

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 252

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{x} + \frac{15}{x}$. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $f\left(\frac{25}{16}\right)$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2a_n - 1.$$

Последовательность $b_1, b_2, b_3, \dots$ определяется соотношениями $b_1 = 2$ и $b_{n+1} = b_n + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2025} - 2^{2025}$.

3. Решите неравенство

$$\log_{1/2} \left(\frac{2}{9^x - 1} \right) \leq \log_{1/2} \left(\frac{1}{3^x + 31} \right).$$

4. Решите уравнение $\sqrt{3}(\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x) = 4 - \sqrt{3} \sin 2x$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 находятся внутри окружности Ω , касаются окружности Ω в точках A и B соответственно и касаются друг друга внешним образом в точке C . Пусть O — центр окружности Ω и пусть D — точка пересечения прямой OC с отрезком AB . Найдите отношение $AD : DB$, если известно, что радиус окружности Ω в три раза больше радиуса окружности Ω_1 и в пять раз больше радиуса окружности Ω_2 .

6. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$ удовлетворяет неравенствам

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1)$$

при каждом $n = 1, 2, 3, \dots, 2024$ и неравенству

$$2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geq a_1 + 1.$$

Найдите все возможные значения a_{2025} .

7. Все три плоских угла при вершине D тетраэдра $ABCD$ равны α . Найдите α , если известно, что $AB = BC = AC$, $AD = 1$ и $BD = \sqrt{3} - 1$.