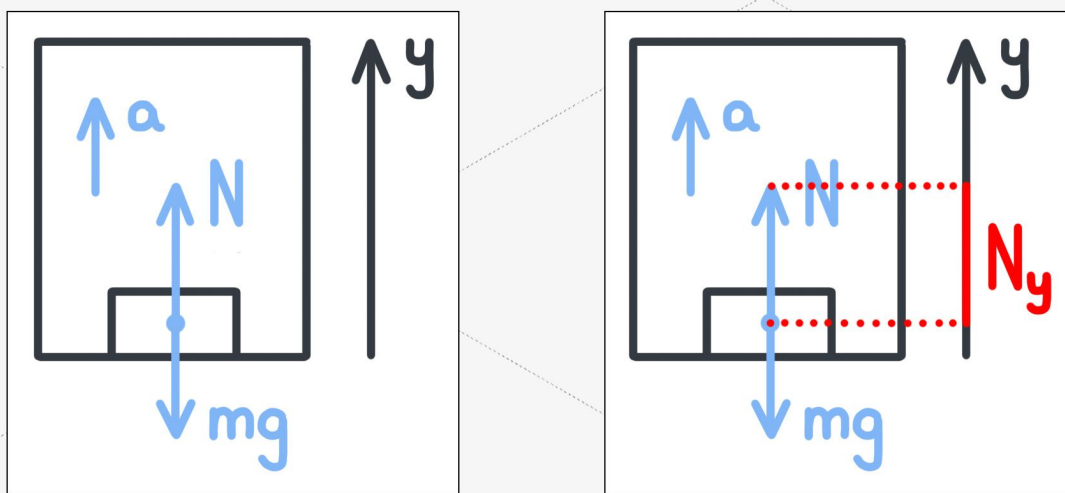


## Конспект | Основы: вектора и их проекции

Здесь мы разберем проецирование векторов, для примера возьмем динамику тела на плоскости и окружности, векторы сил и ускорений. Вперед!

**Задача 1 (№2 в киме, 1 балл, основа ЕГЭ 2023).** На полу лифта, ускоряющегося вверх с постоянным ускорением  $a = 2 \text{ м/с}^2$ , стоит человек с массой 70 кг. Чему равна действующая на него сила реакции опоры? Ответ дать в Н.

Решение: отметим силы, действующие на человека. По 2 закону Ньютона  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ . Вводим ось  $Oy$ , для удобства направляем ее вверх (так как большинство векторов идет вверх). Можно направить ее и вниз, от этого решение задачи не изменится. Теперь проецируем, что такое проекция?

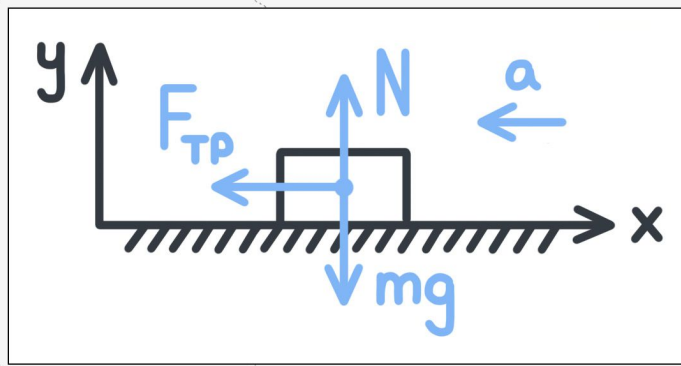


Это составляющая вектора на данной оси, может быть положительной, 0, отрицательной. Например, проекция  $N_y$  на ось  $Oy$  положительная, так как  $N$  направлена вверх, по  $Oy$ . Проекция  $mg$  отрицательная, ведь  $mg$  идет вниз, против  $Oy$ . Проекция  $a$  положительная,  $a$  идет вверх. Тогда  $N - mg = ma$ , сила реакции опоры  $N = mg + ma = m(g + a) = 70(10 + 2) = 840 \text{ (Н)}$ . Ответ: 840 Н.

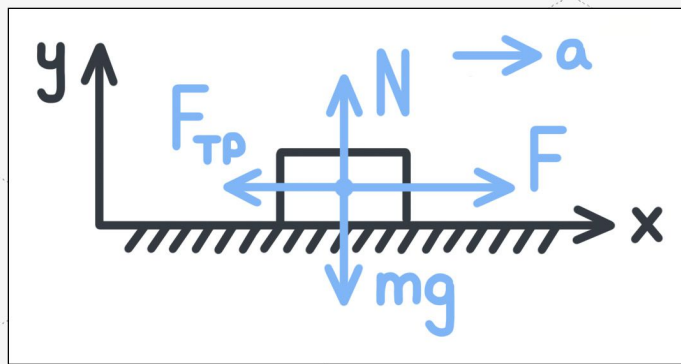
P.S. А если лифт едет вниз? Тогда и  $a$  будет вниз, проекция отрицательная.  $N - mg = -ma$ , откуда  $N = mg - ma = m(g - a) = 70(10 - 2) = 560 \text{ (Н)}$ . Либо лифт покоится/едет равномерно, тогда ускорение  $a = 0$ ,  $N = mg = 70 \cdot 10 = 700 \text{ (Н)}$ .

**Задача 2 (№2 в киме, 1 балл, досрок ЕГЭ 2020).** Небольшое тело свободно перемещается по горизонтальной поверхности, в какой-то момент оно попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения  $\mu = 0,4$ . Чему равен модуль ускорения тела на данном участке? Ответ дать в  $\text{м/с}^2$ .

Решение: отметим все силы, действующие на брусок, введем оси  $Ox$  и  $Oy$ .



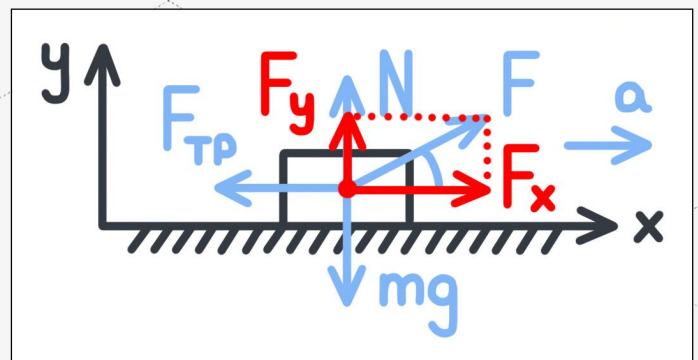
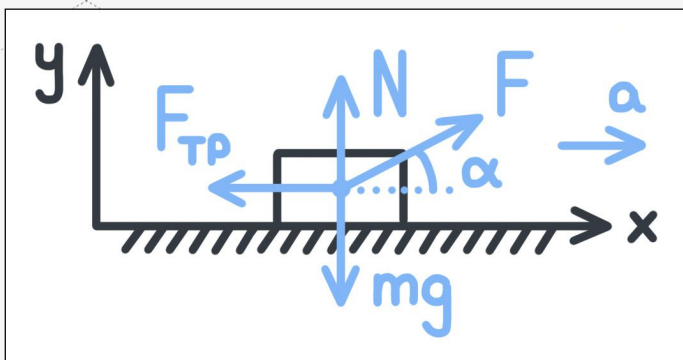
Второй закон Ньютона для бруска:  $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$ . Проецируем на  $Oy$ :  $N - mg = 0$ , сила реакции опоры  $N = mg$ . Тело будет тормозить, потому что на него действует сила трения скольжения, по закону Кулона-Амонтона она равна  $F_{тр} = \mu N$  (то есть  $F_{тр} = \mu mg$ ). Проецируем на  $Ox$ :  $-F_{тр} = -ma$ , откуда  $F_{тр} = ma$ . Тогда  $\mu mg = ma$ , ускорение  $a = \mu g = 0,4 \cdot 10 = 4$  (м/с<sup>2</sup>). Ответ: 4 м/с<sup>2</sup>.



P.S. Сейчас тело двигалось свободно, но может быть случай, когда его тащит сила тяги  $F$ , например, с ускорением. Тогда тело уже не тормозит, а разгоняется, по 2 закону Ньютона на  $Ox$ :  $F - F_{тр} = ma$ . Далее аналогично, на  $Oy$ :  $N = mg$ , сила  $F_{тр} = \mu N = \mu mg$ , совмещаем уравнения, находим что-то нужное.

**Задача 3 (№22 в киме, 2 балла, демо ЕГЭ 2025).** Брусок едет по горизонтальной плоскости прямолинейно с ускорением  $1 \text{ м/с}^2$  под действием силы  $F = 2,7 \text{ Н}$ , направленной вверх под углом  $30^\circ$  к горизонту. Найти массу этого бруска, если коэффициент трения бруска о плоскость равен  $\mu = 0,2$ .

Решение: отметим все силы, действующие на брусок, введем оси  $Ox$  и  $Oy$ .



Второй закон Ньютона для бруска:  $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} = m\vec{a}$ . Сложнее всего проецировать  $F$ , она не лежит на  $Ox$  или  $Oy$ . Тогда нужно разбить ее на две проекции,  $F_x$  и  $F_y$ . Они будут лежать на осях, в сумме дают  $F$ . Найдем их как катеты в прямоугольном треугольнике,  $\cos\alpha = F_x/F$ , откуда  $F_x = F\cos\alpha$ .

$\sin\alpha = F_y/F$ ,  $F_y = F\sin\alpha$ . Можно не расписывать так подробно, если проекция прилежит к углу  $\alpha$ , то мы сразу пишем  $F\cos\alpha$ , а если противоположит, то  $F\sin\alpha$ . Возвращаемся к 2 закону Ньютона, на  $Oy$ :  $N - mg + 0 + F\sin\alpha = 0$ . Сила реакции  $N = mg - F\sin\alpha$ . Тело едет, на него действует сила трения скольжения.

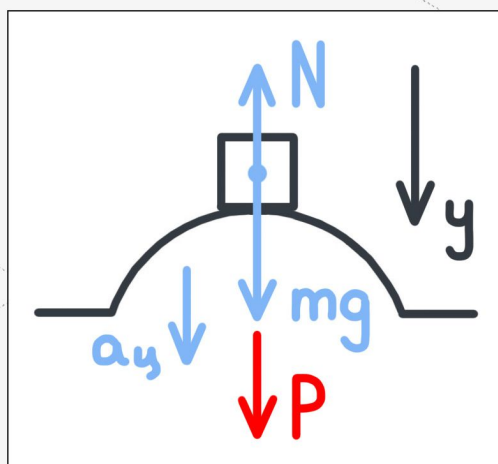
По закону Кулона-Амонтона  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$ . На ось  $Ox$ :  $0 + 0 - F_{\text{тр}} + F\cos\alpha = ma$ . Вместе:  $F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma$ . Тогда  $F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = ma$ . Здесь  $F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha = \mu mg + ma$ , масса бруска  $m = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) / (\mu g + a) = 2,7(\cos 30^\circ + 0,2 \cdot \sin 30^\circ) / (0,2 \cdot 10 + 1) \approx 0,87$  (кг). Ответ: 0,87 кг.

**P.S.** Здесь дали угол  $\alpha$  к горизонту, так чаще всего. Поэтому почти всегда на оси  $Ox$  будет  $\cos\alpha$ , на  $Oy$  —  $\sin\alpha$ . Но иногда в задаче дают угол к вертикали, между  $F$  и  $N$ . Тогда проекции изменятся, получим  $F_x = F\sin\alpha$ ,  $F_y = F\cos\alpha$ .

**Задача 4 (№5 в киме, 2 балла, досрок ЕГЭ 2025).** Автомобиль с массой 2 т проезжает верхнюю точку выпуклого моста с постоянной скоростью 36 км/ч. Радиус кривизны моста 40 м. Выберите все верные утверждения:

- 1) Ускорение и скорость автомобиля в верхней точке идут в одну сторону
- 2) Центробежное ускорение автомобиля в верхней точке  $2,5 \text{ м/с}^2$
- 3) Равнодействующая сил, действующих на автомобиль, направлена вниз
- 4) Сила, с которой мост действует на автомобиль в верхней точке моста, меньше 20 кН и направлена вертикально вниз
- 5) В верхней точке моста автомобиль действует на мост с силой 15 кН

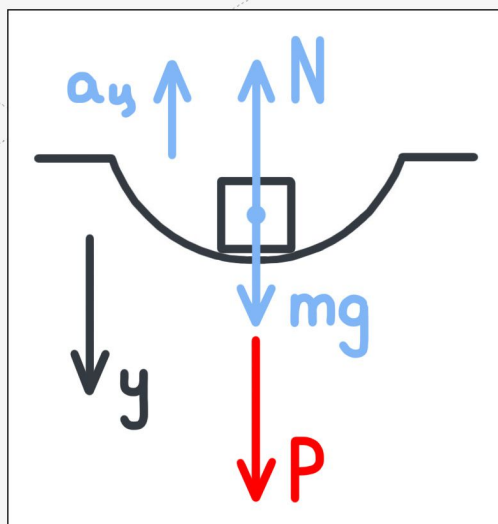
Решение: покажем автомобиль в верхней точке моста, действующие силы.



Скорость  $V = 36 \text{ км/ч} = 36 \cdot 1000 \text{ м} / 3600 \text{ с} = 36 / 3,6 \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}$ . Она направлена по касательной к окружности (вправо), а центростремительное ускорение  $a_c$  — в центр окружности (вниз), пункт 1 не подходит. Посчитаем его по формуле  $a_c = V^2/R = 10^2/40 = 2,5 \text{ м/с}^2$ , пункт 2 правильный.

Пункт 3 тоже, равнодействующая (суммарная сила) смотрит туда же, куда и  $a_c$  (вниз), так по 2 закону Ньютона. Пишем его:  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_c$ . На ось  $Oy$ :  $N - mg = -ma_c$ , сила реакции опоры  $N = mg - ma_c = m(g - a_c) = 2000(10 - 2,5) = 15000 \text{ (Н)} = 15 \text{ (кН)}$ . Эта сила действует со стороны моста на автомобиль, направлена вверх, перпендикулярно от поверхности, пункт 4 не берем.

$N$  возникает, потому что машина давит на мост силой давления  $P$ , ее еще называют весом, это одно и то же.  $N$  и  $P$  связаны по 3 закону Ньютона, то есть равны по модулю, но противоположны по направлению. Пишем его:  $\vec{P} = -\vec{N}$ . На  $Oy$ :  $-P = -N$ , откуда  $P = N = 15 \text{ кН}$ , пункт 5 верный. Ответ: 235.



P.S. Могут дать похожую задачу, в которой машина въезжает в овраг/яму. Тогда центростремительное ускорение  $a_c$  будет смотреть вверх, опять же в центр окружности. Получится  $N - mg = ma_c$ , сила реакции  $N = mg + ma_c$ .