

Перезапуск Теории Чисел. Сравнения по модулю

10 июня 11:00

Сегодня речь пойдет о действиях с остатками. Мы поговорим о новых более удобных обозначениях для старых понятий, а также рассмотрим, как искать остатки у степеней.

Для начала вспомним и введем пару определений.

Определение 1. Число a делится на натуральное b с остатком r , если $a = bk + r$, причем $0 \leq r < b$.

Обратите особое внимание на то, что по определению остаток неотрицателен. Так, например, число -7 дает остаток 3 при делении на 5 : $-7 = (-2) \cdot 5 + 3$, но ни в коем случае не -2 ! Хотя иногда хочется написать отрицательный остаток, что же делать? Для этого введем следующее

Определение 2. Целые числа, разность которых делится на m , называются *сравнимыми по модулю m* . Запись: $a \equiv b \pmod{m}$.

Свойства сравнений.

- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow$ числа a и b дают одинаковые остатки по модулю m .
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

1. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится

(a) на 999;

(b) на 1004.

2. Известно, что $a - 2b$ делится на m и $c - 3d$ делится на m . Докажите, что $ac - 6bd$ делится на m .

3. Докажите, что существует лишь конечное число натуральных n , для которых $10n^{10} + 9n^9 + \dots + 2n^2 + n + 1$ делится на $n - 10$.

4. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

5. [ОММО, 2022] Докажите, что для каждого натурального числа n число

$$5^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$$

делится на 11.

6. Докажите, что число $5^{70} + 6^{70}$ делится на 61.

7. [Высшая Проба, 2012, 9 класс] Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что $a^2 + 3b^2$ делится на $a + 3b$.

Домашнее задание

8. Известно, что $a + 5c$ и $b + 4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab - 20cd$ делится на 13.

9. Целые x и y таковы, что $5x + 8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт $2x - 2y$?

10. Докажите, что при любом натуральном n число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

11. Докажите, что $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1990 \cdot 1992 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1989 \cdot 1991$ делится на 1993.

12. Известно, что $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $ac - a + 1$ и $bc - c + 1$ — тоже.

13. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n .

14. [Высшая Проба, 2012, 11 класс] Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что $2a^2 + 3b^2$ делится на $2a + 3b$.