

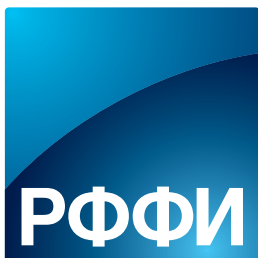


Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена

Конструирование заданий для системы адаптивного тестирования по математике

Санкт-Петербург
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
2021

УДК 004
ББК 22.195
К65



*Монография подготовлена в рамках научного проекта
№ 19-29-14080 «Электронная система адаптивного
тестирования образовательных результатов по математике,
информатике и предметам естественно-научного цикла
на основе когнитивных особенностей обучающихся»
при финансовой поддержке РФФИ*

Авторы:

В. И. Снегурова, Н. С. Подходова, А. Г. Беленко, М. С. Родионова, И. Б. Готская

К65 **Конструирование заданий для системы адаптивного тестирования по математике:** научно-методическое пособие / В. И. Снегурова, Н. С. Подходова, А. Г. Беленко, М. С. Родионова, И. Б. Готская ; Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена / под науч. ред. В. И. Снегуровой, Н. С. Подходовой. — Санкт-Петербург : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2021. — 64 с., ил.

ISBN 978-5-8064-3143-2

В пособии представлены различные подходы к разработке тестовых заданий для системы адаптивного тестирования по математике, являющиеся результатом исследования, выполненного в рамках гранта РФФИ 26-914 Фундаментальное научное обеспечение процессов цифровизации общего образования коллективом преподавателей факультета математики, физики, химии, психологии, института информационных технологий и технологического образования. В пособии описано и обосновано три подхода к конструированию тестовых заданий на базе разных оснований в соответствии с когнитивными особенностями учащихся: компонентов математического содержания (алгоритмическая, графическая, логическая); форма представления информации (вербальная, символическая, образно-логическая); выделения вспомогательных заданий и построения дерева ветвления. Пособие адресовано учителям, преподавателям и студентам педагогических вузов, разработчикам адаптивных тестов.

УДК 004
ББК 22.105

ISBN 978-5-8064-3143-2

© Коллектив авторов, 2021
© С. В. Лебединский, дизайн обложки, 2021
© Издательство РГПУ им. А. И. Герцена, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Подходы к конструированию адаптивных тестов	3
Конструирование заданий на основе компонентов математического содержания (алгоритмического, графического, логического).....	5
Конструирование на основе формы представления информации (вербальной, символьной, образно-графической)	23
Конструирование заданий на основе выделения вспомогательных заданий и построения дерева ветвления	54

Подходы к конструированию адаптивных тестов по математике

В настоящее время реализуются разные системы компьютерного адаптивного тестирования, различающиеся основаниями конструирования тестов.

Наиболее распространенными и часто реализуемыми подходами при конструировании систем адаптивного тестирования являются три:

- 1) адаптация по количеству предъявляемых тестовых заданий;
- 2) адаптация по времени выполнения теста;
- 3) адаптация по уровню сложности тестовых заданий или вопросов.

Адаптация по количеству предъявляемых тестовых заданий состоит в том, что доступ к следующему тестовому заданию или блоку тестовых заданий осуществляется только в случае выполнения предыдущего тестового задания или блока тестовых заданий. В случае предъявления блока заданий подсчитывается и фиксируется количество выполненных заданий и коэффициент обученности по каждому блоку. При таком подходе тестовые задания могут быть дополнены подсказками или ссылками на учебный материал, который должен быть дополнительно освоен обучающимся.

Адаптация по времени выполнения теста предполагает ограничение времени выполнения как всего теста, так и отдельных тестовых заданий или блоков тестовых заданий, для которых может быть установлено разное время выполнения.

Сущность третьего подхода заключается в следующем:

- на первом (начальном) этапе оценивается стартовый уровень подготовки обучающегося;
- на втором этапе из банка тестовых заданий выбираются задания, уровень сложности которых адекватен уровню подготовки обучающегося;

- на третьем этапе обучающемуся предлагается тестовое задание более низкого (если обучающийся не выполнил тестовые задания второго этапа) или более высокого уровня сложности (если обучающийся выполнил тестовые задания второго этапа);
- на следующих этапах процедура повторяется и продолжается до тех пор, пока не будет достигнут критерий завершения (остановки) теста, т. е. не будет достигнута необходимая точность оценки результатов тестирования.

Следует отметить, что абсолютное большинство систем компьютерного тестирования, реализуемых в настоящее время, разработаны и реализуются в системах профессионального образования.

Но кроме рассмотренных выше оснований, возможно в основу конструирования тестов положить и другие.

На основе исследований мы выделили следующие основания для разработки тестовых заданий:

1. Конструирование на основе компонентов математического содержания (алгоритмического, графического, абстрактно-логического).
2. Конструирование на основе формы представления информации (вербальной, символьной, образно-графической).
3. Конструирование на основе выделения вспомогательных заданий и построения дерева ветвления.

Рассмотрим более подробно каждое из выделенных оснований.

Конструирование заданий на основе компонентов математического содержания (алгоритмического, графического, абстрактно-логического)

Анализ математического содержания позволяет выделить ряд деятельностных компонентов математического содержания, которые лежат в основе решения математических задач:

- графический (образно-графический);
- алгоритмический компонент;
- абстрактно-логический компонент.

В свою очередь, каждый из выделенных деятельностных компонентов включает в качестве структурных элементов умения. Так, например, элементами образно-графического компонента с учетом установления связей между способами представления информации являются:

- умение воспринимать информацию, представленную в образно-графическом виде,
- умение осуществлять перевод информации, представленной в графической форме, в другую (вербальную, символьную) и обратно,
- умение преобразовывать график в графическую или иконическую форму,
- умение выполнять различные преобразования информации, представленной в вербальном или символьном виде, используя в качестве посредника график.

Приведем примеры тестовых заданий разного типа.

Задание на ввод ответа (задание на обучение графическому компоненту математического содержания, а именно на обучение умению переводить информацию с графического языка на аналитический).

Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке.

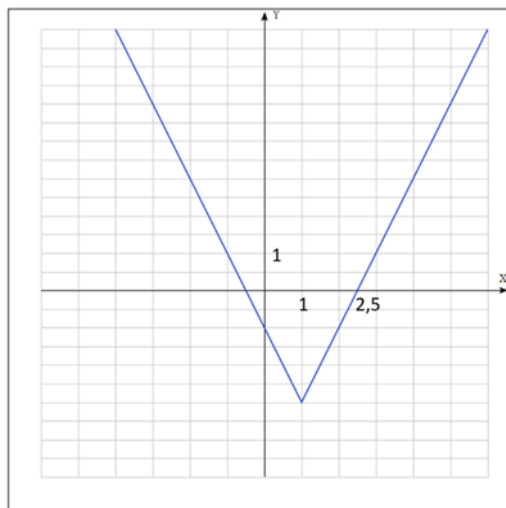


Рис. 1

Задание на упорядочивание (задание, направленное на обучение алгоритмическому компоненту математического содержания, а именно, на обучение умению составлять алгоритмы для решения задач).

Составьте план решения данного уравнения, расположив предлагаемые действия по порядку:

$$\log_3(x^2 - 4) = 1 + \log_3(1 - x).$$

1. Найти область допустимых значений.
2. Представить 1 как логарифм с основанием 3.
3. Использовать справа свойство преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения.
4. Перейти от равенства с логарифмами к равенству выражения, стоящих под логарифмами.
5. Решить квадратное уравнение.
6. Выбрать те значения корней квадратного уравнения, которые удовлетворяют ОДЗ.

Задание со свободным ответом, проверка учителем (задание, выполнение которого основано на применении умения осуществлять перевод информации, представленной в аналитическом виде, к графическому и наоборот).

Определите графически число корней уравнения для разных значений параметра a : $|x^2 + 4x - 5| = a + 4$.

Для решения этой задачи нужно построить график функции, стоящей в левой части. Затем, проводя горизонтальные прямые, найти искомые значения a .

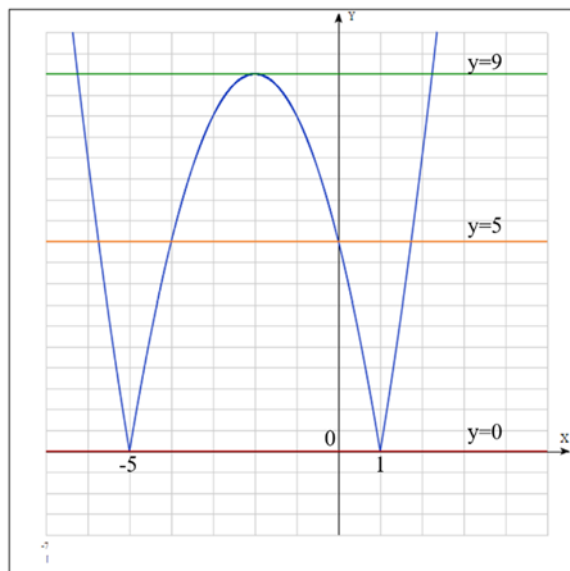


Рис. 2

Задание на многозначный выбор (задание на использование логической компоненты математического содержания, при выполнении которого используется умение анализировать условие задачи).

Известно, что функция $y = f(x)$ обладает следующими свойствами:

- а) она определена на всей числовой прямой;
- б) множество ее значений — промежуток $(-2; +\infty)$;
- в) она монотонно возрастает на всей области определения.

Выбери из списка, какими еще свойствами обладает такая функция?

- Нечетная.
- Ограничена.
- Имеет два промежутка знакопостоянства: слева от своего нуля — промежуток отрицательных значений, справа от своего нуля — промежуток положительных значений.
- График имеет горизонтальную асимптоту.

- Четная.
- *Имеет корень.*

На самом деле в чистом виде задач на использование только одного элемента практически нет. Поэтому в основном можно говорить лишь о преимущественном использовании одного из элементов.

Нужны задачи, решение которых опирается в равной мере на использование нескольких элементов одной составляющей.

Задание со свободным ответом, проверка учителем (задание на использование логического компонента математического содержания, выполнение которого основано на применении умений выполнять анализ, делать вывод, обосновывать свой вывод).

1) *Функция $y = f(x)$ — монотонно возрастает. Может ли ее производная быть отрицательной? Почему?*

2) *Известно, что функция $y = f(x)$ — неотрицательна. Может ли ее производная быть монотонной функцией? Почему?*

3) *Известно, что функция $y = f(x)$ — не является монотонной на всей области определения. Может ли ее производная быть всегда положительной? Обоснуйте свой ответ.*

Кроме задач на преимущественное обучение элементам отдельных компонент математического содержания выделяются комбинированные задачи. Это задачи, при решении которых предполагается одновременное использование в равной степени элементов двух или трех составляющих математического содержания, например, графической и логической.

Задание со свободным ответом, проверка учителем (задание, выполнение которого основано на использовании умений: переводить информацию с одного языка на другой, анализировать условие задачи, обосновывать полученный в результате анализа вывод, то есть ее решение основано на использовании графической и логической составляющих).

1) Можно ли из графика, изображенного на рисунке, получить график функции $y = \log_5(-x + 1)$, используя преобразования: сдвиг на вектор и растяжение или сжатие вдоль осей? Если нет, то объясните почему.

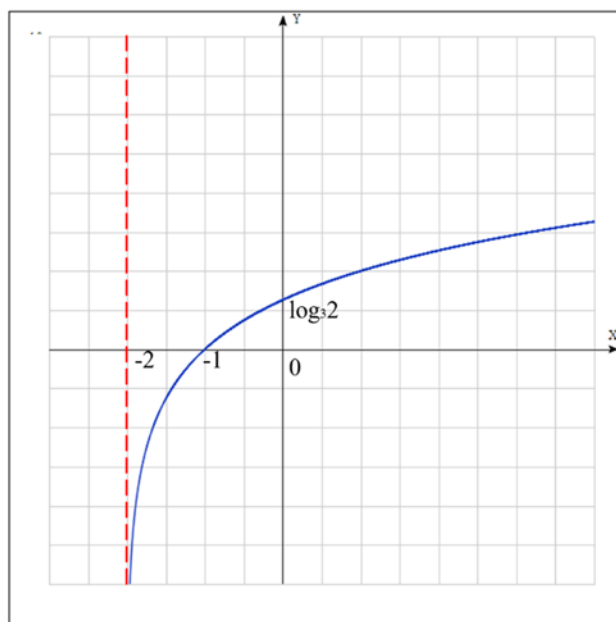


Рис. 3

Любое выделенное умение может проявляться при решении задач, одинаковых с точки зрения математического содержания, но отличающихся друг от друга уровнем сложности.

Мы выделили три уровня сложности задач: минимальный, основной или базовый и повышенный (или продвинутый).

Для того чтобы определить, какому уровню сложности соответствует та или иная задача, нами были использованы ряд показателей:

- Уровень продуктивности задания: наличие или отсутствие алгоритма его решения.
- Количество данных, которые могут быть использованы при решении (в том числе избыточных).
- Количество действий, которые необходимо последовательно выполнить при преобразовании условия к требованию задачи, а также количество шагов в алгоритме (если таковой существует).

- Количество способов и методов решения данной задачи, в том числе отличающихся используемыми при решении математическими фактами.

- Необходимость в процессе анализа условия и решения перевода информации из одной формы представления в другую.

На основе использования этих показателей можно дать обобщенную характеристику задач каждого уровня сложности.

Задачи первого уровня сложности — репродуктивные задачи, алгоритм или способ решения которых известен. При их решении или не требуется обоснований, или эти обоснования предельно просты и факт, необходимый для обоснования, очевиден. Они характеризуются простотой функций или выражений, входящих в условие, очевидностью способа решения или доказательства, небольшим (не больше трех) количеством шагов решения или доказательства. Количество шагов при решении или обосновании не превосходит трех. Выражения, которые содержатся в условии, включают в себя не больше трех операций, а функции — не больше двух помимо основной. Это в основном задачи на воспроизведение известных формул или способов решения, практически не требующие обоснований при их решении.

При переходе ко второму уровню сложности усложняются выражения и функции, входящие в условие, способ решения становится не так очевиден и требует небольшого количества обоснований, увеличивается количество действий, которое нужно выполнить для решения или доказательства. Задачи второго уровня сложности — это частично продуктивные задачи, которые требуют переноса известного алгоритма или способа решения в частично измененную ситуацию. При их решении требуется небольшое (в 3–5 шагов) обоснование. Выражения, которые содержатся в условии, включают в себя четыре — пять операций, а функции — три-четыре помимо основной. В процессе анализа условия и решения может потребоваться перевод информации из одной формы представления в другую.

Задачи третьего уровня — это продуктивные задачи, при решении которых требуется перенос алгоритма или способа решения в новую ситуацию. Задачи третьего уровня характеризуются не столько технической сложностью, сколько неочевидностью возможного способа решения, они предполагают наличие нескольких способов решения, каждый из которых требует своей последовательности обоснований, основанных на разных методах и разных математических фактах. В процессе анализа условия и решения требуется перевод информации из одной формы представления в другую.

Пример 1.

Постройте графики тригонометрических функций:

1) $y = 3\cos(2x)$ (Уровень сложности 1);

2) $y = -1,5\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$ (Уровень сложности 2).

Пример 2.

Будут ли равносильны уравнения. Обоснуйте свой ответ.

1) $\sqrt{x-3} = -2$ и $x-3 = 4$ (Уровень сложности 1);

2) $\sqrt{\frac{x-5}{x}} + \frac{6}{x} = 0$ и $\sqrt{x-5} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 0$ (Уровень сложности 2);

3) $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = \log_5(x-2)$ и $(x-3)^2 = 0$. (Уровень сложности 3).

Пример 3.

Докажите, что уравнение не имеет решений.

1) $\sqrt{2-x} = -1$ (Уровень сложности 1);

2) $\sqrt{5-x} - \sqrt{x-6} = 2$ (Уровень сложности 1);

3) $\sqrt{5-x} - \sqrt{x-6} = (x-1)^2(x-6)$ (Уровень сложности 2).

В первом уравнении — доказательство очевидно: части уравнения разных знаков. Во втором — анализ области определения, которая представляет собой пустое множество, сразу дает нам требуемое доказательство. В третьем нахождение области определения не дает нам возможности доказать требуемое и нужно искать что-то другое. В данном случае нужно показать, что части уравнения имеют разные знаки в области определения.

Пример 4.

Решите неравенство:

- 1) $\sqrt{5-x} < \sqrt{7-3x}$ (Уровень сложности 1);
- 2) $\sqrt{5-x} < 7-3x$ (Уровень сложности 2);
- 3) $2 - \sqrt{5-x} < \sqrt{7-3x}$ (Уровень сложности 3).

Предполагается конструирование системы задания по каждой теме школьного курса математики (Алгебры и Алгебры и начал анализа).

Система тестовых заданий по каждой теме имеет следующую структуру.

Система состоит из четырех разделов задач. Задачи разделены на разделы в соответствии с элементами компонентов математического содержания: графического, логического и алгоритмического. Разделы носят названия «Элементы графического компонента математического содержания (Г)», «Элементы логического компонента математического содержания (Л)» и «Элементы алгоритмического компонента математического содержания (А)». Отдельно выделены «Комбинированные задачи (К)».

Каждый раздел, за исключением последнего, содержит блоки задач. Задачи каждого блока соответствуют одной из подтем внутри большой темы.

Каждый блок содержит три группы задач, каждая из которых соответствует одному из трех уровней сложности.

Приведем примеры тестовых задач такой системы для темы «Тригонометрические функции».

Графический компонент математического содержания.

Г1. Задание со свободным ответом, проверка учителем (задание, выполнение которого основано на использовании умения переводить информацию с одного языка — аналитического — на другой — графический).

Постройте графики тригонометрических функций:

$$y = \cos^2 x; \text{ б) } y = 1 - \operatorname{tg}(x - \pi).$$

Г2. Задание с вводом ответа (задание, выполнение которого основано на использовании умения переводить информацию с одного языка — графического — на другой — аналитический)

Задайте формулой тригонометрическую функцию, график которой изображен на рисунке.

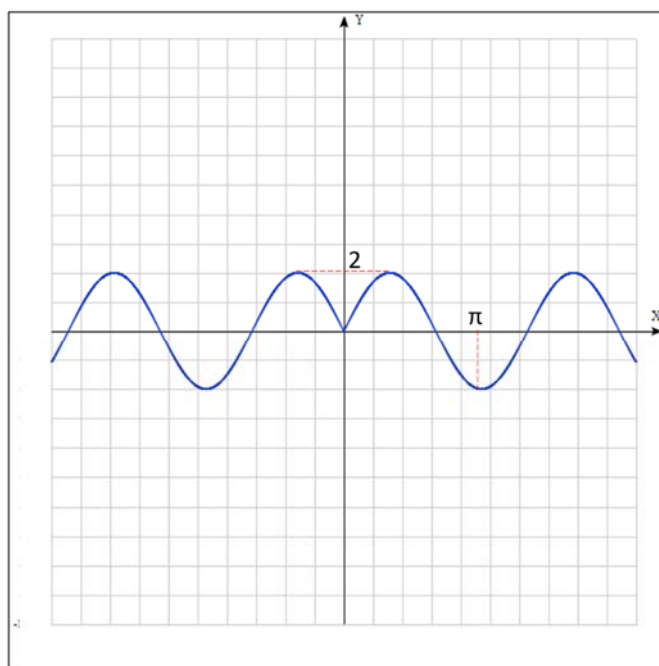


Рис. 4

Эта задача более сложная, чем предыдущая, поэтому функции, графики которых изображены на рисунке, должны быть достаточно просты и для успешного ее решения ей могут предшествовать следующие задачи:

Задания с развернутым ответом (проверка учителем).

Г2а. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \sin(3x + 1)$ можно получить график функции $y = \sin(2x)$?

Г2б. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \cos(x/2)$ можно получить график, изображенный на рисунке?

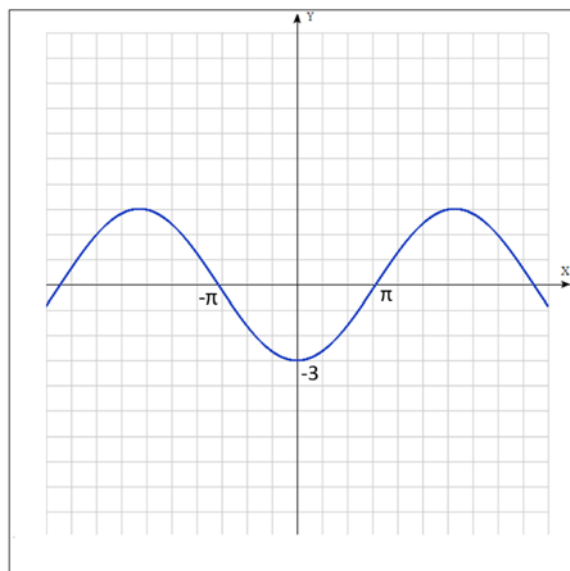


Рис. 5

Г2в. Какое преобразование позволяет получить из графика, изображенного на рисунке (6) график, изображенный на рисунке (7)?

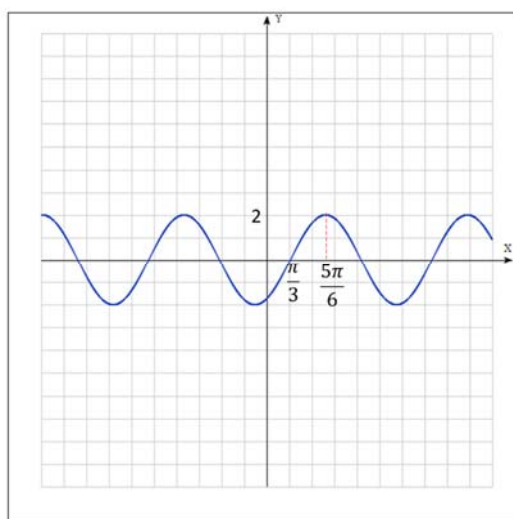


Рис. 6

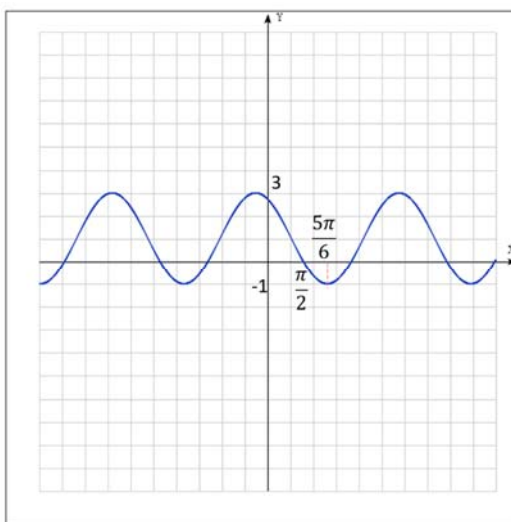


Рис. 7

Г2г. На рисунке (8) изображен график функции $y = \sin(2x)$. Изобразите график функции, полученный в результате следующих преобразований: параллельного переноса на вектор $(2; 0)$ и сжатию вдоль оси OY с коэффициентом 3. Запишите получившуюся функцию формулой.

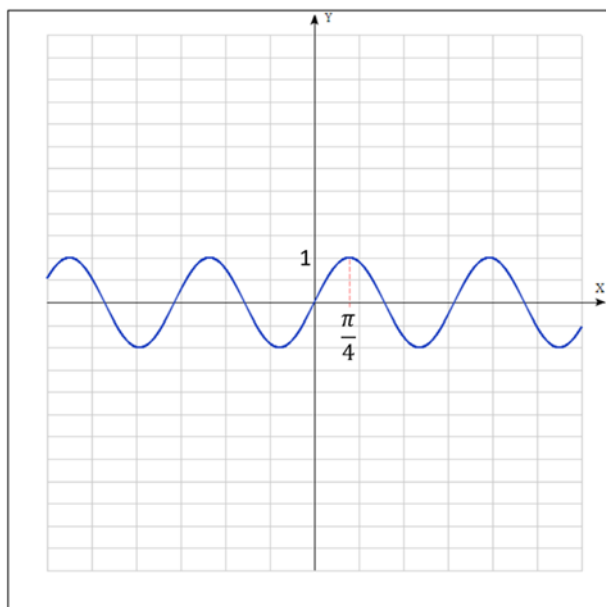


Рис. 8

Г3. По графику соответствующей функции определите знаки следующих чисел: а) $\sin(-1,7)$; б) $\sin 2$; в) $\sin 3,3$.

Эта задача также учит переводу с графического языка на аналитический, но при решении этой задачи используется умение переводить информацию на графический язык.

Г4. С помощью графика функции, изображенного на рисунке (4), ответьте на вопросы:

- 1) Каковы значения x , для которых $f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$?
- 2) Каковы промежутки возрастания и убывания функции?
- 3) Укажите значения x , при которых функция имеет максимум или минимум.

4) Можно ли построить функцию, обратную данной, на $\mathbf{R}$? Если нет, то укажите множество, на котором это возможно.

Эта задача направлена на обучение умению осуществлять преобразование информации от аналитического вида к графическому и наоборот (вопрос 1), от вербального вида к графическому и наоборот (вопросы 2, 3), ответ на 4 вопрос

предполагает уже не обучение умению осуществлять указанные выше преобразования информации, а использование его.

Приведем примеры задач из нашей системы, при решении которых происходит обучение умению проводить доказательные рассуждения.

Логический компонент математического содержания.

Л1. Существует ли число a , удовлетворяющее условию: $\sin(a) = 7/25$?

Объясните почему.

Л2. Выбери верные равенства:

- $2 - \sin(x) = 1,7$;
- $1 + \cos(x) = 2,5$;
- $\operatorname{tg}(x) - 4 = 5$.

Обоснуй (проверка учителем).

Л3. Будет ли число T периодом функции y :

1) $T = 2,5\pi, y = \cos(0,4x + 3)$;

2) $T = 5\pi, y = \operatorname{tg}((4x - 7)/10)$?

Обоснуйте свой ответ.

Для того чтобы научить учащегося анализировать условие задачи с указанной целью, необходимо предлагать задачи, в которых требуется сделать вывод из одного или нескольких элементов условия, выбрать те элементы условия, которые необходимы для обоснования или опровержения данного утверждения. При конструировании таких задач мы старались акцентировать внимание учащегося на задании «проанализируйте» с указанием того, что подлежит анализу: элементы условия, свойство функции, входящей в условие и т. д.

Л4. Поставь в соответствие функции свойство, на основании которого можно утверждать, что данная функция не имеет корней

а) $y = 4 + 3\sin(x + 1)$;

б) $y = (1 + \cos x)/\sin x$;

в) $y = 2 + |\operatorname{tg} x|$.

- положительность функции;
- ограниченность функции;
- ограниченность области определения.

Л5. Выделите элементы условия, на основании которых можно сделать вывод о том, что функция $g(x)$ будет иметь в точке $x = \pi/4$ наименьшее значение.

Функция $g(x)$ получена из $f(x) = \sin 2x$ умножением на -4 .

Л6. Известна формула тангенса суммы двух углов: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

- 1) Может ли тангенс суммы двух углов быть равен сумме тангенсов этих углов? (Да/нет)
- 2) Если да, то в каком случае? Запишите условие.

Л7. При каких значениях a график функции $y = \operatorname{tg}(x + a)$ пересекает прямую $x = \pi/2$? Запишите значение a .

Теперь перейдем к разделу, в котором содержатся задачи, решение которых предполагает обучение или использование элементов алгоритмического компонента математического содержания. Мы в основном сосредоточили свое внимание на обучении составлению алгоритмов для решения задач.

А1. Выделите первый шаг, с которого следует начинать решение данной задачи.

- 1) Расположите в порядке возрастания числа:

$\cos(7\pi/8), \cos(\pi/2), \cos(11\pi/8), \cos(17\pi/8), \cos(9\pi/4), \cos(5\pi/8), \cos(\pi/8)$.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 5\sin(x + \pi/4)$.

A2. Опишите последовательность шагов, необходимых для решения следующих задач:

1) Даны координаты точки $A_x (0,6; -0,8)$ на единичной окружности.

Вычислите $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

2) Найдите центры симметрии графиков функций:

а) $y = \cos x + 1$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

A3. Выделите этапы решения следующих задач.

1) Определите, какой знак имеет произведение

$\sin x \operatorname{tg}^3 x \cos x \operatorname{ctg} x (1/\cos^5 x)$, если $\pi < x < 3\pi/2$.

2) Найдите промежутки знакопостоянства функции $y = 2\cos(x - \pi/4) + 1$.

3) Найдите промежутки монотонности функций графическим и аналитическим способами

$y = |\cos x|$;

$y = \lg \cos x$;

$y = 2^{\sin x}$;

$y = \cos^3 x$.

A4. Опишите последовательность шагов, необходимых для решения следующих задач:

1) Найдите промежутки знакопостоянства функции $y = 2\cos(x - \pi/4) + 1$.

2) Вычислите $\cos 2x$, если $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

3) Вычислите значение выражения $A = \sin x \cos x$, если $\sin x + \cos x = m$.

A 5. Даны несколько уравнений. Выберите те из них, при решении которых используется замена переменной.

1) $2\sin x - 3\cos x = 2$;

2) $\sin 2x - 3 = 2\sin x$;

$$3) 3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 2;$$

$$4) \sin x = \cos x.$$

А 6. Даны несколько неравенств. Выберите те из них, при решении которых используется один и тот же прием.

$$1) \sin^2 x - 3 > 2\sin x;$$

$$2) \sin x < 7/8 \cos x;$$

$$3) \operatorname{tg}^3 x > \operatorname{tg} x;$$

$$4) 2\cos 2x > \sin x \cos 2x;$$

$$5) 1 - \sin x \cos x + \cos^2 x < 0;$$

$$6) \sin x \cos 3x < -1.$$

А 7. Какой прием позволяет преобразовать в произведение сумму

$$1) 1 + 2\cos x;$$

$$2) 1 - 4 \sin^2 x;$$

$$3) 1 + \cos x + \cos 2x.$$

А 8. Выразите через $\cos x$

1) $1 - \sin^2 x + \cos^2 x$. Какое из этих преобразований приводит к выражению с наименьшим числом членов?

2) $\sin^2 x / (1 + \cos x)$. Какое из этих преобразований приводит к рациональному выражению относительно тригонометрической функции?

3) $2\sin x \cos x / (1 - \sin^2 x)$. Какое из этих преобразований приводит к выражению более простого вида?

А 9. Выразите через одну тригонометрическую функцию выражение

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

а) уничтожив иррациональность в знаменателе умножением числителя и знаменателя на $\sqrt{1 + \sin x}$;

б) уничтожив иррациональность в числителе умножением на $\sqrt{1 - \sin x}$.

Какое из этих двух преобразований приводит к выражению более простого вида?

Комбинированные задачи.

К 1. Будет ли осью симметрии графика функции $y = g(x)$ прямая $x = 7\pi/12$, если функция $g(x)$ получена из $f(x) = \sin(2x + \pi/3)$ в результате умножения на -2 .

К 2. Можно ли преобразовать график функции, изображенной на рисунке (9) в график функции, изображенной на рисунке (10), используя только растяжение вдоль осей?

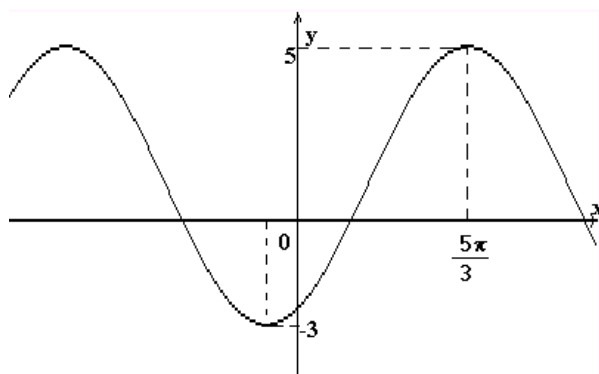


Рис. 9

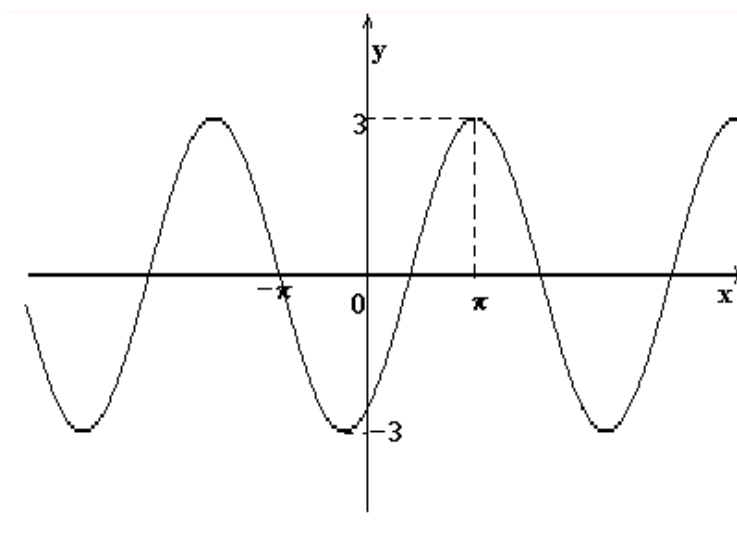


Рис. 10

К3. Докажите или опровергните утверждение: график функции $y = x \operatorname{tg} x$ симметричен относительно оси ОУ.

К4. Будет ли график, полученный из графика функции $y = \sin 3x + \cos 3x$ в результате сдвига на вектор $(\pi/3; 2)$ симметричен относительно точки $A(\pi/2; 2)$.

К5. Докажите или опровергните утверждение.

Уравнение $\sin 2x = a + x$ имеет не более одного решения для всех значений параметра.

К6. Опишите последовательность действий, в результате которой из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ получится график, изображенный на рисунке (11).

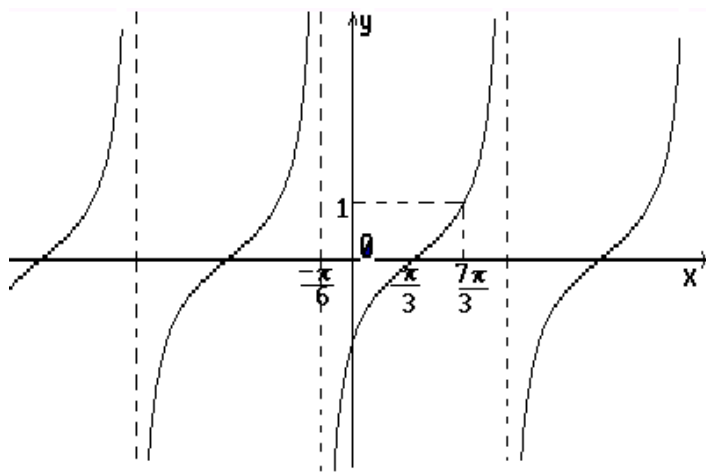


Рис. 11

К7. Предложен алгоритм для решения тригонометрического уравнения с параметром. Проанализируйте этот алгоритм, дайте оценку его правильности. Уточните и исправьте его, если это необходимо. Предложите другой способ решения данного уравнения и составьте для него алгоритм.

$$\sin^2 x + a \sin x - a - 1 = 0$$

- 1) Выразить a как функцию от x .
- 2) Построить график функции $a(x)$.
- 3) Провести всевозможные прямые $y = a$.
- 4) Определить критические значения для a .
- 5) Записать решения для каждого a .

Конструирование заданий на основе формы представления информации: вербальной, символьной, образно-графической

В основе этого подхода лежит идея о важности учета индивидуальных психологических особенностей учащихся. Проведенный анализ литературы показал, что разные люди предпочитают оперировать с информацией, представленной разными способами. Так одни учащиеся быстрее и легче обобщают материал, представленный в виде математических символов и знаков. Другие, наоборот, легче усваивают материал, представленный в виде геометрических фигур, рисунков; третьи — свободнее оперируют словесным материалом (Jakimanskaja, 1979 Kruteckij, 1998;). Проведенное нами исследование (Н. С. Подходова, А. В. Орлова, В. И. Снегурова, 2021), в основном, подтвердило, данные теоретические выводы.

Сказанное выше определяет необходимость предъявления при создании адаптивных тестов учащимся информации, представленной в различных формах.

Но при этом необходимо учитывать, что не все теоретические компоненты можно представить любым способом представления. Тогда ученику предлагается рассмотреть такие же теоретические или практические компоненты, но уже не в приоритетной для него форме, а близкой ей, и после выполнения всех заданий по выделенным компонентам рассматриваемой темы в приоритетной форме.

В качестве оснований конструирования адаптивных тестов мы выделили 1) приоритетную форму (способ) представления информации, 2) сложность заданий.

При этом возможны по крайней мере два подхода к выделению сложности заданий.

Первый подход включает нулевой или входной уровень сложности, который проверяет знания теоретического характера, без которых невозможен переход на уровень умений. В формировании же и развитии умений можно выделить 3 уровня. Опишем их.

1. Базовый.

Для решения заданий требуется воспроизведение информации и ее применение по образцу (готовому алгоритму). Уровень заданий не выше базового ЕГЭ.

2. Продуктивный.

Задания, требующие применение знаний в знакомой ситуации, но отличающейся от образца, либо применение знаний в незнакомой ситуации с известным алгоритмом решения. Для решения задач этого уровня необходимо умение рассуждать, делать выводы, обобщения. Использовать полученные знания и умения для решения жизненных задач.

3. Углубленный.

Применение знаний в незнакомой, отличающейся от стандартной ситуации. Требуется умение комбинировать известные способы решения задач, видеть объект с разных сторон. Критически оценивать учебную информацию.

Для конструирования тестовых заданий необходимо отобрать базовые понятия, теоремы, аксиомы и алгоритмы, какие встречаются в изучаемой теме. Для отобранных теоретических компонентов разрабатываются тестовые задания, которые нумеруются в соответствии с последовательностью изложения в теме. Они диагностируются на входном нулевом уровне. Для диагностики освоения умений отбираются базовые умения темы. Для них также разрабатываются тестовые задания.

Приведем пример теста на диагностику умений такой подтемы определение логарифма.

Целесообразно выделить следующие диагностируемые элементы:

- 1) Вычисление значения логарифма на основе определения логарифма;
- 2) Определение области определения логарифма.

Для каждого из выделенных элементов предлагаются задания, сконструированные в каждой из форм в 3 уровнях сложности. Приведем пример заданий для диагностики первого элемента.

Задание 1. Вычисление значения логарифма на основе определения логарифма.

Вербальная.

Уровень сложности 1:

Чему равен логарифм двадцати пяти по основанию 5?

- а) 2 (+) б) 5 в) 25 г) -5.

Уровень сложности 2:

Чему равен логарифм одной сорок девятой по основанию 7?

- а) 7 б) -7 в) -2(+) г) $\frac{1}{243}$.

Уровень сложности 3:

Чему равен логарифм корня четвертой степени из трех по основанию $\frac{1}{9}$?

- а) $-\frac{1}{2}$, б) $-\frac{1}{4}$, в) $\frac{1}{4}$, г) $-\frac{1}{8}$ (+).

Символьная.

Уровень сложности 1:

$$\log_3 81 = ?$$

- а) 4 (+), б) 27, в) 3, г) 2.

Уровень сложности 2:

$$\log_5 \sqrt{5} = ?$$

а) $1/2$ (+), б) $-1/2$, в) $\sqrt{5}$, г) $-1/5$.

Уровень сложности 3:

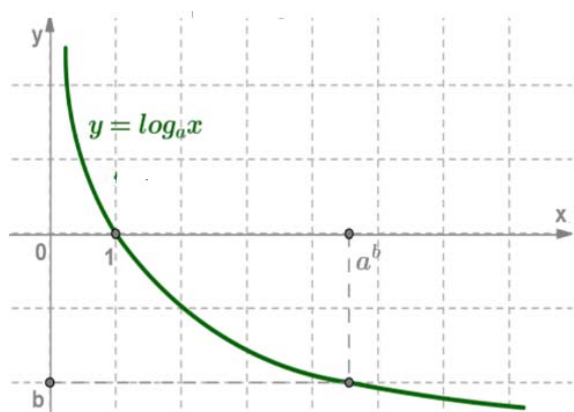
$$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{16} = ? \text{ равно:}$$

а) $4/5$, б) $-5/4$, в) $-5/2$, г) $-2/5$ (+).

Образно-графическая.

Уровень сложности 1:

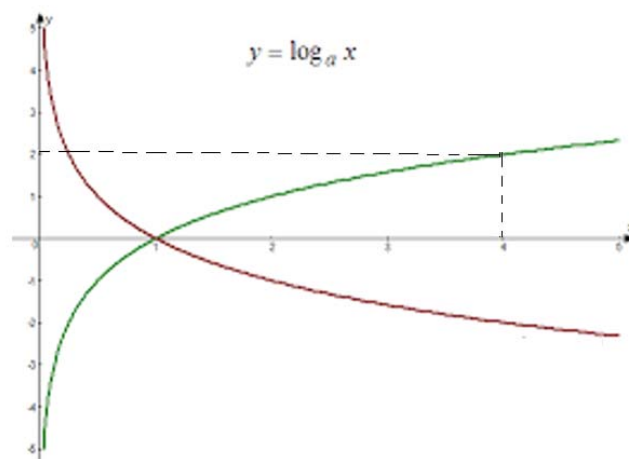
Оцени по графику логарифмической функции основание логарифма, которым она задается



а) $a > 1$ б) $0 < a < 1$ (+) в) $a = 1$ г) $a < 0$.

Уровень сложности 2:

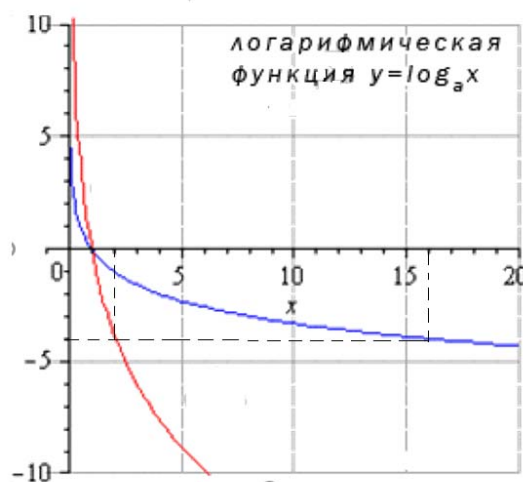
Определи основание логарифмической функции, график которой изображен красным цветом (основание обозначим a_1), если он симметричен графику функции, изображенному зеленым цветом (основание обозначим a_2), если они симметричны относительно оси абсцисс.



- а) $a_1 = -2$ б) $a_2 = a_1$ в) $a_2 = a_1^{-1}$ (+) г) $a_1 = \frac{1}{2}$ (+).

Уровень сложности 3:

Найди отношение оснований логарифмических функций, графики которых выделены красным (a_1) и синим (a_2) цветом.



- а) $\frac{1}{4}$ б) $\sqrt[5]{16}$ (+) в) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$ (+) г) $\frac{1}{2}$.

Задание 2. Область определения логарифма.

Вербальная.

Уровень 1

При каких значениях x существует логарифм x по основанию 11?

а) x больше 11, б) x положительно (+), в) x не равно 11, г) x не равно 1.

Уровень 2

При каких значениях x существует логарифм $(15 - 7x)$ по основанию $\frac{3}{8}$?

а) x больше $\frac{3}{8}$, б) x не равно $\frac{3}{8}$, в) x больше $\frac{15}{7}$, г) x меньше $\frac{15}{7}$ (+).

Уровень 3

При каких значениях x существует логарифм $(-4 + 3x + x^2)$ по основанию $\sqrt{2}$?

а) x больше $\sqrt{2}$, б) x меньше -4 и больше 1 (+), в) x больше -4 и меньше 1
г) x больше -1 и меньше 4.

Символьная.

Уровень 1

$D(\log_7 x) - ?$

а) $x > 7$, б) $x > 0$ (+), в) $x \neq 7$, г) $x \neq 1$.

Уровень 2

$D(\log_{\frac{5}{6}}(5 - 7x)) - ?$

а) $x < -\frac{5}{7}$, б) $x \neq \frac{5}{6}$, в) $x > \frac{5}{7}$, г) $x < \frac{5}{7}$ (+).

Уровень 3

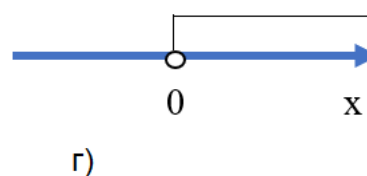
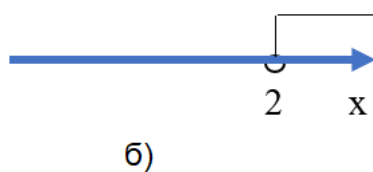
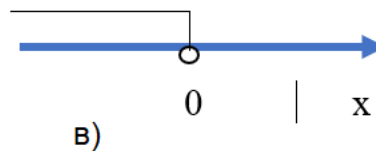
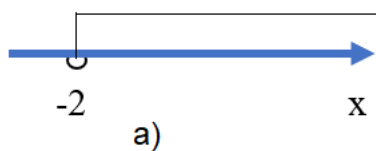
$D(\log_{\sqrt{2}}(4 - 3x - x^2)) - ?$

а) $x > \sqrt{2}$, б) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$, в) $(-4; 1)(+)$ г) $(-1; 4)$

Образно-графическая.

Уровень 1

На каком из рисунков указана область определения логарифма x по основанию

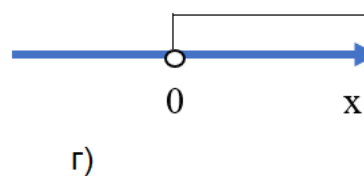
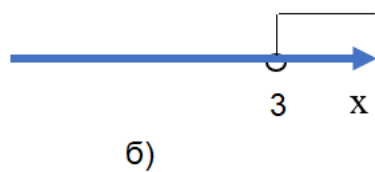
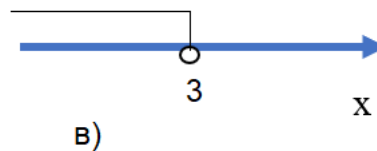
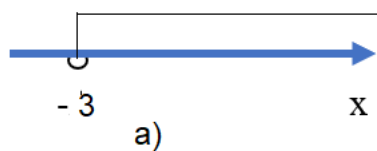


2?

г) (+)

Уровень 2

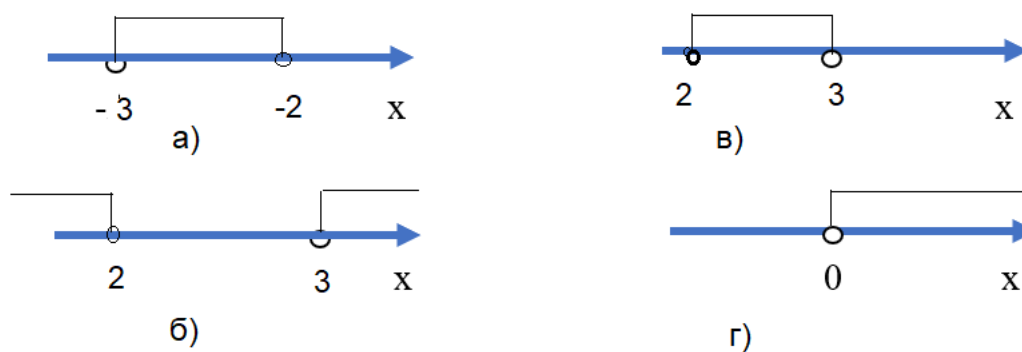
На каком из рисунков указана область определения логарифма $(9 - 3x)$ по основанию $\frac{3}{4}$



г) (+)

Уровень 3

На каком из рисунков указана область определения логарифма $(-6 + 5x - x^2)$ по основанию $\sqrt{6}$?



в) (+).

Рассмотрим возможную систему адаптивных тестов для темы «Производная функции» как для диагностики теоретических компонентов темы, так и умениевых.

Диагностика теоретических компонентов темы.

Входной уровень

1. А) символьный

Выберите верные правила дифференцирования функций

- 1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
- 2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$;
- 3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$;
- 4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.

Б) словесный

Выберите верные утверждения.

- 1) Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций.
- 2) Производная от произведения двух функций равна производной первой функции, умноженной на вторую плюс первая функция, умноженная на производную второй.

- 3) Производная частного двух функций равна частному производных этих функций.
- 4) Производная от произведения двух функций равна произведению производных этих функций.

2. А) символьный.

Выберите верные утверждения

- 1) $(\cos x)' = \sin x$;
- 2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- 3) $(x^p)' = px^{p+1}$;
- 4) $(kx + b)' = k$;
- 5) $(a^x)' = a^x$;
- 6) $C' = 0$.

Б) словесный.

Производная линейной функции равна...

- 1) коэффициенту b ;
- 2) единице;
- 3) угловому коэффициенту;
- 4) нулю.

3. А) символьный.

Какая формула позволяет найти $F'(x)$, если $F(x) = f(g(x))$?

- 1) $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
- 2) $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- 3) $F'(x) = f'(g(x) + g'(x))$

Б) словесный.

Выберите верное утверждение:

- 1) Производная сложной функции равна произведению внешней функции на производную внутренней функции
- 2) Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней
- 3) Производная сложной функции равна сумме производной внешней функции и производной внутренней функции

4. А) символьный.

Какая из функций является сложной?

1) $f(x) = (x^2 + 1)(8 - \sqrt{x})$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$;

3) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 3x - 9) \log_2 x$.

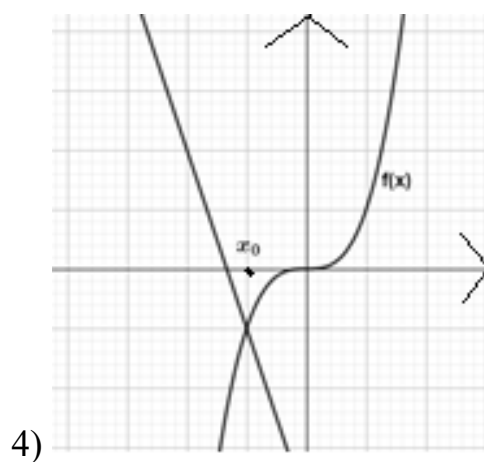
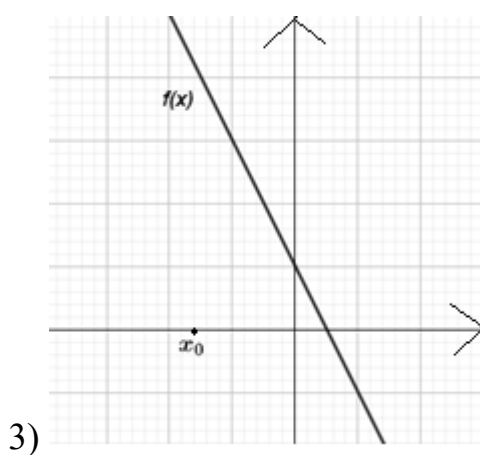
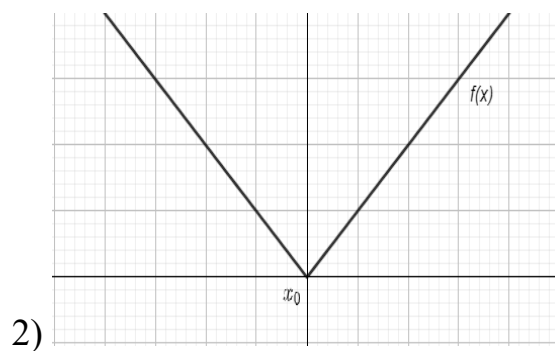
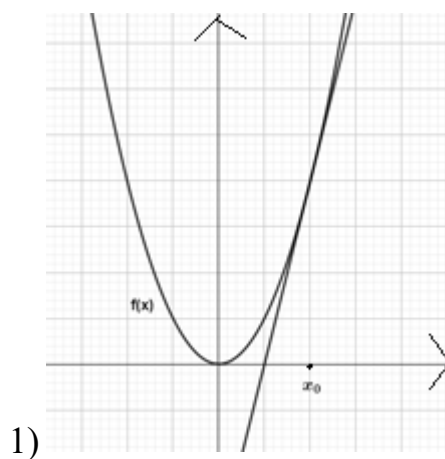
Б) словесный.

Выберите верное утверждение:

- 1) сложная функция — это функция, которая представлена суммой, произведением или частным нескольких других функций
- 2) сложная функция — это функция, аргументом которой также является функция;
- 3) сложная функция – это функция, которая задана кусочно;

5. А) графический.

На каких рисунках проведена касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 ?



Б) символьный.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

- 1) $y = f(x_0) + x_0(x - x_0);$
- 2) $y = f'(x_0) + f(x_0)(x - x_0);$
- 3) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

В) словесный.

Выберите верное определение касательной к графику функции в точке x_0 :

- 1) Если секущая слева к графику функции совпадает с секущей справа, то эта общая секущая называется касательной к графику функции в точке x_0 ;

- 2) Касательной к графику функции в точке x_0 называется прямая, имеющая с графиком функции хотя бы две общие точки;
- 3) Касательной к графику функции в точке x_0 называется любая прямая, не имеющая с графиком функции общих точек.

6. А) символьный.

1. Выберите верное утверждение:

- 1) $F'(x_0) = k$;
- 2) $F'(x_0) = f(x_0)$;
- 3) $f(x_0) = k$.

2. Выберите верное утверждение:

- 1) $F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
- 2) $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
- 3) $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x - x_0)$

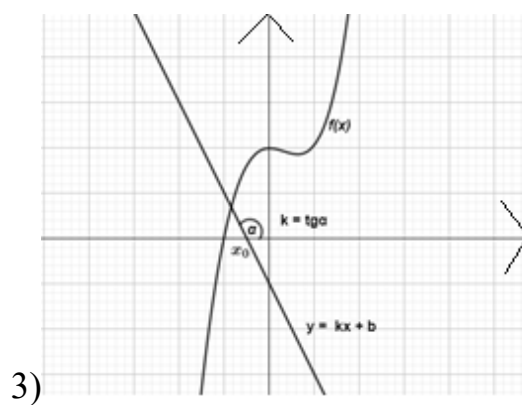
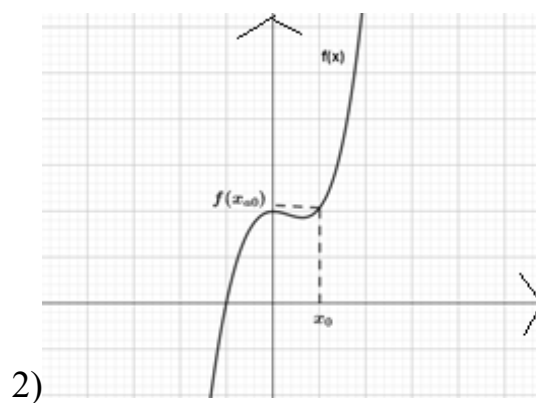
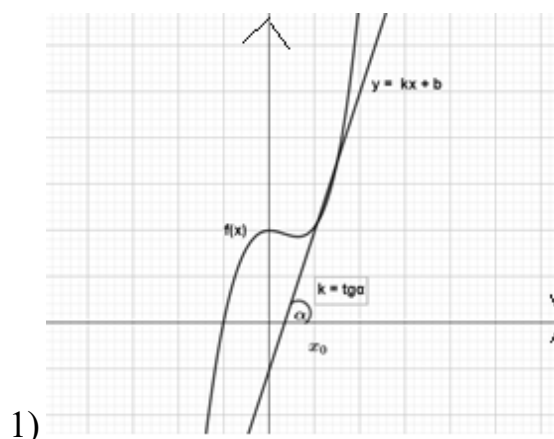
Б) словесный.

Производной функции называется:

- 1) предел приращения аргумента;
- 2) отношение приращения функции к приращению аргумента;
- 3) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

В) графический.

На каком рисунке отражен геометрический смысл производной?



Диагностика умений, как мы писали, осуществляется на трех уровнях.

Диагностика базовых умений темы.

Базовый уровень

1. Умение вычислять значение производной основных элементарных функций в точке x_0 , находить угловой коэффициент касательной к графикам этих функций в заданной точке.

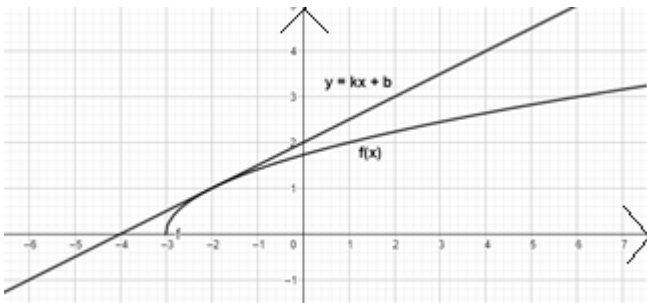
А) словесный $\rightarrow$ символьный

Значение производной функции $f(x) = 3x \cos x$ в точке $x_0 = \pi$ равно

- 1) $-3 - 3\pi$;
- 2) -3 ;
- 3) 3π .

Б) графический $\rightarrow$ символьный.

По рисунку найдите k .

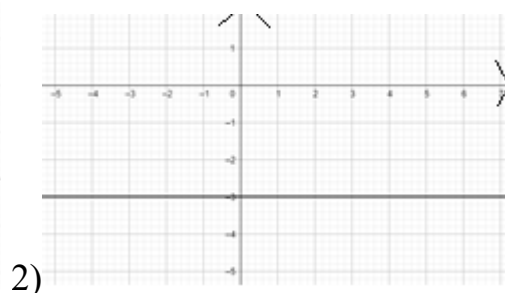
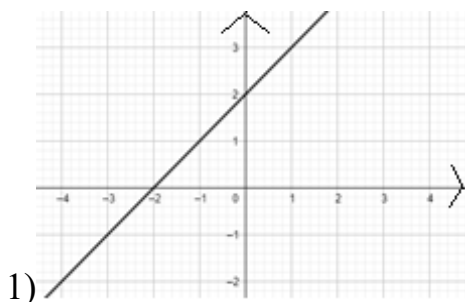


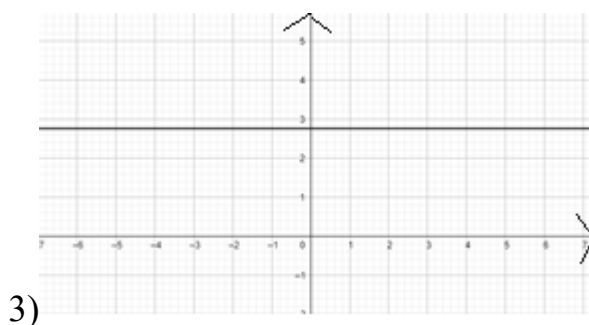
- 1) $-0,5$;
- 2) $0,5$;
- 3) 2 .

В) символьный $\rightarrow$ графический.

На каком рисунке изображен график функции $y = f'(x_0)$,

если $f(x) = \sqrt{x}(x - 1)$, $x_0 = 4$?

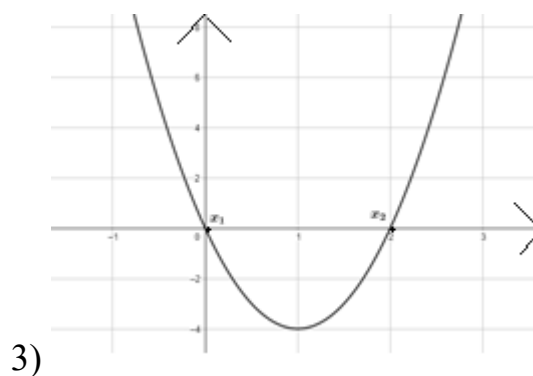
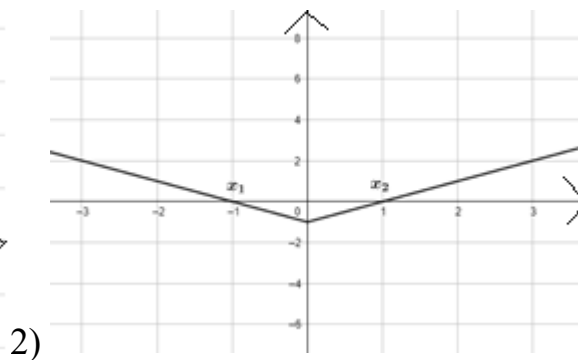
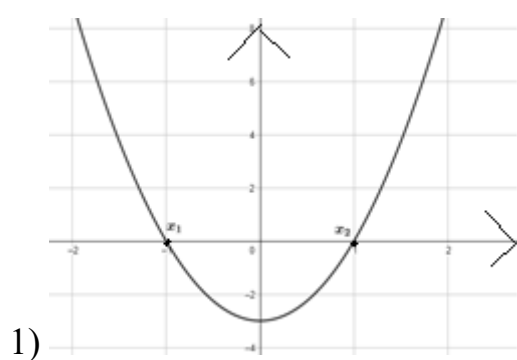




2. Умение находить значения аргумента, при которых значение производной функции равно заданному числу.

А) символьный $\rightarrow$ графический.

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 - 3x$. Выбери рисунок, который соответствует графическому представлению ответа.



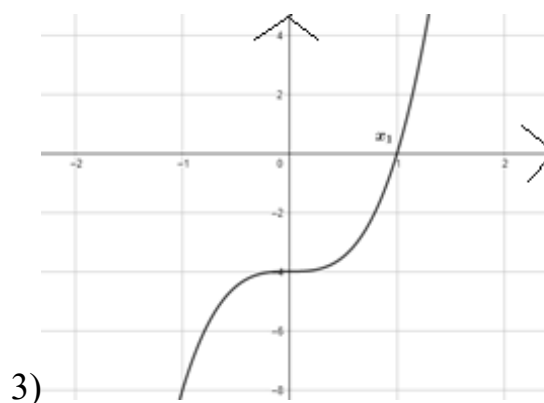
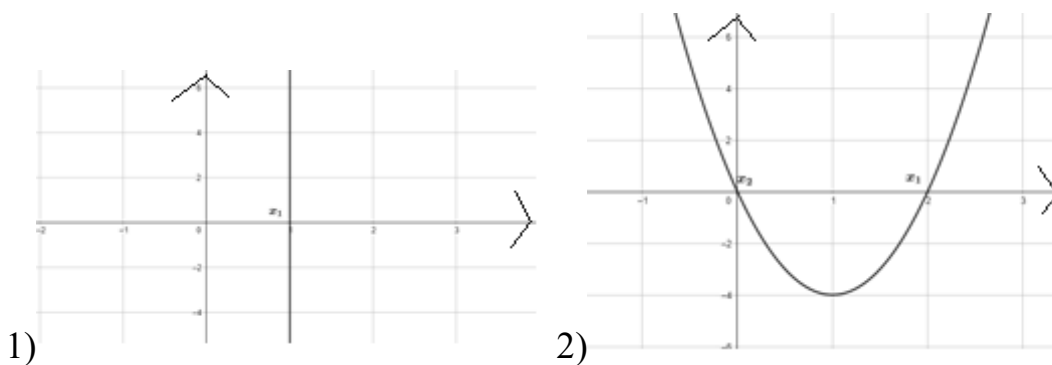
Б) словесный $\rightarrow$ символьный.

При каких значениях аргумента значение производной функции $f(x) = x^3 - 4x$ равно 44?

- 1) $x = 0$;
- 2) $x_1 = 2, x_2 = -2$;
- 3) $x_1 = 4, x_2 = -4$.

В) словесный $\rightarrow$ графический.

При каких значениях аргумента значение производной функции $f(x) = x^4 - 4x$ равно 0? Выбери рисунок, который соответствует графическому представлению ответа.



3. Умение находить производные основных элементарных функций, используя формулы и правила дифференцирования.

А) символьный $\rightarrow$ графический.

Установите соответствие между функциями и графиками их производных

а) $f(x) = x^3$;

б) $f(x) = -x^2$;

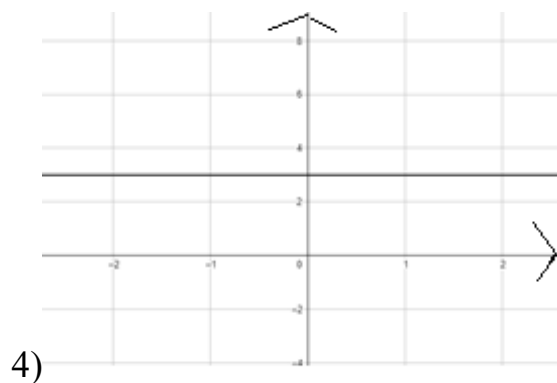
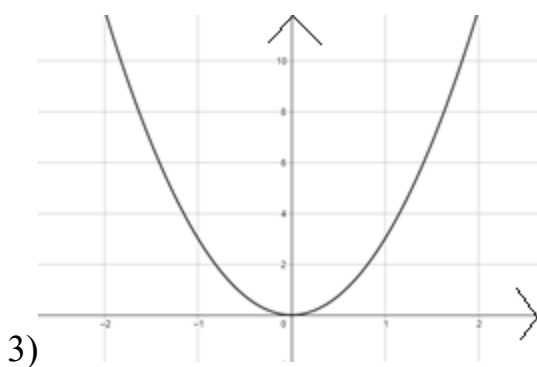
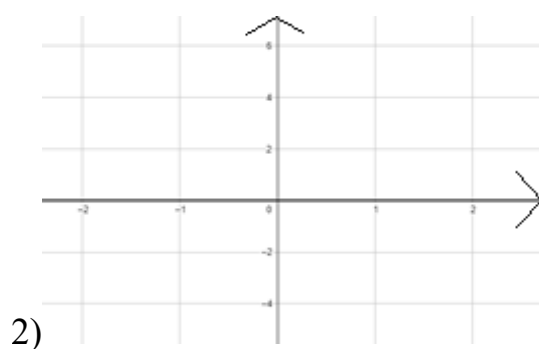
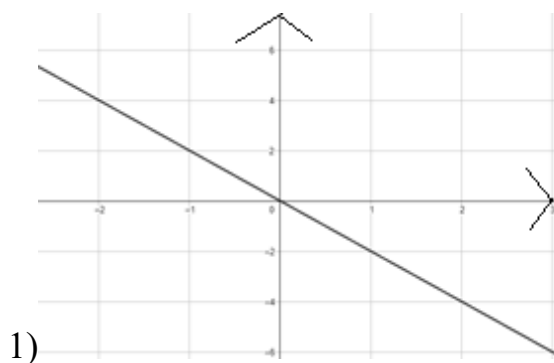
в) $f(x) = C$;

г) $f(x) = \frac{1}{x}$;

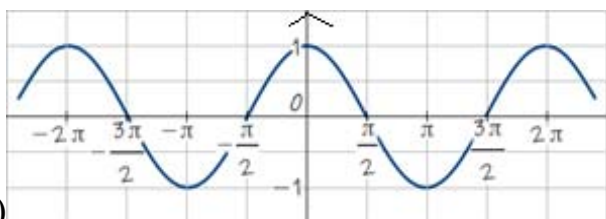
д) $f(x) = x^4$;

е) $f(x) = 3x + 1$;

ж) $f(x) = \sin x$.



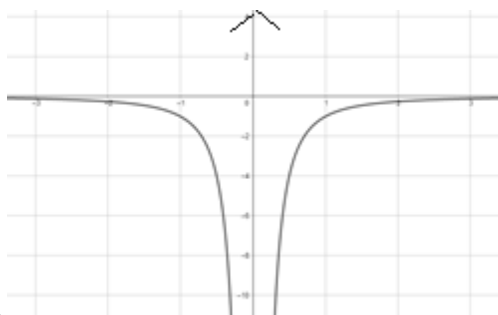
5)



6)



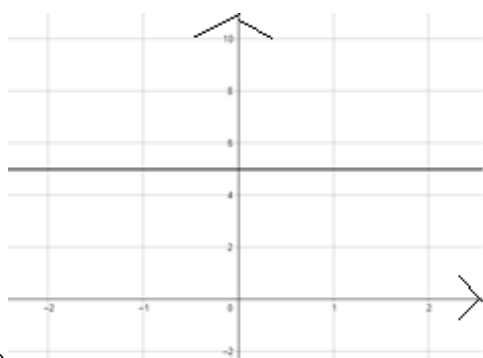
7)



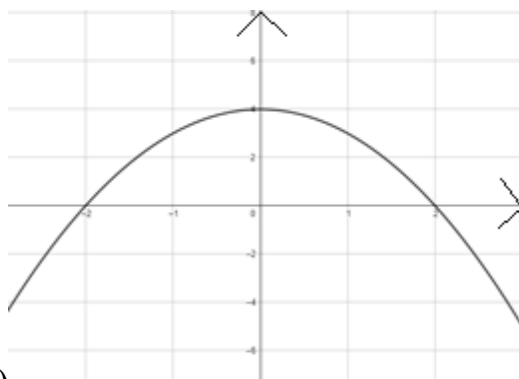
Б) графический $\rightarrow$ символьный.

На рисунке изображены графики некоторых функций. Установите соответствие между графиками функций и производными этих функций

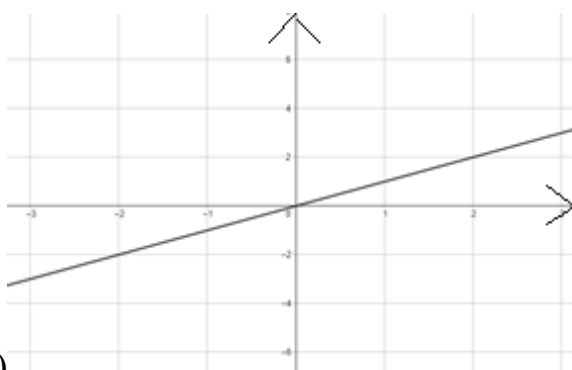
A)



Б)



В)



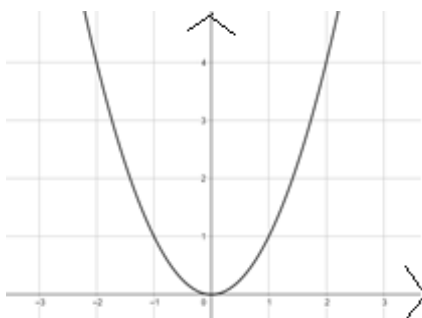
- 1) $f'(x) = 1$;
- 2) $f'(x) = 0$;
- 3) $f'(x) = -2x$.

Со словесного способа представления перевод невозможен, т. к. конкретная функция обычно задается либо символично, либо графически.

4. Умение составлять уравнение касательной к графикам основных элементарных функций в заданной точке x_0 .

А) графический $\rightarrow$ символьный.

Написать уравнение касательной к графику функции, изображенной на рисунке в точке $x_0 = 1$.

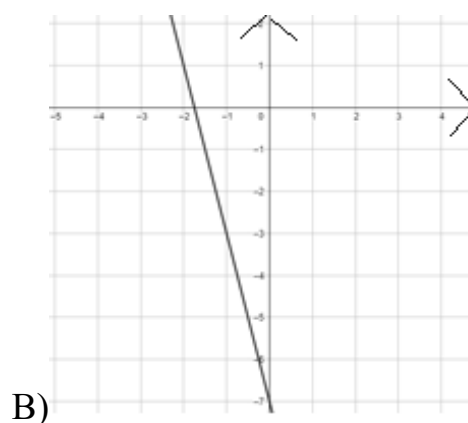
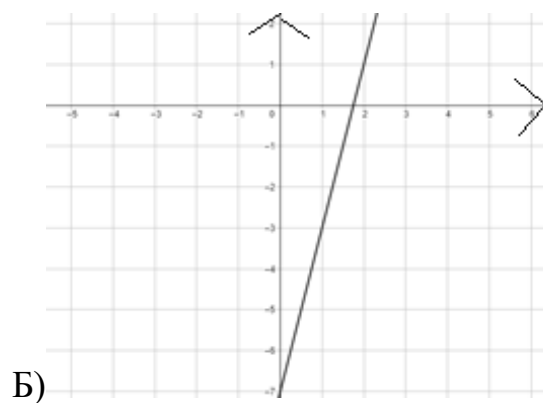
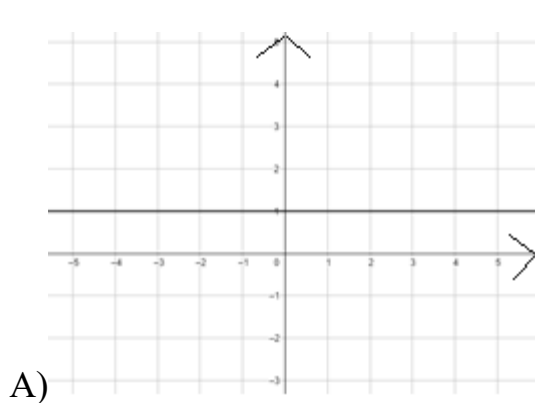


- 1) $y = -2x + 1$;
- 2) $y = 2x + 3$;
- 3) $y = 2x - 1$.

Б) символьный $\rightarrow$ графический.

На каком рисунке изображена касательная к графику функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \text{ в точке } x_0 = 2?$$



- В) Со словесного способа представления перевод невозможен, т. к. конкретная функция обычно задается либо символьно, либо графически
5. Умение находить значения аргумента, при которых значения производной функции положительны (отрицательны).

А) словесный $\rightarrow$ графический.

На каком рисунке заштрихованы такие значения аргумента, для которых значения производной функции неотрицательны, если $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$?

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

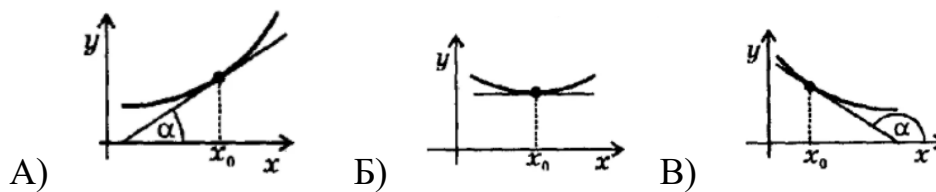
Б) символьный $\leftrightarrow$ графический.

Сопоставьте значение производной функции в точке x_0 с соответствующей касательной, проведенной к графику функции в точке x_0 , схематично изображенной на рисунке

а) $f'(x_0) > 0$;

б) $f'(x_0) < 0$;

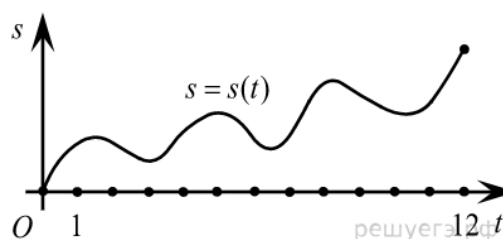
в) $f'(x_0) = 0$.



6. Умение применять различные смыслы производной при решении задач.

А) словесный $\rightarrow$ графический.

На рисунке изображен путь, по которому движется материальная точка. Определите по графику, сколько раз за время движения скорость точки была равна нулю.



1) 2;

2) 3;

3) 4.

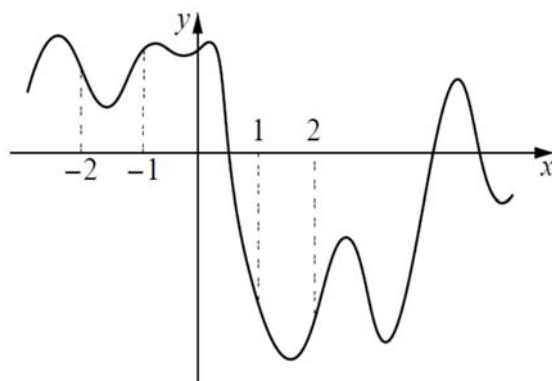
Б) словесный $\rightarrow$ символьный.

Пусть популяция в момент времени t (в секундах) насчитывает $p(t)$ особей, где $p(t) = 3000 + 100t^2$. Найдите скорость роста популяции в момент времени $t = 1$ сек.

- 1) 200;
- 2) 300;
- 3) 3100.

В) графический $\rightarrow$ символьный.

По графику функции, изображенному на рисунке, определите в какой точке значение производной наибольшее?

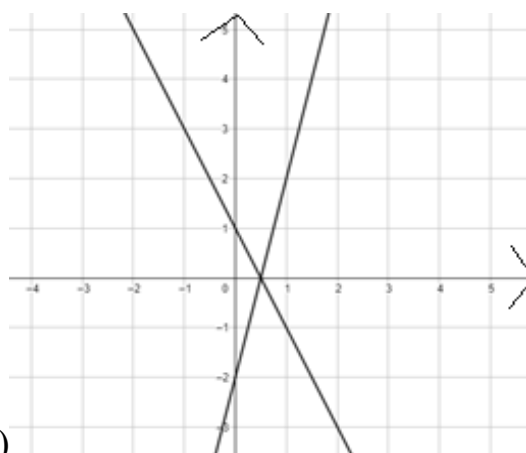
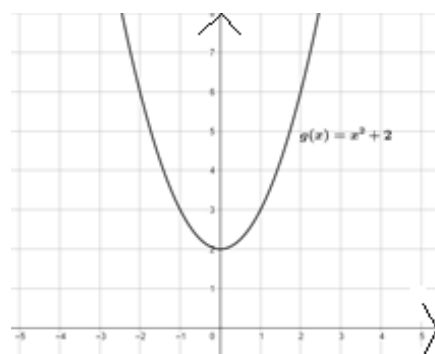


- 1) -2 ;
- 2) -1 ;
- 3) 1 ;
- 4) 2 .

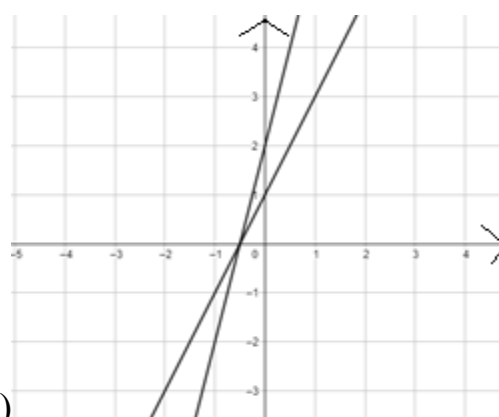
Продуктивный уровень

1. Умение составлять уравнение общей касательной к графикам двух функций.

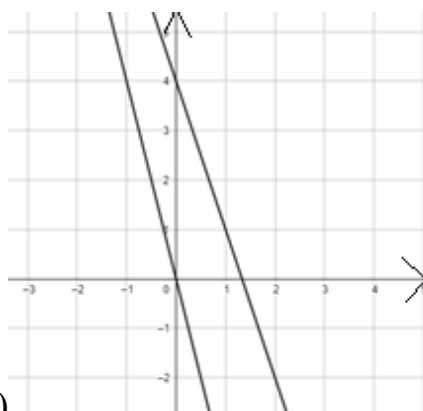
Даны две функции $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ и $g(x)$, график которой изображен на рисунке. На какой картинке изображены общие касательные к графикам функций $f(x)$ и $g(x)$?



A)



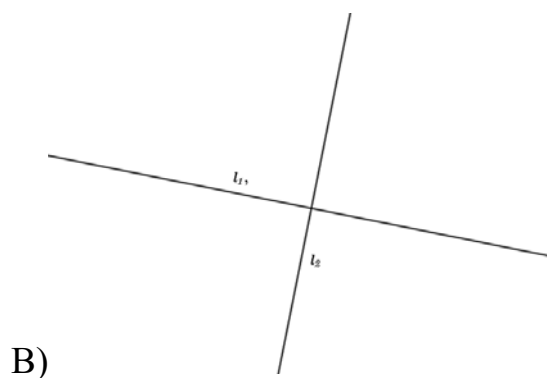
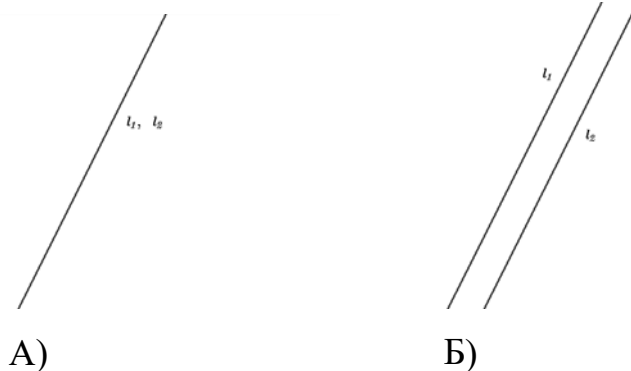
B)



B)

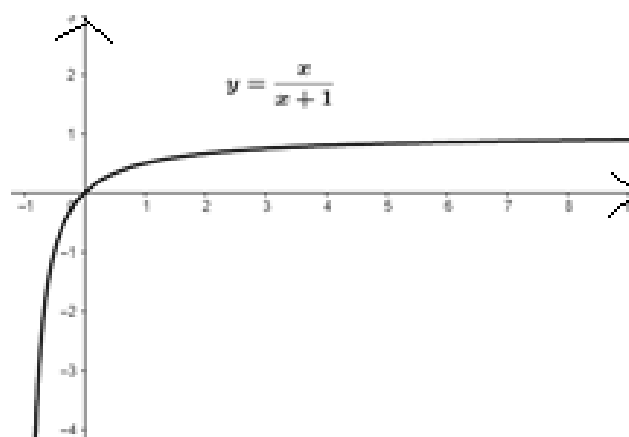
2. Умение составлять уравнения касательных к графику функции в заданных точках

К графику функции $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Найдите рисунок, на котором прямые l_1 и l_2 будут этими касательными.



3. Умение применять геометрический смысл производной для решения практических задач.

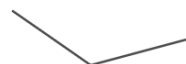
Профиль подъема шоссе имеет форму кривой, изображенной на рисунке. На каком рисунке изображена величина угла наклона шоссе в его начале?



A)



Б)



В)

4. Умение вычислять производную сложной функции, изображать график производной функции, составлять уравнение касательной к графику сложной функции в заданной точке x_0 .

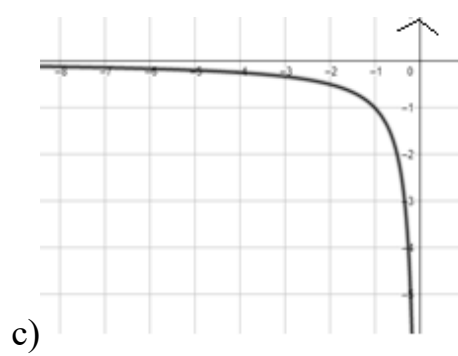
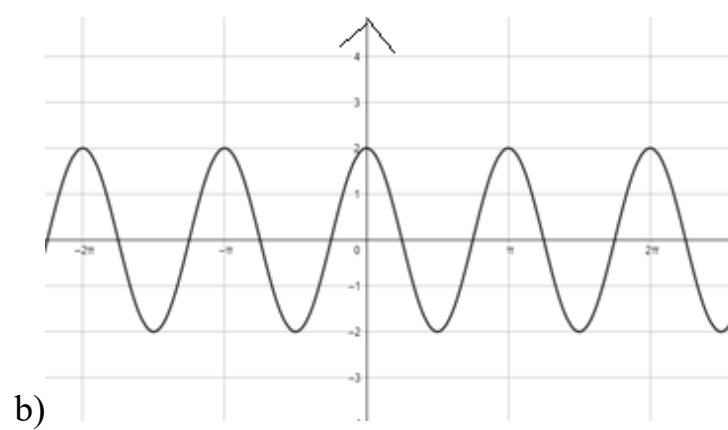
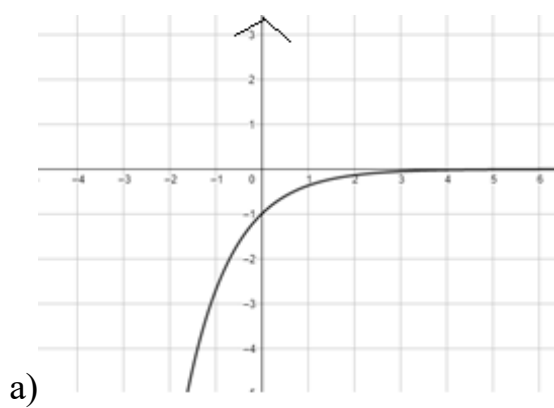
Даны функции, обозначенные буквами А, Б, В, с заданными точками x_0 .

Для каждой функции сопоставьте график ее производной (a , b , c), уравнение касательной к графику функции в точке x_0 (обозначены цифрами) и графическое изображение полученной касательной (a , b , $в$).

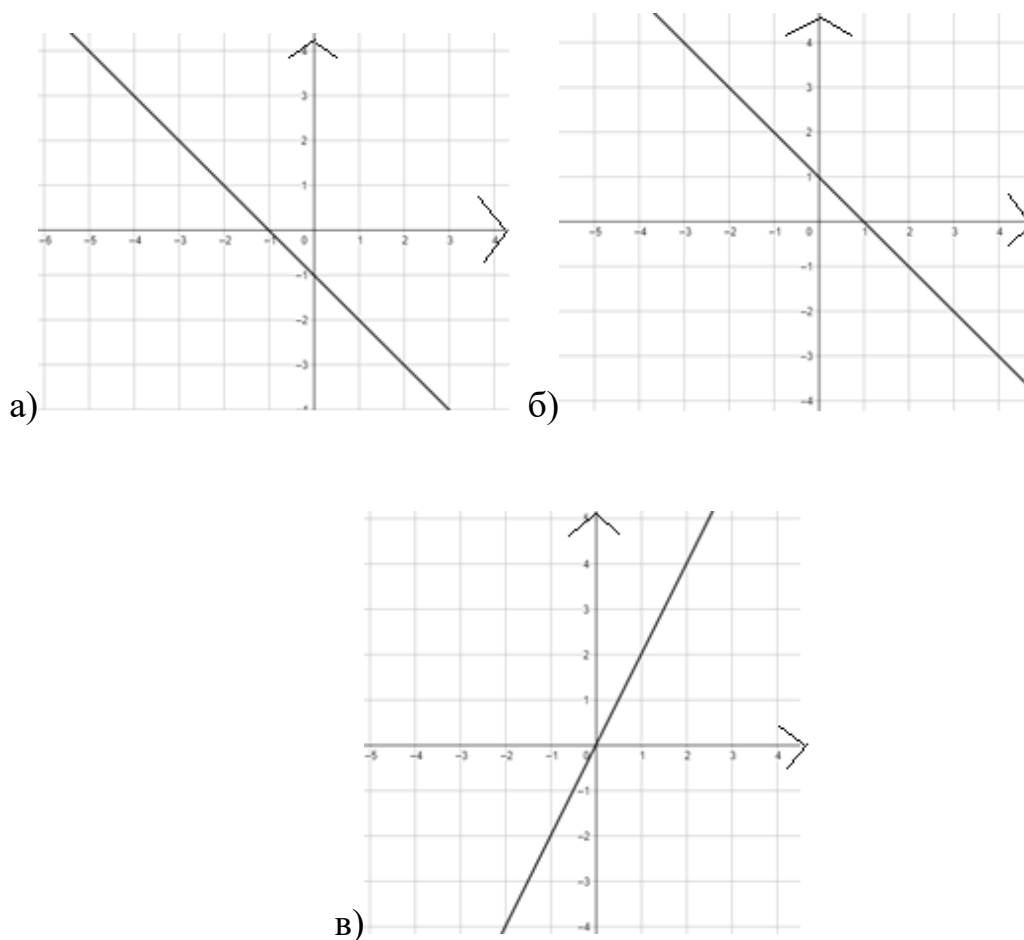
А) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$;

Б) $f(x) = \ln(-x)$, $x_0 = -1$;

В) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = 0$.

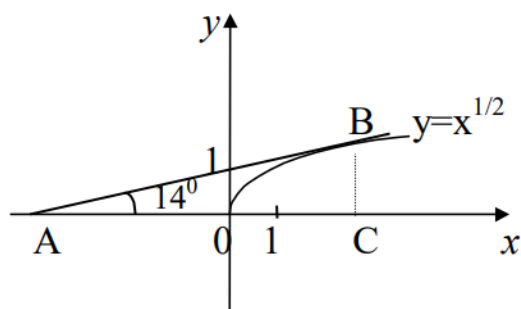


- 1) $y = 2x$;
- 2) $y = -x + 1$;
- 3) $y = -x - 1$.



5. Умение составлять уравнение касательной к графику функции в точке x_0 для решения практических задач.

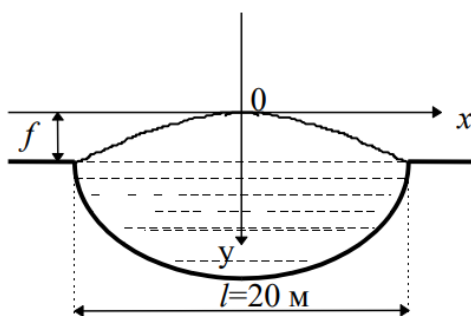
На горизонтальном склоне установлен фуникулер. Вид склона в разрезе приближенно описывается функцией $y = \sqrt{x}$ (единичный отрезок равен 5 м). Найдите длину фуникулера.



- 1) 39 м;
- 2) $\approx 41,23$ м;
- 3) 15 м.

6. Умение применять геометрический смысл производной для решения практических задач

Шоссе проходит по мосту над рекой. Мост имеет форму параболы $y = px^2$. Каким нужно сделать уклон насыпи к мосту, чтобы угол между насыпью и мостом не превышал допустимых значений (12°)? Длина моста $l = 20$ м, высота моста $f = 0,5$ м.

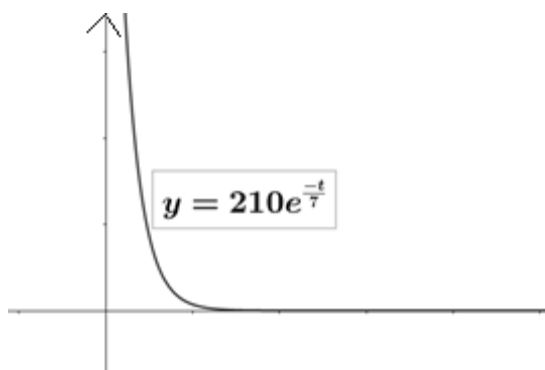


- 1) $\arctg 0,1$;
- 2) $\arctg 0,5$;
- 3) 3° .

7. Умение находить значение производной сложной функции в точке x_0 при решении практических задач.

8.

В результате значительной потери крови содержание железа в крови уменьшается на 210 мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени t уменьшается по закону, изображенному на рисунке. Найдите скорость восстановления железа в крови через 7 суток.

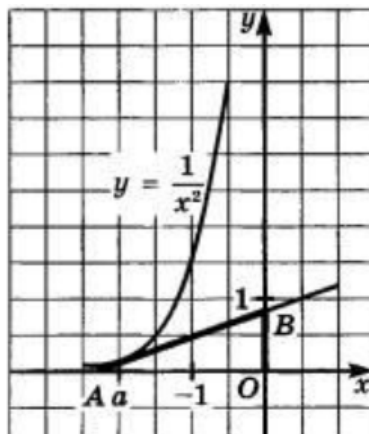


- 1) 13 мг;
- 2) $\approx 11,1$ мг;
- 3) 19 мг.

Повышенный уровень

1. Умение составлять уравнение касательной при решении нестандартных задач.

Напишите уравнение касательной к графику функции, изображенному на рисунке, если касательная отсекает от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.



2. Умение применять производную функции при решении задач с параметром.

Найдите все значения a , при которых $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$. Изобразите на числовой прямой найденные значения a .

В рамках второго подхода **сложность** определяется количеством форм представления информации и наличием требования перевода из одной формы в другую. При таком подходе система адаптивного тестирования включает 5 блоков:

1. Диагностический блок.
2. Концептуальный блок.
3. Процессуальный блок.
4. Нормативный.
5. Комбинированный.

В рамках концептуального блока предлагаются задания 1 уровня сложности. Процессуальный блок включает задания 2 уровня сложности, нормативный — 2 и 3 уровня сложности. Последний блок «Комбинированный» содержит задания, требующие активизации всех способов представления. Это задания третьего уровня сложности. Они представляют собой тесты открытого типа.

Раскроем кратко особенности конструирования каждого блока.

Цель диагностического блока мы указали выше. Для его реализации целесообразно использовать готовые методики, не зависящие от предметного содержания. Ученику достаточно пройти его один раз в 2 года. Результаты сохраняются в базе данных. Психологи считают, что когнитивные особенности — стойкие образования, меняются незначительно в течение 1–2 лет. Результаты диагностики определяют выбор приоритетного для конкретного ученика направления в каждом блоке адаптивного теста (образно-графическое (О), символическое (С), вербальное (В)). При этом следует учитывать, что символическое направление является переходным от образно-графического к вербальному.

Два следующих блока предназначены для проверки усвоения содержания определенной темы по математике в наиболее благоприятных (с психологической точки зрения) условиях.

Концептуальный блок направлен на проверку усвоения теоретических компонентов темы (определений понятий; формулировок аксиом, теорем, правил). Для конструирования тестовых заданий данного блока необходимо отобрать базовые понятия, теоремы, аксиомы и алгоритмы, какие встречаются в изучаемой теме. Для отобранных теоретических компонентов разрабатываются тестовые задания, которые нумеруются в соответствие с последовательностью изложения в теме.

В зависимости от результатов первого этапа ученику предлагается решить все задания своего приоритетного направления, начиная с меньшего номера к большему (индексу). Например, если на диагностическом этапе для определенного ученика был выявлен в качестве приоритетного образный способ представления информации, то в концептуальном блоке ученику предлагается решить все задания образного направления, чтобы создать комфортные условия при решении математических задач. Но при этом необходимо учитывать, что не все теоретические компоненты можно представить любым способом представления. После прохождения всех заданий приоритетного направления ему предлагается решить задачи другого направления под индексами, которые не встретились в приоритетном направлении. То есть в рассматриваемом примере для теоретических компонентов, которые нельзя представить в образно-графической форме, ученикам предлагается решить задания из другого направления — символьного, а если и в нем нельзя, то ученику предлагаются задания из третьего направления с недостающими индексами — вербального. Таким образом, все ученики выполняют одинаковое количество заданий. Подсчитывается процент правильно выполненных заданий. Ученикам предъявляется этот результат и теоретические компоненты, с заданиями на которые решающий не справился (они будут указаны в заданиях).

Конструирование заданий на основе выделения вспомогательных заданий и построения дерева ветвления

В этом случае построение системы основано на идее детальной диагностики пробелов и обеспечивающей построение методически обоснованной последовательности действий по их устранению в автоматическом режиме.

Таким образом, задачи, которые решает предлагаемая система следующие:

1. Установить причину невыполнения учеником того или иного задания.
2. Направить его на повторение/изучение материала, актуального именно для него.

Диагностическая работа проектируется в виде кейса (или набора кейсов), каждый из которых представляет собой систему, состоящую из двух компонентов:

- диагностический компонент: одно комплексное задание с системой вспомогательных заданий
- обучающий компонент: набор выводов и рекомендаций по результатам выполнения диагностического компонента; теоретические сведения и примеры решений; набор тренажеров.

При таком подходе выделяются уровни заданий.

Первый уровень (самый высокий) в рамках изучаемой темы: комплексные умения, предполагающие при выполнении интеграцию более простых действий (действие *второго уровня*).

Второй уровень: более простые умения, которые должны быть сформированы для выполнения задания 1 уровня.

Третий уровень: еще более простые умения, которые должны быть сформированы для выполнения задания 2 уровня.

И так далее до элементарных знаний и умений.

Для большинства заданий достаточно будет третьего уровня. Уже на этом уровне будут выделяться элементарные умения.

Уровень 1	Уровень 2	Уровень 3	...	Элементарное умение
Комплексное задание	1)			
	2)	2.1)		
		2.2)		
		2.3)		
	3)	3.1)		
		3.2)		
			3.2.2)	
			3.2.3)	
		3.3)		
	4)	...		
	5)	5.1)		
		5.2)		
			5.2.2)	
	6)	...		
	7)			

Рассмотрим пример решения логарифмического уравнения.

$$\log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = 8 \text{ (задание Уровня 1).}$$

Можно просто зафиксировать факт решил/ не решил.

Можно в случае неудачного решения или его отсутствия дать рекомендацию прочитать соответствующий пункт в учебнике.

Наша цель: **выяснить, какова причина неудачного решения подобного уравнения.**

Для решения этого уравнения ученик должен знать и уметь применять.

1) Свойства логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения).

2) Переход от логарифмического равенства к равенству без логарифмов (потенцирование, но мы эти слова в школе не произносим), можно как вариант рассмотреть решение простейшего логарифмического уравнения.

3) Метод замены переменной при решении показательных уравнений.

4) Раскрытие скобок (умножение двучлена на двучлен).

5) Решение квадратного уравнения.

6) Значения показателя, при которых значение данной степени равно определенному числу (простейшие показательные уравнения).

7) Вычислительные умения (в данном случае — действия с натуральными числами).

Задания Уровня 2.

1) Свойства логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения).

Выберите, чему равно выражение $\log_a 5 + \log_a b$:

1) $\log_a(5 + b)$;

2) $\log_a(5b)$;

3) $\log_a 5^b$.

Правильный ответ (2).

При выполнении этого задания у ученика может быть путаница со свойствами. Наиболее распространенная ошибка — выбор ответа (1). Выбор ответа (3) менее вероятен, но также встречается.

При ошибке в этом задании нет необходимости дальше разделять его на элементарные умения поскольку оно само такое в рамках изучаемой темы. Целесообразно предложить ученику или ссылку на соответствующий параграф учебника, или фрагмент текста со свойствами логарифмов, а затем — несколько упражнений репродуктивного характера.

2) Решение простейшего логарифмического уравнения.

Переход от логарифмического равенства к равенству без логарифмов может быть на основе использования определения логарифма, на основе использования

условия равенства логарифмов с представления числа как логарифма с заданным основанием.

Решите уравнение: $\log_3 x = 5$.

Правильный ответ: $x = 243$.

Часто встречающаяся ошибка: $x = 5^3$, то есть ответ $x = 125$. В этом случае отправляем ученика на фрагмент текста о переходе от логарифмического равенства к равенству выражений, стоящих под знаком логарифма. С последующим выполнением нескольких упражнений репродуктивного характера, аналогичных данному.

Возможен вариант – $x = 15$

Возможен третий вариант, связанный с ошибкой в вычислениях. Например, вместо 243 ученик записал значение другой степени 3 (81 или 726). В этом случае отправляем ученика на таблицу значений степеней 2, 3, 4, 5 ... с комментарием «Будьте внимательнее при вычислении». С последующим выполнением вычислительных примеров со степенями.

Возможно отсутствие ответа или число, не попадающее под 1, 2 или 3 случай. В этом случае последовательно отправляем ученика на фрагмент текста о переходе от логарифмического равенства к равенству выражений, стоящих под знаком логарифма, на таблицу значений степеней 2, 3, 4, 5 С последующим выполнением нескольких упражнений репродуктивного характера, аналогичных данному.

3) Метод замены переменной при решении показательных уравнений.

Дано уравнение $4 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x - 7 = 0$. Выберите вспомогательное уравнение, которое получится из данного после введения новой переменной.

1) $12t + 5t - 7 = 0$;

2) $4t^2 + 15t - 7 = 0$;

3) $4t^2 + 5t - 7 = 0$;

4) $12t + 15t - 7 = 0$;

5) $4t + 5t - 7 = 0$.

Правильный ответ (3).

Все остальные варианты неверные. Ошибки связаны с преобразованиями степеней.

Выбор вариантов (2) и (4). Целесообразно предложить одно задание типа 3.1.

При выборе варианта (4) целесообразно предложить также одно задание типа 3.2.

Задание Уровня 3.

3.1) Выберите верные равенства

1) $6 \cdot 2^a = 12^a$;

2) $6 \cdot 2^{2a} = 12^a$;

3) $6 \cdot 4^a = 12^a$;

4) $6 \cdot 4^a = 6 \cdot 2^{2a}$;

5) $6 \cdot 4^a = 3 \cdot 8^a$.

Правильный ответ (4).

3.2) Пусть $5^c = a$. Чему равно 125^c ?

1) $25a$;

2) a^3 ;

3) a^a .

Правильный вариант (2).

Ошибки при выполнении заданий 3.1) и 3.2) говорят о несформированности умений выполнять действия со степенями.

В этом случае последовательно отправляем ученика на фрагмент текста о свойствах степеней: произведение степеней и возведение степени в степень. С последующим выполнением нескольких упражнений репродуктивного характера, аналогичных данному.

4) Раскрытие скобок (умножение двучлена на двучлен).

Упростите выражение $(12 - x)(x + 4)$.

Возможны варианты:

1. $8x$ — умножает первое слагаемое на первое, второе на второе.
2. $8x - x^2 + 48$ — верный ответ.
3. $8x - x^2 - 48$ — ошибка в знаках.
4. $-x^2 + 48$ — умножает первое слагаемое на второе, второе на первое.
5. $\dots x - x^2 + \dots$ — ошибка в вычислениях.

Принципиально важным для диагностики является получение 1 и 4 ответов.

Они говорят о том, что у учащегося не сформировано умение выполнять умножение многочленов, в частности, умножения двучлена на двучлен. В этом случае отправляем ученика на фрагмент текста о правиле умножения двучлена на двучлен с последующим выполнением нескольких упражнений репродуктивного характера, аналогичных данному.

При получении (3) или (5) ответов могут быть предложены задания типа 4.2).

4.1) Алгоритм умножения многочленов;

4.2) Знаки при раскрытии скобок.

5) Решение квадратного уравнения.

Найди корни квадратного уравнения

$$2x^2 + 15x - 17 = 0.$$

Могут быть получены варианты:

- 1) 2 и 17;
- 2) -1 и 8,5;
- 3) 2 и -17 ;
- 4) 1 и $-8,5$;
- 5) 4 и -34 ;
- 6) любые иррациональные числа.

Правильный вариант (4).

Ответы (1), (3) и (5) — связаны с ошибкой в формуле.

Ответ (2) — ошибка в знаках, может быть связана с ошибкой в формуле или невнимательностью.

Ответ (6) — ошибка в вычислениях, но может быть связана и с ошибкой в формуле.

Вспомогательное задание (Уровень 3).

5.1) Выберите правильную формулу для вычисления корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

1) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$;

2) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$;

3) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

4) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Правильный ответ (3). Если выбран он, то причина неправильного решения квадратного уравнения 5) в вычислительных ошибках.

Если выбраны ответы (1), (2) или (4), то в этом случае отправляем ученика на фрагмент текста с формулой корней квадратного уравнения. Далее предлагаем несколько упражнений репродуктивного характера.

7) Значения показателя, при которых значение данной степени равно определенному числу (простейшие показательные уравнения).

Найди значение a , если

1) $4^a = 16$;

2) $5^a = 5\sqrt{5}$;

3) $3^{2a} = 27$;

4) $2^a = 0,125$.

Неверное выполнение более чем одного задания отправляет ученика на фрагмент текста о простейших показательных уравнениях.

8) Вычислительные умения (в данном случае — действия с натуральными числами).

Здесь предлагается пример на вычисление значения выражения. В зависимости от числового множества, на котором рассматривается задание, могут быть предложен пример на множестве натуральных, целых, дробных, рациональных или действительных чисел.

Таким образом, структура данного примера.

Уровень 1	Уровень 2	Уровень 3	...	Элементарное умение
Логарифмическое уравнение	1) Свойства логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения)			
	2) Переход от логарифмического равенства к равенству без логарифмов (простейшие логарифмические уравнения)			
	3) Метод замены переменной при решении показательных уравнений	3.1) Коэффициент при степени		
		3.2) Степень степени		
	4) Раскрытие скобок (умножение двучлена на двучлен)	4.1) Знаки при раскрытии скобок		
		4.2) Алгоритм умножения многочленов		
	5) Решение квадратного уравнения	5.1) Формула		
		5.2)		
	6) Значения показателя, при которых значение данной степени равно определенному числу (простейшие показательные уравнения)			
	7) Вычислительные умения (в данном случае — действия с натуральными числами).			

Для того чтобы выяснить, с чем связано неверное решение, целесообразно предложить ученику простые задания на выделенные умения и в зависимости от результата их решения поставить диагноз: что является причиной и отправить ученика в нужное место для повторения и отработки именно этого конкретного умения. И после того, как ученик выполнил все вспомогательные задания, вернуть его к данному типу уравнений, предложив аналогичное.

Таким образом, для каждого комплексного умения в рамках каждой темы выделяются более простые умения и элементы теоретических знаний. На основе нерешенного задания каждому учащемуся выдается свой, индивидуальный набор заданий, который направлен на устранение тех пробелов, которые характерны именно для него. То есть выстраивается индивидуальная траектория устранения ошибок.

Список использованной литературы

1. Крутецкий В. А. (1998) Психология математических способностей школьников. — Москва : Институт практической психологии, 1998. — 416 с.
2. Якиманская И. С. (2013) Основы личностно-ориентированного образования. — Москва : Бином. — 222 с.
3. Подходова Н. С., Орлова А. В., Снегурова В. И. Стилевые особенности учащихся как одно из оснований конструирования адаптивных тестов по математике // Письма в Эмиссия.Оффлайн (The Emissia.Offline Letters): электронный научный журнал. — 2020. — № 10 (октябрь). ART 2877. URL: <http://emissia.org/offline/2020/2877.htm>)

Снегурова Виктория Игоревна,
Подходова Н _____ С _____,
Беленко А _____ Г _____,
Родионова М _____ С _____,
Готская И _____ Б _____

**КОНСТРУИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ
ДЛЯ СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Научно-методическое пособие

Корректурa Г. А. Янковской

Верстка Л. В. Васильевой

Подписано в печать 10.12.2021. Формат 60 × 90¹/₁₆.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4. Печ. л. 4.

Тираж 100 экз. Заказ № ____к

Издательство РГПУ им. А. И. Герцена.
191186, С.-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Типография РГПУ им. А. И. Герцена.
191186, С.-Петербург, наб. р. Мойки, 48