Автор: Меркулова Анастасия Максимовна,
stasya_merkulova@mail.ru
Научный руководитель: Забавин Валерий Николаевич
zabavin@spnet.ru
(Физико-математический лицей, г. Сергиев Посад, Московская обл.)

Об экстремальных свойствах описанных многогранников

Известно, что из всех описанных около окружности n-угольников наименьшую площадь имеет правильный n-угольник[1]. Ясно, что аналогичное утверждение для описанных многогранников не может быть верным, так как правильных многогранников всего пять. В связи с этим возникает два вопроса: верно ли это утверждение для тех n, для которых существуют правильные n-гранники? каким может быть описанный n-гранник наименьшего объёма, если для данного n правильных n-гранников не существует?

Цели работы: выяснить, существует ли описанный n-гранник меньшего объёма , чем правильный n-гранник; выбрать комбинаторный тип n-гранника и найти описанный n-гранник такого типа наименьшего объёма.

Ответ на **первый вопрос** следует из приведённого примера описанного n-гранника, объём которого меньше, чем объём правильного n-гранника. Этот пример построен для восьмигранника (для тетраэдра доказано, что из всех тетраэдров, описанных около сферы, наименьший объём имеет правильный тетраэдр

[2]; для шестигранника такой пример найти не удалось). Искомый пример восьмигранника получен из октаэдра, как показано на рис.1: одну из двух пирамид, составляющих октаэдр (слева), повернём на 45^0 относительно её высоты (в центре); продолжим грани верхней пирамиды вниз, а нижней – вверх, отрезая тем самым выступающие части (справа).

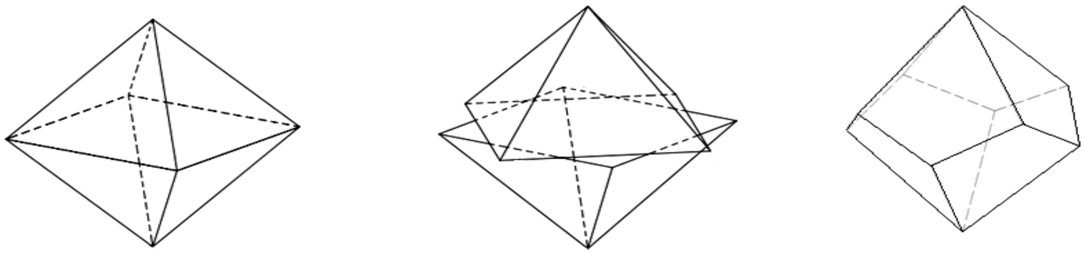

Рис. 1

Построенный таким образом многогранник имеет восемь граней, описан около такой же сферы, как и октаэдр, а его объём меньше, чем объём октаэдра (отношение объёмов равно $4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2 \approx 0{,}97$).

Заметим, что таким же способом можно получить двадцатигранник меньшего объёма, чем икосаэдр.

Известно, что существует 2 комбинаторных типа пятигранников, 7 типов шестигранников, 34 типа семигранников и 257 типов восьмигранников; для многогранников с большим количеством граней число комбинаторных типов не найдено [3]. Уже это обстоятельство ставит под сомнение возможность полного ответа на **второй вопрос**.

В качестве примера многогранника, который не является правильным, рассмотрим четырёхугольную пирамиду.

Расположим пирамиду так, чтобы прямая, проходящая через центр вписанной сферы O и вершину пирамиды P, была вертикальная (рис. 2).

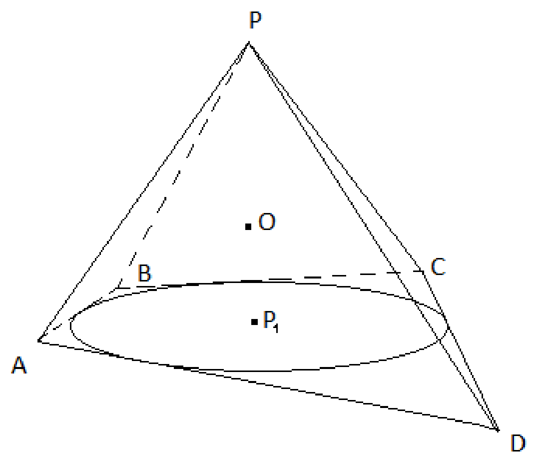

Рис. 2

Вершины основания обозначим A, B, C, D; точку пересечения прямой OP и основания – P_1; угол между касательной, проведённой из вершины пирамиды P к вписанной сфере, и прямой OP – α; угол между прямой OP и основанием – β.

Четырёхугольник ABCD описан около эллипса – проекции сферы на плоскость основания. Его площадь не меньше, чем площадь любого четырёхугольника, стороны которого делятся точками касания пополам (площади таких четырёхугольников равны между собой). Один из таких четырёхугольников – прямоугольник, стороны которого проходят через вершины эллипса. Можно, не меняя высоты пирамиды, провести боковые грани через ту же вершину P так, чтобы основание стало указанным прямоугольником, при этом объём пирамиды не увеличится.

Рассмотрим сечение полученной таким образом пирамиды, проходящее через вершину P и большую ось эллипса (рис. 3).

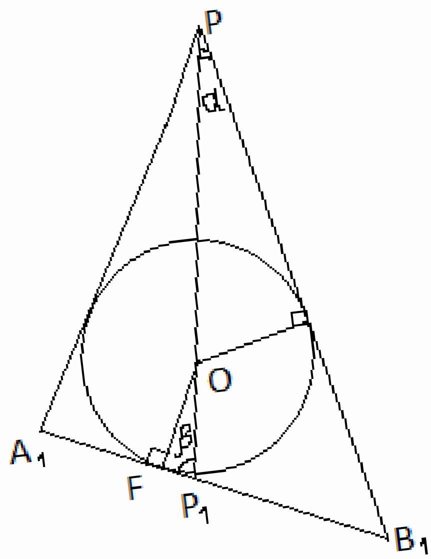

Рис. 3

Из этого рисунка находим:

расстояние $|PP_1| = |OP| + |OP_1| = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}$;

высоту пирамиды $|PP_1|\sin\beta = 1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

длину большой оси эллипса $|A_1B_1| = |A_1P_1| + |B_1P_1|$

$= \frac{2\cos\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha}$;

расстояние от фокуса F до вершины эллипса A_1

$|A_1F| = |A_1P_1| - |FP_1| = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}$;

длину малой оси эллипса

$$2\sqrt{|A_1B_1|\cdot|A_1\,F| - \ |A_1F|^2} \ = 2\sqrt{\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}}\ .$$

Отсюда получаем объём пирамиды

$$V = \frac{4}{3}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Оценим его снизу :

$$V \geq \frac{4}{3}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)} \geq \frac{32}{3}\ .$$

Равенство достигается при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = arcsin\frac{1}{3}$. Таким образом, наименьший объём имеет правильная пирамида с углом между боковой гранью и основанием $arccos\frac{1}{3}$.

Выводы: приведён пример описанного n-гранника, объём которого меньше, чем объём правильного n-гранника; найден описанный пятиграннк комбинаторного типа «четырёхугольная пирамида» наименьшего объёма.

Список литературы:

1. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: в 2т. – т.1: Планиметрия, преобразования плоскости. - М.: МЦНМО, 2004.
2. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: в 2т. – т.2: Стереометрия, преобразования пространства. - М.: МЦНМО, 2006.
3. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). − М., Физматлит, 2000.