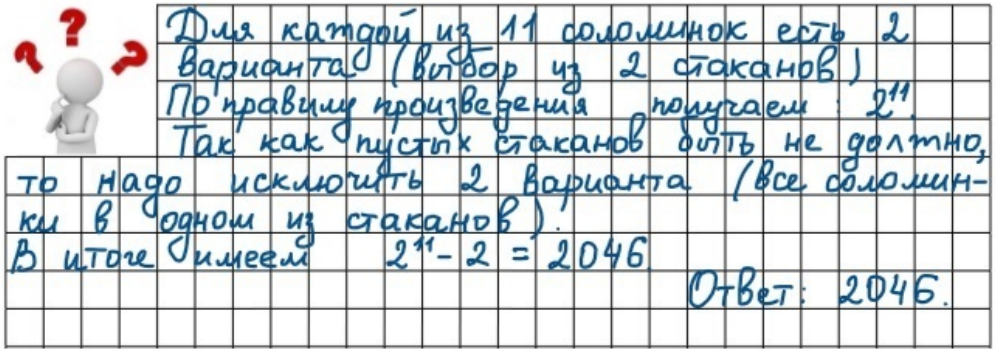
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите площадь четырёхугольника $MKPC$, если площадь треугольника ABC равна 12.



12. На столе стоят два одинаковых стакана и лежат 11 разноцветных соломинок. Сколькими способами можно разложить соломинки по стаканам, не допуская пустых сосудов?



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 6.
   1 балл — получено верное представление дроби $1/13 = 0{,}(076923)$.
2. 1, 3.
   1 балл — найдено ровно одно из двух возможных значений.
3. 136.
4. $\frac{4}{5}$.
5. $(-1;5)$, $(5;-1)$.
6. $y = 2x + 1$, $y = 4x - 1$.
   1 балл — найдено ровно одно из двух возможных уравнений.
7. $(1,-1)$, $(3,13)$, $(9,7)$, $(-5,5)$.
   1 балл — задача верно сведена к нахождению делителей целого числа (через разложение на множители или выражение одной переменной через другую), но затем найдены только два из четырёх возможных решений.
8. $\frac{8}{18\cdot 13} = \frac{4}{117}$.
   1 балл — количество благоприятных исходов отличается от верного (8) на 1, при этом количество всех исходов $(18\cdot 13)$ найдено верно.
9. 15.
10. $(-1;0)$.
    1 балл — ответ отличается от верного включением концов интервала.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* В пункте 7 написано неверное выражение для площади четырёхугольника $MKPC$.
    Ответ. 5.
12. *Ошибка.* Не учтено, что стаканы одинаковые, т.е. каждый вариант подсчитан дважды.
    Ответ. 1023.

Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2025 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 32**

Часть 1

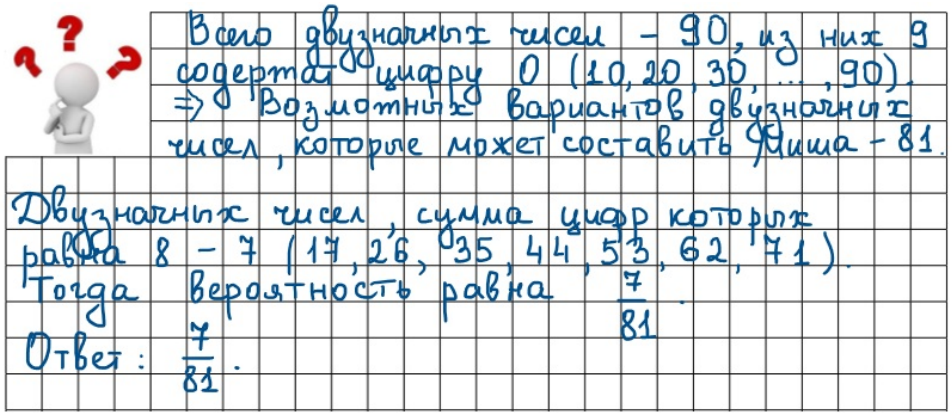
Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите все натуральные числа, которые при делении на 17 дают остаток, равный квадрату частного.
2. Вычислите значение числового выражения
$$\frac{(\sqrt{28}-\sqrt{12})\sqrt{10+\sqrt{84}}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}.$$
3. Монету подбрасывают трижды. Найдите вероятность выпадения двух орлов и одной решки.
4. Найдите площадь трапеции с основаниями 6 и 10 и боковыми сторонами 5 и 7.
5. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля, а сумма членов с двенадцатого по восемнадцатый равна 1218. Найдите номер того её члена, который равен 174.
6. Действительные a и b таковы, что $a-b$ на 2 больше, чем $b-a$. Какое наименьшее значение может принимать произведение ab?
7. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2-2}\geqslant\sqrt{2x+1}.$$
8. Из вершины B остроугольного треугольника ABC опущена высота BH, а из точки H опущены перпендикуляры HK и HL на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AKLC$ вписанный.
9. Часы Ивана Ивановича в полночь испортились. Теперь их минутная стрелка идёт с обычной скоростью 5 минут, потом 10 минут стоит, потом опять 5 минут идёт и т. д. Часовая стрелка 10 минут идёт, потом 5 минут стоит, потом опять 10 минут идёт и т. д. Через какое время после полуночи эти часы впервые покажут 6:00?
10. Найдите все значения a, при которых система
$$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ y^2+6y=8x-x^2-21,\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. У Миши 9 карточек, на которых написаны девять цифр от 1 до 9. Миша берёт две из них и составляет двузначное число. Найдите вероятность того, что сумма цифр получившегося числа равна 8.



12. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$(2|x|-a-2)(x+2-|a+1|)=0$$
имеет ровно два решения.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 18, 38, 60, 84.
2. -8.
3. $\frac{3}{8}$.
4. $16\sqrt{6}$.
5. 15.
6. $-\frac{1}{4}$.
7. $[3;+\infty)$.
8. См. доказательство.
9. Через 9 часов.
10. $[9;49]$.
    1 балл — задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух окружностей.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не учтено, что Миша не может составить число с повторяющимися цифрами. Поэтому число 44 не может быть составлено из этих карточек и неверно найдено количество возможных двузначных чисел.
    Ответ. $\frac{6}{72}=\frac{1}{12}$.
12. *Ошибка.* Неверно построен график уравнения $x=|a+1|-2$.
    Ответ. $-2,\ 0,\ 4$.