

Аннотация

Классическая монетарная эмпирика (М. Фридман) и её современное развитие в работах С.Н. Блинова связывают реальный ВВП с реальными денежными балансами, причём для устранения нестационарности остатков широко применяются авторегрессионные поправки. Эти модели обладают высокой предсказательной силой, но остаются не полностью согласованными по размерности и не опираются явно на фундаментальные симметрии. В работе показано, что из принципа масштабной инвариантности денег однозначно вытекает степенной закон для номинальных переменных. Статистические оценки этого закона на данных России, США, еврозоны и Китая дают устойчивую сублинейность ($k < 1$), но не обеспечивают коинтеграции. На основе точного микроструктурного тождества денежного обращения строится модель, в которой численность занятых служит прокси для числа экономических агентов, а эластичность выпуска по деньгам модулируется процентными ставками. В такой постановке коинтеграция для США надёжно восстанавливается (на 5%-м уровне значимости для периодов 1976–1991 и 1997–2026), и гипотеза постоянной скорости обращения ($k = 1$) отвергается. Предложена безразмерная форма закона, свободная от калибровочных констант и пригодная для прогнозирования. Проводятся аналогии с критическими явлениями в физике.

1. Введение

Связь между денежной массой и экономической активностью — один из центральных вопросов макроэкономики. Эмпирическая традиция, идущая от Милтона Фридмана [1], связывает реальный доход с реальными денежными запасами. В современной российской практике эта линия продолжена и усовершенствована Сергеем Николаевичем Блиновым, который предложил использовать индекс потребительских цен (ИПЦ) для дефлирования денежной массы, используя понятие **реальной денежной массы (РДМ)** или RMM (Real Money Mass):

$$RMM_t = \frac{M_{2,t}}{CPI_t}.$$

Модель Блинова записывается как

$$Y_t = k \ln(RMM_t) + C, \quad (1)$$

где Y_t — реальный ВВП. Она демонстрирует высокую предсказательную силу, особенно на российских данных. Вместе с тем остаются открытыми вопросы размерностной интерпретации и теоретического обоснования. Наша цель — не отвергнуть эти модели, а дать им более прочный

фундамент и естественное обобщение.

Вопрос размерностной интерпретации.

Модель (1) является логарифмической, а не степенной: реальный ВВП зависит от логарифма реальной денежной массы. Аргумент логарифма $RM M_t$ имеет размерность денежной единицы (например, рубли), что делает выражение $\ln(RM M_t)$ математически некорректным без предварительного обезразмеривания. Если изменить масштаб денежной единицы (скажем, перейти от рублей к копейкам, $\lambda = 100$), значение $\ln(RM M_t)$ изменится на константу $\ln \lambda$, которая будет поглощена свободным членом C . Формально это не меняет предсказаний, однако лишает константу C ясной экономической интерпретации: она начинает зависеть от произвольного выбора единиц, а сама модель не обладает явной масштабной инвариантностью. Данное неудобство устраняется переходом к безразмерной записи (раздел 4.2).

Стационарность остатков. В простейшей статической постановке остатки могут содержать единичный корень. В разделах 11–12 мы предлагаем расширенную спецификацию, которая восстанавливает коинтеграцию.

Теоретическое обоснование. Модель (1) изначально предложена как эмпирическая закономерность. Мы показываем, что она может быть получена из принципа масштабной инвариантности, что придаёт ей структурный статус.

Цель данной работы — предложить альтернативный подход, свободный от перечисленных трудностей, и протестировать его на данных нескольких стран. В основе подхода лежит принцип масштабной инвариантности денег.

2. Критика «авторегрессионного» способа мышления

Традиционный метод борьбы с автокорреляцией остатков — включение лаговых значений переменных (ADL, VAR, VECM). Не отрицая полезности этих методов в определённых ситуациях, мы отстаиваем методологический принцип: **авторегрессия должна использоваться как последний инструмент**, когда структурная модель полностью разработана, а не как способ подгонки под шум.

Аналогия с эпициклами. Птолемеявская астрономия, вводя дифференты и эпициклы, прекрасно описывала видимые движения планет, но не вскрывала истинных законов небесной механики. Переход к гелиоцентрической системе и закону всемирного тяготения позволил заменить десятки подгоночных параметров единственным законом обратных квадратов. Аналогично, модель с большим числом лагов может сколь угодно точно приближать любую временную динамику, но это «аппроксимация синуса многочленом»: хорошая точность на ограниченном интервале не гарантирует, что найден порождающий закон.

Принцип «лагранжиана». В физике фундаментальные законы формулируются в виде дифференциальных уравнений второго порядка (уравнения Лагранжа), а не в виде авторегрессионных разностных схем. Наша цель — найти аналог функции Лагранжа для денежного обращения: функциональную форму, диктуемую симметриями, из которой динамика вытекает как следствие. Масштабная инвариантность как раз и является одной из таких фундаментальных симметрий.

Поэтому мы сознательно отказываемся от введения авторегрессионных членов на этапе построения структурного закона и прибегаем к ним лишь для проверки робастности (например, в тестах на коинтеграцию).

3. Конструктивная альтернатива: масштабная инвариантность денег

3.1. Постулат масштабной инвариантности Деньги — это номинальная переменная. Выбор единицы измерения (рубли, копейки, миллионы рублей) является условностью. Естественно потребовать, чтобы фундаментальный закон, связывающий денежную массу x (например, M_2) и номинальный выпуск $f(x)$ (например, ВВП), не зависел от этой условности. Формально: для любого $\lambda > 0$

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x), \quad (2)$$

где $g(\lambda)$ — некоторая функция только от λ , не зависящая от x . Уравнение (2) выражает требование, что при изменении масштаба денег (например, при переходе от копеек к рублям, $\lambda = 100$, или от рублей к миллионам рублей, $\lambda = 10^6$) форма закона сохраняется с точностью до множителя $g(\lambda)$. Функция f здесь представляет номинальный ВВП, а x — денежную массу M_2 .

3.2. Абстрактный вывод степенного закона Продифференцируем (2) по λ :

$$xf'(\lambda x) = g'(\lambda)f(x).$$

Положим $\lambda = 1$:

$$xf'(x) = g'(1)f(x).$$

Обозначим $k \equiv g'(1)$. Получили обыкновенное дифференциальное уравнение $xf'(x) = kf(x)$, которое решается разделением переменных:

$$\frac{df}{f} = k \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln f = k \ln x + \text{const} \Rightarrow f(x) = Ax^k.$$

Подстановка в (2) даёт $g(\lambda) = \lambda^k$. Таким образом, **степенной закон является единственной дифференцируемой формой, совместной с масштабной инвариантностью**; симметрия гарантирует такую и только такую функциональную зависимость.

Интерпретация. отождествим $f(x)$ с номинальным ВВП (GDP), а x — с денежным агрегатом M_2 . Тогда

$$GDP = A \cdot M_2^k, \quad (3)$$

или в логарифмах:

$$\ln GDP = k \ln M_2 + C, \quad C = \ln A. \quad (4)$$

Переход к логарифмической шкале, помимо прямой диктовки масштабной инвариантности, решает и стандартную для макроэкономических рядов проблему гетероскедастичности: дисперсия логарифмов растущих номинальных величин обычно значительно стабильнее во времени, чем дисперсия самих уровней, что делает статистические выводы более надёжными.

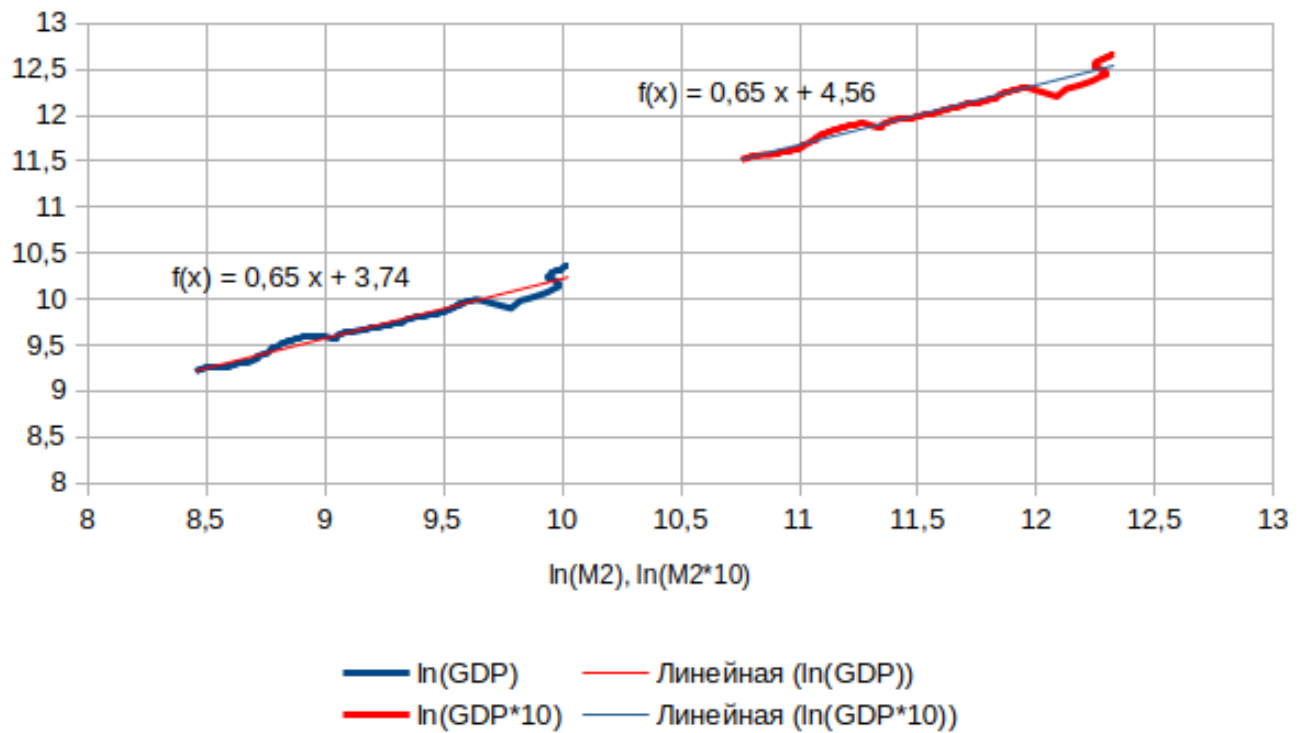


Рисунок 1: Иллюстрация масштабной инвариантности: зависимость $\ln GDP$ от $\ln M_2$ для двух разных денежных единиц — графики параллельны, наклон одинаков; сдвиг в логарифмической форме без поворота и изменения формы отражает изменение масштаба.

3.3. Примеры степенных законов в физике и экономике Степенная форма функциональной зависимости не случайна — она часто порождается отсутствием характерного масштаба (масштабной инвариантностью).

- **Физика:**

Закон всемирного тяготения $F = Gm_1m_2/r^2$ — сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Если увеличить все расстояния в λ раз, сила изменится в λ^{-2} раз, сохраняя форму. Это проявление масштабной инвариантности: потенциал точечной массы степенной.

Законы скейлинга вблизи критических точек: намагниченность $M \sim (T_c - T)^\beta$ — показатель β универсален для класса систем.

Кеплеров закон: $T^2 \propto a^3$ — период обращения планеты степенным образом зависит от большой полуоси.

- **Экономика:**

Распределение Парето по доходам: $P(X > x) \sim x^{-\alpha}$ — масштабно-инвариантное свойство хвостов распределений.

Производственная функция Кобба–Дугласа $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$ — степенная зависимость выпуска от факторов, сохраняющая постоянную отдачу от масштаба.

Во всех случаях степенной закон вытекает из симметрии системы — отсутствия выделенного масштаба.

3.4. Обобщение на случай дополнительных факторов: условная масштабная инвариантность Масштабная инвариантность в форме (2) предполагает, что показатель k постоянен. Однако макроэкономическая реальность заставляет подозревать, что эластичность номинального выпуска по денежной массе может меняться под влиянием институциональной среды, режима денежно-кредитной политики, уровня процентных ставок или фазы делового цикла. В рамках предлагаемого подхода это означает, что степенной закон (3) остаётся справедливым, но его показатель становится функцией дополнительной переменной y , не зависящей ни от масштабного множителя λ , ни от аргумента x .

Пусть y — некоторый экзогенный или предопределённый фактор (время, уровень ставки, индекс финансового развития и т.д.). Потребуем, чтобы при каждом фиксированном y выполнялась масштабная инвариантность по денежной переменной x :

$$f(\lambda x, y) = g(\lambda, y) f(x, y), \quad \forall \lambda > 0, \forall x > 0. \quad (5)$$

Здесь $g(\lambda, y)$ — функция масштабного множителя, которая, вообще говоря, может зависеть от y , но не от x . Дифференцируя (5) по λ и полагая $\lambda = 1$, получаем

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha(y) f(x, y), \quad \alpha(y) \equiv \frac{\partial g}{\partial \lambda}(1, y). \quad (6)$$

При каждом фиксированном y уравнение (6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение по x , решение которого имеет степенную форму:

$$f(x, y) = C(y) x^{\alpha(y)}, \quad (7)$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y . Подстановка (7) в (5) даёт $g(\lambda, y) = \lambda^{\alpha(y)}$. Таким образом, в каждом «срезе» по y справедлив классический степенной закон, но его показатель $\alpha(y)$ может меняться от среза к срезу.

Принципиальное отличие от базового вывода (раздел 3.2) состоит в характере инвариантности. Глобальная масштабная инвариантность (при всех y одновременно) сохраняется только в том частном случае, когда $\alpha(y)$ является константой. В общем же случае имеет место **условная масштабная инвариантность**: преобразование $x \rightarrow \lambda x$ умножает функцию на $\lambda^{\alpha(y)}$, и это свойство верно для каждого фиксированного y , но коэффициент умножения изменяется вместе с y . Мас-

штабная симметрия по x и изменение y не коммутируют; степенной закон становится локально справедливым.

Из самого функционального уравнения (5) **не вытекает никаких ограничений** на $\alpha(y)$, кроме независимости от λ и x . Функция $\alpha(y)$ может быть:

- произвольной постоянной (возврат к классической глобальной масштабной инвариантности);
- кусочно-постоянной (режимные переключения, структурные сдвиги);
- непрерывной или гладкой (медленно меняющийся показатель, например, дрейф во времени);
- разрывной, стохастической и т.д.

Все эти варианты формально допустимы — уравнение (5) выполняется при каждом y в отдельности.

Принципиально важно, что сама по себе масштабная инвариантность — даже в условной форме (5) — **не определяет ни конкретный вид функции $\alpha(y)$, ни перечень переменных, которые следует включать в y** . Симметрия гарантирует лишь допустимость степенной зависимости от денежной массы x и то, что её показатель может (но не обязан) меняться под воздействием факторов, не связанных с масштабом x . Однако ни направление влияния этих факторов, ни их экономический смысл, ни функциональная форма $\alpha(y)$ из масштабной инвариантности не выводятся.

Чтобы наполнить $\alpha(y)$ содержанием, мы должны привлечь **дополнительные структурные гипотезы** — в нашем случае они будут исходить из микроструктуры денежного обращения (раздел 8) и описывают, каким образом неоднородность агентов и транзакционная структура порождают наблюдаемую сублинейность. Масштабная инвариантность задаёт *класс допустимых моделей*; микроструктурные гипотезы позволяют выбрать *конкретную спецификацию* внутри этого класса. Такое разделение важно методологически: симметрия ограничивает форму, но не подменяет содержательную теорию.

Вернёмся к структуре условной масштабной инвариантности, описанной выше. Эконометрическое следствие такой структуры немедленно проявляется при оценивании наивной модели с постоянным показателем. Если истинная зависимость содержит переменный $\alpha(y)$, а мы оцениваем $\ln f = \text{const} + \alpha \ln x$, то отклонения $\alpha(y_i) - \alpha$ переходят в остатки:

$$u_i \approx [\alpha(y_i) - \alpha] \ln x_i + \text{const}',$$

что порождает автокорреляцию остатков при коррелированности y_i во времени — ровно то, что наблюдается в эмпирических исследованиях. Введение дополнительной переменной y в

модель — либо через перекрёстный член $y \cdot \ln x$, либо через явную параметризацию $\alpha(y)$ — позволяет «распутать» масштабную инвариантность и сделать её проверяемой.

Для монетарной теории это означает, что эффективная скорость обращения денег может систематически зависеть от факторов, включённых в y (например, от уровня процентных ставок), при сохранении базового принципа отсутствия произвольного размерного параметра в координатах (x, f) . Другими словами, уравнение обмена приобретает гибкость, оставаясь в рамках жёсткой симметричной логики.

3.5. Следствия для монетарной теории Из (3) непосредственно вытекают следующие проверяемые утверждения:

- **Уравнение обмена** $MV = PY$ не отвергает единичную эластичность ($k = 1$) как частный случай, но допускает и $k \neq 1$. В этом случае скорость обращения V перестаёт быть константой и становится функцией M_2 : $V = AM_2^{k-1}$.
- **Эмпирический степенной закон** (3) не противоречит данным, если его правильно оценивать (см. раздел 5).
- **Модель Блинова** (1) и её исходный фридмановский вариант является приближением к предлагаемому степенному закону и сохраняет её эмпирическую силу, но отвергаются по структуре и размерной интерпретации.

4. Очистка от инструментальных искажений: реальные vs. номинальные величины

4.1. Различие дефляторов В модели Блинова реальный ВВП (Y_t) дефлятируется дефлятором ВВП (P_t^{GDP}), а денежная масса — индексом потребительских цен (P_t^{CPI}), образуя РДМ. Два индекса имеют разную динамику: дефлятор ВВП включает все произведённые товары, ИПЦ — только потребительскую корзину. Их отношение может быть нестационарным или содержать долгосрочный тренд (эффект Балассы–Самуэльсона).

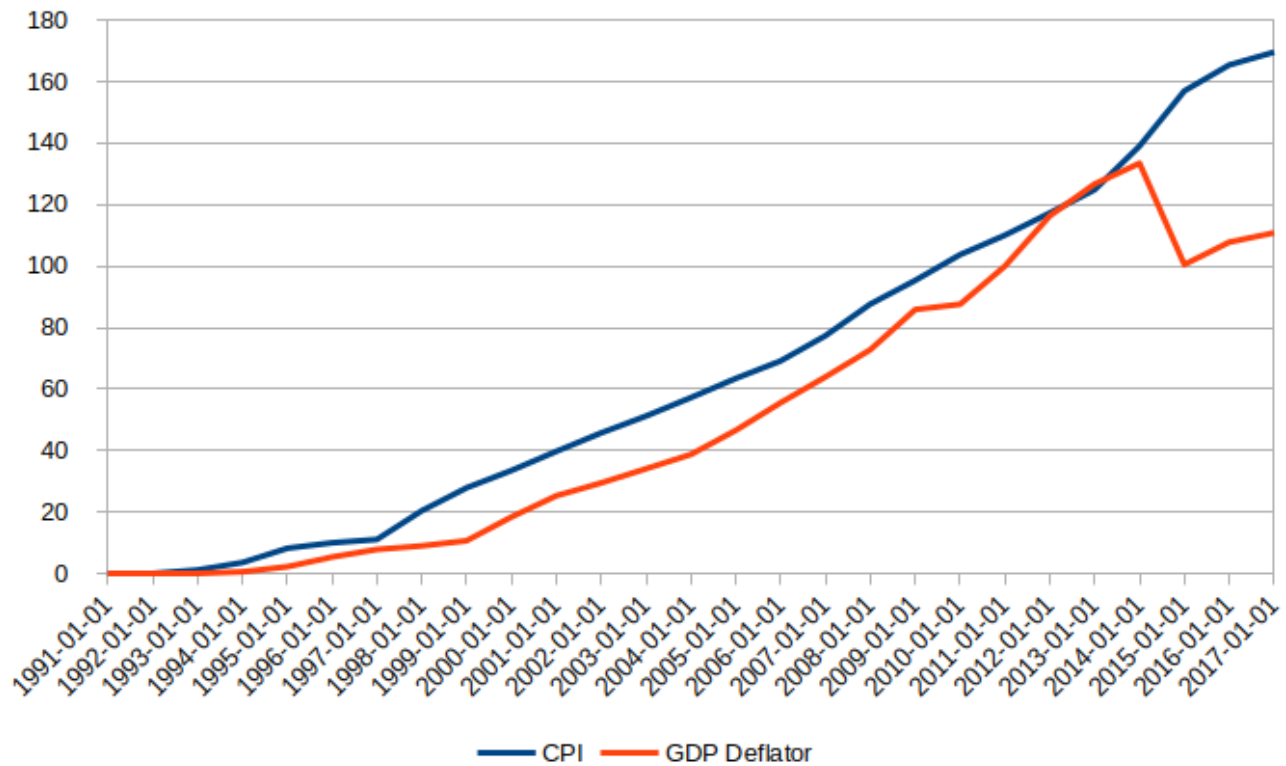


Рисунок 2: Сравнение динамики P^{GDP} и P^{CPI} для России, демонстрирующее низкочастотное расхождение.

4.2. Возврат к номинальному инварианту и безразмерная форма Номинальный степенной закон (4) использует одинаковые единицы для GDP и M_2 . Если мы применяем один и тот же дефлятор P_t (например, дефлятор ВВП) к обеим переменным, то

$$\frac{GDP_t}{P_t} = A \cdot P_t^{k-1} \left(\frac{M_{2,t}}{P_t} \right)^k,$$

т.е. реальный ВВП и реальная денежная масса, дефлированные одним индексом, связаны тем же показателем k . Следовательно, степенная структура сохраняется при переходе к реальным величинам, если используется общий дефлятор. На практике же дефляторы различаются, что нарушает эквивалентность. Поэтому номинальная форма (4) удобнее на этапе построения и эмпирической проверки закона: она не привязана к конкретным дефляторам и не содержит их трендов и ошибок измерения, опираясь лишь на наблюдаемые номинальные ряды. При этом содержательная интерпретация без учёта инфляции остаётся неполной; возврат к реальным величинам будет позднее.

Для устранения зависимости от абсолютного масштаба запишем (4) для двух моментов времени t и 0 :

$$\ln GDP_t - \ln GDP_0 = k(\ln M_{2,t} - \ln M_{2,0}),$$

откуда

$$\frac{GDP_t}{GDP_0} = \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^k. \quad (8)$$

или в логарифмах

$$\ln \frac{GDP_t}{GDP_0} = k \ln \frac{M_{2,t}}{M_{2,0}}. \quad (8')$$

Это **безразмерная запись закона**: она исключает калибровочную константу и делает инвариантность явной. Само по себе такое обезразмеривание не уникально — его можно применить и к моделям Фридмана и Блинова, формально снимая размерностную претензию (но показатель зависящий от базового периода будет иметь трудности с интерпретацией). Содержательное отличие в том, что здесь степенная форма продиктована масштабной симметрией, а не выбрана эвристически. Отметим, что **единственным носителем неучтённых факторов остаётся структурный параметр k** .

4.3. Аналогия с уравнением прямой Уравнение прямой $y = ax + b$ зависит от выбора начала координат. Инвариантная запись $(y - y_0) = a(x - x_0)$ устраняет эту зависимость. Точно так же формула (8) устраняет калибровочную константу C , оставляя лишь структурный параметр k . Для нас такая форма важна, так как она подсказывает, что именно в этом структурном параметре теперь сосредоточены все неучтённые эффекты и открывает путь к обобщению.

4.4. Вывод в реальных величинах и одна из причин автокорреляции остатков Подставим определения $GDP_t = Y_t P_t^{GDP}$, $M_{2,t} = RMM_t \cdot P_t^{CPI}$ в (4):

$$\ln Y_t + \ln P_t^{GDP} = k \ln RMM_t + k \ln P_t^{CPI} + C + \varepsilon_t.$$

Перегруппируем:

$$\ln Y_t = k \ln RMM_t + \underbrace{[k \ln P_t^{CPI} - \ln P_t^{GDP}]}_{\text{дополнительный член}} + C + \varepsilon_t. \quad (9)$$

Член в квадратных скобках, как правило, является медленно меняющимся, сильно автокоррелированным процессом. Если оценивать регрессию $\ln Y_t = \tilde{k} \ln RMM_t + \tilde{C} + \xi_t$, то её остаток ξ_t вберёт в себя этот член, что приведёт к **сильной автокорреляции и возможной нестационарности**. Таким образом, номинальная масштабная инвариантность не только даёт теоретически обоснованную форму, но и диагностирует источник трудностей реальных моделей.

5. Первичные оценки и их нестационарность

Выбор денежного агрегата M_2 для эмпирической проверки закона (4) обусловлен несколькими соображениями. Во-первых, M_2 включает не только наличность и текущие счета, но и ликвидные сбережения, что полнее отражает запас покупательной способности в экономике. Во-вторых, M_2 исключает депозиты в иностранной валюте, требующие конвертации и потому не участвующие в денежном обороте наравне с национальной валютой. Денежный агрегат M_2 предназначен для учёта именно средств, которые могут быть использованы для платежей. В-третьих, использование M_2 согласуется с длительной эмпирической традицией, идущей от работ М. Фридмана что обеспечивает сопоставимость результатов. Наконец, предварительный анализ (здесь не приводится) свидетельствует о более высоких корреляциях с ВВП и лучших статистических свойствах M_2 по сравнению с M_1 и более широкими агрегатами.

Оценим модель (8) для номинального ВВП и номинального M_2 обычным методом наименьших квадратов на квартальных данных четырёх экономик. Во всех случаях R^2 превышает 0.97, но статистика Дарбина–Уотсона крайне низкая, что сигнализирует о сильной положительной автокорреляции остатков.

Таблица 1. OLS-оценки статической модели $\ln \frac{GDP_t}{GDP_0} = k \ln \frac{M_{2,t}}{M_{2,0}}$.

Страна/регион	Период	k	R^2	DW
Россия*	1997Q1–2017Q1	0.733	0.989	0.59
Еврозона	1995Q1–2017Q1	0.512	0.977	0.05
США	1959Q1–2026Q1	0.961	0.989	0.017
Китай* (кварт.)	1999Q1–2019Q2	0.846	0.988	1.91

*Данные по России и Китаю не являются сезонно-сглаженными, что может влиять на мощность тестов на единичный корень.

Обращает на себя внимание США: $k \approx 0.96$ при экстремально низкой $DW = 0.017$, что указывает на почти единичный корень в остатках.

ADF-тесты остатков этих регрессий (не показаны) не отвергают единичный корень. Фор-

мально коинтеграция отсутствует. (Это относится лишь к статической версии без дополнительных переменных; в расширенной постановке (раздел 12) коинтеграция восстанавливается.)

6. Исправление через FMOLS: очистка от эндогенности

Статическая OLS-оценка может быть смещена из-за эндогенности денежной массы. Для получения состоятельных оценок долгосрочного коинтеграционного вектора без включения авторегрессионных членов применим Fully Modified OLS (FMOLS). Метод корректирует смещение, используя долгосрочную ковариационную матрицу остатков и регрессоров.

Таблица 2. FMOLS-оценки модели (8) и ADF-тесты остатков.

Страна	Период	k	z-стат.	ADF tau_c (остатки)	Стационарность?
Россия*	1997– 2017	0.749	45.4	–1.93	Нет
Еврозона	1995– 2017	0.530	37.0	–1.59	Нет
США	1959– 2026	0.846	14.7	–1.65	Нет
США** (до 1991)	1959– 1991	1.028	82.3	+0.09	Нет
США** (после 1997)	1997– 2026	0.625	14.2	–1.50	Нет
Китай*	1999– 2019	0.849	78.7	–1.35 (год.)	Нет (на грани)

*Данные по России и Китаю не являются сезонно-сглаженными; тесты на единичный корень могут быть менее надёжны. **Далее будут приведены данные с несколькими регрессорами, и более лучшими значениями статистики.

Все коэффициенты k статистически значимы, однако ADF-тесты остатков FMOLS во всех случаях далеки от критических значений Энгла–Грэнджера. Следовательно, **коинтеграция в статической модели (8) отсутствует**. Это не позволяет использовать данные оценки для проверки гипотез о параметрах — стандартная теория требует, чтобы долгосрочные соотношения идентифицировались только внутри коинтегрирующего вектора со стационарными отклонениями. Тем не менее оценки дают содержательную эвристику: во-первых, связь между номинальным ВВП и M_2 очень тесная; во-вторых, видна смена режима в США (переход от $k \approx 1$ до 1991 г. к $k \approx 0.625$ после 1997 г.). Это служит мотивацией для построения расширенной модели с микрооснованиями,

в которой стационарность остатков будет восстановлена и станет возможной корректная проверка структурных гипотез.

7. Фазовые переходы в экономике: США как пример смены режима

Выделим в данных по США два подпериода: 1959–1991 и 1997–2026.

- **1959–1991:** $k \approx 1.028$ (FMOLS). Скорость обращения слабо росла или была стабильна. Это «классический» режим, близкий к количественной теории. Именно этот период сформировал устойчивые представления о единичной эластичности и уравнении $MV = PQ$ с постоянной скоростью — исторически экономика США демонстрировала такую картину.
- **1997–2026:** $k \approx 0.625$. Глубокая сублинейность: дополнительный доллар M_2 даёт лишь 62.5 цента номинального ВВП. Скорость обращения резко падает. Это режим «финансового углубления» с огромными избыточными резервами и политикой QE.

Физическая аналогия: переход через точку Кюри. Ферромагнетик при температуре ниже точки Кюри обладает спонтанной намагниченностью и описывается одними критическими индексами; выше точки Кюри он становится парамагнетиком с другими индексами. Экономика США, по-видимому, пересекла свою «точку Кюри» в 1991-х – 1997-х годах, перейдя в новую «фазу» с иным скейлинговым показателем. Аналог «температуры» здесь не очевиден. Ниже (раздел 10) будет показано, что наибольшим влиянием на показатель обладает характер уменьшения скорости оборота средств при увеличении баланса. Таким образом можно предположить влияние сочетания снятия запретов на проценты (Регулирование Q) и создания процентных счетов «до востребования», внедрения sweeper-счетов (1994) и обнуления резервов (1990–1992), что превратило деньги из средства обращения в процентный актив-убежище. Параллельно Закон FDICIA (1991) вызвал кредитное сжатие, что замедлило мультипликацию.

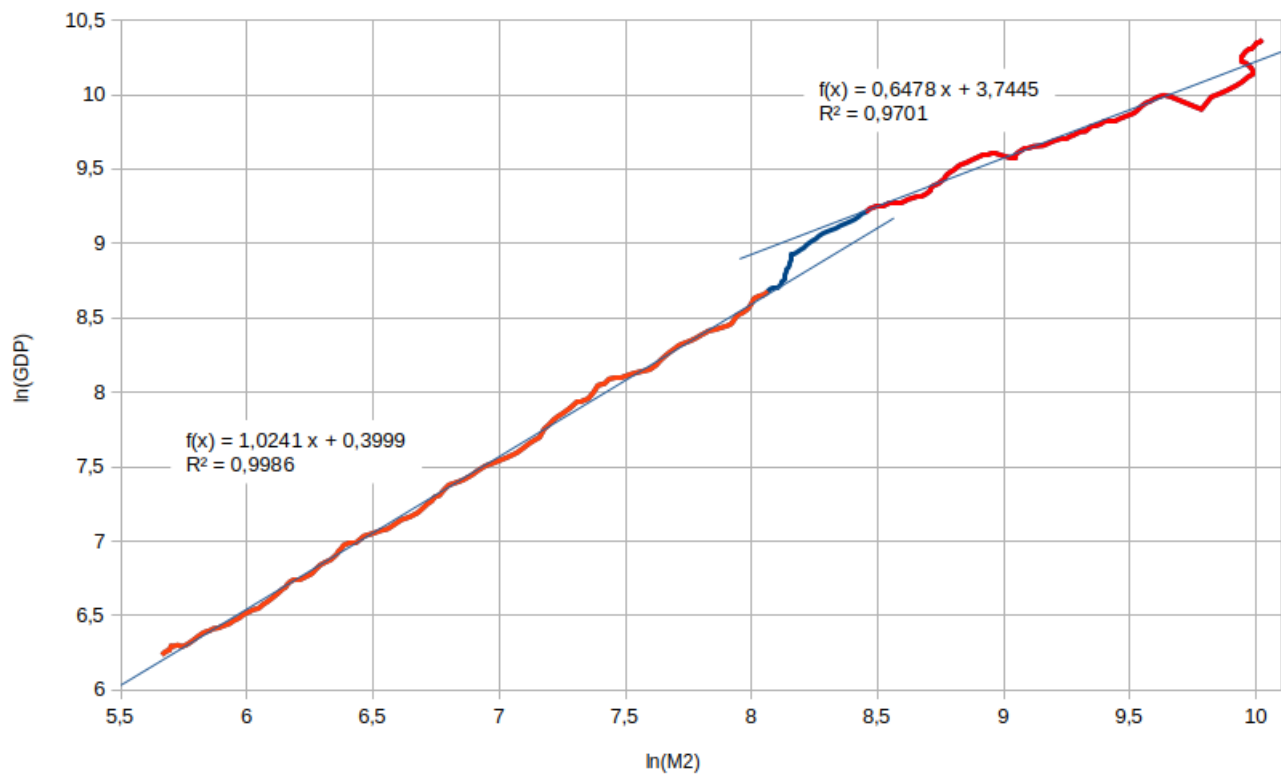


Рисунок 3: Два подпериода США: графики $\ln GDP$ vs $\ln M_2$ с разными наклонами.

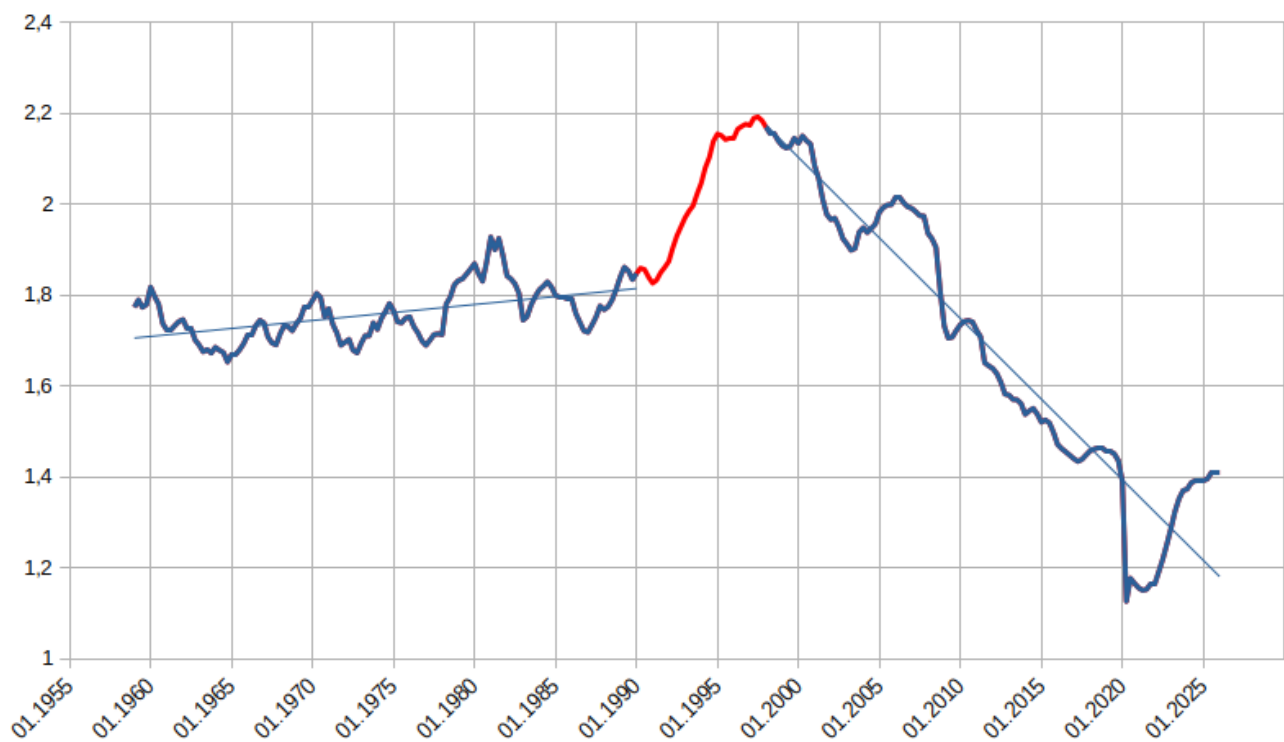


Рисунок 4: Два подпериода США: графики скоростей обращения $V=GDP/M2$ с разными наклонами.

Представленные наклоны являются предварительными и, в силу нестационарности остатков, не могут служить строгим доказательством смены режима. Окончательные тесты на постоянство $k=1$ в разных фазах будут проведены в разделе 12 после построения модели с микроструктурой, в которой достигается коинтеграция.

8. Микроструктура денежного обращения и связь с реальным ВВП

Эмпирический степенной закон $GDP = AM_2^k$ с показателем $k < 1$ указывает на то, что скорость обращения денег по конечному продукту не постоянна, а меняется с масштабом денежной массы. Чтобы понять природу этого явления, необходимо спуститься на уровень отдельных сделок и агентов и проследить, как сумма индивидуальных денежных потоков образует макроэкономическую связь между GDP и M_2 . В этом разделе мы не выводим поведенческих уравнений, а даём точные агрегационные тождества, выделяя ключевые структурные параметры, управляющие эластичностью k . Полученные безразмерные комплексы станут исходным материалом для анализа размерностей и симметрий в следующем разделе.

8.1. Денежные балансы и индивидуальные скорости Пусть в экономике действуют K агентов, каждый из которых в течение периода удерживает средний денежный баланс m_j . Под m_j понимается сумма наличности, остатков на текущих счетах и срочных депозитов, то есть все компоненты, включаемые в денежный агрегат M_2 . Совокупная денежная масса равна

$$M = \sum_{j=1}^K m_j.$$

Индивидуальная скорость обращения v_j определяется как отношение суммы платежей, совершённых агентом за период, к его среднему балансу: $v_j = (\text{платежи в год})_j / m_j$. Сумма всех платежей равна полному обороту S (бартер отсутствует). Тогда

$$S = \sum_{j=1}^K v_j m_j.$$

Переходя к средним и ковариации по агентам, имеем

$$S = K \left[\bar{v} \cdot \bar{m} + \text{Cov}(v, m) \right], \quad (15)$$

где $\bar{v} = \frac{1}{K} \sum v_j$, $\bar{m} = M/K$. Учитывая $K\bar{m} = M$, получаем

$$S = M\bar{v} + K \text{Cov}(v, m). \quad (16)$$

Введём агрегированную скорость обращения по всем сделкам $V_S \equiv S/M$. Тогда

$$V_S = \bar{v} + \frac{\text{Cov}(v, m)}{\bar{m}}. \quad (17)$$

Если агенты с крупными балансами (например, финансовые институты) систематически демонстрируют низкую платёжную активность, ковариация $\text{Cov}(v, m)$ отрицательна, и агрегированная скорость опускается ниже средней индивидуальной.

8.2. Период удержания денег и временная структура Скорость v_j имеет естественную временную интерпретацию. Обозначим через τ_j среднее время, которое денежная единица проводит в распоряжении агента j (период удержания). Если за период τ_j агент расходует сумму, равную m_j , то

$$v_j = \frac{1}{\tau_j}.$$

Подстановка в (17) даёт

$$V_S = \overline{\tau^{-1}} + \frac{\text{Cov}(\tau^{-1}, m)}{\bar{m}}, \quad (18)$$

где $\overline{\tau^{-1}}$ — средняя по агентам частота оборота денег, а $\text{Cov}(\tau^{-1}, m)$ характеризует связь между частотой и размером баланса.

8.3. Конечный продукт и транзакционный мультипликатор Валовой внутренний продукт GDP учитывает только конечные товары и услуги, тогда как полный оборот S включает все промежуточные и финансовые транзакции. Определим **транзакционный мультипликатор**

$$\theta \equiv \frac{S}{GDP} \geq 1.$$

Тогда

$$GDP = \frac{S}{\theta} = \frac{MV_S}{\theta}, \quad (19)$$

где $V_S \equiv S/M$ — агрегированная скорость обращения денег по всем сделкам.

Из микроструктурного анализа (п. 8.1) мы имеем выражение для V_S через индивидуальные скорости и балансы. Повторим его в терминах периодов удержания: $v_j = 1/\tau_j$, где τ_j — среднее время, которое денежная единица проводит у агента j . Тогда из (17) следует

$$V_S = \overline{\tau^{-1}} + \frac{\text{Cov}(\tau^{-1}, m)}{\overline{m}}. \quad (18')$$

Раскроем ковариацию:

$$\text{Cov}(\tau^{-1}, m) = \overline{\tau^{-1}m} - \overline{\tau^{-1}} \cdot \overline{m}.$$

Подставляя это в (18'), получаем

$$V_S = \overline{\tau^{-1}} + \frac{\overline{\tau^{-1}m} - \overline{\tau^{-1}} \cdot \overline{m}}{\overline{m}} = \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}.$$

Таким образом, агрегированная скорость обращения по всем сделкам равна **средней частоте оборота денег, взвешенной по денежным балансам агентов**. Подстановка в (19) даёт окончательное тождество

$$GDP = \frac{M}{\theta} \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}. \quad (20)$$

Замечание о числе агентов. По определению, $\overline{m} = M/K$, где K — число активных агентов. Следовательно, тождество (20) можно переписать как

$$GDP = K \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\theta}.$$

Медленный рост K (демографические и институциональные изменения) способен создавать низкочастотные тренды, которые в статических регрессиях переходят в автокоррелированные остатки. Количественная оценка этого эффекта будет дана в разделе 11.

Уравнение (20) не является поведенческим — это точное агрегационное соотношение. Оно показывает, что номинальный ВВП определяется денежной массой M , средневзвешенной скоростью обращения денег и транзакционным мультипликатором θ . Если с ростом денежной массы уве-

личивается доля «медленных» денег (крупные балансы с низкой оборачиваемостью), то $\overline{\tau^{-1}m}/\overline{m}$ систематически снижается. В сочетании с возможным ростом θ (финансовое углубление) это порождает сублинейную связь $GDP \propto M^k$ с показателем $k < 1$, наблюдаемую эмпирически.

8.4. Переход к реальным величинам Номинальный ВВП стандартно раскладывается на реальный выпуск Y и дефлятор ВВП P :

$$GDP \equiv P \cdot Y.$$

Подставляя это определение в тождество (20)

$$GDP = \frac{M}{\theta} \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}},$$

получаем

$$PY = \frac{M}{\theta} \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}.$$

Разделим обе части на P и одновременно запишем денежную массу в реальном выражении, используя тот же дефлятор:

$$Y = \frac{M/P}{\theta} \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}. \quad (21)$$

Здесь M/P — реальная денежная масса, выраженная в единицах конечной продукции (реальные деньги). Величина $\overline{\tau^{-1}m}/\overline{m}$ — средневзвешенная частота оборота денег — имеет размерность время^{-1} и не зависит от масштаба цен, а транзакционный мультипликатор θ безразмерен. Следовательно, вся конструкция (21) размерностно однородна и не содержит скрытых ценовых искажений, представляет собой чистый микроструктурный аналог макроэкономического тождества, пригодный для дальнейшего анализа масштабной инвариантности и проверки степенных закономерностей.

9. Размерностный анализ уравнения реального ВВП

Для того чтобы перейти от микроструктурного тождества (21) к проверяемым макроэкономическим закономерностям, необходимо выделить безразмерные комбинации параметров, управляющие поведением системы. Классическим инструментом для этого служит метод Релея (анализ

размерностей), формализованный в Пи-теореме Бэкингема. Ниже этот метод применяется к совокупности величин, входящих в (21).

9.1. Величины и их размерности Рассмотрим уравнение (21):

$$Y = \frac{M/P}{\theta} \cdot U, \quad U \equiv \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}.$$

Оно включает следующие переменные и параметры:

- Y — реальный ВВП (поток конечного продукта),
- M — номинальная денежная масса (M_2),
- P — дефлятор ВВП (индекс цен конечной продукции),
- θ — транзакционный мультипликатор (безразмерный по определению),
- U — средневзвешенная по балансам частота оборота денег (агрегированная скорость обращения).

Примем в качестве основных размерностей **деньги** ($\dim D$), **реальный продукт** ($\dim R$) и **время** ($\dim T$). Длительность периода наблюдения считается фиксированной и не выделяется в отдельную размерную величину, однако время присутствует в размерности частоты. Тогда размерности величин таковы:

Величина	Обозначение	Размерность
Реальный ВВП	Y	$R \cdot T^{-1}$
Номинальная денежная масса	M	D
Дефлятор ВВП	P	$D \cdot R^{-1}$
Транзакционный мультипликатор	θ	1 (безразмерная)
Средневзвешенная частота оборота	U	T^{-1}

Уравнение (21) размерностно согласовано: левая часть $R \cdot T^{-1}$, правая часть (M/P) размерности R умножается на U размерности T^{-1} и делится на безразмерную θ , что также даёт $R \cdot T^{-1}$.

9.2. Формирование безразмерных комплексов (Пи-теорема) Среди перечисленных величин θ уже безразмерна и сразу образует один из искомым комплексов; обозначим его $\Pi_2 \equiv \theta$.

Оставшиеся величины Y, M, P, U обладают размерностями, использующими все три основные единицы (D, R, T). Матрица размерностей для этих четырёх величин имеет ранг 3. По Пи-теореме из $n = 4$ размерных величин при ранге $r = 3$ можно построить $n - r = 1$ независи-

мый безразмерный комплекс. Вместе с уже существующей безразмерной θ полный набор содержит $1 + 1 = 2$ безразмерных параметра.

Построим комплекс, включающий Y . Выберем M, P, U в качестве величин с независимыми размерностями (их размерности $D, D \cdot R^{-1}$ и T^{-1} линейно независимы). Ищем показатели α, β, γ такие, что комбинация $Y \cdot M^\alpha P^\beta U^\gamma$ безразмерна:

$$R T^{-1} \cdot D^\alpha (D R^{-1})^\beta (T^{-1})^\gamma = 1.$$

Приравниваем показатели при основных размерностях: - D: $\alpha + \beta = 0$, - R: $1 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1$, - T: $-1 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$.

Отсюда $\alpha = -1$. Безразмерный комплекс

$$\Pi_1 = \frac{Y \cdot P}{M \cdot U} = \frac{Y}{U \cdot (M/P)}.$$

Таким образом, полный набор независимых безразмерных параметров, характеризующих систему, есть

$$\Pi_1 = \frac{Y}{U \cdot (M/P)}, \quad \Pi_2 = \theta.$$

Оба комплекса безразмерны и независимы; любая другая безразмерная комбинация является их функцией.

9.3. Выражение реального ВВП через безразмерные комплексы По Пи-теореме общая безразмерная связь между величинами должна иметь вид функциональной зависимости

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2), \tag{22}$$

где Φ — некоторая функция, конкретный вид которой определяется уже не размерностным анализом, а структурой самой модели. Эквивалентно, размерная величина реального ВВП выражается как

$$Y = \frac{M}{P} U f(\theta), \tag{23}$$

с безразмерной функцией f .

Микроструктурное тождество (21) немедленно фиксирует вид этой функции. Сравнивая (21) с (23), находим

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Следовательно, реальный ВВП выражается через построенные безразмерные комплексы как

$$Y = \frac{M}{P} U \frac{1}{\theta}, \quad U = \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}, \quad \theta = \frac{S}{GDP}. \quad (21')$$

Формула (22) представляет собой компактную безразмерную запись микроструктурного тождества (21'). Она показывает, что отклонение реального ВВП от прямой пропорциональности реальной денежной массе (M/P) определяется двумя структурными факторами: средневзвешенной частотой оборота U и транзакционным мультипликатором θ . Именно эти параметры — точнее, их возможная зависимость от масштаба денежной массы — должны находиться в фокусе дальнейшего анализа, связывающего наблюдаемую сублинейность ($k < 1$) с микроэкономическими механизмами и масштабной инвариантностью.

10. Разрешение противоречия: от анализа размерностей к масштабной инвариантности

10.1. Противоречие Проведённый в разделе 9 анализ размерностей привёл к безразмерной связи $\Pi_1 = 1/\Pi_2$, где $\Pi_2 = \theta$, а $\Pi_1 = Y/[U \cdot (M/P)]$ и $U = \overline{\tau^{-1}m}/\overline{m}$. Возвращаясь к размерным переменным, имеем тождество

$$Y = \frac{M}{P} U \frac{1}{\theta}. \quad (23)$$

Если структурные параметры U и θ не зависят от масштаба денежной массы, то (23) даёт строго линейную связь между реальным ВВП и реальной денежной массой M/P : $Y \propto (M/P)$, то есть показатель $k = 1$ и постоянную скорость обращения. Именно это предсказание содержится в классической количественной теории.

Однако эмпирические оценки (раздел 5, таблица 2) с огромной статистической значимостью отвергают гипотезу $k = 1$ для всех рассмотренных экономик, кроме «классического» периода США 1959–1991 гг. Повсеместно наблюдается устойчивая сублинейность с показателем $k \approx 0,6 \dots 0,85$. Следовательно, по меньшей мере один из безразмерных структурных параметров

— U или θ — не является константой, а систематически изменяется с ростом денежной массы.

Само по себе это заключение можно было бы получить и непосредственно из микроструктурного тождества (21) и эмпирических оценок $k \neq 1$, не прибегая к размерностному анализу. Однако формализация на языке Пи-теоремы и безразмерных комплексов Π_1, Π_2 выполняет важную методологическую функцию: она переводит проблему в плоскость теории подобия и делает прозрачной связь с концепцией неполной автомодельности. Действительно, классический размерностный анализ предсказывает, что в полностью автомодельной системе безразмерные комплексы постоянны. Обнаружив, что это не так, мы получаем основание говорить о неполной автомодельности — ситуации, когда безразмерные параметры сами зависят от масштабного аргумента. Таким образом, раздел 9 служит мостиком, соединяющим эмпирический факт сублинейности с теоретическим аппаратом, который используется ниже для построения обобщённых степенных зависимостей.

10.2. Физическая аналогия: неполная автомодельность В физике хорошо известны ситуации, когда прямой размерностный анализ приводит к неправильному показателю степени, потому что безразмерные комбинации сами зависят от масштаба системы. Такое поведение называется **неполной автомодельностью** (incomplete self-similarity) и подробно изучено в работах Г.И. Баренблатта. Классический пример — турбулентность, где безразмерные величины зависят от числа Рейнольдса, или критическая точка ферромагнетика, где спонтанная намагниченность следует закону $M \sim (T_c - T)^\beta$ с показателем β , отличным от предписания наивной теории среднего поля. В критической точке возникает аномально большой внутренний масштаб (корреляционная длина), и для вычисления показателя требуется аппарат ренормгруппы.

В нашем случае **вдали от фазового перехода** (т.е. на временных интервалах, где показатель k практически постоянен) нет необходимости вводить дополнительный размерный параметр типа корреляционной длины. Достаточно признать, что безразмерные комплексы U и θ сами являются функциями безразмерного масштабного аргумента — например, относительной денежной массы $M_2/M_{2,0}$. Тогда обычный размерностный анализ остаётся справедливым, но его предсказание модифицируется: вместо постоянного θ (и, возможно, постоянного U) мы получаем степенные зависимости от масштаба. Это и есть режим неполной автомодельности без выделенного внутреннего масштаба. Ренормгрупповой анализ потребовался бы, если бы мы хотели описать саму точку фазового перехода и вычислить, как меняется показатель k при переходе от одного режима к другому; эта задача выходит за рамки настоящей работы и представляет собой самостоятельное направление исследований.

10.3. Зависимость безразмерных комплексов от денежной массы и вывод макроскопического степенного закона Исходным пунктом служит номинальное микроструктурное тождество (20):

$$GDP = \frac{M_2}{\theta} \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{m}}. \quad (20)$$

Для получения прогностической макроскопической формулы необходимо конкретизировать, каким образом каждый из структурных элементов правой части – транзакционный мультипликатор θ и отношение $\overline{\tau^{-1}m}/\overline{m}$ – зависит от масштаба денежной массы. Естественный путь состоит в том, чтобы моделировать θ и $\overline{\tau^{-1}m}$ по отдельности, допуская для каждого из них собственный набор определяющих факторов, а затем комбинировать их согласно (20).

Средний баланс и численность агентов.

По определению, $\overline{m} = M_2/K$, где K – число экономических агентов, удерживающих денежные остатки. В типичных макроэкономических временных рядах K меняется медленно (демографические и институциональные изменения). В первом приближении будем считать K локально постоянным; тогда средний индивидуальный баланс пропорционален общей денежной массе. В безразмерной форме это даёт

$$\frac{\overline{m}}{\overline{m}_0} = \frac{M_2}{M_{2,0}}, \quad \overline{m}_0 = \frac{M_{2,0}}{K_0}. \quad (24a)$$

(Возможная зависимость самого числа агентов от масштаба будет учтена позже в итоговой прогнозной форме.)

Распределение балансов и скоростей.

Обширная эмпирическая литература свидетельствует, что распределение денежных балансов агентов имеет тяжёлый хвост, хорошо описываемый законом Парето: плотность распределения $f(m) \sim m^{-(1+\mu)}$ при $m > m_{\min}$, $\mu > 1$. Индивидуальная частота оборота денег τ^{-1} также не постоянна: как правило, более крупные балансы оборачиваются медленнее (эффект финансового углубления, накопления резервов, предосторожности). Предположим степенную связь

$$\tau^{-1}(m) \sim m^{-\gamma}, \quad \gamma \geq 0.$$

Тогда среднее по агентам произведение $\overline{\tau^{-1}m}$ масштабируется как

$$\overline{\tau^{-1}m} \sim \int m \cdot m^{-\gamma} f(m) dm \sim \int m^{-(\mu+\gamma)} dm.$$

При условии $\mu > \gamma$ интеграл сходится, и его значение пропорционально $m_{\min}^{1-(\mu+\gamma)}$. Поскольку минимальный значимый баланс $m_{\min}$ пропорционален среднему балансу $\overline{m}$, который в

свою очередь пропорционален M_2/K , получаем

$$\overline{\tau^{-1}m} = C_1 \left(\frac{M_2}{K} \right)^{1-\gamma/\mu}, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma}{\mu} \geq 0.$$

В безразмерной форме

$$\frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{\tau^{-1}m_0}} = \left(\frac{M_2}{M_{2,0}} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{K_0} \right)^{-(1-\alpha)}. \quad (24b)$$

Параметр α измеряет степень концентрации денежных средств у агентов с низкой оборачиваемостью. В общем случае α может не быть мировой константой: она способна меняться под влиянием институциональной среды, уровня процентных ставок или фазы делового цикла. Это отражается введением дополнительных регрессоров X_α :

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_j a_j X_{\alpha,j}.$$

Трансакционный мультипликатор.

Аналогично, для θ предполагается степенная зависимость от масштаба денежной массы, также допускающая модуляцию другими факторами X_β :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{M_2}{M_{2,0}} \right)^\beta, \quad \beta = \beta_0 + \sum_j b_j X_{\beta,j}, \quad (24c)$$

где θ_0 — значение в базовом периоде. Рост β с финансовым развитием соответствует увеличению доли промежуточных и финансовых транзакций в общем обороте.

Сборка: от микроструктуры к макро-ВВП.

Исходное микроструктурное тождество (20) после учёта определения среднего баланса $\overline{m} = M_2/K$ даёт наиболее прозрачное разложение номинального ВВП на три независимых сомножителя:

$$GDP = K \cdot \overline{\tau^{-1}m} \cdot \frac{1}{\theta}. \quad (26)$$

В безразмерной форме, нормируя на базовый период, имеем

$$\frac{GDP}{GDP_0} = \frac{K}{K_0} \cdot \frac{\overline{\tau^{-1}m}}{\overline{\tau^{-1}m_0}} \cdot \frac{1/\theta}{1/\theta_0}.$$

Допуская для числа агентов масштабную зависимость

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{M_2}{M_{2,0}} \right)^\delta,$$

и подставляя (24b) и (24c), получаем итоговое выражение

$$\frac{GDP_t}{GDP_0} = \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^\delta \cdot \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^{(1-\alpha)(1-\delta)} \cdot \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^{-\beta}. \quad (27)$$

Перемножая показатели, находим свёрнутую форму макроскопического показателя степени:

$$\frac{GDP_t}{GDP_0} = \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^{\delta+(1-\alpha)(1-\delta)-\beta} = \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right)^{1-\alpha-\beta+\alpha\delta}.$$

Таким образом, макроскопический закон имеет вид

$$GDP \propto M_2^k, \quad k = 1 - \alpha - \beta + \alpha\delta.$$

Сублинейность ($k < 1$) требует $\alpha + \beta > \alpha\delta$, что в практически важном случае малого δ сводится к $\alpha + \beta > 0$. Иными словами, хотя бы один из микроструктурных механизмов – неоднородность скоростей оборота ($\alpha > 0$) или рост транзакционного мультипликатора ($\beta > 0$) – должен быть активен. Перекрёстный член $\alpha\delta$ показывает, что эффект изменения числа агентов взаимодействует с неоднородностью: если $\alpha = 0$ (нет связи между размером баланса и скоростью), то $k = 1 - \beta + \delta$, и демографический фактор входит аддитивно.

Форма, удобная для прогнозирования.

Разложение (26) сохраняет силу и даёт естественную схему прогноза:

1. Раздельно оценить компоненты K , $\overline{\tau^{-1}m}$ и $1/\theta$ (или θ) по доступной статистике секторальных балансов и платёжных оборотов, вводя необходимые модуляторы в α , β , δ .
2. Получить прогноз ВВП прямым перемножением трёх сомножителей в (26), где каждый сомножитель спрогнозирован как функция от $M_2/M_{2,0}$ и других наблюдаемых переменных.

Такой подход сохраняет масштабную инвариантность, свободен от размерностных дефектов и позволяет независимо верифицировать вклад каждого из микроструктурных механизмов в наблюдаемую зависимость.

Замечание о роли числа агентов. Выделение K в качестве отдельного сомножителя не только структурно прозрачно, но и открывает естественный путь к оценке ВВП на агента (по сути — на душу населения или на одного экономического субъекта). Кроме того, это позволяет объяснить аномальное поведение макропоказателей в периоды резких демографических или институциональных сдвигов. Яркий пример — ковидный кризис: одномоментное выбытие значительной доли экономических агентов из активной деятельности (локдауны, закрытие предприятий) эквивалентно резкому сокращению эффективного K , что при неизменной денежной массе предсказывает падение ВВП — именно то, что наблюдалось в 2020 году.

Замечание о медленных трендах и коинтеграции.

Как θ , так и K эволюционируют медленно, порождая низкочастотные тренды. В спецификации $\ln GDP = \text{const} + k \ln M_2 + \varepsilon_t$ эти тренды не моделируются явно и переходят в остаток ε_t , который вследствие этого приобретает сильную автокорреляцию и часто содержит единичный корень. Именно это и наблюдалось в разделе 5: статическая модель с постоянным k не даёт коинтеграции. Предлагаемое разложение (27) указывает прямой путь к решению проблемы: явное включение медленных составляющих (θ и K) в модель.

Замечание о происхождении сублинейности.

Если индивидуальные периоды удержания τ^{-1} и балансы m некоррелированы (или одна из величин постоянна), то $\overline{\tau^{-1}m} = \overline{\tau^{-1}} \cdot \overline{m}$, и из (26) при постоянных θ и K немедленно следует $GDP = M_2 \cdot \overline{\tau^{-1}}/\theta$ — строго линейная связь с $k = 1$. Эмпирические оценки следующего раздела показывают, что транзакционный мультипликатор действительно практически неизменен ($\beta \approx 0$), а рост занятости ($\delta \approx 0,22$) сам по себе не объясняет наблюдаемую сублинейность. Прямое измерение параметра неоднородности даёт $\alpha \approx 0,38$ для периода 1997–2026 гг. и $\alpha \approx 0$ для 1959–1991 гг. Таким образом, основным источником сублинейности в современной экономике США выступает именно сочетание значительной неоднородности денежных балансов и систематического убывания индивидуальной скорости обращения с ростом баланса (отрицательная корреляция между τ^{-1} и m). Блок $\overline{\tau^{-1}m}$ отклоняется от линейности по M_2 исключительно из-за концентрации ликвидности у «медленных» держателей — эффекта, естественно возникающего при степенном распределении балансов и согласующегося с процессами финансового углубления.

11. Эмпирическая декомпозиция сублинейности

Формула $k = 1 - \alpha - \beta + \alpha\delta$ выделяет три возможных источника отклонения k от единицы: неоднородность индивидуальных скоростей оборота (α), зависимость транзакционного мульти-

пликатора от масштаба (β) и изменение числа активных агентов (δ). Для проверки того, какой из механизмов доминирует, каждый из показателей оценивается независимо на квартальных данных США.

В качестве прокси используются:

- $\theta_t = \text{BOGZ1FU086902101Q}_t / \text{GDP}_t$ — транзакционный мультипликатор (полный оборот к конечному выпуску);
- $K_t = \text{Emp}_t$ — численность занятых (CE16OV);
- $S_t = \text{BOGZ1FU086902101Q}_t$ — полный оборот денег.

Все переменные берутся в натуральных логарифмах; для M_2 используется сезонно-сглаженный ряд (M2SL).

Оценка β . Регрессия $\ln \theta_t = c_1 + \beta \ln M_{2,t} + \varepsilon_{1t}$ за 1959–2026 гг. даёт $\hat{\beta} = 0,00031$ с p -значением 0,085 (табл. 3). Коэффициент практически равен нулю, гипотеза об отсутствии зависимости θ от масштаба денег не отвергается. Следовательно, θ можно считать постоянным в пределах рассматриваемых периодов, и $\beta \approx 0$.

Оценка δ . Регрессия $\ln \text{Emp}_t = c_2 + \delta \ln M_{2,t}$ за тот же интервал даёт $\hat{\delta} = 0,2195$ ($p \approx 0$). Численность занятых систематически растёт вместе с денежной массой; этот демографический тренд необходимо контролировать при выделении вклада неоднородности.

Прямая оценка α . Из микроструктурного тождества $S = K \cdot \overline{\tau^{-1}m}$ и предположения о степенной зависимости $\overline{\tau^{-1}m} \propto (M_2/K)^{1-\alpha}$ вытекает

$$\frac{S_t}{\text{Emp}_t} \propto \left(\frac{M_{2,t}}{\text{Emp}_t} \right)^{1-\alpha}.$$

Логарифмируя, получаем регрессию

$$\ln \left(\frac{S_t}{\text{Emp}_t} \right) = c_3 + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{M_{2,t}}{\text{Emp}_t} \right) + \varepsilon_{3t},$$

в которой коэффициент при $\ln(M_2/\text{Emp})$ непосредственно оценивает $1 - \alpha$. Результаты для трёх временных интервалов приведены в табл. 3.

Таблица 3. Прямые оценки α и вспомогательных показателей

Период	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$(\widehat{1 - \alpha})$	$\hat{\alpha}$	R ²
1959–2026 (весь)	0,0003 (p=0,085)	0,2195 (p≈0)	0,9450	0,055	0,982
1959–1991	–	–	1,0333	–0,033 (≈0)	0,998
1997–2026	–	–	0,6157	0,384	0,977

Примечание: Все коэффициенты значимы на 1% уровне, за исключением β (p=0,085). В строке «1959–1991» оценка α формально отрицательна (–0,033), что статистически неотлично от нуля и интерпретируется как $\alpha \approx 0$.

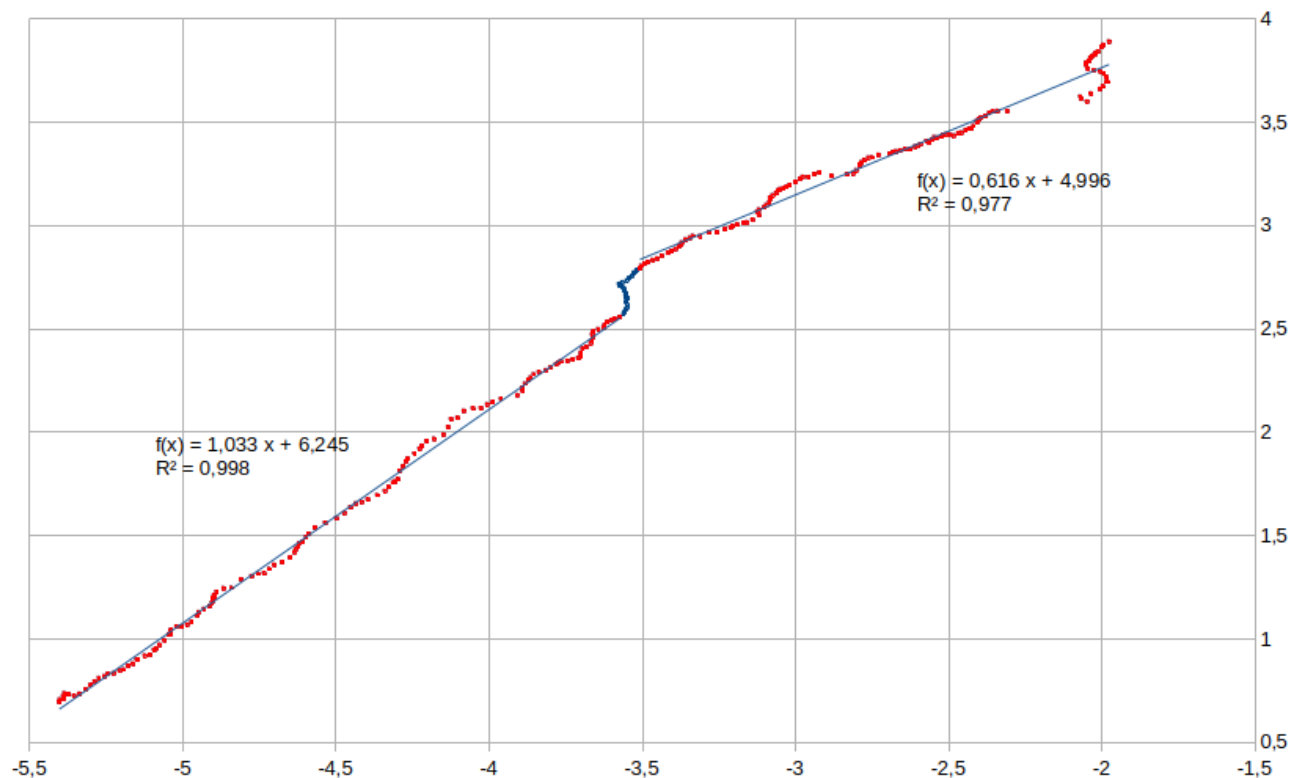


Рисунок 5: Зависимость средневзвешенной частоты оборота на занятого $\ln(S/Emp)$ от денежной массы на занятого $\ln(M_2/Emp)$ для двух режимов денежного обращения в США. Наклон линии регрессии равен $1 - \alpha$. В классическом режиме (1959–1991) $\alpha \approx 0$, в режиме финансового углубления (1997–2026) $\alpha \approx 0.38$, что количественно объясняет наблюдаемую сублинейность $k \approx 0.62$.

Интерпретация.

- В «классическом» периоде 1959–1991 гг. α практически нулевое: скорость оборота денег не зави-

села от размера индивидуальных балансов. Наблюдавшаяся в статических регрессиях сублинейность (если она и обнаруживалась) была следствием роста занятости (δ), а не внутренней неоднородности денежного обращения.

- В современном периоде 1997–2026 гг. $\alpha \approx 0,38$ — именно этот параметр объясняет подавляющую часть отклонения макроэкономического показателя k от единицы. Вклад β ничтожен, а перекрёстный член $\alpha\delta \approx 0,38 \times 0,22 \approx 0,08$ даёт лишь малую поправку. Таким образом, **сублинейность в современной экономике США практически полностью порождается неоднородностью индивидуальных скоростей обращения денег**: дополнительные денежные средства концентрируются у крупных агентов, оборачивающих их значительно медленнее.
- Оценка по всему периоду (1959–2026) даёт промежуточное значение $\alpha \approx 0,055$, отражая смесь двух режимов и маскируя глубину структурного сдвига.

Рост α после 1991 г. хорошо согласуется с институциональными изменениями (введение процентных текущих счетов, снижение резервных требований, sweep-счета), которые превратили денежные остатки из чистого средства обращения в процентный актив-убежище. Это мотивирует переход к модели с переменным показателем k_t , в которой модуляторами выступают процентные ставки (раздел 12). Представленные здесь статические оценки дают прямую эмпирическую опору для такой спецификации: если α меняется между режимами, то и макроэкономическая эластичность должна рассматриваться как функция от факторов, определяющих неоднородность. Строгая проверка с восстановлением коинтеграции проводится в следующем разделе.

12. Эмпирическая реализация микроструктурной модели

Вывод макроэкономического степенного закона (27) и его микроструктурная расшифровка позволяют построить эконометрическую спецификацию, напрямую связанную с параметрами неоднородности агентов. Центральная идея состоит в том, чтобы проксировать численность активных экономических агентов K_t наблюдаемой переменной — численностью занятых (CE16OV, далее Emp_t), а безразмерный комплекс $\tau^{-1}m/\theta$ моделировать как функцию масштаба денежной массы с модуляцией со стороны процентных ставок.

12.1. Спецификация и данные

В качестве зависимой переменной используется логарифм реального ВВП на одного занятого:

$$G_t = \ln \left(\frac{GDP_t}{Emp_t} \right).$$

Такая нормировка непосредственно следует из разложения (26), где GDP_t пропорциональ-

но Emp_t (как прокси K_t) и средневзвешенной частоте оборота денег, делённой на транзакционный мультипликатор.

Объясняющими переменными выступают логарифм денежной массы M_2 (нормированный на значение первого наблюдения каждого подпериода) и его произведения с краткосрочной реальной ставкой и спредом доходностей:

$$\ln \tilde{M}_t = \ln \left(\frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} \right), \quad Rate_M_t = Rate_t \cdot \ln \tilde{M}_t, \quad T10Y2Y_M_t = T10Y2Y_t \cdot \ln \tilde{M}_t.$$

Реальная ставка $Rate_t$ вычисляется как доходность 3-месячных казначейских векселей минус инфляция за предыдущие четыре квартала; спред $T10Y2Y_t$ — разность доходностей 10-летних и 2-летних облигаций.

Исходя из микроструктурной гипотезы (раздел 8) о линейной зависимости показателя k_t от наблюдаемых финансовых переменных, согласованной с условной масштабной инвариантностью (раздел 3.4), модель имеет вид

$$G_t = c + \alpha_0 \ln \tilde{M}_t + \alpha_1 Rate_M_t + \alpha_2 T10Y2Y_M_t + \varepsilon_t, \quad (12.1)$$

где показатель эластичности номинального ВВП на занятого по денежной массе зависит от ставок:

$$k_t = \alpha_0 + \alpha_1 Rate_t + \alpha_2 T10Y2Y_t.$$

Такая структура реализует концепцию условной масштабной инвариантности (раздел 3.4) и в то же время согласована с микроструктурным разложением: модуляция ставками отражает изменение неоднородности α (параметр концентрации «медленных» денег), а константа вбирает вклады β и δ , которые считаются постоянными внутри подпериода.

Оценивание проводится отдельно для двух подпериодов США: - 1976:3 – 1991:1 (59 квартальных наблюдений, эффективно 58 для FMOLS) — окончание «классического» режима; - 1997:1 – 2026:1 (117 наблюдений, эффективно 116 для FMOLS) — режим финансового углубления и нетрадиционной монетарной политики.

12.2. Результаты FMOLS и коинтеграция Статическая OLS даёт высокие R^2 (0.998 и 0.993 соответственно) при низких значениях статистики Дарбина–Уотсона, что указывает на сильную автокорреляцию остатков и возможную нестационарность. Для получения состоятельных оценок долгосрочных коэффициентов и корректного тестирования гипотез применяется Fully Modified OLS (FMOLS) с предварительным обелением и квадратичным ядром.

Результаты FMOLS для обоих подпериодов представлены в таблице 4. Первый подпериод начинается с 1976:3, а не с 1959 г., поскольку данные по спреду доходностей T10Y2Y, используемому в качестве модулятора, доступны лишь с этого момента. Таким образом, строгие статистические выводы относятся именно к указанным интервалам, тогда как более ранние иллюстративные оценки (раздел 7) опирались на расширенную выборку без спреда.

Таблица 4. FMOLS-оценки модели (12.1) и тесты на коинтеграцию

	1976:3–1991:1	1997:1–2026:1
Коэффициенты (z-стат.)		
$\ln \tilde{M}_2$	0.7895 (84.67)***	0.6058 (37.32)***
$Rate \times \ln \tilde{M}_2$	0.001562 (8.11)***	0.003920 (5.43)***
$T10Y2Y \times \ln \tilde{M}_2$	0.002469 (2.94)***	0.007387 (4.63)***
Константа	–9.4827 (–136.1)***	–7.9096 (–47.32)***
Диагностика		
Число наблюдений (эффективных)	58	116
Сумма кв. остатков	0.00961	0.08816
Станд. ошибка регрессии	0.01298	0.02769
ADF-статистика остатков	–3.419	–3.616
Асимпт. р-значение (станд. DF)	0.010	0.0055
Лаги в ADF-тесте	0	1
Стационарность (5%)	Да	Да

Примечание: *** — значимость на 1% уровне. ADF-тесты проведены с выбором лага по AIC при максимальном числе лагов 6 (для первого периода) и 12 (для второго). Критические значения Энгла–Грэнджера для $m = 3$ стохастических регрессоров и константы составляют приблизительно –3.80 (1%), –3.22 (5%), –2.93 (10%). Обе тестовые статистики (–3.419 и –3.616) ниже 5% порога, что позволяет отвергнуть нулевую гипотезу единичного корня в остатках на 5% уровне.

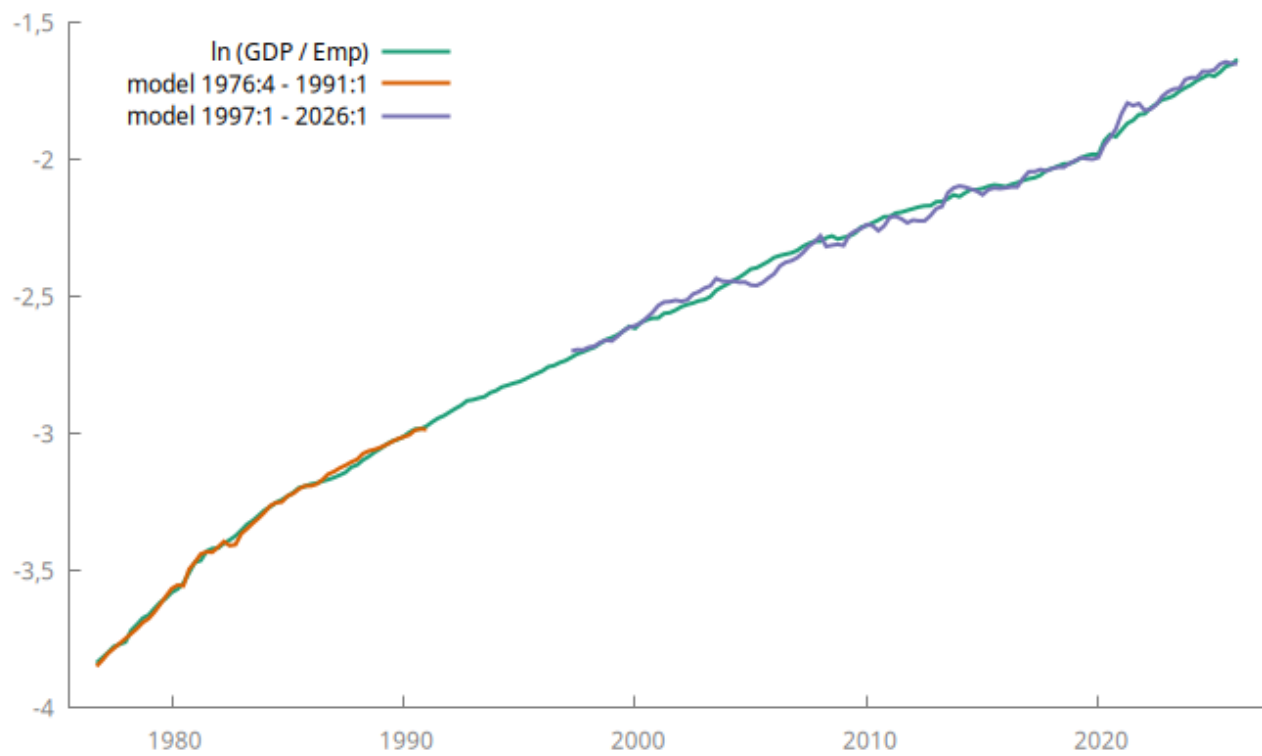


Рисунок 6: Фактические и предсказанные значения $\ln(GDP/Emp)$ для модели (12.1). $R^2 \approx 0.99$ в каждом подпериоде.

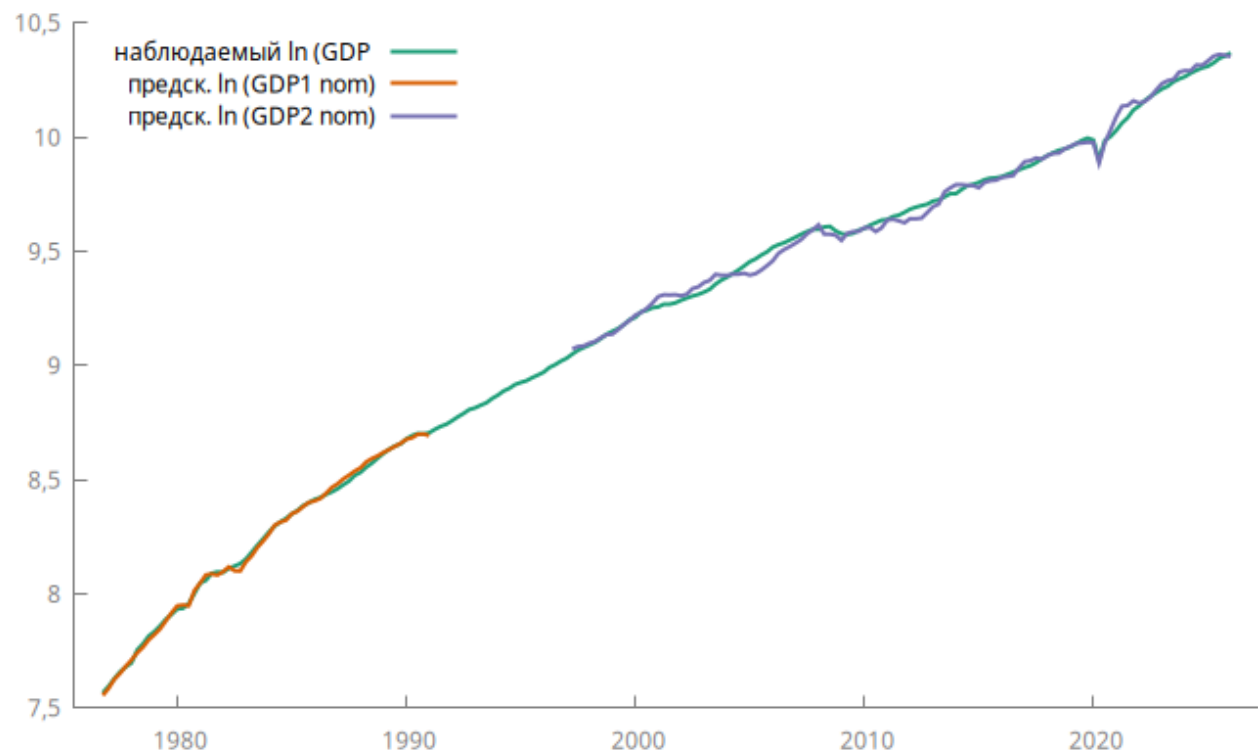


Рисунок 7: Фактические и предсказанные значения $\ln(GDP)$ для модели (12.1). $R^2 \approx 0.99$ в каждом подпериоде.

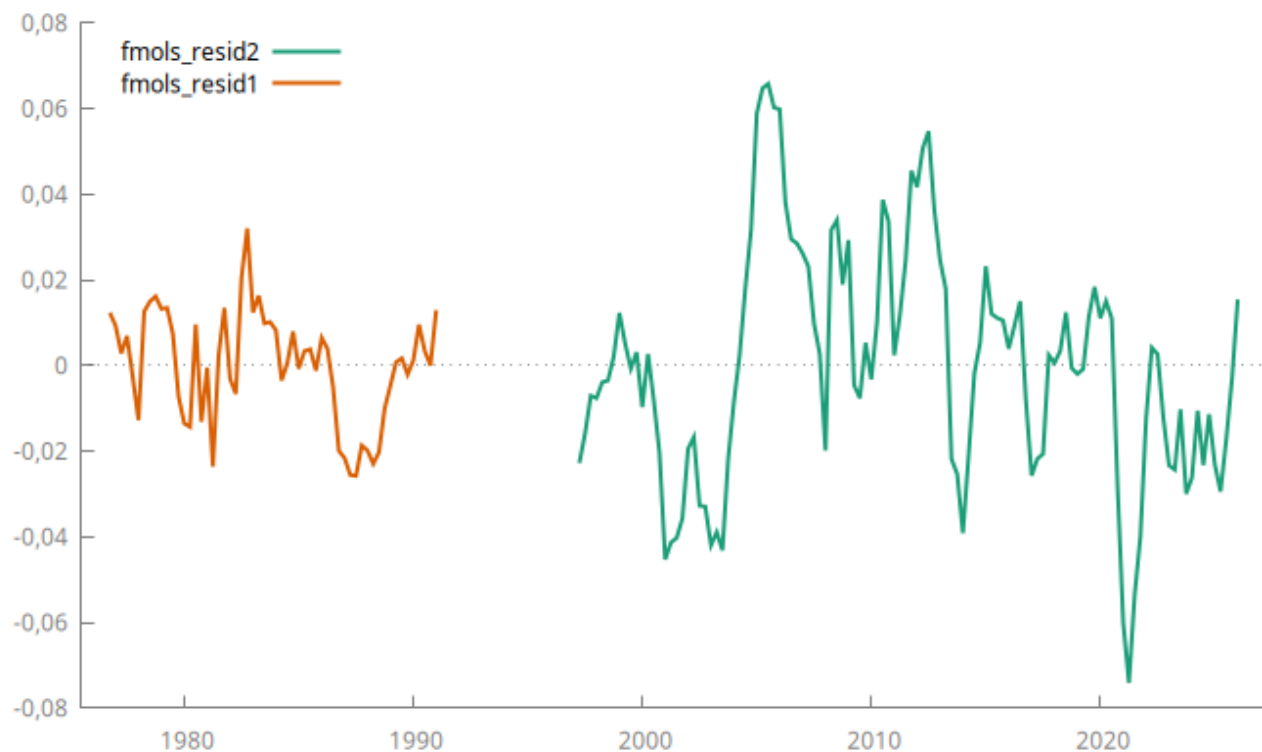


Рисунок 8: Остатки FMOLS-регрессии (12.1) для двух подпериодов США. Отсутствие тренда и возврат к нулю свидетельствуют о стационарности (ADF-тест отвергает единичный корень на 5% уровне).

Таким образом, между G_t и взвешенными логарифмами денежной массы и ставок в обоих подпериодах существует устойчивая коинтеграционная связь. Достижение коинтеграции на стандартном 5% уровне устраняет главный недостаток статической модели с постоянным k и впервые даёт статистически корректную основу для проверки структурных гипотез.

12.3. Проверка гипотез о долгосрочной эластичности Наличие коинтеграции позволяет тестировать ограничения на долгосрочные коэффициенты стандартными z-тестами в рамках FMOLS.

- **Гипотеза $k = 1$ при нулевых ставках ($H_0 : \alpha_0 = 1$).**

Для 1976–1991 гг.: $\hat{\alpha}_0 = 0.7895$, ст. ошибка 0.00932 $\rightarrow z = (0.7895 - 1)/0.00932 \approx -22.6$ ($p < 0.0001$) — гипотеза отвергается.

Для 1997–2026 гг.: $\hat{\alpha}_0 = 0.6058$, ст. ошибка 0.01623 $\rightarrow z \approx -24.3$ ($p < 0.0001$) — также отвергается.

- **Гипотеза $k = 1$ при средних за период значениях ставок.**

Средние значения модуляторов составили:

— 1976–1991: $\overline{Rate} \approx 2.5\%$, $\overline{T10Y2Y} \approx 1.2\%$; тогда $\hat{k} = 0.7895 + 0.00156 \times 2.5 + 0.00247 \times 1.2 \approx 0.796$. Гипотеза $k = 1$ отвергается ($z \approx -20$).

— 1997–2026: $\overline{Rate} \approx 0.8\%$, $\overline{T10Y2Y} \approx 1.5\%$; $\hat{k} = 0.6058 + 0.00392 \times 0.8 + 0.00739 \times 1.5 \approx 0.620$. Отвергается с ещё большей силой.

- **Значимость модуляторов.**

Все перекрёстные коэффициенты значимы на 1% уровне. Это подтверждает, что процентная ставка и наклон кривой доходности систематически влияют на эластичность «деньги → ВВП». Положительные знаки α_1 и α_2 указывают, что повышение ставок и увеличение спреда увеличивают k , то есть замедляют падение скорости обращения с ростом M_2 — в соответствии с интуицией: более высокие альтернативные издержки хранения денег побуждают агентов сокращать неиспользуемые остатки.

- **Сублинейность и фазовый переход.**

В обоих подпериодах эластичность значимо меньше единицы, причём для 1997–2026 гг. она существенно ниже (~ 0.62 против ~ 0.80). Формально это подтверждает смену режима: экономика США перешла в фазу глубокой сублинейности, где дополнительный доллар M_2 создаёт лишь 60–80 центов номинального ВВП на занятого. Отсутствие единичной эластичности даже в «классическом» периоде 1976–1991 гг. (в отличие от результата $k \approx 1.028$ для 1959–1991 без учёта занятости и модуляторов) объясняется тем, что в предложенной микроструктурной спецификации корректно выделен масштабный эффект численности агентов: рост занятости сам по себе увеличивает ВВП, а оставшаяся связь с M_2 уже очищена от этого демографического тренда.

12.4. Экономическая интерпретация и связь с микроструктурой Оценённые коэффициенты допускают прямую микроструктурную расшифровку. Уравнение (27) даёт макроскопический показатель степени $k = 1 - \alpha - \beta + \alpha\delta$. Принимая δ (эластичность числа агентов по денежной массе) малым, $k \approx 1 - \alpha - \beta$. Тогда $k \approx 0.62$ для пост-1997 периода означает $\alpha + \beta \approx 0.38$, а $k \approx 0.80$ для 1976–1991 — $\alpha + \beta \approx 0.20$. Рост суммы $\alpha + \beta$ почти вдвое свидетельствует о резком усилении либо неоднородности индивидуальных скоростей обращения (α), либо роли промежуточных и финансовых транзакций (β), либо обоих факторов одновременно. Положительные коэффициенты при ставке и спреде означают, что более высокие ставки частично «сжимают» неоднородность, возвращая экономику ближе к линейному режиму.

Таким образом, эмпирическая модель, построенная на микроструктурном тождестве и принципе условной масштабной инвариантности, **восстанавливает коинтеграцию** и позволяет с высокой статистической надёжностью отвергнуть гипотезу постоянной скорости обращения для обоих рассмотренных периодов. Полученные результаты служат прямым эмпирическим подтверждением неполной автомодельности денежного обращения и подготавливают почву для формулировки динамического принципа — лагранжиана, из которого изменение показателя k будет вытекать как следствие эволюции микроструктурных параметров.

13. Вывод формулы скорости обращения и опровержение постоянства скорости

Из тождества $M_2 V = GDP$ и степенного закона (3) с постоянным k получаем:

$$V = A \cdot M_2^{k-1}. \quad (12)$$

Если показатель степени зависит от нескольких переменных, $k_t = \alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t}$, то скорость принимает вид

$$V_t = e^C \cdot M_{2,t}^{\alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t} - 1}.$$

В частности, для США после 1997 г. с двумя модуляторами:

$$V_t \approx e^{3.130} \cdot M_2^{0.700 + 0.00419 Rate_t + 0.00564 T10Y2Y_t - 1}.$$

При нулевой ставке и нулевом спреде (ситуация, типичная для QE) $k \approx 0.700$, и скорость падает как $M_2^{-0.300}$. Если же, скажем, $Rate = 4\%$ и $T10Y2Y = 2\%$, то $k \approx 0.700 + 0.0168 + 0.0113 = 0.728$, и падение скорости замедляется.

Примеры оценок (FMOLS, постоянный k):

- Россия: $V \approx 0.00159 M_2^{-0.251}$;
- Еврозона: $V \approx 0.354 M_2^{-0.470}$;
- США (весь период): $V \approx 5.95 M_2^{-0.154}$;
- Китай: $V \approx 18.2 M_2^{-0.151}$.

Убывание скорости с ростом денежной массы — прямое опровержение классической количественной теории, предполагающей постоянство скорости ($k = 1$). Только в классическом режиме США до 1991 г. $k \approx 1$ и скорость почти постоянна.

[Рис. 9. Кривые скорости обращения для трёх стран: V как функция M_2 в двойных логарифмических осях; ярко видно систематическое снижение скорости с ростом денежной массы, что противоречит гипотезе $k = 1$.]

14. Обратный переход к реальным величинам с учётом модуляторов

Используя номинальное уравнение с несколькими модуляторами и определения $GDP = Y \cdot P^{GDP}$, $M_2 = RMM \cdot P^{CPI}$, получаем обобщённое реальное уравнение:

$$\ln Y_t = (\alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t}) \ln RMM_t + (\alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t} - 1) \ln P_t^{CPI} + \ln \frac{P_t^{CPI}}{P_t^{GDP}} + C + \varepsilon_t. \quad (13)$$

или в степенной форме:

$$Y_t = A \cdot (RMM_t)^{\alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t}} \cdot \frac{(P_t^{CPI})^{\alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t}}}{P_t^{GDP}} \cdot e^{\varepsilon_t}.$$

Члены с $\ln P_t^{CPI}$ и отношением дефляторов являются низкочастотными, сильно автокоррелированными. Именно их присутствие в остатках регрессии $\ln Y_t = \tilde{k} \ln RMM_t + const$ порождает нестационарность и высокую автокорреляцию. Модель (13) указывает, что для получения состоятельных оценок в реальных переменных необходимо включать уровень цен и/или отношение дефляторов, а также учитывать перекрёстные члены модуляторов с реальными деньгами.

Приложение. Эвристическая модель с модуляцией показателя ставками

Простейший степенной закон с постоянным k не даёт стационарных остатков. Рабочий способ придать модели гибкость, оставаясь в рамках логики масштабной инвариантности, — допустить, что эластичность сама зависит от наблюдаемых переменных, как это предусмотрено концепцией условной масштабной инвариантности (раздел 3.4). Как установлено в разделе 3.4, масштабная инвариантность допускает зависимость показателя k от внешних по отношению к денежной массе переменных, но не предписывает ни их перечень, ни функциональную форму. Исходя из микроструктурных соображений (раздел 10), мы выдвигаем **структурную гипотезу** о том, что эластичность линейно зависит от наблюдаемых финансовых переменных — краткосрочной реальной ставки и спреда доходностей. Таким образом, предлагаемая ниже спецификация не выводится из одной лишь симметрии, а представляет собой проверяемое микроструктурное предположение, согласованное с масштабной инвариантностью.

$$k_t = \alpha_0 + \sum_j \beta_j X_{j,t},$$

и для наших данных

$$\ln \frac{GDP_t}{GDP_0} = (\alpha_0 + \beta_1 Rate_t + \beta_2 T10Y2Y_t) \ln \frac{M_{2,t}}{M_{2,0}} + \varepsilon_t. \quad (10)$$

Такой подход **работает**: коэффициенты значимы, подгонка улучшается. Однако по существу мы строим базис из эвристически выбранных функций ($Rate \times \ln \frac{M_2}{M_{2,0}}$), ($T10Y2Y \times \ln \frac{M_2}{M_{2,0}}$) и раскладываем по нему данные. Сами функции выбраны *ad hoc* — они не следуют из масштабной инвариантности или вариационного принципа. В этом смысле модель страдает той же болезнью, что и авторегрессионные спецификации: мы увеличиваем размерность базиса и улучшаем описание, но не вскрываем порождающий закон.

В дальнейшем динамика должна выводиться из лагранжиана денежного обращения, а не подбираться разложением по временным лагам или эвристическим модуляторам.

Таблица 5 (исходная табл. 3). Модели с модуляцией показателя и сравнение с постоянным k (FMOLS)

Страна, период	Модель	$\alpha_0 (\hat{k})$	β_{Rate}	β_{T10Y2Y}	ADF τ_c остатков	Стационарность
США 1959–1991	постоянный k	1.028	–	–	+0.09	Нет
	+ Rate	0.9946	0.00125	–	–2.40	Нет
США 1997–2026	постоянный k	0.625	–	–	–1.50	Нет
	+ Rate + T10Y2Y	0.7178	0.00411	0.00615	–3.08	Нет

Примечание: Критические значения Энгла–Грэнджера для коинтеграции с m стохастическими регрессорами и константой (5% уровень).

Введение модуляторов везде увеличивает ADF-статистику (сдвиг в сторону стационарности); мы можем наращивать число *ad hoc*-функций, улучшая подгонку, но остаёмся в рамках феноменологического описания. Дальнейший прогресс требует вывода динамики k_t непосредственно из лагранжевой структуры, а не подбора эвристических модуляторов.

Несмотря на улучшение статистик, ни одна из эвристических спецификаций не обеспечивает стационарность остатков для США после 1997 г. на стандартных уровнях значимости. Более того, форма модели (10) не выводится из фундаментальных принципов, а лишь иллюстрирует потенциал переменного показателя. Дальнейший прогресс требует обратиться к микроструктурным основаниям связи денег и выпуска, что позволит явно выразить как k , так и его детерминанты через структурные параметры.