М. Я. Пратусевич
К. М. Столбов
В. Н. Соломин

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова, А. Н. Головина

М. Я. Пратусевич
К. М. Столбов
В. Н. Соломин

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11

класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику
М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова, А. Н. Головина

3-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21
П70

Издание выходит в pdf-формате.

Книга предназначена для учителей, работающих по учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова и А. Н. Головина. В пособии содержатся методические рекомендации учителям, тематическое планирование, решения, указания и ответы ко многим задачам учебника.

Учебное издание

Пратусевич Максим Яковлевич
Столбов Константин Михайлович
Соломин Вадим Николаевич
Головин Алексей Николаевич

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

11 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова, А. Н. Головина

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Дата подписания к использованию 15.02.2022.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-103014-3

Предисловие

Предлагаемая книга составлена по учебнику М. Я. Пратусевича, К. Н. Столбова и А. Н. Головина «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс», предназначенному для профильного изучения. Методические рекомендации являются логическим продолжением аналогичной книги для 10 класса.

В составе авторов книги — учителя, использовавшие учебник в повседневной практической работе в классах физико-математического лицея № 239 и лицея «Физико-техническая школа» Санкт-Петербурга.

Поскольку одной из основных особенностей учебника является наличие большого числа задач, среди которых есть и весьма сложные, в методических рекомендациях изложены решения или указания к решению некоторых задач, к более простым задачам приведены ответы.

Отметим, что в тексте параграфов учебника имеются как необходимые теоретические сведения, так и многочисленные примеры решения задач различной трудности, причём изложенные с точки зрения того, как можно придумать соответствующее решение.

Структура материала учебника позволяет к концу учебного года уделить больше внимания заданиям итоговой аттестации.

Авторская концепция предполагает отсутствие в учебнике ответов. Полагаем недопустимым наличие в учебнике ответов, а тем более решений задач, предназначенных для самостоятельной работы учащихся. Это дезориентирует ученика, невольно заставляет его подгонять решение под готовый ответ, а также пренебрегать содержанием задачи ради вычислений.

Авторы попытались передать свой опыт преподавания по данному учебнику в единой методической системе, предполагающей изучение теории на уровне, сообразном уровню математической культуры класса, в сочетании с решением большого числа разноплановых задач.

В некоторых разделах приведены дополнительные задачи, решение которых, по мнению авторов, может способствовать более успешному изучению материала.

В книге приведено также тематическое планирование изучения каждой главы. Полагаем, что углублённое изучение математики настолько индивидуально, что не существует возможности создать вариант более подробного (например, поурочного) планирования. Кроме того, считаем коллег, работающих в классах с углублённым изучением математики, достаточно профессиональными, чтобы, отталкиваясь от выбранного ими содержания, самостоятельно разработать соответствующее планирование. Вместе с тем варианты планирования и контрольные работы по темам опубликованы в газете «Математика» (2009 г. — № 10).

Подчеркнём авторский взгляд на вопросы оформления решений задач. Полагаем, что эти вопросы не должны выходить на первый план, но тем не менее отдельным вопросам оформления уделено некоторое внимание.

Авторы будут признательны за любые предложения и замечания по учебнику и предлагаемой книге, которые можно присылать по электронной почте на адрес algebraianalyz11@mail.ru или prosv@prosv.ru, а также почтой на адрес издательства «Просвещение».

Глава VIII. Предел и непрерывность функции

Комментарии к главе VIII можно предварить парадоксальным замечанием о том, что нет необходимости изучать материал этой главы с той степенью подробности, с которой он написан. Такое мнение подтверждается историей развития основных понятий математического анализа, показывающей, что ключевыми и наиболее необходимыми в анализе являются понятия производной и определённого интеграла.

Материал данной главы помещён в учебник как дань традициям углублённого курса математики, в котором понятиям предела последовательности и предела функции всегда уделялось значительное внимание.

В зависимости от уровня класса материал главы можно либо изучать в ознакомительном плане, либо в более подробном изложении. План изучения материала главы VIII приведён в таблице (количество часов дано на 4 и 5 часов алгебры и начал математического анализа в неделю).

Глава VIII. Предел и непрерывность функции	**9**	**18**
Понятие предела функции. Два определения предела функции и их эквивалентность. Вычисление предела с помощью теорем об арифметических действиях с пределами	2	4
Замечательные пределы. Асимптоты	2	2
Порядок малости. Шкала бесконечно малых		2
Контрольная работа № 1		2
Определение непрерывности	1	2
Теоремы о промежуточном значении	2	2
Теорема Вейерштрасса		2
Контрольная работа № 2	2	2

§ 44. Понятие предела функции

Набор заданий к этому разделу помогает учащимся понять важнейшее и достаточно сложное определение предела функции в точке и на бесконечности и рассмотреть различные его частные случаи. В зависимости от уровня подготовки класса и наличия времени можно обойтись общими понятиями и представлениями, предпочитая наглядность. В сильных классах целесообразно разобраться с основным определением, разбив его на части и подчеркнув смысл каждой такой части: выбор ε, нахождение δ по выбранному ε и т. д. Естественно, нужно проиллюстрировать сказанное графически. Предлагаем для этой цели использовать «расширенное определение предела функции» и связанный с ним набор заданий для домашней работы:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B \Leftrightarrow$ для любого	$\varepsilon > 0$, если B — число, $E > 0$, если $B = +\infty$, или $B = -\infty$, или $B = \infty$
найдётся такое	$\delta > 0$, если a — число, или $a = +\infty$, или $a = -\infty$, или $a = \infty$,
что для любого x, удовлетворяющего условиям	1) $x \in D(f)$; 2) $x \neq a$; 3) $\lvert x - a \rvert < \delta$, если a — число, $x > \delta$, если $a = +\infty$, $x < -\delta$, если $a = -\infty$, $\lvert x \rvert > \delta$, если $a = \infty$,
выполняется неравенство	$\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$, если B — число, $f(x) > E$, если $B = +\infty$, $f(x) < -E$, если $B = -\infty$, $\lvert f(x) \rvert > E$, если $B = \infty$.

Можно поставить перед учащимися такую задачу:

Используя «расширенное определение предела функции» (см. выше), запишите частные определения, соответствующие каждому случаю (выбрав их из схемы), указанному в таблице, дайте графическую иллюстрацию для каждого случая (показав на рисунке выбор ε и δ) и приведите пример конкретной функции, подходящий к этому случаю.

	a — число	$a = +\infty$	$a = -\infty$	$a = \infty$
B — число				
$B = +\infty$				
$B = -\infty$				
$B = \infty$				

Так, например, при $a = +\infty$ и $B = \infty$ (заметим, не $+\infty$ и не $-\infty$!) определение предела будет выглядеть так:

$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D(f) \quad x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > E$.

В качестве конкретных примеров таких функций можно рассмотреть функции: $y = (-1)^{[x]} \cdot x$ (рис. 8.1) и $y = (-1)^{[x]} \cdot 2^x$.

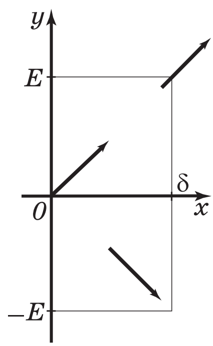


Рис. 8.1

Замечание. Случаи «B — число, $a = +\infty$, или $a = -\infty$, или $a = \infty$» дают нам варианты горизонтальных асимптот (соответственно в $+\infty$, $-\infty$ и ∞), а «a — число, или $B = +\infty$, или $B = -\infty$, или $B = \infty$» — вертикальных асимптот.

Задачи к данному параграфу сводятся к применению определений предела функции в точке.

Решения и указания к задачам

VIII.1. а) **Решение.** Требуется найти окрестность точки $a = 1$, в которой выполнялось бы неравенство $|2x - 1 - 1| < \varepsilon$. Решая это неравенство, получаем $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, в качестве искомой окрестности годится окрестность радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$.

VIII.2. а) Утверждение неверно. **Решение.** Например, для $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}$ выполнено $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = 0$, в то время как предела самой функции в нуле нет.

б) Утверждение верно. **Решение.** Действительно, возьмём $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = 0$ следует, что существует $\delta > 0$, такое, что как только $-\delta < x < \delta$ и $x \neq 0$, так сразу $|f(x^3)| < \varepsilon$. Это неравенство можно переформулировать так: как только $-\delta^3 < x^3 < \delta^3$ и $x^3 \neq 0$, так сразу

$|f(x^3)| < \varepsilon$. Таким образом, обозначая $x^3 = t$, придём к следующему: для всех $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ^3 такое, что как только $-\delta^3 < t < \delta^3$ и $t \neq 0$, так сразу $|f(t)| < \varepsilon$. Это и есть определение того, что предел функции f в точке 0 равен нулю.

Замечание. Различие между ответами этих пунктов вызвано тем, что любое вещественное число представимо как куб вещественного числа, в то время как в виде квадрата вещественного числа представимы лишь неотрицательные числа.

VIII.10. а) Нет. б) Нет.

§ 45. Некоторые свойства пределов функции

Изучение материала параграфа (особенно пункта 1) позволит плотнее ознакомиться с понятием предела функции в точке. Материал пункта 2 «Предел монотонной функции» может быть изучен ознакомительно. Теорему, доказанную в этом пункте, достаточно сформулировать без доказательства.

Задачи этого параграфа представляют собой важные теоретические упражнения, приучающие школьников к тщательной работе с определениями, увязке наглядных представлений с формализацией некоторых базовых идей. Именно такие задачи в большей степени способствуют формированию правильных представлений и взглядов, учат рассуждать и всматриваться в суть задачи, чем набор вычислительных упражнений, эксплуатирующих в основном стандартные приёмы. Эти задачи имеет смысл в первую очередь подробно разбирать и обсуждать в классе (но после достаточного времени на раздумье). Наиболее разумным представляется совместное обсуждение этой серии задач после домашней работы над ними, дабы не превращать это обсуждение в учительский монолог.

Решения и указания к задачам

VIII.11. а) Неверно, например:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

б) Неверно. В качестве примера можно взять функцию $f(x)$, везде определённую и разрывную в нуле (например, $f(x) = \operatorname{sign} x$ и $g(x) = 0$ на $\boldsymbol{R}$).

VIII.12. а) Например, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < a, \\ 1, & x \geqslant a \end{cases}$ или $f(x) = D(x) - 0{,}5$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

б) Подходят те же примеры, что и в задаче VIII.12 а).

в) **Решение.** Например, $f(x)=\begin{cases}-3, & x<a,\\ 1, & x\geqslant a\end{cases}$. Тогда $f^2(x)+2f(x)-3=(f(x)+3)(f(x)-1)=0$ на $\boldsymbol{R}$.

VIII.13. *Указание.* Достаточно, взяв $\varepsilon>0$, найти по нему такое $\delta>0$, для которого все x из $\dot{U}_\delta(a)$ попадут в $\dot{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$ (т. е. интервал длиной ε). Тогда для любых x', $x''\in\dot{U}_\delta(a)$ выполнено неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

VIII.14. *Указание.* Для доказательства достаточно взять $\varepsilon<\frac{A-B}{2}$ (например, $\varepsilon=\frac{A-B}{3}$, как было сделано при доказательстве теоремы о единственности предела) и для него найти такие δ_1 и δ_2, что $\forall x\in\dot{U}_{\delta_1}(a)$ все значения $f(x)$ лежат в $\dot{U}_\varepsilon(A)$, а $\forall x\in\dot{U}_{\delta_2}(a)$ все значения $f(x)$ лежат в $\dot{U}_\varepsilon(B)$. Положим $\delta=\min\{\delta_1;\ \delta_2\}$. Тогда $\forall x\in\dot{U}_\delta(a)$

$$g(x)<B+\varepsilon<\frac{A+B}{2}<A-\varepsilon<f(x).$$

VIII.15. а) Можно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$.

б) Можно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$. в) Нельзя определить. Это неопределённость вида $(\infty\cdot 0)$. Например, если $f(x)=x$ и $g(x)=\frac{1}{x}$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=1$; если $f(x)=x^2$ и $g(x)=\frac{1}{x}$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$; если $f(x)=x$ и $g(x)=\frac{1}{x^2}$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$.

г) Можно, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$, поскольку $g(x)>\frac{1}{M}>0$.

VIII.16. а) Можно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. **Решение.** По условию $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$, $A>0$. Возьмём достаточно малое $\varepsilon>0$ (так, чтобы $A-\varepsilon<0$). Для этого ε найдётся $\delta>0$ такое, что для всех $x>\delta$ выполняются неравенства $0<A-\varepsilon<$ $<g(x)<A+\varepsilon$. Отсюда $\frac{1}{A+\varepsilon}<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{A+\varepsilon}$, т. е. $\frac{1}{g(x)}$ является положительной ограниченной функцией при $x\to+\infty$. Но произведение бесконечно большой на ограниченную функцию есть бесконечно большая функция (а в нашем случае ещё и положительная). Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

Замечание. Для обоснования того, что произведение бесконечно большой на ограниченную функцию есть бесконечно большая функция, можно было использовать разобранные в главе VII учебника (§ 41, п. 2) случаи частного и произведения последовательностей, переведя их на язык функций произвольного аргумента.

б) Нельзя. Получается неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Например, если $f(x) = -x$ и $g(x) = x$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$; если $f(x) = -x$ и $g(x) = x^2$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; если $f(x) = -x^2$ и $g(x) = x$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

в) Можно, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. г) Можно, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. *Указание.* См. задачу VIII.16 а).

VIII.17. а) **Решение.** Возьмём $\varepsilon > 0$. Положим $t = 2x$. Поскольку $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$, по этому ε найдётся такое $\delta > 0$, что для всех чисел $t \in (-\delta; \delta)$ выполнится $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём x так, чтобы $t = 2x$ оказалось внутри $\dot{U}_\delta(0)$; тогда и $x \in \dot{U}_\delta(0)$, и одновременно выполнятся неравенства $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(2x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. При выбранном таким образом δ для всех $x \in \dot{U}_\delta(0)$ $|f(x) + f(2x)| \leqslant |f(x)| + |f(2x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

б) **Решение.** Очевидно, можно ограничиться малыми $\delta > 0$, в частности можно рассматривать $\delta < 1$. Тогда, если по выбранному $\varepsilon > 0$ взять $0 < \delta < 1$ так, что $\forall x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, то при этом получится, что и $x^2 \in \dot{U}_\delta(0)$ (действительно, если $0 < |x| < \delta < 1$, то и $0 < x^2 < |x| < \delta$), а тогда $|f(x^2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. В результате $\forall x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется $|f(x) + f(x^2)| \leqslant |f(x)| + |f(x^2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

VIII.18. Решение. Будем доказывать от противного. Пусть функция f — не константа. Тогда существуют x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ и $a \neq b$. Пусть T — главный период функции f. По условию существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, что для всех $x > \delta$ значения $f(x)$ отличаются от числа C менее чем на ε. Заметим, что при этом значения функции в двух различных точках $x' > \delta$, $x'' > \delta$ должны отличаться не более чем на 2ε: $|f(x') - f(x'')| \leqslant \leqslant |f(x') - C| + |C - f(x'')| < 2\varepsilon$. Однако это невозможно, поскольку существуют сколь угодно большие числа $x' = x_1 + + kT$ и $x'' = x_2 + nT$, заведомо бóльшие δ, значения функции в которых равны соответственно a и b: $f(x') = a$, $f(x'') = b$. Разность значений функции в этих точках равна $|a - b|$ и не может быть сделана меньше наперёд выбранного числа 2ε. (Для формального доказательства можно было бы взять, например, $\varepsilon = \left|\frac{a-b}{3}\right|$.)

VIII.20. Решение. Возьмём $\varepsilon > 0$ и по нему найдём $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(2x) - f(x)}{x}\right| < \varepsilon$, которое мы перепишем в виде $|f(2x) - f(x)| < < \varepsilon \cdot |x|$. Заметим, что вместе с числом x в $\dot{U}_\delta(0)$ попадают все числа вида $\frac{x}{2^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ (действительно, $\left|\frac{x}{2^n}\right| < |x| < \delta$), а поэтому также выполняются неравенства

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \varepsilon \cdot \frac{|x|}{2}, \quad \left|f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right)\right| < \varepsilon \cdot \frac{|x|}{4},$$

$$\ldots, \quad \left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| < \varepsilon \cdot \frac{|x|}{2^n}, \ \ldots .$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $|a + b| \leqslant \leqslant |a| + |b|$, получаем $\left|f(2x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant |f(2x) - f(x)| + \left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + + \ldots + \left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| < |x| \cdot \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) < 2\varepsilon \cdot |x|$. Отсюда, переходя к пределу в неравенстве при $n \to \infty$ и учитывая, что $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, получаем, что $|f(2x)| \leqslant 2|x| \cdot \varepsilon$, т. е. $\left|\frac{f(2x)}{2x}\right| \leqslant \varepsilon$. Завершающие шаги доказательства уже очевидны.

§ 46. Вычисление предела функции в точке

Материал параграфа призван вооружить учащегося инструментарием для вычисления пределов функций. Это теоремы о пределах результатов арифметических действий, теорема о пределе композиции и несколько так называемых замечательных пределов.

В простых вычислительных задачах раздела «Предел отношения двух функций на бесконечности» (с. 45 учебника) используются главным образом стандартные приёмы, которые уже применялись в работе с пределами последовательностей: деление числителя и знаменателя дроби на старшую степень переменной, а также перевод иррациональности из числителя в знаменатель и наоборот (умножение на сопряжённое выражение). Нужно только не забывать, что пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ могут оказаться различными.

Основные приёмы при решении задач на нахождение предела отношения двух функций в точке состоят в избавлении от неопределённости (если она есть, что необходимо проверить в первую очередь) путём стандартных алгебраических преобразований и сокращения дробей. (Подробно см. пример 9 из § 46 учебника.) Обратим внимание на то, что в некоторых задачах односторонние пределы могут оказаться разными.

Далее при вычислении пределов представляется уместным предложить учащимся стандартную схему работы с пределами (см. с. 13). Для начинающего такая схема будет весьма полезным подспорьем и придаст уверенность, особенно на первых порах.

Замечание. Поскольку почти все замечательные пределы рассматриваются в окрестности нуля, мы стараемся ввести такую замену, чтобы новая переменная стремилась к нулю при стремлении $x \to a$. Это отражено в схеме.

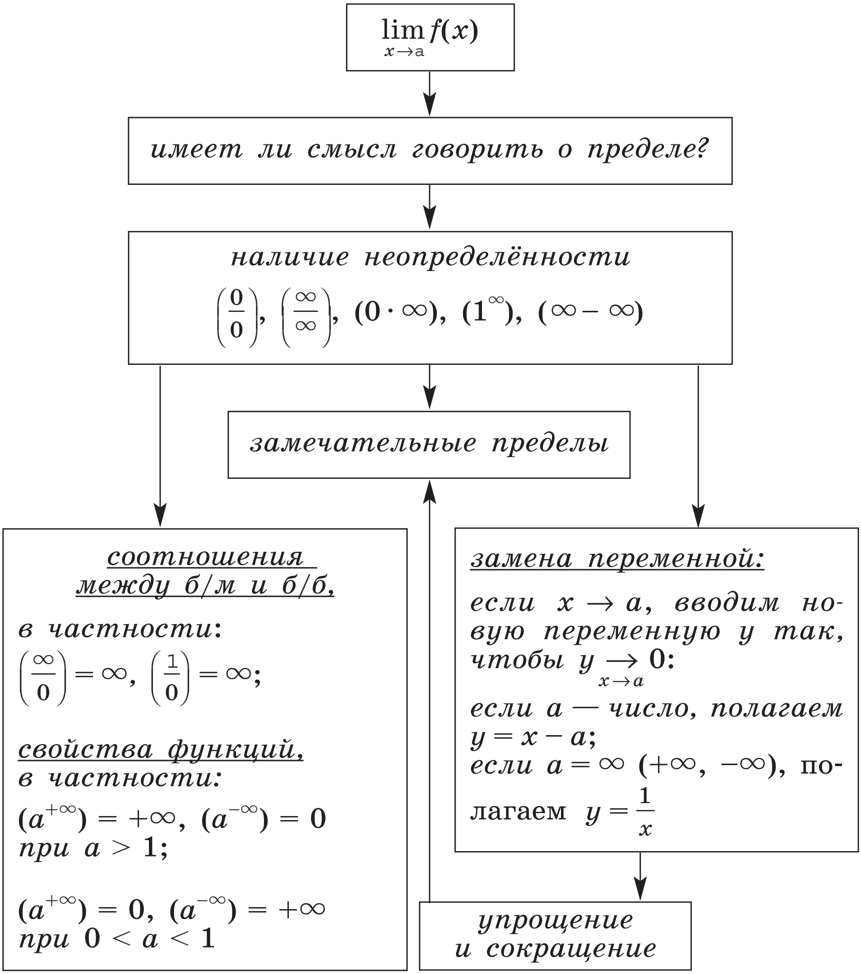
Бóльшая часть задач раздела «Пределы выражений, содержащих тригонометрические функции» основывается на использовании замечательного предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и следствий из него. Так же как и в предыдущем разделе, используется стандартная схема раскрытия неопределённостей, предусматривающая замену переменной (в необходимых случаях) с последующим переходом к одному из замечательных пределов. Среди задач к этому разделу практически нет сложных: все они используют стандартные подходы. Обратите внимание: не везде имеется даже неопределённость (задача VIII.30 л).

При решении задач из раздела «Раскрытие неопределённостей вида (1^∞)» используются замечательные пределы $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ и следующее соображение:

если $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ и $\forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ $\alpha(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a}(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

Но начинать решение следует, как всегда, с проверки наличия непределённости. Обратите внимание:

Схема вычисления предела функции в точке (раскрытие неопределённости)



в задачах VIII.34 в), е) и з) нет неопределённости вида (1^{∞})!

Определение односторонних пределов было дано в § 44 учебника. Однако только сейчас у нас появились достаточные навыки для работы с ними. В задачах VIII.42 и VIII.43 как раз и идёт речь о вычислении односторонних пределов, причём задачи располагаются парами: сначала правосторонний предел функции в точке, затем — левосторонний, дабы оценить разницу между ними и впредь обращать внимание на этот момент в решениях задач.

Решения и указания к задачам

VIII.21. а) 1. б) 0. в) ∞ ($+\infty$ при $x \to +\infty$; $-\infty$ при $x \to -\infty$). г) $+\infty$. д) 0. е) 1.

VIII.22. а) 3. б) $\frac{49}{16}$. в) 8. г) 0.

VIII.23. 0, если $n < k$; $\frac{a_0}{b_0}$, если $n = k$; ∞, если $n > k$.

VIII.24. а) 7. б) 5. в) $\sqrt{5}$. г) 3.

VIII.25. а) 0. б) $\lim\limits_{x\to 5-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5+} f(x) = +\infty$. в) -2. г) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5+} f(x) = +\infty$. д) $\frac{1}{2}$.

VIII.26. а) 2. б) 2. в) -1. г) $-\frac{1}{2}$. д) 5050. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{101}-100x+100}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x^{99}+2x^{98}+\ldots+99x+100)}{(x-1)^2} = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = 5050$.

VIII.27. а) 2. *Указание.* Воспользоваться заменой $\sqrt{x} = t$.

б) 3. *Указание.* Воспользоваться заменой $\sqrt[6]{x} = t$.

в) $\frac{4}{3}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $\sqrt[12]{x} = t$.

г) $\frac{1}{9}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $\sqrt[3]{x} = t$.

VIII.28. а) $-\frac{1}{56}$. б) 12. в) $\frac{3}{2}$. г) $-\frac{1}{3}$. д) 1. е) $-\frac{1}{3}$. ж) $-\frac{5}{2}$. з) $\frac{1}{2}$. и) 0.

VIII.29. а) $\frac{m}{n}$. **Решение.** Поскольку биномиальный предел рассматривается в окрестности нуля, введём такую замену, чтобы новая переменная стремилась к нулю при $x \to 1$: пусть $t = x - 1$, тогда $t \underset{x\to 1}{\to} 0$ и $x = 1 + t$. (Запись-объяснение вида «$t = x - 1$, тогда $t \underset{x\to 1}{\to} 0$ и $x = 1 + t$» имеет смысл сделать обязательным элементом записи решения!) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^m-1}{t}\cdot\frac{t}{(1+t)^n-1} = \frac{m}{n}$.

Замечание. Основной приём (когда уже более или менее ясно, к какому из замечательных пределов сводится конкретная задача) заключается в том, чтобы выделить знакомые конструкции, разбивая выражение на части и используя введение дополнительных слагаемых и множителей.

Замечание относится, в частности, к задачам VIII.29 г) — VIII.29 е). Разберём подробно задачу г).

г) $\frac{4}{7}$. **Решение.** Перепишем предел в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+2x^2+10x)^{\frac{1}{5}} - (1+x^2+10x)^{\frac{1}{7}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{x} - \frac{(1+(x^2+10x))^{\frac{1}{7}} - 1}{x} \right).$$

Найдём $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{x}$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+(x^2+10x))^{\frac{1}{7}} - 1}{x}$. Если они существуют, то существует предел разности этих выражений.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{2x^2+10x} \cdot \frac{2x^2+10x}{x} = 2,$$

поскольку

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{2x^2+10x} = \frac{1}{5}, \text{ а } \lim_{x \to 0} \frac{2x^2+10x}{x} = \lim_{x \to 0}(2x+10) = 10.$$

Аналогично

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+(x^2+10x))^{\frac{1}{7}} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+(x^2+10x))^{\frac{1}{7}} - 1}{x^2+10x} \cdot \frac{x^2+10x}{x} = \frac{10}{7}.$$

Теперь исходный предел равен

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+(2x^2+10x))^{\frac{1}{5}} - 1}{x} - \frac{(1+(x^2+10x))^{\frac{1}{7}} - 1}{x} \right) = 2 - \frac{10}{7} = \frac{4}{7}.$$

д) $\frac{7}{12}$.

Замечание. Если на момент решения этих задач уже состоялся разговор об использовании эквивалентных функций, решение может быть записано существенно короче. Это замечание относится и ко всем последующим разделам.

е) $\frac{ak-bn}{nk}$.

VIII.30. а) 3. б) $\frac{5}{2}$. в) $\frac{1}{3}$. г) π. д) $\frac{1}{2}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot 4=\frac{1}{2}$. е) $\cos a$. ж) $-\sin a$. з) π.

Решение. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Сделаем замену: $t = x + 2$, тогда $t \underset{x\to -2}{\to} 0$, $x = t - 2$. Получаем $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{\cos \pi t}=\pi$.

и) $\cos x$. к) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. л) 0. м) 1. н) $\frac{2}{\pi}$. о) 0. п) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. р) $\frac{n^2-m^2}{2}$.

с) $\frac{1}{2}$. т) $-\frac{1}{4}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{1+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=$

$=-\frac{1}{4}$. у) $\frac{1}{4}$. ф) 1.

VIII.31. а) 4. б) $\frac{1}{5}$. в) 2. г) −1.

VIII.32. а) $-\frac{7}{2}$. б) $\frac{1}{2\pi}$. в) π. г) 1.

VIII.33. а) 1. **Решение.** Способ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Введём замену $t = \arcsin x$, тогда $t \underset{x\to 0}{\to} 0$ и $x = \sin t$. Предел приобретает вид $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$.

Замечание. Мы только что доказали эквивалентность $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$ (см. задачу VIII.50), и желающие могут воспользоваться этим в пункте б).

б) $\frac{2}{3}$.

Способ 2. Приведём решение без использования эквивалентности: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Введём замену $t = \arcsin 2x$; тогда $t \underset{x\to 0}{\to} 0$ и $2x = \sin t$. Перепишем предел в виде $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{2}{3}$.

в) 1. *Указание.* Задача решается аналогично задаче VIII.33 а).

г) $\sqrt{2}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Положим $t=\arccos(1-x)$, тогда $t\underset{x\to 0+}{\to}0+$, и $\cos t=1-x$, т. е. $x=1-\cos t$. Отсюда $\sqrt{x}=\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|=$ $=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$, поскольку t мало и положительно ($t\to 0$ и $t>0$). Исходный предел преобразуется к следующему виду:

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}\cdot 2=\sqrt{2}.$$

VIII.34. в) 1. е) $\frac{1}{4}$. з) $\frac{3}{2}$. к) $\frac{1}{e}$.

VIII.35. а) $\ln 2$. б) $10\lg 2$. в) 1.

г) $-\frac{1}{2}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$. Поскольку $t=\cos x-1$ стремится к нулю при $x\to 0$, то, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}=1$. Второй предел мы уже нашли при решении задачи VIII.30.

д) $-\frac{1}{2}$. **Решение.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

Замечание. Начинать решение следует с вопроса: а есть ли тут неопределённость. (Так, в задаче VIII.35 а) неопределённости нет!)

VIII.36. а) $\frac{1}{10\ln 10}$. б) 0,25. в) 8. г) $\frac{25}{16}$.

VIII.37. а) $a-b$. б) $\ln 3$. в) $\ln 4$. г) $\log_2 10$ (или, что то же самое, $\frac{1}{\lg 2}$). д) 5. е) 2. ж) $\frac{3}{2}$.

VIII.38. а) $4\sqrt{2}$. б) $\frac{13}{6}$. в) 0.

VIII.39. 2. **Решение.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2-1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{\left(1+\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}-1}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}\right)=2.$$

VIII.41. Решение. В одну сторону это утверждение очевидно: если $\deg P \leqslant 1$, то $f(x) = \sin P(x)$ — периодическая функция. Действительно, и константа и функция $f(x) = \sin(ax + b)$ периодические.

Доказательство в обратную сторону может быть проведено двумя способами.

Способ 1. Пусть $f(x) = \sin P(x)$ — периодическая функция, период которой равен $T > 0$, причём $n = \deg P \geqslant 2$. Тогда при всех вещественных x выполнено равенство $\sin P(x + T) - \sin P(x) = 0$. Применив условие равенства синусов (пример 51 § 38 учебника 10 класса), получаем, что при всех значениях вещественных x выполнено условие:

$$\left[\begin{array}{l} P(x+T) - P(x) = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ P(x+T) + P(x) = \pi + 2\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Однако при заданном значении целочисленного параметра каждое из двух уравнений совокупности имеет не более чем n корней (степень первого уравнения равна $n - 1 \geqslant 1$, степень второго равна n). Тогда множество всех решений данной совокупности представляет собой объединение счётного числа конечных множеств и является счётным множеством. С другой стороны, решениями данной совокупности должны быть все вещественные числа.

Способ 2. Пусть $f(x) = \sin P(x)$ — периодическая функция, период которой равен $T > 0$, причём $n = \deg P \geqslant 2$. Не умаляя общности, можно считать, что старший коэффициент многочлена P положительный.

Ясно, что на любом промежутке длины T функция f принимает каждое своё значение конечное число раз, одинаковое для всех таких промежутков. Иными словами, уравнение $f(x) = a$ имеет на каждом из промежутков длины T одно и то же конечное число решений. Тогда существует $\alpha(a)$ — наименьшее из расстояний между различными корнями уравнения $f(x) = a$.

Докажем, что, с другой стороны, при больших x расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения $f(x) = a$ будет уменьшаться, стремясь к нулю. Это приведёт к противоречию.

Итак, пусть t — некоторый корень уравнения $f(x) = a$. Пусть u — корень уравнения $P(u) = P(t) + 2\pi$. Тогда очевидно: u — также корень уравнения $f(x) = a$. Обозначим $t - u = \nu$. Заметим, что $P(u) - P(t) = \nu \cdot Q(t, u)$, где Q — симметрический многочлен от двух переменных, наибольшая степень вхождения каждой из которых равна $n - 1$, причём коэффициенты при старших степенях по каждой переменной положительны и равны старшему коэффициенту многочлена P (это разложение можно получить, прямо выписав разность двух многочленов и применив затем формулы разности k-х степеней). Тогда $\nu = \frac{2\pi}{Q(u, t)}$. Ясно, что значение многочлена Q стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности любой из переменных. Значит, чем большим будем брать значение t, тем меньшим окажется ν — расстояние до одного из последующих корней уравнения $f(x) = a$.

Замечание. Приведённое доказательство формально описало следующую простую мысль: если многочлен имеет степень больше двух, то с ростом аргумента его график становится всё круче, и для прибавления к значению многочлена числа 2π требуется увеличить значение аргумента на всё меньшую и меньшую величину (рис. 8.2).

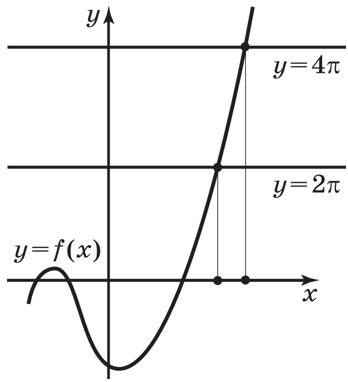


Рис. 8.2

VIII.42. а) 1. б) 0. в) 0. г) 1. д) -1. е) 1. ж) -1. з) 1. и) $-\infty$. к) $+\infty$.

VIII.43. а) $f(0-) = 1$, $f(0+) = 0$. б) $f(0-) = 0$, $f(0+) = 0$. в) $f(0-) = 0$, $f(0+) = +\infty$.

§ 47. Классификация бесконечно малых функций

О важности этого короткого параграфа свидетельствует, например, то, что раньше основной курс математического анализа порой именовался «исчисление бесконечно малых». Нам он необходим в первую очередь для дальнейшей работы с производной.

Необходимой частью являются основные определения и задачи VIII.44—VIII.46, половину которых имеет смысл решить в классе, а половину оставить в качестве домашнего задания.

Материал, связанный с использованием эквивалентности функций для вычисления пределов, предназначен для самых подготовленных и заинтересованных классов и обязательным не является.

Очень полезным представляется также задание VIII.48, дополняющее утверждение параграфа о свойствах бесконечно малых (свойства символа $o(f)$), однако можно в качестве домашнего задания ограничиться доказательством самого утверждения параграфа, естественно, с разбором в классе.

Решения и указания к задачам

VIII.44. а) Да. б) При $x \to +\infty$ да, при $x \to -\infty$ нет. в) Да. г) При $x \to +\infty$ да, при $x \to -\infty$ нет. д) Да.

VIII.45. а) Да. б) При $x \to +\infty$ нет, при $x \to -\infty$ да. в) При $x \to +\infty$ нет, при $x \to -\infty$ да. г) При $x \to 0+$ нет, при $x \to 0-$ да.

VIII.46. а) При $x \to 0$ да, при $x \to \infty$ нет. б) При $x \to 0$ нет, при $x \to \infty$ эти функции не являются бесконечно малыми, а понятие $o(f)$ определялось нами только для бесконечно малых!

VIII.47. *Замечание.* В решении этой задачи можно не ограничиваться ответом на вопрос, какая из бесконечно малых имеет более высокий порядок, а обсудить с учениками то, что может называться порядком одной величины относительно другой. Вспоминая значение слова «порядок» как показателя степени (например, степень 10 в десятичной записи числа), можно ввести его следующим образом:

если α и β — функции, бесконечно малые при $x \to a$, причём $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^p(x)} = K$, где $K \neq 0$ — число, то α называется бесконечно малой порядка p по отношению к β при $x \to a$.

Приведём ответ для такого определения: а) $p = 1$ (функции эквивалентны). б) $p = \frac{1}{4}$. в) $p = \frac{2}{3}$. г) $p = 2$. д) $p = 3$ (см. задачу VIII.30 с).

VIII.51. а) $\frac{2}{3}$. б) $\frac{2}{\ln 2 \ln 3}$. в) 15. г) -1. д) -1. е) 3.

VIII.52. **Решение.** Приведённое утверждение неверно. В качестве примера можно привести уже рассмотренный в задаче VIII.30 е) предел $\lim\limits_{x \to 0}(\mathrm{tg}\, x - \sin x)\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}$. Если же воспользоваться эквивалентными функциями $\sin x \sim x$, $\mathrm{tg}\, x \sim x$ при $x \to 0$, получится $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$.

VIII.53. Витино утверждение говорит на самом деле лишь о том, что f является бесконечно малой при $x \to 0$, да и то, если $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Рита дала верное определение.

§ 48. Непрерывность функций в точке

Собственно, § 44—46 можно считать технической подготовкой к важнейшим понятиям, рассматриваемым в этом и последующих параграфах. Строго говоря, все задачи на вычисление предела функции в точке из § 46 мы решали, интуитивно используя понятие непрерывности (и заодно непрерывность различных элементарных функций, см. § 49).

Напомним, что функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a, называется непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Чаще всего при вычислении предела, если функция непрерывна в точке $x = a$, используется именно формула $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Этим мы воспользовались в разборе примера 9 а) из § 46:

$$\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x^2 + 1) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 17.$$

Фактически была использована непрерывность функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ в точке $x = 2$. Действительно, тогда $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 17$.

Если же формулой $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ нельзя воспользоваться непосредственно, поскольку функция f не определена в точке $x = a$, то выражение преобразовывается так, чтобы оказалось $f(x) = g(x)$ при $x \neq a$, но при этом функция $g(x)$ была бы определена в точке a; тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Именно такая ситуация рассматривается в пункте б) примера 9 из § 46, где мы вычисляем $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$. Напомним наше рассуждение: при $x = 2$ функция не определена, но в остальных точках области определения $x - 2 \neq 0$, и мы можем сократить дробь; при этом как раз и получится новая функция $g(x)$, совпадающая с функцией $f(x)$ везде, кроме точки $x = 2$, и при этом $g(x)$ будет непрерывна в точке $x = 2$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{2x - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x - 2)} = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 = g(x), \quad x \neq 2.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2) = 6$.

Понятно, что во всех задачах § 46 мы пользовались непрерывностью элементарных функций всякий раз, когда утверждали, например, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, и во всех подобных этому случаях.

Дабы учащиеся освоились с определением непрерывности и стали воспринимать его естественно, имеет смысл начать с решения самых простых задач, аппелирующих непосредственно к определению, например с задачи VIII.55. Ещё лучше помогает освоиться с определением сопоставление понятия непрерывности с понятием разрывности, которое имеет смысл рассматривать сразу после определения непрерывности, возможно, даже на том же уроке. Задание VIII.56 как раз и нацелено на отработку этих понятий. Мы предлагаем делать задачи к § 48 в следующем порядке: VIII.55 а), в), г) рассмотреть в классе; VIII.55 б), д), е) предложить в качестве домашнего задания; VIII.56 а), б) рассмотреть в классе; VIII.56 в)—д) предложить в качестве домашнего задания; VIII.58 рассмотреть в классе; VIII.57 предложить в качестве домашнего задания; VIII.59 предложить в качестве домашнего задания с обязательным разбором в классе.

После этого можно разобрать более сложные задачи VIII.60 и VIII.61.

Далее можно перейти к свойствам функции, непрерывной в точке. Простейшие упражнения на эту тему (VIII.62 и VIII.63) можно выполнить сразу в классе в качестве иллюстраций к применению свойств функции, непрерывной в точке (§ 48, п. 2).

Для домашнего задания и иллюстрации свойства 4 непрерывной функции в точке (непрерывность композиции) предназначена задача VIII.65, которую потом нужно обсудить в классе.

Остальные задачи (среди которых есть весьма сложные) обязательными не являются и остаются на усмотрение учителя, который может включить их в домашнее задание для сильных учеников.

Решения и указания к задачам

VIII.55. а) $f(-1) = -2$. б) $f(1) = \frac{3}{2}$. в) $f(0) = \frac{1}{2}$. г) $f(0) = 1$. д) $f(0) = 1$. е) $f(0) = 1$.

VIII.57. а) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. б) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. в) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$. г) $x_1 = 1$, $f(1) = -\frac{1}{4}$.

VIII.58. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $x = 0$, $f(0) = 0$. в) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(1)=-\frac{\pi}{2}$. г) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$, в точках вида $x = \pi n$: при $n = 2k$ $f(\pi n) = f(2\pi k) = 1{,}5$, при $n = 2k + 1$ $f(\pi n) = f(2\pi k + \pi) = -1{,}5$.

VIII.59. а) $a = 0$. б) $a=\frac{1}{3}$. в) Такого a не существует. г) $a = -1$.

VIII.60. $x = 1$ и $x = 2$. **Решение.** Очевидно, функция $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\in \boldsymbol{Q},\\ x^2, & x\in \boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{Q}\end{cases}$ должна быть непрерывной там, где значения обеих функций $g(x) = 3x - 2$ и $h(x) = x^2$ будут близки, т. е. в точках $x = 1$ и $x = 2$ (корнях уравнения $3x - 2 = x^2$). Но это ещё нужно доказать.

Докажем, например, что функция f непрерывна в точке $x = 1$. Для этого нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1$. Воспользуемся определением на языке $\varepsilon - \delta$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По этому ε найдём для функции $g(x) = 3x - 2$ такое $\delta_1 > 0$, что для всех $x\in \mathring{U}_{\delta_1}(1)$ будет выполнено неравенство $|g(x) - 1| = |3x - 3| < \varepsilon$ (такое δ найдётся в силу непрерывности функции g в точке $x = 1$). Заметим, что это неравенство выполняется, в частности, для всех рациональных $x\in \mathring{U}_{\delta_1}(1)$. Теперь по тому же ε точно так же найдём для функции $h(x) = x^2$ (которая тоже непрерывна в $x = 1$) такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x\in \mathring{U}_{\delta_2}(1)$, в частности для иррациональных, будет выполнено неравенство $h(x) - 1| = |x^2 - 1| < \varepsilon$. Если теперь взять $\delta = \min\{\delta_1;\ \delta_2\}$, то для всех $x\in \mathring{U}_{\delta}(1)$ заведомо выполняются оба неравенства, о которых шла речь выше, а стало быть, неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Аналогично доказывается, что функция непрерывна в точке $x = 2$. Очевидно, во всех прочих точках вещественной оси функция f разрывна.

VIII.61. $a > 1$ или $a < -3$. *Указание.* Точки непрерывности ищем, решая уравнение $x^2 - x = ax - 1$. Чтобы функция была непрерывна ровно в двух точках, нужно, чтобы это уравнение имело два различных решения.

VIII.62. а) Не обязательно. Может быть, $f(x) = 0$ на $\boldsymbol{R}$.

б) Верно. Если бы это было не так, то функция g должна была бы быть непрерывной в точке a как разность двух непрерывных функций $f + g$ и f.

VIII.63. **Решение.** Функция $2f$ непрерывна в точке a как сумма двух непрерывных функций $f + g$ и $f - g$, а тогда непрерывна и сама функция f (по свойству 3 функции, непрерывной в точке).

VIII.64. а) Нельзя. **Решение.** Так как $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

б) Нельзя. **Решение.** Так как $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$.

в) Можно, $f(0) = 0$. **Решение.** Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}} = 0 \text{ (здесь: } y = \frac{1}{x}\text{)}.$$

г) Нельзя. **Решение.** Так как $\left[\frac{1}{x}\right] \underset{x\to 0\pm}{\to} \pm\infty$, то поэтому $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.

VIII.65. а) Функция $f(g(x)) = \mathrm{sign}(1 - x^2) = 1$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$; функция $(g(f(x)) = 1 - \mathrm{sign}^2(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна везде, кроме нуля.

б) Функция $f(g(x)) = \mathrm{sign}(x^3 - x)$ непрерывна на $\boldsymbol{R}\backslash\{-1;\ 0;\ 1\}$; функция $g(f(x)) = \mathrm{sign}^3 x - \mathrm{sign} x = 0$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$.

в) Функция $f(g(x)) = \begin{cases} -1, & x \leqslant -1, \\ 0, & x > -1 \end{cases}$ непрерывна на $\boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$; функция $g(f(x)) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$ непрерывна на $\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$.

г) $f(g(x)) = 1$; $g(f(x)) = 1 + \{\mathrm{sign} x\} = 1$; обе композиции непрерывны на $\boldsymbol{R}$.

VIII.66. а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x = 1, \\ -1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x = -1, \\ 1, & x < -1. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}0, & x>1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & -1<x<1,\\ 0, & x<-1,\end{cases}$ в точке $x = -1$ функция не определена.

в) $f(x)=\begin{cases}1, & x=2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ 0, & x\neq \pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z},\end{cases}$ в точках $x = 2\pi l + \pi$, $l \in \boldsymbol{Z}$ функция не определена.

г) На интервалах вида $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ функция задаётся формулой $f(x) = x$; в точках $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ функция задаётся формулой $f(x)=\frac{x}{2}$; в точках $x=\frac{7\pi}{6}+\pi l$ и $x=-\frac{\pi}{6}+\pi l$, $l\in \boldsymbol{Z}$ функция не определена; на интервалах вида $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi m\right)$ и $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi m;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)$, $m\in \boldsymbol{Z}$ функция задаётся формулой $f(x) = 0$, k, n, l, $m \in \boldsymbol{Z}$.

д) **Решение.** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n^{2x}}}{1+\frac{1}{n^{2x}}}$. Поскольку $\frac{1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$, то для любого фиксированного $x \neq 0$ выполняется $\frac{1}{n^{2x}}\underset{n\to\infty}{\to}0$. Если же $x = 0$, то $\frac{1}{n^{2x}}=1$. Таким образом, $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

е) **Решение.** Поскольку при любом фиксированном $x > 0$ выполняется $e^{nx}\underset{n\to\infty}{\to}+\infty$, а при $x < 0$ выполняется $e^{nx}\underset{n\to\infty}{\to}0$, получаем $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

ж) **Решение.** Заметим, что функция чётная и $f(0) = 0$. При $0 < x < 1$ выполняется $x^{2n}\underset{n\to\infty}{\to}0$, поэтому $f(x) = 1$.

Далее, при $x = 1$ имеем $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. При $x > 1$ выполняется $x^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, при этом $\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ «почти равно» $\sqrt[n]{x^{2n}}$, а $\sqrt[n]{x^{2n}} = x^2$. Окончательно $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<-1, \\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2, & x>1. \end{cases}$

з) **Решение.** Поскольку $e^t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$, то при $t \to +\infty$ $\ln(1 + e^t) \sim \ln e^t = t$ и при $x > 0$ (заметим, что при любом фиксированном $x > 0$ выполняется $e^{xt} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$) $\ln(1 + e^{xt}) \sim \ln e^{xt} = xt$. Тогда при любом фиксированном $x > 0$ выполняется $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xt}{t}=x$. При $x < 0$ выполняется $e^{xt} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, поэтому $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}=0$. Наконец, $f(0) = 0$. Окончательно $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$

и) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}, & x<0. \end{cases}$

VIII.67. Напомним условие: функция f непрерывна в точке a и $\forall\delta > 0\ \exists x_1,\ x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)$ такие, что выполняется неравенство $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$ (т. е. в любой окрестности точки a имеются точки, в которых функция f принимает значения разных знаков). Требуется доказать, что $f(a) = 0$.

Решение. Поскольку функция f непрерывна в точке a, то по определению $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Построим две последовательности аргумента $\{x_n\}$, сходящиеся к a, следующим образом.

Положим $\delta_1 = 1$ и выберем $x_1' \in U_1(a)$: $f(x_1') > 0$ и $x_1'' \in U_1(a)$: $f(x_1'') < 0$;

для $\delta_2=\dfrac{1}{2}$ выберем $x_2' \in U_{\frac{1}{2}}(a)$: $f(x_2') > 0$ и $x_2'' \in U_{\frac{1}{2}}(a)$: $f(x_2'') < 0$;

...

для $\delta_n = \frac{1}{n}$ выберем $x'_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$: $f(x'_n) > 0$ и $x''_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$: $f(x''_n) < 0$;

...

В результате получатся две последовательности: $\{x'_n\}$: $x'_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, причём в силу непрерывности функции f выполняется $f(x'_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(a)$; $\{x''_n\}$: $x''_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, причём в силу непрерывности функции f выполняется $f(x''_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(a)$.

Поскольку $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $f(x'_n) > 0$, а $f(x''_n) < 0$, то, используя предельный переход в неравенстве, получаем, что для первой последовательности должно быть $f(a) \geqslant 0$, а для второй последовательности $f(a) \leqslant 0$. Отсюда $f(a) = 0$.

VIII.68. Верно, поскольку получается композиция непрерывных функций. Обратное неверно. Пример: $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

VIII.69. а) **Решение.** Из равенства $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, или $f(0) = 2f(0)$, следует, что $f(0) = 0$.

б) *Указание.* Доказать по индукции.

в) **Решение.** Достаточно доказать, что $f(-x) = -f(x)$. Действительно, для произвольно выбранного аргумента x_0 выполнено равенство $f(0 - x_0) = f(0) - f(x_0)$; поскольку $f(0) = 0$, то $f(-x_0) = -f(x_0)$. Требуемое следует из этого результата и пункта б).

г) **Решение.** Обозначим $\frac{x}{n} = y$; тогда $x = ny$, и равенство переписывается в виде $f(y) = \frac{1}{n} f(ny)$. Последнее уже доказано в задаче VIII.69 б).

д) **Решение.** Нам дано, что $f(1) = c$. Требуется доказать, что для всех рациональных x верно равенство $f(x) = cx$. Рациональное число x представляется (несократимой) дробью: $x = \frac{m}{n}$. Используя пункты б), в) и г) задачи VIII.69, перепишем требуемое равенство в виде $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot f(1)$. Осталось представить единицу в виде $\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}$, чтобы увидеть здесь равенство $f\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}\right)=\frac{n}{m}\cdot f\left(\frac{m}{n}\right)$, верность которого уже доказана выше.

е) *Указание.* Воспользоваться тем, что любое иррациональное число может быть представлено как предел последовательности рациональных чисел.

ж) **Решение.** Докажем, что если функция f непрерывна в точке $x = 0$, то для всех $x \in \boldsymbol{R}$ верно равенство $f(x) = cx$, где по-прежнему $c = f(0)$. Напомним, что в пункте д) это равенство доказано для всех рациональных x.

Пусть теперь x_0 — иррациональное число. Возьмём последовательность рациональных чисел, имеющую своим пределом число x_0: $t \to x_0$, $t \in \boldsymbol{Q}$. Для каждого такого t верно равенство $f(x_0 - t) = f(x_0) - f(t)$, или, по доказанному в пункте д), $f(x_0 - t) = f(x_0) - c \cdot t$. Воспользуемся предельным переходом при $t \to x_0$ в последнем равенстве, переписанном в виде $f(x_0) = f(x_0 - t) + c \cdot t$. Так как в силу непрерывности функции f в нуле $f(x_0 - t) \underset{t \to x_0}{\to} f(0)$ и $f(0) = 0$ из пункта а), то предельный переход даст $f(x_0) = c \cdot x_0$.

VIII.70. Решение. Функция будет задана на отрезке $[-2;\ 2]$ и принимать значения на отрезке $[-1;\ 1]$.

Способ 1 (формулой). На полуинтервалах вида $\left(\frac{1}{n+1};\ \frac{1}{n}\right]$ задаём линейную функцию, заметающую значениями весь полуинтервал $\left(\frac{1}{2n-1};\ \frac{1}{2n}\right]$. Таким образом мы задали функцию на $(0;\ 1]$.

На полуинтервалах вида $\left(1+\frac{1}{n+1};\ \frac{1}{n}\right]$ задаём линейную функцию, заметающую значениями весь полуинтервал $\left(\frac{1}{2n};\ \frac{1}{2n+1}\right]$. Таким образом мы задали функцию на $(1;\ 2]$.

На отрицательной части задаём всё «по нечётности». На полуинтервалах вида $\left(-\frac{1}{n};\ -\frac{1}{n+1}\right]$ задаём линейную функцию, заметающую значениями весь полуинтервал $\left(-\frac{1}{2n};\ -\frac{1}{2n-1}\right]$. Таким образом мы задали функцию на $[-1;\ 0)$.

Аналогично на полуинтервалах вида $\left(-\frac{1}{n}; -1-\frac{1}{n+1}\right]$ задаём линейную функцию, заметающую значениями весь полуинтервал $\left(-\frac{1}{2n+1}; -\frac{1}{2n}\right]$. Таким образом мы задали функцию на $[-2; -1)$. И наконец, $f(0) = 0$.

Способ 2 (описанием). Разобьём полуинтервал (0; 1] оси Ox на полуинтервалы, сходящиеся к нулю. Назовём их красными. То же самое сделаем с полуинтервалом (1; 2] — разобьём его на полуинтервалы, сходящиеся к единице. Они будут синими.

Теперь на оси Oy отрезок (0; 1] разобьём на отрезки, сходящиеся к нулю, и покрасим их через один в красный и синий цвета. Ну а теперь красные отрезки на оси Ox отобразим на красные отрезки оси Oy (соблюдая монотонность), а синие — на синие (соблюдая монотонность).

На отрицательной части определяем «по нечётности», т. е. так, чтобы при всех значениях x выполнялось условие нечётности функции $f(-x) = -f(x)$. Полученная функция, очевидно, биективно отображает отрезок $[-2; 2]$ в отрезок $[-1; 1]$.

Теперь ясно, что функция f непрерывна в нуле. В самом деле, любая последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к нулю, входит в красную область, и её красные образы будут стремиться к нулю.

Но обратная функция не непрерывна в нуле. В самом деле, возьмём последовательность синих точек $\{y_n\}$, стремящуюся к нулю. Их прообразы — синие точки на оси Ox заведомо не стремятся к нулю, так как находятся за пределами отрезка $[-1; 1]$.

§ 49. Непрерывность функций на промежутке

Материал параграфа является тем, ради чего стоит изучать главу VIII. Фактически при нехватке времени или со слабым классом можно изучать материал главы VIII следующим образом:

1. Наглядное определение непрерывной функции на промежутке.

2. Изучение материала § 49 п. 3 (без доказательств, но с разбором примеров).

3. Решение задач VIII.71—VIII.81, VIII.84, VIII.85, которые для строгого оформления решения требуют лишь теорем из § 50.

VIII.71. *Указание.* Для доказательства достаточно рассмотреть непрерывную функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, которая принимает значения разных знаков на концах отрезка $[1; 3]$, и применить первую теорему Больцано—Коши.

VIII.72. а) **Решение.** Смысл этого утверждения в том, что как бы соответствующая кривая (график такой функции) ни извивалась, она обязана где-то пересечь прямую $y = x$. Для доказательства рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - x$. Очевидно, $\varphi(0) \leqslant 0$, а $\varphi(1) \geqslant 0$. Если $\varphi(0) = 0$ или $\varphi(1) = 0$, то искомая точка уже найдена. В противном случае $\varphi(0) < 0$ и $\varphi(1) > 0$, а тогда по первой теореме Больцано—Коши существует такая точка $c \in (0; 1)$, что $\varphi(c) = 0$, т. е. $f(c) = c$.

б) *Указание.* Из результата предыдущего пункта следует, что такой функции не существует.

VIII.73. *Указание.* Многочлен нечётной степени — непрерывная функция, принимающая разные знаки при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

VIII.74. Это прямое следствие из задачи VIII.72 а), применённой к отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус убывает, а функция $y = x$ возрастает, поэтому на этом отрезке не более одного корня; на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ функции имеют разные знаки, поэтому на нём корней нет; при всех остальных x выполняется $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$, а $|\cos x| \leqslant 1$, поэтому больше корней вообще быть не может.

VIII.75. **Решение.** По условию $g(a) \geqslant f(a) = 0$ и $g(b) \leqslant h(b) = 0$. Если оказалось, что $g(a) = 0$ или $g(b) = 0$, то мы уже нашли требуемую точку c. Если же $g(a) \neq 0$ и $g(b) \neq 0$, то $g(a) > 0$ и $g(b) < 0$, а тогда, поскольку g непрерывна на отрезке $[a; b]$, по первой теореме Больцано—Коши на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка c, что $g(c) = 0$.

VIII.76. **Решение.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 20x - 30$. Найдём значения функции, например, в точках -10, -2, 0 и 10: $f(-10) = -830$; $f(-2) = 2$; $f(0) = -30$; $f(10) = 770$. Таким образом, $f(-10) < 0$; $f(-2) > 0$; $f(0) < 0$; $f(10) > 0$. Тогда по первой теореме Больцано—Коши функция имеет по меньшей мере по одному корню в каждом из трёх интервалов $(-10; -2)$, $(-2; 0)$ и $(0; 10)$.

VIII.77. **Решение.** Докажем, что $f(x) = e$ для всех $x \in [1; 5]$. Допустим, что это не так и существует точка

$x_0 \in [1; 5]$ (конечно, $x_0 \neq \pi$), в которой функция f принимает другое значение: $f(x_0) = a \neq e$ (пусть, например, для определённости $a < e$). Тогда по второй теореме Больцано—Коши функция должна принимать и все значения из интервала $(a; e)$ в силу непрерывности функции f на отрезке $[x_0; \pi]$ (или $[\pi; x_0]$). Но, как и любой непустой интервал, интервал $(a; e)$ содержит хотя бы одну (а на самом деле бесконечно много) рациональных точек. А это невозможно, так как по условию функция f принимает только иррациональные значения.

VIII.78. Не существует. **Решение.** Предположим, что такая функция f существует. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x + 1) - f(x)$. Из условия следует, что функция g непрерывна и принимает только иррациональные значения. Следовательно, функция g принимает при всех x одно и то же иррациональное значение C (см. решение задачи VIII.77).

Выберем теперь какую-нибудь точку a, для которой $f(a)$ рационально. Тогда $f(a + 1)$ иррационально, а следовательно, $f(a + 2)$ рационально. Тогда разность $f(a + 2) - f(a)$ рациональна. Но при этом $f(a + 2) - f(a) = f(a + 2) - f(a + 1) + f(a + 1) - f(a) = g(a + 1) + g(a) = 2C$ должно быть иррациональным числом, что приводит к противоречию.

VIII.79. **Решение.** Предположим, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет корень $x = a$, т. е. $f(f(a)) = a$. Обозначим $b = f(a)$, тогда $a = f(b)$. Из условия, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, следует, что a и b различны. Рассмотрим непрерывную функцию $g(x) = f(x) - x$ на отрезке $[a; b]$. На концах этого отрезка функция $g(x)$ принимает значения разных знаков: $g(a) = f(a) - a = b - a$, а $g(b) = f(b) - b = a - b$. По первой теореме Больцано—Коши функция $g(x)$ имеет корень c на интервале $(a; b)$, т. е. $g(c) = 0$. Но это значит, что $f(c) = c$, т. е. уравнение $f(x) = x$ имеет корень $x = c$, что противоречит условию.

VIII.80. **Решение.** По второй теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на отрезке $[a; b]$ своего наименьшего значения m. Таким образом, m является одним из значений функции, а потому $m > 0$. Тогда условию удовлетворяет, например, число $M = \dfrac{m}{2}$.

VIII.82. **Решение.** Пусть предел последовательности $\{x_n\}$ равен a, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Тогда в силу непрерывности функции f получим $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} f(a)$. Но $f(x_n) = x_{n+1}$, а последовательность $\{x_{n+1}\}$ также сходится к a. В силу единственности предела получаем $f(a) = a$.

VIII.83. Решение. Выберем произвольное вещественное число x и докажем, что $f(x) = f(0)$. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{x}{3^n}$. Из условия сразу следует, что $f(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{9}\right) = \ldots$, т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ постоянна. Но $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и в силу непрерывности функции f последовательность $\{f(x_n)\}$ должна стремиться к $f(0)$, т. е. $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(0)$. Поэтому $f(x_n) = f(0)$ при любом n, в частности $f(x) = f(0)$. В силу произвольности выбора x это верно для всех $x \in \boldsymbol{R}$, т. е. $f(x) = f(0)$ на $\boldsymbol{R}$.

VIII.86. Решение. Способ 1. Проведём доказательство для максимума из двух функций. Докажем непрерывность функции h_1 в точке c отрезка $[a; b]$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, стремящуюся к точке c. Если $f(c) > g(c)$, то в некоторой окрестности точки c имеет место неравенство $f(x) > g(x)$. Числа x_n, начиная с некоторого номера, попадут в эту окрестность, поэтому для них будет верно равенство $h_1(x_n) = f(x_n)$. В силу непрерывности функции f последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(c) = h_1(c)$, что и требовалось для доказательства непрерывности функции h_1 в точке c. Аналогично разбирается случай $f(x) < g(x)$.

Пусть теперь $f(c) = g(c) = d$. Разобьём последовательность $\{x_n\}$ на две подпоследовательности a_n и b_n: к первой из них отнесём те члены, для которых $f(x_n) \geqslant g(x_n)$, а ко второй — остальные. Заметим, что $h_1(a_n) = f(a_n)$, $h_1(b_n) = g(b_n)$. Но обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремятся к c, поэтому последовательность $\{f(a_n)\}$ стремится к $f(c) = d$ и последовательность $\{g(b_n)\}$ стремится к $g(c) = d$. Таким образом, обе последовательности $\{h_1(a_n)\}$ и $\{h_1(b_n)\}$ стремятся к d, а значит, последовательность $\{h_1(x_n)\}$ стремится к $d = h_1(c)$.

Способ 2. Воспользуемся тем, что $\max\{f; g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}$, а $\min\{f; g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}$. Сумма, разность и модуль непрерывных функций тоже непрерывны (см. задачу VIII.68).

VIII.87. Решение. Предположим, для определённости, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Поскольку функция f непрерывна, то в некоторой окрестности точки a она положительна, а в некоторой окрестности точки b отрицательна. Пусть

$f(x) > 0$ при $a \leqslant x \leqslant a + \delta$, $f(x) < 0$ при $b - \delta \leqslant x \leqslant b$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) + f(x + \delta)$. Она определена и непрерывна на отрезке $[a;\ b - \delta]$, причём $g(a)$ положительно как сумма трёх положительных слагаемых, а $g(b - \delta)$ отрицательно. Поэтому функция g имеет некоторый корень c, т. е. $f(c) + f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) + f(c + \delta) = 0$, что и требовалось доказать.

VIII.88. а) Пример графика такой функции представлен на рисунке 8.3.

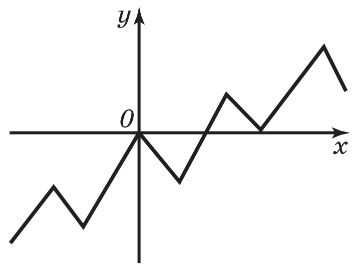


Рис. 8.3

б) Примером такой функции может служить $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$, где f — функция, из VIII. 88 а).

в) **Решение.** Пусть f — непрерывная функция, принимающая каждое своё значение ровно два раза.

Выберем произвольное значение $y_1 = f(a) = f(b)$. Пусть y_2 — наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Предположим, что оно достигается в двух точках c и d на отрезке $[a;\ b]$, т. е. $y_2 = f(c) = f(d)$. Пусть $c < d$. Рассмотрим ещё какое-нибудь значение y функции f между точками c и d, большее, чем y_1, но меньшее, чем y_2 (такое, очевидно, найдётся в силу непрерывности функции f). По первой теореме Больцано—Коши функция f принимает значение y ещё, как минимум, в двух точках: между a и c, а также между d и b, что противоречит условию.

Теперь предположим, что наибольшее значение достигается только в одной точке c отрезка $[a;\ b]$ и $y_2 = f(c)$. Тогда вне отрезка $[a;\ b]$ (пусть, для определённости, справа от b) найдётся ещё одна точка e с таким же значением: $y_2 = f(e)$. Рассмотрим произвольное значение между y_1 и y_2. Оно принимается, как минимум, три раза: между точками a и c, между точками c и b и между точками b и e. А это снова противоречит условию.

VIII.89. а) **Решение.** Рассмотрим непрерывную функцию $g(x) = f(x) - f(x + 0{,}5)$, определённую на отрезке $[0;\ 0{,}5]$. Заметим, что $g(0) = f(0) - f(0{,}5) = -f(0{,}5)$, $g(0{,}5) = f(0{,}5) - f(1) = f(0{,}5)$. Таким образом, значения функции g на концах отрезка противоположны, а потому на отрезке $[0;\ 0{,}5]$ функция g имеет корень a, т. е. $g(a) = 0$. Тогда $f(a) = f(a + 0{,}5)$, т. е. отрезок длины 0,5, соединяющий точки графика с абсциссами a и $a + 0{,}5$, параллелен оси абсцисс.

б) **Решение.** Рассмотрим непрерывную функцию $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, определённую на отрезке $\left[0;\ 1 - \frac{1}{n}\right]$.

Легко убедиться, что $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$ $= f(0) - f(1) = 0$. Поэтому среди этих слагаемых есть два, имеющие разные знаки, т. е. функция $g(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, у неё есть корень, т. е. найдётся точка a, для которой $f(a) = f\left(a + \frac{1}{n}\right)$. Значит, отрезок длины $\frac{1}{n}$, соединяющий точки графика с абсциссами a и $a + \frac{1}{n}$, параллелен оси абсцисс.

в) **Решение.** Ясно, что достаточно исследовать случай $\alpha > 0$. Приведём два способа решения этой задачи. Первый гораздо короче, но его труднее придумать; второй же — длиннее, но его проще построить.

Способ 1. Рассмотрим любую функцию $g(x)$, имеющую период α, и такую, что $g(0) = 0$, а во всех точках, не кратных α, значение g положительно. Если число α не является обратным к натуральному числу, то $g(1) > 0$. Теперь положим $f(x) = g(x) - g(1)x$. Ясно, что $f(0) = f(1) = 0$. Если $f(x) - f(x + \alpha) = 0$ для какой-то точки x, то $g(x) - g(x + \alpha) + g(1)x - g(1)(x + \alpha) = 0$. Отсюда $g(1)\alpha = 0$, что невозможно, поскольку $g(1) > 0$ и $\alpha > 0$.

Способ 2. Пусть число α находится между числами $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n-1}$, где n — натуральное число. Разделим отрезок

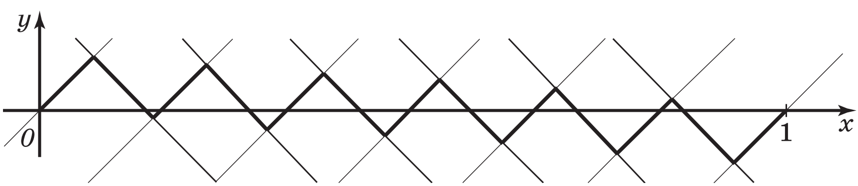


Рис. 8.4

[0; 1] на $n-1$ частей и проведём через точки деления и концы отрезка прямые с угловым коэффициентом 1. Будем называть эти прямые красными. Кроме того, разделим отрезок [0; 1] на n частей и проведём через точки деления прямые с угловым коэффициентом −1. Будем называть эти прямые синими. Ясно, что точки деления первого и второго типов на отрезке [0; 1] чередуются. Отметим точки пересечения соседних прямых и рассмотрим ломаную с вершинами в этих точках (см. рис. 8.4 для $n = 6$).

Рассмотрим любую горизонтальную хорду получившейся ломаной. Две соседние синие прямые отличаются друг от друга сдвигом на $\frac{1}{n}$ по горизонтали; поэтому любая горизонтальная хорда с концами на них имеет длину ровно $\frac{1}{n}$. Следовательно, любая горизонтальная хорда с концами на соседних звеньях ломаной имеет длину меньше $\frac{1}{n}$ (и поэтому не равную α). Горизонтальные хорды всех остальных видов содержат точки пересечения с двумя соседними красными прямыми; поэтому их длины не меньше $\frac{1}{n-1}$ (и опять же не равны α). Таким образом, построенная ломаная является графиком функции, удовлетворяющей условию.

Замечание. Об этой задаче см. замечательную статью И. М. Яглома в журнале «Квант» (1977. — № 4) или на http://kvant.mccme.ru/1977/04/o_hordah_
nepreryvnyh_krivyh.htm.

VIII.90. а) *Замечание.* Во втором издании нужно будет найти $f(2004)$, а не $f(2006)$. **Решение.** Из условия заключаем, что для всех чисел y из множества значений функции f выполняется равенство $f(y) = \frac{1}{y}$. Поскольку число 2005 входит в $E(f)$, то $f(2005) = \frac{1}{2005}$. Тогда, по следствию из второй теоремы Больцано—Коши, отрезок $\left[\frac{1}{2005};\ 2005\right]$ содержится в множестве значений функции f, т. е. $\left[\frac{1}{2005};\ 2005\right] \subset E(f)$. Значит, $2004 \in E(f)$ и, следовательно, $f(2004) = \frac{1}{2004}$.

б) Примером такой функции является непрерывная функция, равная $\frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2005};\ 2005\right]$, а на остальной части оси, принимающая значения из этого отрезка.

VIII.91. Решение. Предположим, что функция f не имеет наименьшего положительного периода. Тогда для любого натурального числа n найдётся период $T_n < \frac{1}{n}$. Убедимся, что тогда функция f постоянна.

Выберем любую точку x и докажем, что $f(x) = f(0)$. Откладывая от x отрезки, равные по длине T_n, можно получить точку x_n, такую, что $|x_n| < \frac{1}{n}$. Из периодичности функции f получаем $f(x_n) = f(x)$. Но последовательность $\{x_n\}$ стремится к нулю, а значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(0)$. Это означает, что $f(x) = f(0)$, что и требовалось доказать.

VIII.92. Решение. Очевидно, любая линейная функция $f(x) = cx + d$ удовлетворяет условию задачи. Докажем, что других таких функций нет. Прежде всего заметим, что если функция f удовлетворяет условию задачи, то это верно для функции, отличающейся от f на константу: $g(x) = f(x) + c$ (и наоборот). Поэтому будем считать, что $f(0) = 0$, и доказывать, что $f(x)$ имеет вид $f(x) = cx$.

Пусть a, b — произвольные числа. Рассмотрим последовательность, заданную условиями $x_{2n} = a$, $x_{2n-1} = b$. Нетрудно убедиться, что последовательность $\left\{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right\}$ стремится к $\frac{a+b}{2}$. Аналогично последовательность $\left\{\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}\right\}$ стремится к $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Пользуясь условием задачи, получаем соотношение

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (*)$$

Подставляя в равенство (*) значение $b = 0$, получаем $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{f(a)}{2}$. Значит, равенство (*) можно записать в виде $\frac{f(a+b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, или $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Таким образом, мы находимся в условиях задачи VIII.69, и из пункта д) этой задачи следует, что при всех рациональных x выполнено $f(x) = cx$, где $c = f(1)$.

Возьмём теперь произвольное число x и рассмотрим последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$, стремящуюся к x. Согласно задаче VII.23 (10 класс) из того, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к x, следует, что последовательность $\left\{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right\}$ также стремится к x. Поэтому последовательность $\left\{\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}\right\}$ стремится к $f(x)$. Но $f(x_i) = cx_i$, поэтому $\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{c(x_1 + \ldots + x_n)}{n}$ и, следовательно, последовательность $\left\{\frac{c(x_1 + \ldots + x_n)}{n}\right\}$ стремится к cx. Таким образом, $f(x) = cx$ для любого x, что и требовалось доказать.

§ 50. Асимптоты графика функции

Этот параграф подводит теоретическую базу под метод построения графика с помощью асимптот. Тем самым, появляется возможность исследовать на асимптоты не только графики дробно-рациональных функций.

Решения и указания к задачам

VIII.93. а) Вертикальная асимптота $x = -2$, горизонтальная асимптота $y = 1$. б) Наклонные асимптоты: $y = x$ при $x \to +\infty$; $y = -x$ при $x \to -\infty$. в) Наклонные асимптоты: $y = x + \frac{3}{2}$ при $x \to +\infty$; $y = -x - \frac{3}{2}$ при $x \to -\infty$. г) Наклонная асимптота $y = x$ при $x \to \pm\infty$.

VIII.94. г) Горизонтальная асимптота $y = 3$; в точке $x = 0$ функция разрывна, но вертикальных асимптот не имеет (не существует $\lim\limits_{x \to 0} y(x)$!).

VIII.95. а) Вертикальная асимптота $x = 0$ (заметим, что $\lim\limits_{x \to 0+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$); горизонтальная асимптота $y = 1$.

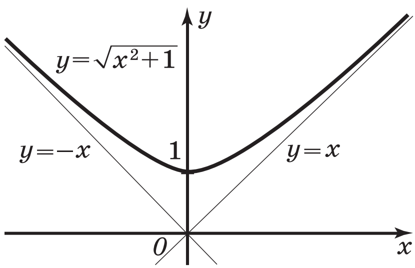


Рис. 8.5

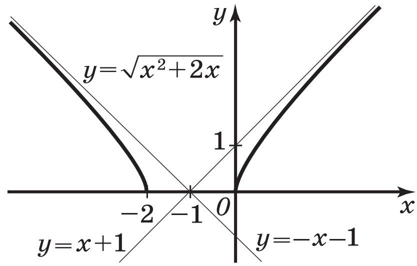


Рис. 8.6

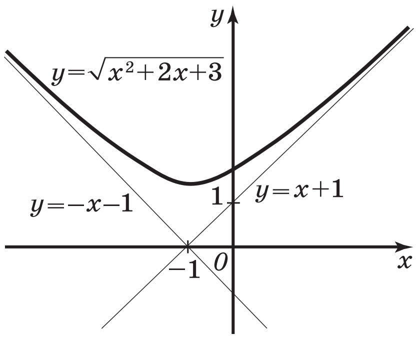


Рис. 8.7

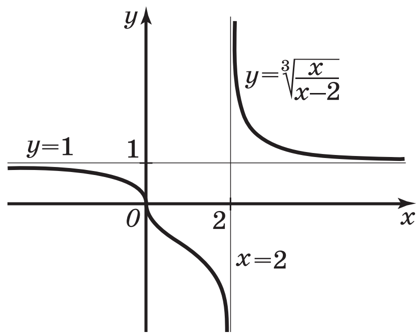


Рис. 8.8

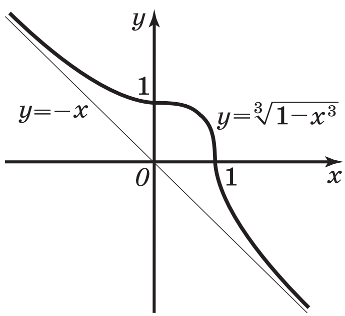


Рис. 8.9

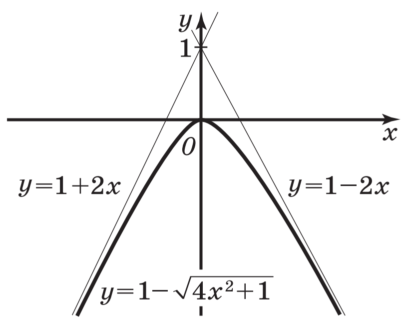


Рис. 8.10

VIII.97. а) График представлен на рисунке 8.5. б) График представлен на рисунке 8.6. в) График представлен на рисунке 8.7.

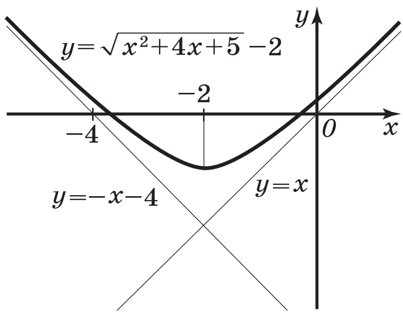


Рис. 8.11

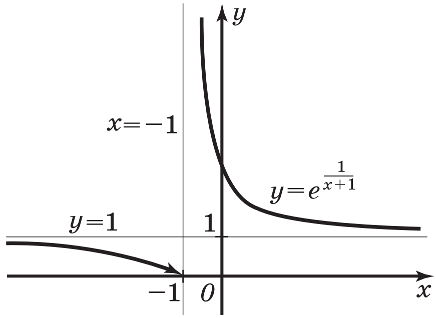


Рис. 8.12

VIII.98. а) График представлен на рисунке 8.8. б) График представлен на рисунке 8.9. в) График представлен на рисунке 8.10. г) График представлен на рисунке 8.11.

VIII.99. а) График представлен на рисунке 8.12.

Указание. Заметим, что график этой функции получается сдвигом графика функции $y = e^{\frac{1}{x}}$, который, в свою очередь, можно построить инверсией относительно оси Oy из графика $y = e^x$ (это весьма полезное упражнение и одновременно своеобразная «заготовка»).

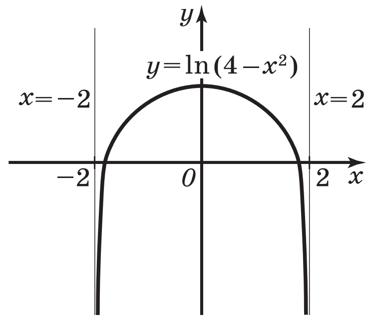


Рис. 8.13

б) График представлен на рисунке 8.13. в) График представлен на рисунке 8.14. г) График представлен на рисунке 8.15.

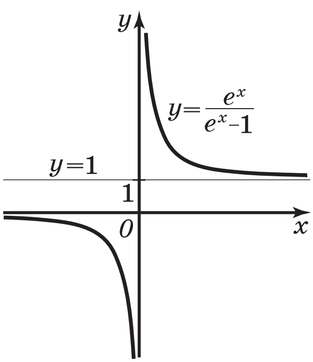


Рис. 8.14

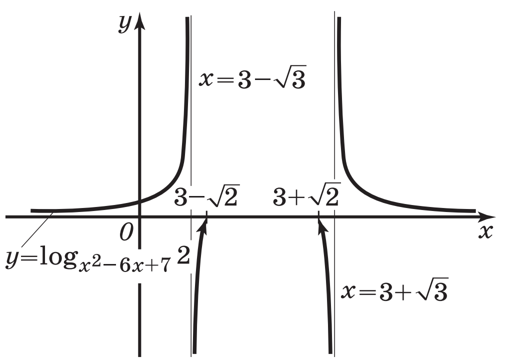


Рис. 8.15

Указание. Вообще, разумным подходом в этой задаче будет предварительное исследование функции $y = \log_2(x^2 - 2)$ и построение её графика (здесь вопросы с монотонностью и поведением функции вблизи точек разрыва решаются элементарно!). Это, заметим, ещё одно полезное и несложное упражнение для фронтального обсуждения в классе. Далее, инверсией относительно оси Oy получаем график функции $y = \dfrac{1}{\log_2(x^2 - 2)}$. График функции $y = \log_{x^2 - 6x + 7} 2 = \dfrac{1}{\log_2(x^2 - 6x + 7)} = \dfrac{1}{\log_2((x-3)^2 - 2)}$ получаем из графика функции $y = \dfrac{1}{\log_2(x^2 - 2)}$ сдвигом вправо на 3 единицы.

д) График представлен на рисунке 8.16. е) График представлен на рисунке 8.17.

ж) График представлен на рисунке 8.18. *Указание*. Как и в предыдущей задаче, удобно строить график, исходя из графика синуса, пользуясь соображениями монотонности и поведения функции вблизи точек разрыва.

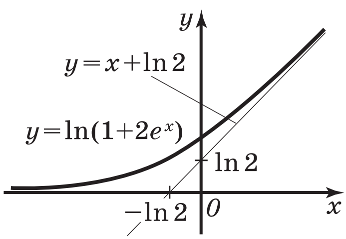


Рис. 8.16

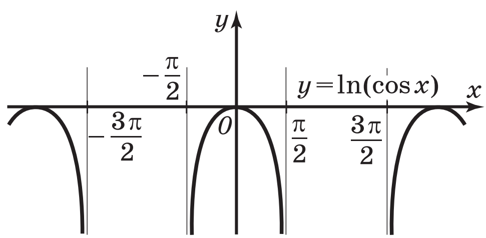


Рис. 8.17

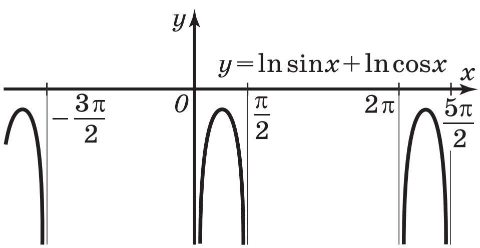


Рис. 8.18

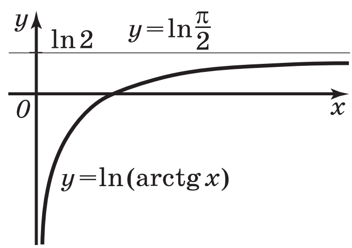


Рис. 8.19

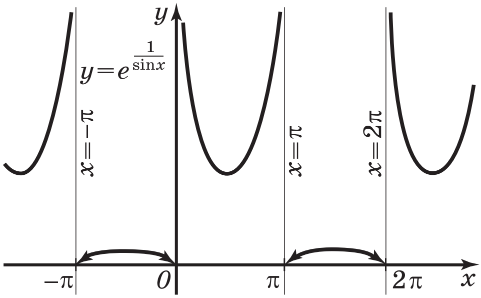


Рис. 8.20

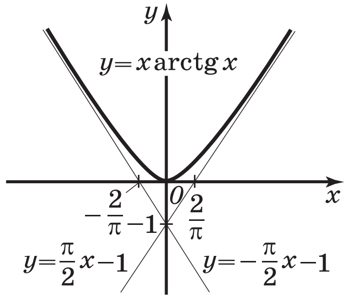


Рис. 8.21

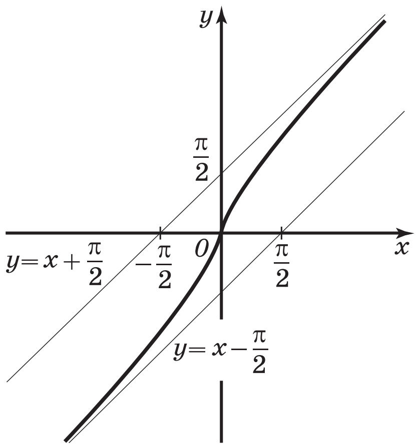


Рис. 8.22

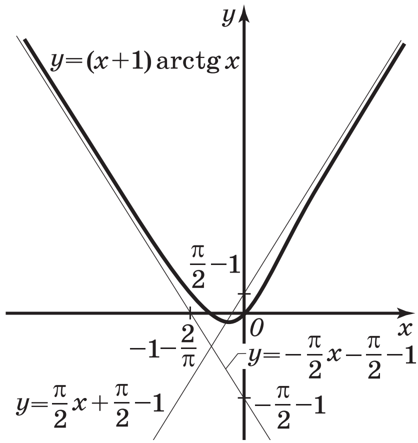


Рис. 8.23

з) График представлен на рисунке 8.19.

и) График представлен на рисунке 8.20.

VIII.100. а) График представлен на рисунке 8.21.

б) График представлен на рисунке 8.22.

в) График представлен на рисунке 8.23.

г) *Указание.* $D(y) = (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; асимптота $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \to \pm\infty$. На луче $[1;\ +\infty)$ функция возрастает, а на $(-\infty;\ -1]$ выяснить характер монотонности не удаётся (заметим, что и использование производной неудобно в силу возникающих технических проблем). Рекомендуется продемонстрировать на компьютере, как же на самом деле выглядит график. С такими проблемами мы

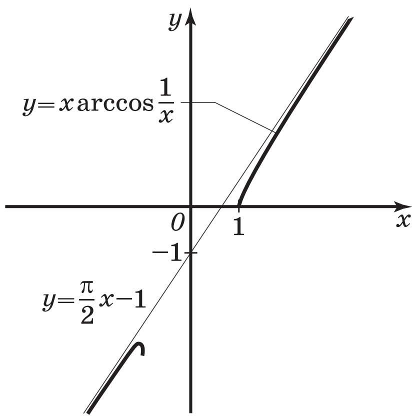


Рис. 8.24

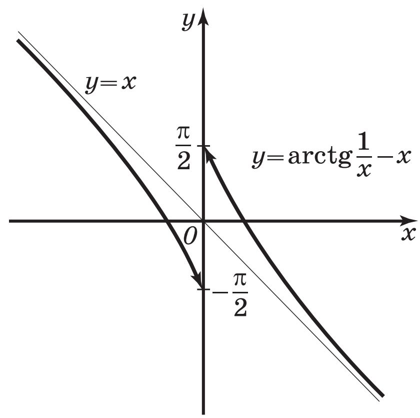


Рис. 8.25

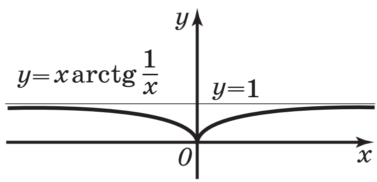


Рис. 8.26

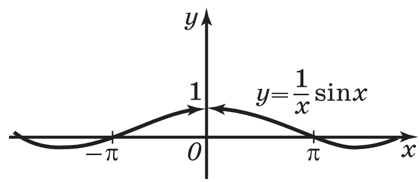


Рис. 8.27

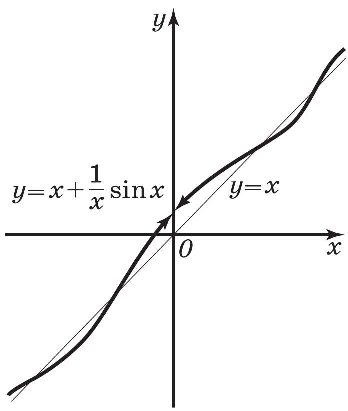


Рис. 8.28

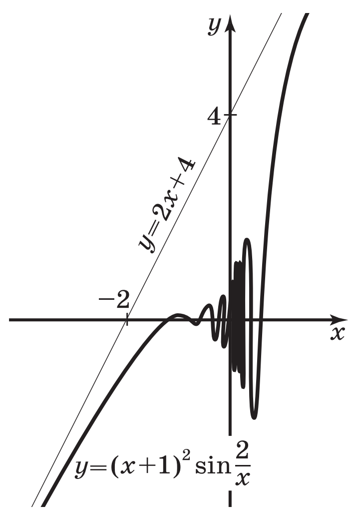


Рис. 8.29

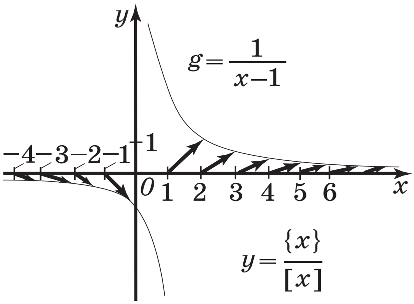


Рис. 8.30

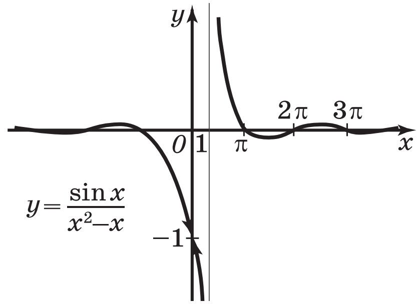


Рис. 8.31

столкнёмся ещё в некоторых пунктах этого номера. График представлен на рисунке 8.24.

д) График представлен на рисунке 8.25. е) График представлен на рисунке 8.26. ж*) График представлен на рисунке 8.27. з*) График представлен на рисунке 8.28. и*) График представлен на рисунке 8.29.

VIII.101. а) Так как при $x \geqslant 1$ имеем $\{x\} < 1$ и $[x] > x - 1$, получаем $\frac{\{x\}}{[x]} < \frac{1}{x-1}$. График представлен на рисунке 8.30.

б) График представлен на рисунке 8.31.

в) Наклонная асимптота $y = x$. График представлен на рисунке 8.32. График расположен между кривыми $g_1(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ и $g_2(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$, что доказывается аналогично задаче VIII.101 а).

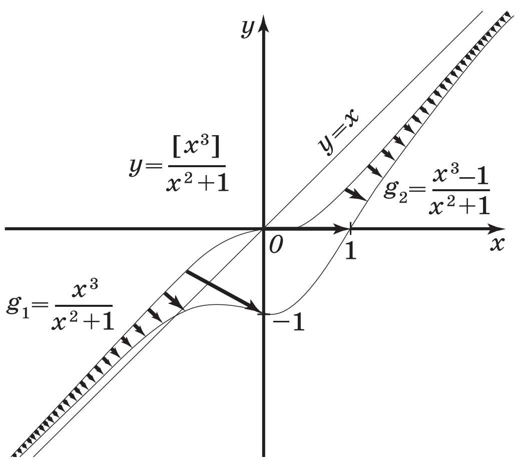


Рис. 8.32

VIII.102. а) **Решение.** Пусть график чётной функции f имеет асимптоту $y = kx + b$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{f(-t)}{-t}=-\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{t}=-k$ (мы сделали замену $t = -x$ и воспользовались чётностью функции: $f(-t) = f(t)$). С другой стороны, из того что функция f имеет одну и ту же асимптоту при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$. Тем самым, $k = -k$, откуда $k = 0$, т. е. уравнение асимптоты имеет вид $y = b$, что и означает, что асимптота горизонтальная.

б) **Решение.** Пусть график нечётной функции f имеет асимптоту $y = kx + b$. Коль скоро $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(-x)-k\cdot(-x))$. Воспользовавшись равенством $f(-x) = -f(x)$ (в силу нечётности функции) и вынося знак «минус» за знак предела, получаем $-\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=-b$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=-b$. С другой стороны, поскольку асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ одна и та же, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$, т. е. $b = -b$, откуда $b = 0$. Следовательно, уравнение асимптоты имеет вид $y = kx$ и асимптота проходит через начало координат.

Глава IX. Производная и её применения

Производная — важная и объёмная глава в курсе анализа 11 класса. Бо́льшая часть материала этой главы входит в федеральный компонент Государственного стандарта, задачи, решаемые с помощью производной, есть в Едином государственном экзамене, но очень хотелось бы, чтобы изложение материала этой главы стало бы не только изложением ряда (безусловно, важных) алгоритмов, как то: нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, промежутков её возрастания и убывания, построения графиков функций и доказательства тождеств, — но и рассказом о «неформальном» смысле производной (производная как скорость изменения роста функции, связь производной и касательной, геометрические интерпретации многих теорем), знакомством с замечательными теоремами дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа), проникновением в суть понятия производной.

План изучения материала главы IX приведён в таблице (количество часов дано для 4 и 5 часов алгебры и начал математического анализа в неделю).

Глава IX. Производная и её применения	**22**	**32**
Понятие производной. Производная как скорость	2	2
Производные некоторых элементарных функций	3	3
Контрольная работа № 3	1	1
Задача о касательной. Уравнение касательной	2	2
Производная произведения, частного, композиции функций	3	3
Первообразная. Неопределённый интеграл	4	4
Контрольная работа № 4	2	2
«Французские» теоремы		2
Исследование функции с помощью производной	4	4
Контрольная работа № 5	1	1
Построение эскизов графиков с помощью производной. Решение задач с помощью производной		6
Контрольная работа № 6		2

§ 51. Определение производной

Одна из основных задач изучения производной для школьников — овладеть удобным инструментом исследования функции (промежутков возрастания, убывания, выпуклости, нахождения точек экстремума, наибольшего и наименьшего значений), построения эскиза её графика. В то же время, как мы уже отмечали, не хотелось бы, чтобы решение задач на исследование функции превратилось в использование формальных алгоритмов, поэтому мы считаем важным уже с первого знакомства с производной подчёркивать связь производной и свойств функции. В этой связи «различные смыслы» производной представляются более важными, нежели определение производной как предела. Они обычно более понятны для школьников и фактически отвечают на вопрос «А зачем нам нужна производная?», в отличие от иногда скучных задач на вычисление производной по определению.

В этом параграфе при первом знакомстве с производной мы встречаемся с задачами двух типов: задачами, связанными с определением производной как предела (вычисление производной по определению в точке и на области определения, доказательства свойств производной, связанные со свойствами предела, — задачи IX.12—IX.15, IX.20, IX.21 и др.), и задачами, призванными сформировать у учащихся неформальное понимание понятия производной. Это задачи, в которых производная интерпретируется как скорость (например, задачи IX.7, IX.8); задачи, представляющие функцию, имеющую производную как «гладкую функцию» (т. е. функция не имеет производной, если в данной точке у неё «излом», — задачи IX.22—IX.25, IX.30); задачи о связи производной и свойств функции (возрастания, убывания, равенства нулю производной в точках экстремума — задачи IX.13, IX.14, IX.40).

При этом, решая задачи второго типа, мы считаем возможным оставаться на неформальном уровне доказательства и не требовать строгих рассуждений, основанных на свойствах предела (см. комментарий к задаче IX.22).

Задачи IX.1—IX.6 являются стандартными задачами на определение производной как предела и фактически являются задачами на вычисление пределов. Похожие примеры были разобраны в тексте параграфа.

Задачи IX.13 и IX.14 хороши для отработки навыков работы с определением производной через предел, повторением свойств предела, а также являются пропедевтикой к изучению теоремы о необходимом условии экстремума ($f'(x_0) = 0$).

Решения и указания к задачам

IX.5. *Замечание.* Полезно обратить внимание учащихся на то, что данные функции не имеют производной в точках x_0, где подкоренное выражение равно нулю. Из вычислений ясно, что в этих случаях конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ не существует, а значит, нет и производной. Можно также пояснить учащимся, что в каком-то смысле в этих точках скорость роста функции «бесконечна» — при приближении к «вершине» графика корня скорость роста функции становится сколь угодно большой (а производная по нашему определению — конечное число, поэтому в данной точке её не существует), и проиллюстрировать это на графике. Если с учащимися был разговор про касательную, то можно сказать, что в данных точках касательная является вертикальной прямой (или вернуться к этому разговору при изучении материала § 53).

IX.7. Пусть промежуток $(a;\ b) = (1;\ 2)$. а) $f(x) = x + 1$; $g(x) = x$. б) $f(x) = x + 5$; $g(x) = 2x$.

IX.8. а) Да; например $f(x) = e^x$. б) Да; например $f(x) = e^{-x}$.

IX.11. а) $f'(x_0)$. **Решение.** Так как по условию функция f в точке x_0 имеет конечную производную, то существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. По определению (по Гейне) предела функции, для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, будет существовать предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$. Рассмотрев $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$, получим ответ.
б) $k \cdot f'(x_0)$. *Указание.* Рассмотреть последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = x_0 + \frac{k}{n}$ (см. задачу IX.11 а).

IX.12. 2. **Решение.** $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)g(x)}{x - x_0} = g(x_0) = 2$. Предпоследнее равенство верно в силу непрерывности функции g в точке x_0.

IX.13. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0}$. При $x > x_0$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{x - x_0} \geqslant 0$, поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} \geqslant 0$. Аналогично при $x < x_0$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{x - x_0} \leqslant 0$, поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} \leqslant 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0$, что и требовалось доказать.

IX.14. Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = g(x) - f(x)$. Для функции h выполняются условия задачи IX.13, поэтому $h'(x_0) = g'(x_0) - f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

IX.15. а) **Решение.** Пусть f — чётная функция. Тогда $f'(-x_0) = \lim\limits_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} = -\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -f'(x_0)$. Второе равенство верно в силу замены переменной x на $-x$ (см. теорему о замене переменной в пределе).

IX.16. $f(x) = x^3 + 1$.

IX.17. а) Да. *Указание.* См. задачу IX.16.

IX.19. Нет, например, $f(x) = x$ непериодическая функция, а её производная — периодическая.

IX.20. а) Верно. Доказательство от противного: если бы функция $f + g$ имела производную в точке, то и функция $g = (f + g) - f$ тоже имела бы производную в этой точке. б) Неверно. Например, $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ в нуле.

IX.21. а) $\frac{k(k+1)}{2} f'(x_0)$. **Решение.** Воспользовавшись результатом задачи IX.11, получим

$$\lim_{n \to \infty}\left(n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right)\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)\right)\right) + \lim_{n \to \infty}\left(n\left(f\left(a + \frac{2}{n}\right) - f(a)\right)\right) + \ldots +$$

$$+ \lim_{n \to \infty}\left(n\left(f\left(a + \frac{k}{n}\right) - f(a)\right)\right) = f'(x_0) + 2f'(x_0) + \ldots + kf'(x_0) =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} f'(x_0)$$

IX.22. а) $\boldsymbol{R}\backslash\{-2\}$. **Решение.** Из графика функции видно, что график имеет излом в точке $x = -2$, а в остальных точках функция гладкая. б) $\boldsymbol{R}\backslash\{0{,}5\}$.

Замечание. Конечно, рассуждение, приведённое в этой задаче, достаточно неформально, но нам кажется, что на первом этапе знакомства с производной достаточно им и ограничиться, не требуя от учащихся рассуждений, подобных рассуждениям п. 5 § 51 учебника, связанных с понятиями левосторонней и правосторонней производной. Сильных учащихся, которым данные рассуждения не покажутся достаточно строгими, можно направить к учебнику.

IX.23. а) $\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$. **Решение.** В точке $x = 1$ функция разрывна, а значит, производной не существует. б) $\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$. **Решение.** В точке $x = 1$ выполнено $1 = f'_+(1) \neq f'_-(1) = 2$.

в) $\boldsymbol{R}$. **Решение.** Производная существует всюду, кроме точки $x = 2$ (см. утверждение п. 4 § 51). В точке $x = 2$ выполнено $f'_+(1) = 4 = f'_-(1)$, т. е. производная существует и в точке $x = 2$.

Замечание. В этой задаче также можно апеллировать к графику, но задача IX.23 в) показывает, что в случае более сложных функций, чем кусочно-линейные, интуиция может и обманывать. В самом деле: а есть излом у данной функции в точке $x = 2$ или нет? Расчёты показывают, что нет — функция гладкая, производная в точке $x = 2$ существует, но нетрудно показать, что для любой другой прямой (отличной от прямой $y = 4x - 4$, которая является касательной к $y = x^2$ в точке $x = 2$) излом был бы и производной не существовало бы, хотя по графику, быть может, это увидеть было бы и непросто.

IX.24. а) $\boldsymbol{R}\backslash\{-2;\ 0\}$. б) $\boldsymbol{R}\backslash\{0;\ 0{,}5\}$. в) $\boldsymbol{R}\backslash\{0;\ 1;\ 2\}$. г) $\boldsymbol{R}\backslash\{0;\ 0{,}5;\ 1\}$. *Указание.* Проще всего ответить на вопрос задачи по графику кусочно-линейной функции.

IX.25. а) $\boldsymbol{R}$. **Решение.** Производная существует всюду, в нуле $f'_+(0) = 0 = f'_-(0)$.

б)—г) *Указание.* По графикам видно, что производная существует всюду, кроме точек, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль.

IX.26. а) $\{0\}$. б) $\varnothing$. в) $\{0\}$. г) $\varnothing$. *Указание.* Данные функции разрывны во всех точках, кроме точки $x = 0$, поэтому производная может существовать только в этой точке. Пусть последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и иррациональных чисел $\{y_n\}$ стремятся к нулю. Рассмотрим пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0}$, которые должны быть равны $f'(0)$, если производная в нуле существует. Нетрудно показать, что в случаях а) и в) данные пределы разные (и следовательно, при $x = 0$ производной не существует), а в случаях б) и г) они равны нулю для любых взятых последовательностей, и, следовательно, для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(z_n) - f(0)}{z_n - 0} = 0$, а значит, производная в нуле существует и равна нулю.

IX.27. в) $(-\infty;\ 5)$. г) $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$. д) $\boldsymbol{R}\backslash\left\{-\dfrac{7}{3}\right\}$.

IX.28. $f'(0) = 0$, $f'(2) = 4$, $f'(-2) = -32$. *Указание.* Задача решается аналогично примеру 11 из § 51. Обратим внимание, что если в некоторой окрестности точки, в которой мы вычисляем производную, функция совпадает с функцией, формулу производной которой мы знаем, то можно этой формулой воспользоваться (например, для точки $x = 2$), а если такой окрестности нет (например, для точки $x = 0$), то вычислять производную нужно по определению, рассматривая при этом правосторонний и левосторонний пределы. См. утверждение на с. 66 учебника.

IX.29. $f'(0) = 1$, $f'(2) = 4$, при $x = 1$ производной не существует. *Указание.* Решение аналогично решению задачи IX.28.

IX.30. а) $f(x) = |x - 5|$. б) $f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2|$.

IX.31. $b^2 - 4ac > 0$. *Указание.* Функция $y = |ax^2 + bx + c|$ имеет производную в каждой точке, если у неё не более одного корня, т. е. $b^2 - 4ac \leqslant 0$.

IX.32. а) $f(x) = x^2 D(x)$. б) $f(x) = (x - 1)^2 D(x)$. *Указание.* Воспользоваться теоремой на с. 64 учебника.

IX.33. $f(x) = \{x\}$ или $f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$.

IX.34. $a > 0$. **Решение.** Найдём односторонние производные функции f в нуле: $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} x^a = 0$ при любом a, $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} (-x^a) = 0$ при любом $a > 0$. Таким образом, при любом $a > 0$ существует производная данной функции в нуле.

IX.36. Это функция $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \boldsymbol{Q}, \\ -1 \text{ при } x \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases}$

IX.38. а) Непрерывная при $a + b = 1$; дифференцируема при $a = 1$ и $b = 0$. б) Непрерывна при $a = 0$; не дифференцируема ни при каких значениях a. *Указание.* Решение аналогично решению примера 12 § 51 учебника.

IX.39. $f'_-(x_0) = -\varphi(x_0)$; $f'_+(x_0) = \varphi(x_0)$.

IX.40. Нет, например $x_0 = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$. *Указание.* Подробное обсуждение данной задачи см. в примере 12 § 51 учебника, однако его имеет смысл провести только с самыми сильными учащимися.

IX.41. **Решение.** Необходимо и достаточно, чтобы в корнях функции (т. е. в точках x_0, в которых $f(x_0) = 0$) производная функции f равнялась 0. В самом деле, нетрудно показать, что если $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 знак функции f будет совпадать со знаком $f(x_0)$, откуда сразу же следует существование производной функции $|f|$ в точке x_0.

Если же $f(x_0) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{x - x_0}$ (т. е. производная функции $|f|$ в точке x_0) существует в том и только в том случае, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0$ (т. е. производная функции f в точке x_0 равна нулю).

IX.42. Решение. Рассмотрим последовательность различных корней функции $\{x_n\}$, сходящуюся к точке c (это возможно сделать по теореме Больцано—Вейерштрасса — из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, таким образом можно рассмотреть любую последовательность различных корней, а потом извлечь из неё сходящуюся подпоследовательность). Тогда, в силу непрерывности функции в точке c, число c также является корнем функции f. При этом

$$f'(c) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \lim_{n \to \infty} \frac{0 - 0}{x_n - c} = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 52. Производные некоторых элементарных функций

При изучении материала этого параграфа начинается формирование навыков вычисления производной. Ничего сложного в этом нет, но нам кажется необходимым добиться от учащихся безусловного запоминания формул производных элементарных функций, тем более что задачи на исследование функции с помощью производной встречаются в задачах ЕГЭ. Авторы участвовали в проверке задач ЕГЭ и могут отметить огромное количество ошибок при решении этих задач, причём, как правило, ошибки связаны именно с незнанием формул производных элементарных функций и правил дифференцирования.

Задачи IX.48, IX.53 вносят разнообразие в монотонные технические задачи на вычисление производной и приглашают учащихся рассуждать, а не только заниматься механическими вычислениями. Какие из этих задач предлагать учащимся, зависит от уровня класса.

Решения и указания к задачам

IX.48. а) $a > 0$. б) $a = 0$. **Решение.** $f'(x) = 2ax + 3$. Для того чтобы производная была положительна всюду, необходимо и достаточно, чтобы $2a = 0$, т. е. $a = 0$. в) $a > \frac{1}{3}$. **Решение.** $f'(x) = 3x^2 + 2x + a$. Для того чтобы производная была положительна всюду, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант соответствующего трёхчлена был отрицательным, т. е. $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a < 0$, откуда получаем $a > \frac{1}{3}$.

г) $|a| < 1$. *Указание.* Решение задачи аналогично решению задачи IX.48 в).

IX.53. а) $|a| < 3$. **Решение.** $f'(x) = 3 - a\sin x$. Нетрудно заметить, что множество значений производной есть отрезок $[3 - |a|; 3 + |a|]$ и производная принимает значения одного знака в том и только в том случае, когда $3 - |a| > 0$, т. е. $|a| < 3$.

б) $a < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Решение.** $f'(x) = ax^2 - 2x + a - 1$. Для того чтобы производная принимала значения одного знака, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант соответствующего трёхчлена был отрицательным, т. е. $1 - a(a - 1) < 0$, откуда получаем, что

$$a < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ или } a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

IX.58. $(-1)^n n!$. **Решение.** $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0}(x - 1)(x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - n) = (-1)^n n!$.

§ 53. Задача о касательной. Уравнение касательной

Если позволяет время и уровень класса, то обсуждению вопроса «Что такое касательная к графику функции?» можно посвятить целый урок. Отметим некоторые моменты, которые можно разобрать с учащимися.

В учебнике даётся определение касательной как прямой, проходящей через точку графика с угловым коэффициентом, равным производной в данной точке, однако если начать рассказ про касательную с этого определения, то учащимся может быть совсем непонятно, откуда это определение появилось и почему угловой коэффициент касательной должен быть равен производной.

Вместо этого можно предложить учащимся самим дать определение касательной. До этого они встречались с касательной к окружности и определяли касательную к окружности как прямую, имеющую одну общую точку с окружностью. Поэтому часто в качестве первого определения они предлагают такое же определение и для касательной к графику функции. Учащиеся сами чаще всего могут привести и «контрпример» к данному определению. Слово «контрпример» взято в кавычки, потому что формального определения касательной ещё не дано, но не вызывает вопросов тот факт, что прямая $y = -x$ не является касательной к графику функции $y = x^3$ в нуле, хотя и имеет с ним всего одну общую точку, таким образом являясь контрпримером к этому «определению».

Другим возможным «определением», к которому часто приходят учащиеся, является определение касательной как такой прямой, график которой лежит по одну сторону от графика функции. Опять-таки сами учащиеся часто придумывают контрпримеры: касательные к графикам функций $y = x^3$ и $y = \sin x$ в нуле.

Наконец, может появиться определение касательной как «предельного положения секущих» (подробнее об этом написано в тексте параграфа). В этом определении плохо то, что оно неформально — определения «предельное положение секущих» у нас нет!

Формализовать определение удаётся, рассмотрев угловые коэффициенты секущих. Их предел оказывается равен производной функции в точке (можно выписать угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $(x_0;\ f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$ и дать учащимся возможность догадаться, что предел при $\Delta x \to 0$ этих коэффициентов будет равен производной). После этого становится понятно, откуда берётся определение касательной в точке x_0 как прямой, проходящей через точку графика $(x_0;\ f(x_0))$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$.

Стандартными являются задачи на составление уравнения касательной в данной точке или уравнения касательной, проходящей через данную точку. Примеры решения подобных задач (IX.62 — IX.64) разобраны в тексте параграфа. Они достаточно стандартны. Нужно записать уравнение касательной к графику в произвольной точке с абсциссой t и, подставив вместо x и y координаты точки, через которую должна проходить касательная, получить условие-уравнение на t. Тем не менее задача IX.64 иногда вызывает сложности у учащихся, и авторам представляется существенным добиться понимания решения этой задачи (в частности, того, чем отличаются задачи IX.64 а) и IX.64 б)). Можно предварительно задать наводящие вопросы: сколько таких касательных может быть в пункте а)? (Одна, так как касательная к графику функции в данной точке единственна.) А в пункте б)? (Несколько, так как касательные в других точках графика могут проходить через точку графика с абсциссой -4, т. е. через точку $(-4;\ f(-4)) = (-4;\ -4)$.) Связаны ли между собой как-нибудь ответы в пунктах а) и б)? (Ясно, что касательная, найденная в пункте а), будет являться ответом и в пункте б).)

В учебнике приведено достаточно большое количество симпатичных (в том числе весьма сложных) задач на касательную. Предлагать их можно, исходя из уровня класса, равно как и предъявлять требования к подробности обоснования решения. Например, соображение о том, что приведёнными в начале задачи IX.82 рассуждениями мы получили искомое множество (а для учащегося уже результат, если он получил ответ в этой задаче!), но не доказали, что вершины заполняют всё это множество, нужно упомянуть, но вряд ли стоит останавливаться на нём подробно.

Некоторые из предложенных задач решаются проще: с использованием фактов, изложенных в других задачах. Такие задачи можно предлагать сериями (или ссылаться при решении задачи на факты, доказанные в других задачах). Например, при решении задачи IX.84 удобно представлять, сколько касательных можно провести из различных точек к параболе (задача IX.79).

Решения и указания к задачам

IX.62. $y = -6x - 1$, $y = -10x - 9$.

IX.63. $y = 3x + 2$, $y = 11x - 14$.

IX.64. $y = 9x + 32$. **Решение.** Запишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ в точке графика с абсциссой x_0: $y = \left(\frac{3}{4}x_0^2 - 3\right)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^3 - 3x_0 = \left(\frac{3}{4}x_0^2 - 3\right)x - \frac{1}{2}x_0^3$. Подставим $x_0 = -4$, получим $y = 9x + 32$.

б) $y = 9x + 32$, $y = -4$. **Решение.** Подставим в уравнение $y = \left(\frac{3}{4}x_0^2 - 3\right)x - \frac{1}{2}x_0^3$ (1), полученное в предыдущем пункте, $x = -4$ и $y = -4$ (точка графика с абсциссой -4 — это точка с координатами $(-4; -4)$). Получим уравнение относительно x_0: $-4 = \left(\frac{3}{4}x_0^2 - 3\right)(-4) - \frac{1}{2}x_0^3 \Leftrightarrow x_0^3 + 6x_0^2 - 32 = 0$.

Решая это уравнение, можно воспользоваться тем фактом, что один из корней этого уравнения мы знаем. В самом деле, касательная к графику в точке $(-4; -4)$, конечно, проходит через данную точку, поэтому -4 должно быть корнем уравнения. Разделив $x_0^3 + 6x_0^2 - 32$ на $x_0 + 4$, легко найти оставшиеся корни уравнения: $x_0 = -4$ или $x_0 = 2$. Подставив эти значения в уравнение (1), получим $y = 9x + 32$, $y = -4$.

IX.65. *Указание.* Необходимо записать уравнения касательных в точках с данными абсциссами. Заметим, что только условия $f'(1) = f'(-1)$ недостаточно, так как касательные могут совпадать.

IX.66, IX.67. *Указание.* Задачи решаются аналогично примеру 20 из § 53.

IX.66. (1; 0) и (−1; −4).

IX.67. $\left(\sqrt{\frac{1}{3}};\ 5-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};\ 5+\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

IX.68. $10\frac{2}{3}$. **Решение.** Касательная в точке $(x_0;\ f(x_0))$ параллельна оси абсцисс при выполнении условий $f'(x_0) = 0$, $f(x_0) \neq 0$. Отсюда получаем $x_0 = -1$ или $x_0 = 3$. Расстояние между касательными в соответствующих точках равно $|f(3) - f(-1)| = 10\frac{2}{3}$.

IX.69. $x_0 = \frac{2}{3}$. *Замечание.* Обратим внимание, что производные равны и при $x_0 = 0$, но при этом касательные совпадают.

IX.70. Касательные к графикам данных функций в точках с абсциссой 1 параллельны (и не совпадают!).

IX.71. Да, в точке (2; −0,5). *Указание.* Можно найти точку (она окажется единственной) пересечения гиперболы и данной прямой $\left(y = 1 - \frac{x}{4}\right)$ и проверить, что эта прямая окажется касательной в найденной точке.

IX.72. Решение. Для того чтобы прямая $y = x + a$ являлась касательной к графику функции $f(x) = 2\sqrt{x}$ в точке графика с абсциссой x_0, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 1$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{x_0}} = 1$, откуда получаем, что $x_0 = 1$. Осталось учесть, что прямая должна проходить через точку с координатами $(1;\ f(1))$, т. е. (1; 2), для этого должно выполняться условие $2 = 1 + a$, откуда $a = 1$.

IX.73. $b^2 - 4ac = 0$.

IX.74. (0,5; −ln2). **Решение.** Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно −1. А значит, должно выполняться условие $(\ln x)' = 2$, откуда $x = 0{,}5$.

IX.75. *Указание.* Аналогичная задача разобрана в тексте § 53. В каждом случае необходимо в общем виде записать уравнение касательной к графику первой функции (в произвольной точке x_0), уравнение касательной к графику второй функции (в произвольной точке x_1) и получить систему уравнений, приравняв угловые коэффициенты и свободные члены урвнений касательных. б) $y = -x - \frac{9}{4}$.
г) $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2} \cdot \ln 2$.

IX.76. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **Решение.** Тангенс угла наклона касательной в точке равен производной функции в точке, таким образом, нужно найти точки, в которых производная данной функции принимает наибольшее значение. Найдём $y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$. Наибольшее значение y' принимает, когда $\frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

IX.77. $y = -2x - 4$. **Решение.** Построим график функции

$$y = x^2 - 2x - 4|x| = \begin{cases} x^2 - 6x, & x \geqslant 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

и изобразим на нём касательную (рис. 9.1). Из рисунка ясно, что искомая касательная будет касаться графика в точках с положительной и отрицательной абсциссами. Уравнение касательной в точках с положительной абсциссой x_0 имеет вид $y = (2x_0 - 6)x - x_0^2$, уравнение касательной в точках с отрицательной абсциссой x_1 имеет вид $y = (2x_1 + 2)x - x_1^2$. Касательные должны совпадать, т. е. имеет место система $\begin{cases} 2x_0 - 6 = 2x_1 + 2, \\ -x_0^2 = x_1^2, \end{cases}$ решая которую, получаем $x_0 = 2$ и уравнение искомой касательной $y = -2x - 4$.

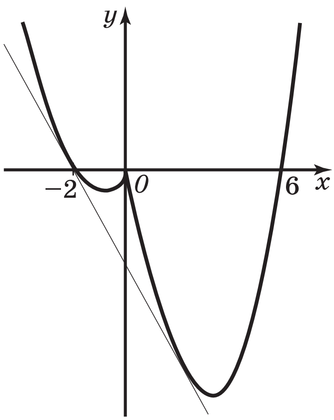


Рис. 9.1

Замечание. Если бы мы не «увидели» касательную сначала, то могли бы пробовать искать касательные, касающиеся графика в двух точках с двумя положительными или двумя отрицательными абсциссами, решая соответствующие системы (которые, конечно, решений бы не имели).

IX.79. Решение. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой t: $y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$. Эта касательная проходит через точку $(x_0;\ y_0)$ в том и только в том случае, когда $y_0 = 2tx_0 - t^2$. Сколько решений у данного уравнения (относительно t), столько касательных проходит через точку $(x_0;\ y_0)$. Уравнение $t^2 - 2tx_0 + y_0 = 0$ квадратное относительно t и имеет два корня, если его дискриминант больше нуля; один корень, если дискриминант равен нулю; не имеет корней, если дискриминант отрицательный. $D = 4x_0^2 - 4y_0$. Таким образом, через точку $(x_0;\ y_0)$ можно провести одну касательную, если $x_0^2 = y_0$ (точка лежит на параболе $y = x^2$); две касательные, если $x_0^2 > y_0$ (точка лежит вне параболы $y = x^2$), ни одной касательной, если $x_0^2 < y_0$ (точка лежит внутри параболы $y = x^2$).

Замечание. Задача допускает естественное обобщение: если дана произвольная квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, то: через точки внутри соответствующей параболы не проходит ни одной касательной; через точки на параболе — одна касательная; через точки вне параболы — две касательные к графику данной квадратичной функции.

IX.80. -1. **Решение.** Уравнение касательной в точке с абсциссой a: $y = e^a x + e^a(1 - a)$. Эта касательная проходит через точку $(b;\ 0)$ тогда и только тогда, когда $e^a b + e^a(1 - a)$, откуда $b - a = -1$.

IX.81. *Указание.* Задача аналогична примеру 25 из § 53. б) Все точки прямой $y = -1$.

IX.82. $y = 4x + 3$. **Решение.** Запишем условия того, что парабола, задаваемая уравнением $y = x^2 + ax + b$, касается прямой $y = 4x - 1$ в точке x_0: $\begin{cases} 2x_0 + a = 4, \\ b - x_0^2 = -1. \end{cases}$ Из этой системы следует, что $b = \frac{a^2}{4} - 2a + 3$ (выразили из первого уравнения x_0 и подставили во второе).

В то же время вершина параболы $y = x^2 + ax + b$ имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};\ b - \frac{a^2}{4}\right) = \left(-\frac{a}{2};\ 3 - 2a\right)$. В этом равенстве мы учли полученное выше условие, связывающее a и b. Множество точек с координатами $\left(-\frac{a}{2};\ 3 - 2a\right)$, где $a \in \boldsymbol{R}$, — это прямая $y = 4x + 3$. Для того чтобы доказать, что эта прямая является ответом (а пока мы на самом деле доказали только то, что все искомые вершины лежат на этой прямой, но не факт, что заполняют её), осталось показать, что для любого a найдётся b (а именно равное

$\frac{a^2}{4}-2a+3$), такое, что парабола, задаваемая уравнением $y = x^2 + ax + b$, касается прямой $y = 4x - 1$.

IX.83. $p \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{5}{3};\ 2\right) \cup (2;\ +\infty)$. *Замечание.* Несложная идейно, но технически непростая задача. Эту задачу лучше предлагать в качестве домашнего задания. **Решение.** Запишем уравнение касательной к графику в точке с абсциссой t: $y = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2 + 3$. Эта касательная проходит через точку $B(p;\ -1)$ в том и только в том случае, когда $-1 = (3t^2 - 6t)p - 2t^3 + 3t^2 + 3$. Нам нужно, чтобы через точку B проходили 3 касательные, т. е. должно найтись 3 соответствующие точки на графике (с абсциссой t), т. е. уравнение (относительно t) $-1 = (3t^2 - 6t)p - 2t^3 + 3t^2 + 3$ должно иметь 3 корня. Выясним, при каких значениях параметра p это (кубическое) уравнение имеет 3 корня.

Запишем это уравнение в виде $-2t^3 + 3(p + 1)t^2 - 6pt + 4 = 0$. Угадаем (например, отыскав целые корни данного уравнения) один из корней этого уравнения: 2. Поделив на $t - 2$, получим $-2t^3 + 3(p + 1)t^2 - 6pt + 4 = (t - 2)(-2t^2 + (3p - 1)t - 2)$. Для того чтобы уравнение $(t - 2)(-2t^2 + (3p - 1)t - 2) = 0$ имело 3 различных корня, дискриминант уравнения $-2t^2 + (3p - 1)t - 2 = 0$ должен быть положительным и $t = 2$ не должно быть его корнем. Первое условие даёт $p < -1$, $p > \frac{5}{3}$, второе условие даёт $p \neq 2$. Откуда $p \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{5}{3};\ 2\right) \cup (2;\ +\infty)$.

IX.84. а) $\left(\frac{7}{12};\ \frac{1}{6}\right)$; $\left(-\frac{1}{4};\ -\frac{3}{2}\right)$. **Решение.** Заметим, что прямая $y = 2x - 1$ является касательной к графику $y = x^2$ в точке (1; 1). Следовательно, через любую точку на этой прямой, кроме самой точки (1; 1), можно провести две касательные к данной параболе, одна из которых — прямая $y = 2x - 1$ (см. задачу IX.79). Таким образом, нужно найти все касательные к параболе $y = x^2$, которые образуют с прямой $y = 2x - 1$ угол 45°.

Пусть уравнение касательной $y = kx + b$. Для того чтобы она образовывала угол 45° с прямой $y = 2x - 1$, необходимо и достаточно, чтобы модуль тангенса угла между ними равнялся 1, т. е. $\left|\frac{k-2}{1+2k}\right| = 1$, откуда $k = \frac{1}{3}$ или $k = -3$.

Мы знаем, что $k = f'(x_0)$, где x_0 — точка, к которой проведена касательная. Таким образом, мы можем узнать точки касания: $x_0 = \frac{1}{6}$ или $x_0 = -\frac{3}{2}$. Записав уравнения касательных в данных точках, можно найти искомые точки пересечения этих касательных и прямой $y = 2x - 1$.

IX.85. а) $a = 4\pi - 11$. **Решение.** Для того чтобы касательная не имела точек пересечения с прямой $y = 0{,}5x + 2$, необходимо, чтобы её угловой коэффициент, т. е. производная данной функции, равнялся 0,5. Получаем необходимое условие: $\frac{1}{2}\cos\frac{a+11}{2} = \frac{1}{2}$, откуда $a = 4\pi k - 11$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Учитывая это, напишем уравнение касательной к графику функции $y = \sin\frac{x+11}{2} + 1{,}5a - a^2$ в точке графика с абсциссой a. $y = 0{,}5x + a - a^2$ (мы учли, что $\sin\frac{a+11}{2} = 0$ при рассматриваемых a). Нетрудно показать, что при рассматриваемых a (т. е. $a = 4\pi k - 11$, $k \in \boldsymbol{Z}$) эта касательная не совпадает с прямой $y = 0{,}5x + 2$, а значит, и не имеет с ней общих точек.

Осталось отобрать из рассматриваемых a те, при которых касательная $y = 0{,}5x + a - a^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = -\frac{2}{x}$. Для этого можно воспользоваться рисунком 9.2 (отобрать те a, для которых $a - a^2 \in (-2;\ 2)$, что равносильно условию $a \in (-1;\ 2)$), но можно получить условие для a и формально: уравнение $\frac{1}{2}x + a - a^2 = -\frac{2}{x}$ не должно иметь решений. Это уравнение сводится к квадратному, которое не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант меньше нуля, что выполнено также при $a \in (-1;\ 2)$.

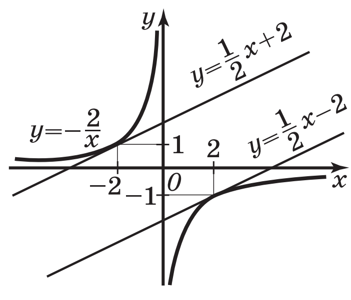


Рис. 9.2

Заметим теперь, что $-1 < 4\pi - 11 < 2$, а при остальных целых k число $4\pi k - 11$ не попадает в промежуток $(-1;\ 2)$.

IX.87. Точка пересечения $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Графики функций в этой точке касаются, так как их производные в данной точке равны.

IX.88. *Указание.* Решение задачи о нахождении угла между графиками функций разобрано в примере 23 из § 53. а) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. б) $\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$. г) $\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\ln 2$.

IX.89. б) $a=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$. Пусть данные кривые пересекаются под прямым углом в точке с абсциссой x. Это равносильно следующей системе (второе уравнение — условие равенства −1 произведения производных в точке пересечения): $\begin{cases} ax^2=\frac{1}{x}, \\ 2ax\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-1. \end{cases}$ Решая систему, получаем $a=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$.

в) $a=\pm\sqrt{2}$.

IX.90. $b = \pm 4$, $b = 2$. **Решение.** График функции пересекает ось Ox под углом 45° с её положительным направлением тогда и только тогда, когда производная данной функции в точке пересечения равна по модулю 1. График функции $y=\frac{bx-x^3}{4}$ пересекается осью Ox в точках $x=0$ и $x=\pm\sqrt{b}$ (при этом $b>0$). Производная функции равна $y'=\frac{b-3x^2}{4}$. Из условия $|y'(0)|=\left|\frac{b}{4}\right|=1$ находим $b=\pm 4$. Из условия $\left|y'\left(\pm\sqrt{b}\right)\right|=\left|\frac{b-3b}{4}\right|=\left|\frac{b}{2}\right|=1$ находим $b=2$ (учитывая, что $b>0$).

§ 54. Приближение функции линейной функцией. Дифференциал

Опыт изложения материала данного параграфа авторами показывает, что формальные выкладки, связанные с дифференциалом (в частности, теорема о равносильности дифференцируемости функции в точке и существовании её конечной производной), непросты для учащихся, но в то же время геометрический смысл дифференциала нагляден и понятен.

Авторам представляется, что решения задач IX.93—IX.95 полезно сопровождать рисунками, отмечая на них значения дифференциала и погрешности, получаемой при замене приращения функции значением соответствующего дифференциала.

Решения и указания к задачам

IX.93. $df(1) = f'(1)\Delta x = 13\Delta x$. $f(1{,}01) \approx f(1) + 13 \cdot \Delta x = 6 + 13 \cdot 0{,}01 = 6{,}13$.

IX.94. $df(25) = f'(25)\Delta x = 0{,}1\Delta x$. $f(26) \approx f(25) + 0{,}1 \cdot \Delta x = 5 + 0{,}1 \cdot 1 = 5{,}1$.

IX.95. $df(64) = f'(64)\Delta x = \frac{1}{48}\Delta x$. $f(65) \approx f(64) + \frac{1}{48} \cdot \Delta x = 4 + \frac{1}{48} \cdot 1 = 4\frac{1}{48}$.

§ 55. Производная произведения, частного, композиции функций

В параграфе разбираются формулы производных произведения, частного и композиции функций и предлагается много задач на технику дифференцирования. Эти задачи, возможно, не самые интересные, однако, как мы уже отмечали в указаниях к § 52, необходимо добиться от учащихся автоматического применения правил дифференцирования и запоминания формул производных элементарных функций — без этого решать задачи на применение производной сложно.

Решения и указания к задачам

IX.106. а) $(f_1f_2f_3f_4)' = f_1'f_2f_3f_4 + f_1f_2'f_3f_4 + f_1f_2f_3'f_4 + f_1f_2f_3f_4'$.

IX.107. 2. *Указание.* $((x-a)f(x))' = f(x) + (x-a)f'(x)$.

IX.108. а) Нет. Например, если $f(x) \equiv 0$. б) Нет, например $f(x) = D(x)$, $g(x) = -D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

IX.112. а) $4\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}$. **Решение.** Так как $f'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, то $f'(2) = 4\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}$.

б) 0. **Решение.** $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = 0$ (последний предел равен нулю как произведение бесконечно малой функции $y = x$ на ограниченную функцию $y = \sin\frac{1}{x}$).

IX.113. $a = 0$, $b = 1$. *Замечание.* Во втором издании задание будет для функции $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \geqslant 0, \\ (x+a)e^{-bx}, & x < 0. \end{cases}$

Решение. Функция, очевидно, дифференцируема во всех точках, кроме нуля (см. утверждение на с. 66 учебника). Для того чтобы функция была дифференцируема в точке $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $(ax^2 + bx)\big|_{x=0} = (x + a)e^{-bx}\big|_{x=0}$, т. е. $a = 0$ (непрерывность в нуле) и $f'_+(0) = (2ax + b)\big|_{x=0} = b$ равнялось бы $f'_-(0) = e^{-bx}(1 - (x + a)b)\big|_{x=0} = 1 - ab$, т. е. $b = 1 - ab$, откуда получаем, что $a = 0$, $b = 1$.

Замечание. В задаче есть тонкость — на самом деле мы вычисляем не $f'_-(0)$ (см. обсуждение примера 12 из § 51), однако мы не уверены, что эту тонкость нужно обсуждать при первом знакомстве с производной.

IX.114. а) Разрывна. б) Непрерывна, но не дифференцируема.

IX.118. а) **Решение.** $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)' = \left(\dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}\right)' = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

б) **Решение.** $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = (x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}))' = \left(\dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}\right)' =$

$$= \frac{n^2 \cdot x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}.$$

IX.119. а) $n \cdot 2^{n-1}$. *Указание.* Продифференцировать бином Ньютона и подставить в полученное выражение $x = 1$. б) $3n \cdot 4^{n-1}$.

IX.120. а) Да, например $f \equiv 1$. б) Да, например f и g — функции Дирихле.

§ 56. Таблица производных. Первообразная

Поскольку дифференцирование и нахождение первообразной — взаимно-обратные операции, имеет смысл изучать их вместе. Так как нахождение первообразной — это чтение таблицы производных справа налево, то естественным для изучения понятия первообразной является окончание изучения техники дифференцирования. Поэтому этот и следующие параграфы, вопреки традиции, помещены в середину главы, посвящённой производной.

Задачи IX.127—IX.130 решаются применением таблицы производных в обратном порядке, а также соображений, связанных со «склеиванием» кусочно-заданных функций так, чтобы они оказались дифференцируемыми.

IX.127. а) $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+2x$. б) $\frac{1}{2}x^2-x-\ln|x|$.

в) $\frac{1}{3}x^3-2x+3\operatorname{arctg}x$. г) $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{x}+\ln|x|$. д) $\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

IX.128. а) $F(x)=\begin{cases}3x-x^2,\ x\leqslant 1,\\ 2x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{3},\ x>1.\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-x,\ x<2,\\ \dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{10}{3},\ x\geqslant 2.\end{cases}$ в) $F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+x,\ x<-\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{1}{4},\ x\geqslant -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

IX.130. а) $F(x)=\begin{cases}2x^2+x,\ x\leqslant 0,\\ x^2+x,\ x>0.\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}2x-\dfrac{x^2}{2}+x,\ x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2}{2}+1,\ x>1.\end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases}2x-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2,\ x\leqslant -2,\\ -2x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{20}{3},\ x>-2.\end{cases}$

IX.131. а) **Решение.** Рассмотрим производную функции $F(-x)$, где $F(x)$ — первообразная функции f. Получим $(F(-x))'=-F'(-x)=-f(-x)=f(x)=F'(x)$, откуда следует (производные равны!), что $F(-x)=F(x)+c$. Подставив $x=0$, получим, что $c=0$, откуда и следует, что F — чётная функция. б) Нет. в) Нет, например $f(x)=\text{const}$.

§ 57. Неопределённый интеграл

Чтобы избежать дублирования вузовского курса высшей математики при рассмотрении интегрирования, авторы сочли возможным ограничиться стандартными общими методами интегрирования (метод подстановки, интегрирование по частям), рассмотрев некоторые частные подстановки (например, тригонометрическую), но не злоупотребляя ими.

Заметим, что в примерах, связанных с интегрированием дробно-линейных функций, например $y=\frac{1}{x}$, мы приводим ответ в традиционном виде $\ln|x| + c$, хотя (как отмечено в тексте параграфа) для функций, заданных на объединении промежутков, константы могут быть свои для каждого промежутка (особенно отметим задачу IX.151).

Решения и указания к задачам

IX.134. а) $-\cos x + \ln x + c$. б) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{x} + c$.

IX.135. а) $\frac{3}{140}\sqrt[3]{x}(-280 + 35x + 60x^2 + 84x^3) + c$.

б) $\frac{4}{1155}\sqrt[4]{x^3}(-385 - 660x + 210x^2 + 616x^3) + c$.

IX.136. а) $3\sin x - 6\operatorname{tg}x + c$. б) $-3\cos t - 2\operatorname{ctg}t + c$. в) $-3\cos x - 4\operatorname{ctg}x + c$.

IX.137. а) $\arcsin x + c$. б) $0{,}5x^2 + \operatorname{arctg}x + c$.

IX.138. $2x + c$.

IX.139. а) $\frac{2^x}{\ln 2} - x + c$. б) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + 0{,}5x + c$. в) $\frac{4}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{4}{3}\right)^x - \frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + c$.

IX.140. а) $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} + c$. б) $\frac{3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + c$. в) $-e^{-x} + 0{,}5e^{-2x} + c$.

IX.141. а) $-2\operatorname{ctg}2x + c$. б) $\operatorname{tg}x - x + c$.

IX.144. а) $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + 2\right)^4 + c$. б) $\frac{1}{202}(2x - 1)^{101} + c$.

в) $\frac{1}{10}(6x - 1)^{\frac{5}{3}} + c$.

IX.145. Оба вычисления правильны, но константы, полученные при первом и втором вычислениях, могут быть разными, поэтому взаимно уничтожать их нельзя.

IX.147. а) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 7\ln|x - 2| + c$. б) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 5\ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c$. в) $\frac{3}{10}(x + 1)^{\frac{2}{3}}(43 - 12x + 5x^2) + c$.

IX.151. а) $-\ln|\cos x| + c$. б) $\ln\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} + c$. в) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + c$. г) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}x + x + c$.

IX.152. а) $\ln(1 + e^x) + c$. б) $x - \ln(1 + e^x) + c$.

IX.153. а) $\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+c$. б) $\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+$
$+\frac{1}{8}\arcsin x+c$. в) $\frac{1}{15}(x^2-1)(2+3x^2)\sqrt{1-x^2}+c$.

IX.154. а) $-\frac{\cos^4 x}{\sin x}-\cos^2 x\sin x-2\sin x+c$. б) $-\frac{1\cos x}{3\sin^3 x}-$
$-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}x+c$.

IX.155. $4\ln(x^2+16)-\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+2-16\ln 2$.

IX.156. $\frac{3}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{3}-3\ln 3$.

IX.157. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}\sin(6x)-\frac{1}{8}\sin(2x)+\frac{1}{16}\sin(4x)+c$.

IX.160. а) $\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\frac{3}{8}\cos x\sin x+\frac{3}{8}x+c$.
б) $-\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+c$.

IX.161. а) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+c$. б) $\ln|x^2-4x+3|+c$.
в) $\ln\left|\frac{(x-3)^3}{x-1}\right|+c$. г) $\ln|(x-3)^3(x-1)|+c$. д) $\frac{1}{2}x^2+3x+$
$+11\ln|x-3|+c$.

IX.162. а) $-\frac{1}{x-1}+c$. б) $2\ln|(x-1)|+c$. в) $2\ln|(x-1)|-$
$-\frac{2}{x-1}+c$. г) $4\ln|(x-1)|+\frac{2}{x-1}+c$. д) $\frac{1}{2}x^2+x+3\ln|x-1|+c$.

IX.163. а) $\operatorname{arctg}(x-1)+c$. б) $\ln(x^2-2x+2)+c$.
в) $\ln(x^2-2x+2)+2\operatorname{arctg}(x-1)+c$. г) $2\ln(x^2-2x+2)-$
$-2\operatorname{arctg}(x-1)+c$. д) $\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x^2-2x+2)-2\operatorname{arctg}(x-$
$-1)+c$.

IX.164. а) $\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$.
б) $\frac{1}{2}x(1+x^2)\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$.

IX.171. а) $e^x\frac{\sin x+\cos x}{2}+c$. б) $-\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+$
$+\frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x+c$. в) $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c$.
г) $\frac{1}{17}x(-8\sin(\ln x)\cos(\ln x)+16\sin(\ln x)\cos^3(\ln x))-$
$-4\sin^2(\ln x)\cos^2(\ln x)+9)+c$.

§ 58. «Французские» теоремы

Авторы считают, что при изучении теорем Ролля, Ферма и Лагранжа более важно, чтобы школьники почувствовали «дух» теорем, чем заучили бы формальные доказательства. Геометрически эти теоремы очевидны, и именно на их геометрической интерпретации нам кажется правильным в первую очередь остановить внимание учащихся.

Некоторые теоретические сведения параграфа подкрепляются и уточняются при решении задач к нему. Например, обратим внимание на задачу IX.175. В теореме Ролля требуется выполнение следующих условий: а) функция непрерывна на отрезке $[a; b]$; б) функция дифференцируема на интервале $(a; b)$; в) в точках a и b значения функции равны. В задаче IX.175 учащихся просят привести примеры функций, для которых выполняются два из трёх данных условий, но заключение теоремы Ролля неверно. Тем самым учащиеся не формально заучивают эти три условия, но понимают, зачем дано каждое из условий в теореме. (Можно спросить учащихся: а зачем нужно условие пункта — а), ведь дифференцируемая функция непрерывна, и обсудить, что это условие можно заменить на условие непрерывности функции в точках a и b, а в остальных точках отрезка непрерывность следует из пункта б).) Пример, демонстрирующий необходимость условия б), приведён в задаче IX.172; пример к условию а) разобран в тексте параграфа, примером к условию в) является, например, функция $y = x$ на любом промежутке.

Отметим также, что при решении задач IX.189 — IX.193 часто используется приведённая ниже теорема (следующая из доказанного в учебнике факта, что функция, заданная на промежутке, является константой, если её производная равна на этом промежутке нулю):

ТЕОРЕМА

Если две дифференцируемые функции заданы на промежутке и их производные равны, то, для того чтобы функции были равны на промежутке, необходимо и достаточно, чтобы были равны их значения в какой-либо одной точке данного промежутка.

Решения и указания к задачам

IX.172. Нет. **Решение.** Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ в нуле недифференцируема. Поэтому, несмотря на то что остальные условия теоремы Ролля выполняются, не существует точки на интервале $(-1; 1)$, в которой производная равнялась бы нулю.

IX.173. а), б) и г) Нет. *Указание.* Функции не дифференцируемы в нуле. в) Да. *Указание.* $c = 0$.

IX.174. а) $x = e - 1$. б) $x = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. в) $x = 2{,}25$. г) $x = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

IX.176. Решение. Применим теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[a; b]$. По теореме Лагранжа на интервале $(a; b)$ существует точка c, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 2c^3 - 1 > 0$ (неравенство выполнено, так как $c > a \geqslant 1$).

IX.177. а) **Решение.** По теореме Лагранжа, применённой к функции $y = \sin x$ на отрезке $[a; b]$, на интервале $(a; b)$ существует точка c, такая, что $\left|\frac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| = |\cos c| \leqslant 1$, откуда следует требуемое неравенство.

IX.178. $(0; 1)$. **Решение.** Прямая, содержащая данную хорду, имеет угловой коэффициент $\frac{5-(-1)}{1-(-1)} = 3$. Угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания, поэтому нам нужно найти точку $x = c$, в которой производная функции $f(x) = x^2 + 3x + 1$ равна 3, т. е. $2c + 3 = 3$, откуда $c = 0$.

IX.179. Решение. Производная данной функции — это многочлен 4-й степени, поэтому больше четырёх корней он иметь не может. Теорема Ролля гарантирует существование корня на каждом из четырёх промежутков между корнями данного многочлена.

IX.180. *Указание.* Применить теорему Ролля к функции $g(x) = (a - x)f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

IX.181. Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = xf(x)$, тогда $g'(x) = f(x) + xf'(x)$. По теореме Лагранжа существует точка $c \in (a; b)$, такая, что $g'(c) = \frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = \frac{bf(a) - af(a)}{b-a} = f(a)$, откуда и следует требуемое утверждение.

Замечание. Задача является пропедевтикой темы о связи выпуклости функции и касательной.

IX.182. Решение. Пусть функция f имеет касательную $y = kx + l$ в точке $x = a$. Предположим, что эта касательная пересекает график функции f также в точке b. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - kx - l$. По теореме Ролля, применённой к функции g на отрезке $[a; b]$, существует точка $c \in (a; b)$, такая, что $g'(c) = f'(c) - k = 0$, т. е. $f'(c) = k$. По теореме Ролля, применённой к функции f' на отрезке $[a; c]$, существует точка $d \in (a; c)$, такая, что $f''(d) = 0$. Получили противоречие с условием, значит, наше предположение неверно и касательной, которая имела бы две общие точки с графиком функции, не существует.

IX.183. Решение. Рассмотрим отрезок $[0; 0{,}5]$. Покажем, что если существует точка $c \in (0; 0{,}5)$, такая, что

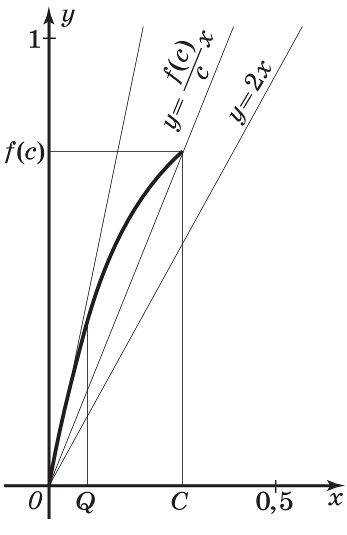


Рис. 9.3

$f(c) \neq 2c$ (т. е. не лежащая на прямой $y = 2x$, соединяющей точки (0; 0) и (0,5; 1) графика функции f), то найдётся точка $\theta \in (0; 0{,}5)$, такая, что $f'(\theta) > 2$.

При этом если $f(c) > 2c$, то $\theta \in (0; c)$, а если $f(c) < 2c$, то $\theta \in (c; 0{,}5)$. Это легко увидеть на рисунке 9.3.

Итак, пусть $f(c) > 2c$. По теореме Лагранжа, применённой к функции f на отрезке $[0; c]$, существует точка $\theta \in (0; c)$, такая, что $f'(\theta) = \frac{f(c) - f(0)}{c} > \frac{2c}{c} = 2$.

Аналогично рассматривается второй случай.

Итак, мы получили, что если функция f на промежутке $[0; 0{,}5]$ не совпадает с функцией $y = 2x$, то найдётся точка, в которой производная больше 2. Аналогично можно показать, что если функция f на промежутке $[0{,}5; 1]$ не совпадает с функцией $y = 2 - 2x$, то найдётся точка, в которой производная меньше -2. Но функция не может на данных промежутках совпадать с этими функциями: в этом случае функция не будет дифференцируема в точке $x = 0{,}5$. Таким образом, найдётся точка θ, в которой $|f'(\theta)| > 2$, что и требовалось доказать.

IX.184. Решение. Пусть точка минимума $x_{\min}$ лежит на промежутке $[0{,}5; 1]$. Тогда, применив теорему Лагранжа к функции f на промежутке $[x_{\min}; 1]$, мы докажем существование точки $c \in (x_{\min}; 1)$, такой, что $|f'(c)| \geqslant 4$. Далее, применив теорему Лагранжа к функции f' на промежутке $[x_{\min}; c]$ (заметим, что $f'(x_{\min}) = 0$ по теореме Ферма), мы докажем существование точки $\theta \in (x_{\min}; c)$, такой, что $|f''(\theta)| \geqslant 8$.

IX.189. а) **Решение.** Производная функции $y = \arcsin x + \arccos x$ равна нулю в каждой точке интервала $(-1; 1)$, значит, функция постоянна на отрезке $[-1; 1]$. При $x = 0$ значение левой части равно $\frac{\pi}{2}$, что и доказывает тождество.

IX.190. Решение. Производные функций левой и правой частей равны:

$$(2\arcsin x)' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (\arccos(1 - 2x^2))' = -\frac{-4x}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Значения этих функций в точке $x = 0$ равны нулю, откуда и следует справедливость тождества (см. замечание в начале параграфа).

IX.192. 0,75. **Решение.** $f'(x) = -2\cos x\sin x - 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\times$

$$\times\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$$

$$=-\left(\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\times$$

$\times\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$ $f(0) = 0,75$. Таким образом, $f(x) \equiv 0,75$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

IX.193. Решение. Способ 1. В примере 55 из § 58 показано, что $\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)'=0$, таким образом, на интервале $(-\infty; -1)$ выражение $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ принимает одно и то же значение. Найти его можно, подставив в выражение $x=-\sqrt{3}$, получив

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4},$$

так как $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{1+(-1)\sqrt{3}}=-\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Способ 2. Возможно, проще заметить, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4},$$

и следовательно, учитывая то, что $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ принимает одно и то же значение, это значение равно $-\frac{3\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

§ 59. Исследование функции с помощью производной

Материал параграфа достаточно стандартен. В нём обсуждаются и отрабатываются алгоритмы нахождения промежутков возрастания и убывания функций, а также экстремумов и наибольших и наименьших значений.

Отметим несколько важных моментов и типичных ошибок, которые делают учащиеся.

Теорема о достаточном условии строгого возрастания функции верна только лишь для функций, заданных на интервале. Например, в задаче IX.200 ж), исследуя функцию y на возрастание и убывание, мы получаем, что её производная $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ отрицательна на области определения, однако при этом можно лишь утверждать, что функция y убывает на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ (но не на их объединении, как это очень часто получается у учащихся).

При нахождении промежутков возрастания и убывания часто нужно вычислять производную и определять её знак, однако во многих задачах можно привлекать дополнительные соображения, которые помогут упростить вычисления. Например, при решении задачи IX.200 г) можно заметить, что промежутки возрастания функции $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$ совпадают с промежутками возрастания функции $y_1 = 2x^3 + 9x^2$ (конечно, при условии, что функция y определена). Производную же функции y_1 брать проще. Это соображение «очевидно» в силу возрастания функции $y = \sqrt{x}$, но для придирчивых школьников можно сослаться на доказанную в 10 классе теорему о промежутках возрастания композиции. См. также решение задачи IX.200 в).

Хорошо развитая техника вычисления производной сама по себе во многих задачах упрощает вычисления. Например, вычисление производной в задаче IX.199 а): $y' = 3(x-1)^2(2x+3)^2 + (x-1)^3 \cdot 4(2x+3) = (x-1)^2 \times$ $\times (2x+3)(10x+5) = 20(x-1)^2(x+1{,}5)(x+0{,}5)$ (не нужно раскрывать скобки в полученном выражении для производной, как часто пытаются сделать учащиеся). Аналогично вычисляется производная в задаче IX.200 б).

Приведём некоторые дополнительные задачи к разделу «Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке».

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100,\ x \in (-4; 5]$;

б) $f(x) = x\ln 5 - x\ln x,\ x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right)$;

в) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1},\ x \in \boldsymbol{R}$; г) $f(x) = \frac{9}{x} + \frac{25}{1-x},\ x \in (0; 1)$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:

а) $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$, $x \in (0;\ 1]$;

б) $f(x) = \ln x - x$, $x \in (0;\ +\infty)$;

в) $f(x) = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $f(x) = \mathrm{tg}x - 3x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

д) $f(x) = (x^2 + 4)e^{-x}$, $x \in (0;\ +\infty)$;

е) $f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$.

Приведём также некоторые дополнительные текстовые задачи.

3. Представьте положительное число a в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы: а) сумма их квадратов была наименьшей; б) сумма их кубов была наименьшей; в) сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей; г) произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

4. На кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$ найдите точку, в которой касательная составляет с осью Ox наибольший по модулю угол.

5. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях координат, третья — в точке (0; 0), а четвёртая — на параболе $y = 3 - x^2$.

6. Среди всех прямоугольников с данной площадью S найдите прямоугольник: а) с наименьшим периметром; б) с наибольшей площадью.

7. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найдите треугольник с наибольшим периметром.

8. В равносторонний треугольник со стороной a вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

9. Найдите боковую сторону трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с фиксированной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

10. Через точку $A\left(2;\ \frac{1}{4}\right)$ проводятся прямые, пересека-

ющие положительные полуоси в точках B и C. Найдите уравнение той прямой, для которой отрезок BC имеет наименьшую длину.

11. Две улицы пересекаются под прямым углом. Машина A находится на одной из улиц на расстоянии 70 м от перекрёстка, машина B — на другой улице на расстоянии 60 м от перекрёстка. Обе машины начинают одновременно двигаться в направлении перекрёстка с постоянной скоростью: машина A со скоростью 3 м/с, машина B со скоростью 4 м/с. Найдите наименьшее расстояние между машинами во время движения (размерами машин пренебречь).

12. На стене висит картина. Её нижний край расположен на a см выше уровня глаз наблюдателя, а верхний край — на b см. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы рассматривать картину под наибольшим углом?

Решения и указания к задачам

IX.194. а) Возрастает на $\mathbb{R}$. б) Возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и $[\sqrt[3]{2};+\infty)$ (но не на их объединении!), убывает на $[0;\ \sqrt[3]{2}]$. в) Возрастает на $(-\infty;\ -\sqrt{3}]$ и $[\sqrt{3};\ +\infty)$, убывает на $[-\sqrt{3};\ 0)$ и $(0;\ \sqrt{3}]$. г) Возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$, убывает на $[-1;\ 0)$ и $(0;\ 1]$.

IX.195. а) Возрастает на $[1;\ +\infty)$, убывает на $(0;\ 1]$. б) Возрастает на $[0;\ 2]$, убывает на $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$. в) Возрастает на $[\sqrt{5};\ +\infty)$, убывает на $(0;\ \sqrt{5}]$.

IX.196. $x=-1$. **Решение.** Нетрудно заметить, что функция $y=5x^5+3\cdot\sqrt[3]{3x+11}+\arcsin(1+x)$ возрастающая, поэтому данное уравнение имеет не более одного корня, который можно угадать.

IX.197. Возрастает на $[0;\ +\infty)$. **Решение.** Способ 1.

$$y'=2x-6+\frac{4}{\sqrt{x}}=\frac{2(x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}=$$

$=\dfrac{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}$, т. е. производная неотрицательна на интервале $(0;\ +\infty)$.

Замечание. Решение стандартно, однако часто у учащихся возникают проблемы с разложением производной на множители. В самом деле, как можно было догадаться до этого разложения? Ответ виден во втором способе решения. В некоторых задачах упростить вычисления помогает удачная замена переменной.

Способ 2. Сделаем замену переменной $t=\sqrt{x}$. Получим функцию $g(t) = t^4 - 6t^2 + 8t$. Так как $\sqrt{x}$ — возрастающая функция, то по теореме о возрастании композиции промежутки возрастания и убывания функции y совпадают с соответствующими промежутками возрастания и убывания функции g (точнее: функция f возрастает на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда функция g возрастает на $[\sqrt{a}; \sqrt{b}]$). Исследуем на возрастание и убывание функцию g. Для этого найдём её производную: $g'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8$. Разложим на множители полученное выражение, угадав корень $t=1$ и поделив на $t-1$: $g'(t) = 4(t - 1)^2(t + 2)$. Отсюда получаем, что функция g возрастает на всей своей области определения, а значит, и функция f возрастает на всей своей области определения.

Замечание. Конечно, можно было заметить, что $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2$ — многочлен 3-й степени относительно $\sqrt{x}$, и воспользоваться соображениями из второго способа решения, но опыт показывает, что второй способ технически проще для учащихся.

IX.198. а) Возрастает на $\left[2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi(k+1)\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) Возрастает на $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ и $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) Возрастает на $\left[4k; \frac{4}{3}+4k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[\frac{4}{3}+4k; 4(k+1)\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

IX.199. а) Возрастает на $(-\infty; -1{,}5]$ и $[-0{,}5; +\infty]$, убывает на $[-1{,}5; -0{,}5]$. б) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$. в) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$. г) Возрастает на $(0; \alpha]$ и убывает на $[\alpha; +\infty)$. д) Возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{3}{4}+2k; \frac{1}{4}+2k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на промежутках вида

$\left[\frac{1}{4}+2k;\ \frac{5}{4}+2k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. е) Возрастает на $(-\infty;\ -2)$, $(-2;-\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2};+\infty)$, убывает на $[-\sqrt{2};\ -1)$ и $(-1;\ \sqrt{2}]$.

IX.200. а) Убывает на промежутках $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$. б) Убывает на $(-\infty;\ 0]$ и $(2;\ +\infty)$, возрастает на $[0;\ 2)$. *Указание.* $y' = \frac{-3(3-x)^2(x-2)^2 - 2(3-x)^3(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(3-x)^2(x-2)(-x)}{(x-2)^4} = \frac{-x(3-x)^2}{(x-2)^3}$. в) Возрастает на $[-\sqrt{8};-2]$ и $[0;\ 2]$, убывает на $[-2;\ 0]$ и $[2;\sqrt{8}]$. **Решение.** Функция определена на промежутке $[-\sqrt{8};\ \sqrt{8}]$. При этом (по теореме о композиции) функция y возрастает тогда и только тогда, когда возрастает функция $g(x) = 8x^2 - x^4$. Исследуем её производную: $(8x^2 - x^4)' = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2)$. Отсюда видно, что функция $g(x) = 8x^2 - x^4$ (а значит, и функция $y=\sqrt{8x^2-x^4}$) на промежутках $[-\sqrt{8};-2]$ и $[0;\ 2]$ возрастает, а убывает на промежутках $[-2;\ 0]$ и $[2;\sqrt{8}]$).

Замечание. На примере этой задачи можно отметить, что для чётной функции верно утверждение: функция f возрастает на $[a;\ b]$ тогда и только тогда, когда она убывает на $[-b;\ -a]$.

г) Возрастает на $[-4{,}5;\ -3]$ и $[0;\ +\infty)$, убывает на $[-3;\ 0]$. д) Возрастает на промежутке $[-1;\ 2]$ и убывает на промежутке $[2;\ +\infty)$. е) Возрастает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$.

IX.201. а) При $a > 0$. б) При $a > 0$.

IX.202. $a \leqslant 4$. **Решение.** $f' = -3x^2 + 8x - a$. Функция f возрастает на интервале $(1;\ 2)$ тогда и только тогда, когда её производная f' неотрицательна на этом интервале, а это происходит тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства $f'(1) \geqslant 0$, $f'(2) \geqslant 0$. Решая соответствующую систему, получаем ответ.

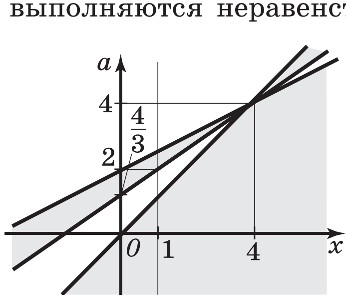


Рис. 9.5

IX.203. $a = 2$, $a \leqslant 0$. **Решение.** $y' = 2(x - a)(x - 2a + 4) \times (2x - 3a + 4)$. Изобразим на плоскости $(x;\ a)$ прямые $a = x$, $a = 0{,}5x + 2$ и $a = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. Воспользуемся методом областей и определим области, в которых производная y' положительна (рис. 9.5): они закрашены. Выясним, при каких значениях параметра a функция y возрастает на интервале (0; 1), для этого производная должна быть неотрицательна на [0; 1]. Из рисунка видно, что это происходит при $a = 2$ и при $a \leqslant 0$.

IX.204. а) $a \leqslant -\frac{1}{3}$. б) $a \leqslant 3$.

IX.205. а) $x = -1$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ — критические точки, они же точки экстремума. б) $x = 2$ и $x = 3$ — критические точки, они же точки экстремума. в) $x = 2$, $x = -1$, $x = 0{,}8$ — критические точки, $x = 2$ и $x = 0{,}8$ — точки экстремума. г) $x = -0{,}5\ln 2$ — критическая точка, она же точка экстремума.

IX.206. *Замечание.* В ответах приведены координаты точек экстремума (первая координата — точка экстремума, вторая — экстремальное значение): а) (0; 1); б) (1; 1) и (−1; −1). в) (−1; 2) и (1; 2).

IX.207. а) Точка минимума $x = 0{,}5$. б) Точка максимума $x = 1$, точка минимума $x = 2$. в) Точка максимума $x = -1{,}25$. г) Точка максимума $x = 0$.

IX.208. а) Точка максимума $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$, точка минимума $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$. б) Точка максимума $x = 5$. в) Точки минимума $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, точки максимума $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) Точка максимума $x = -1$, точка минимума $x = 1$. д) Точки максимума $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \pm\frac{7}{2}; \pm\frac{11}{2}; \pm\frac{15}{2}; \ldots\right\}$ и $x = 2$, точки минимума $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \pm\frac{5}{2}; \pm\frac{9}{2}; \pm\frac{13}{2}; \ldots\right\}$. е) Точка максимума $x = 1$, точка минимума $x = 2$.

IX.209. $a \leqslant \frac{3}{8}$. **Решение.** Для того чтобы условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы производная $y' = 4a\cos 4x - 10 + 7\cos 7x + 4a = 4a(1 + \cos 4x) + 7\cos 7x - 10$ была бы неположительной при любом x. Подставив $x = 0$, получим необходимое условие: $8a - 3 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant \frac{3}{8}$. При этом если $a \leqslant \frac{3}{8}$, то $4a(1 + \cos 4x) + 7\cos 7x - 10 \leqslant 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 + 7 - 10 = 0$ при любом x, т. е. условие $a \leqslant \frac{3}{8}$ является и достаточным.

IX.210. $a > 0$. **Решение.** Функция y дифференцируема всюду на $\boldsymbol{R}$, поэтому её критические точки — корни производной. Вычислим производную: $y' = e^{2x} + (1 - a)\times$ $\times e^x - a$. Производная y' имеет корни тогда и только тогда, когда имеет корни уравнение $e^{2x} + (1 - a)e^x - a = 0$, которое является квадратным относительно $t = e^x$. Таким образом, необходимо выяснить, при каких значениях параметра a существуют положительные (t пробегает все значения из интервала $(0; +\infty)$) корни уравнения $t^2 + (1 - a)t - a = 0$. Корни этого уравнения $t = -1$ и $t = a$, откуда следует, что $a > 0$.

IX.211. а) Наименьшее значение $f(1) = -1$, наибольшее значение $f(4) = 1019$. б) Нет ни наименьшего значения, ни наибольшего значения $\left(\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty\right)$. в) Нет ни наименьшего значения, ни наибольшего значения. **Решение.** $f'(x) = 0{,}5\ln x + 0{,}5 - \ln 2$. Видно, что производная возрастает на области определения, так как её корень $x = \frac{4}{e} < \frac{3}{2}$. Таким образом, производная положительна на интервале $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ и функция на данном промежутке (строго) возрастает. Отсюда следует, что нет ни наименьшего значения, ни наибольшего значения функции на интервале. г) Наименьшее значение достигается при $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, наибольшего значения нет $\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty\right)$. д) Наибольшее значение $f(1) = 1$, наименьшее значение $f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}}$. е) Наибольшее значение равно $f(0) = 1$, наименьшее значение равно $f\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

IX.212. Наименьшее значение равно $-\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ и достигается при $\cos x = \sqrt{\frac{5}{12}}$, наибольшее значение равно $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ и достигается при $\cos x = -\sqrt{\frac{5}{12}}$. *Указание.* Здесь удобнее исследовать на наименьшее и наибольшее значения функцию $g(t) = 4t^3 - 5t$ на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$, которая получается из данной заменой переменной $t = \cos x$ таким образом: $f(x) = \cos 3x - 2\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x - 2\cos x = 4\cos^3 x -$ $- 5\cos x$.

IX.216. Наибольшее значение 65, наименьшее -16, при $a \in [-4; 2]$, $a^3 - 12a$, при $a \in (2; 5]$ и при $a < -4$. **Решение.** $y' = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$. Отсюда следует, что функция y возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; 5]$ и убывает на отрезке $[-2; 2]$. Нетрудно видеть, что $y(5) = 65$ — это наибольшее значение функции y на промежутке $(-\infty; 5]$ (так как $y(-2) = 16 < 65$), а тогда при любом $a \in (-\infty; 5]$ наибольшее значение функции y на промежутке $[a; 5]$ достигается при $x = 5$ и равно 65.

Найдём теперь наименьшее значение функции y на промежутке $[a; 5]$ в зависимости от a. Так как функция y возрастает на отрезке $[2; 5]$, то при $a \in [2; 5]$ наименьшее значение функции y на промежутке $[a; 5]$ достигается в левом конце, т. е. в точке a, и равно $y(a) = a^3 - 12a$.

Заметим, что $f(-4) = f(2) = -16$, и значит, при $a \in [-4; 2]$ наименьшее значение функции y на промежутке $[a; 5]$ достигается, когда $x = 2$ и равно -16 (это сразу же получается при исследовании характера монотонности функции y).

Наконец, при $a < -4$ наименьшее значение опять достигается в левом конце и равно $y(a) = a^3 - 12a$.

IX.217. Таких a не существует. **Решение.** $f'(x) = 6x(x-a)$. Критические точки — $x = 0$ и $x = a$. В них и должны достигаться наибольшее и наименьшее значения (если они не достигаются на концах отрезка $[-1; 1]$). Отсюда, в частности, следует, что $a \in (-1; 1)$.

Если $a \in (0; 1)$, то значение $f(a)$ должно быть наименьшим, т. е. $f(a) < f(-1) \Leftrightarrow -a^3 < -2 - 3a \Leftrightarrow a^3 - 2 - 3a < 0$, что неверно при $a \in (0; 1)$.

Если $a \in (-1; 0)$, то значение $f(a)$ должно быть наибольшим, т. е. $f(a) > f(1) \Leftrightarrow -a^3 > 2 - 3a \Leftrightarrow a^3 + 2 - 3a < 0$, что неверно при $a \in (-1; 0)$.

IX.219. $E(f) = [\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$. **Решение.** Заметим, что $D(f) = [-2; 4]$, и рассмотрим $f' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+2}}{2\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+2}}$. Функция f дифференцируема всюду на интервале $(2; 4)$, и поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[-2; 4]$ могут достигаться на концах промежутка или в нулях производной, т. е. в точках $x = -2$, $x = 4$ или $x = 1$. При этом $f(-2) = \sqrt{6} = f(4)$, $f(1) = 2\sqrt{3}$. Таким образом, наименьшее значение функции f на промежутке $[-2; 4]$ равно $\sqrt{6}$, а наибольшее —

$2\sqrt{3}$. По теореме Больцано—Коши функция f (в силу своей непрерывности!) принимает все значения между $\sqrt{6}$ и $2\sqrt{3}$.

Замечание. Эту задачу нетрудно решить и без применения производной: задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f^2 сводится к задаче исследования квадратного трёхчлена.

IX.220. 11 при $-1 < a \leqslant \frac{1+\sqrt{45}}{2}$ и $a^3 - 12a$ при $a > \frac{1+\sqrt{45}}{2}$.

Решение. Ответ проще всего увидеть на графике функции $f(x) = x^3 - 12x$ на рисунке 9.6 (на графике нам важны только промежутки возрастания и убывания функции). Так как $f(-1) = 11$, то, решив уравнение $x^3 - 12x = 11$ (один из его корней -1), найдём, что значение 11 также принимается в точках $\frac{1 \pm \sqrt{45}}{2}$, откуда и следует ответ.

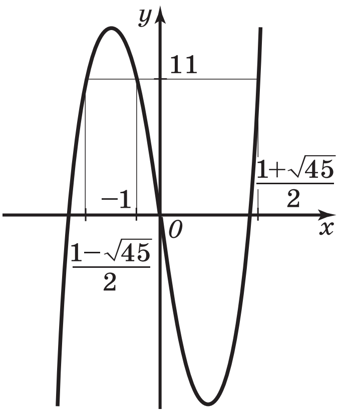


Рис. 9.6

IX.221. -46 при $-2 < a \leqslant 1 + \sqrt{24}$ и $27a - a^3$ при $a > 1 + \sqrt{24}$. *Указание*. Решение аналогично решению задачи IX.220.

IX.224. $a \geqslant \frac{3}{4}$. **Решение.** Для того чтобы функция f на отрезке $[0;\ 1]$ принимала наименьшее значение в правом конце (т. е. при $x = 1$), необходимо, чтобы выполнялось неравенство $f(1) \leqslant f(0) \Leftrightarrow 2(1-a) \leqslant 1 \Leftrightarrow a \geqslant 0{,}5$. Далее заметим, что $f'(x) = 3x\left(x - \frac{4}{3}a\right)$, и, таким образом (из приведённого выше рассуждения следует, что $\frac{4}{3}a > 0$), функция f убывает на промежутке $\left[0;\ \frac{4}{3}a\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{4}{3}a;\ +\infty\right)$. Поэтому, для того чтобы наименьшее значение функции f на промежутке $[0;\ 1]$ достигалось в точке $x = 1$, необходимо и достаточно, чтобы точка $x = \frac{4}{3}a$ была бы правее точки $x = 1$, т. е. чтобы $\frac{4}{3}a \geqslant 1$.

IX.228. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. **Решение.** Обозначим через h длину отрезка OX на рисунке 9.7, *а*. Будем рассматривать только точки X, лежащие ниже центра окружности O, так как площадь любого треугольника ABC на рисунке 9.7, *б* (на рисунке $OY = OX$) меньше площади соответствующего ему треугольника AKL, т. е. $h \in [0; r]$. Выразим площадь S как функцию от h: $S(h) = (r + h)\sqrt{r^2 - h^2}$ и найдём её наибольшее значение при $h \in [0; r]$. Технически проще исследовать квадрат площади:

$$F(h) = S^2(h) = (r + h)^2(r^2 - h^2).$$

$$F'(h) = 2(r + h)(r^2 - rh - 2h^2).$$

Нетрудно видеть, что наибольшее значение достигается в одном из корней производной, а именно при $h = \frac{r}{2}$. Значит, $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ — наибольшая площадь.

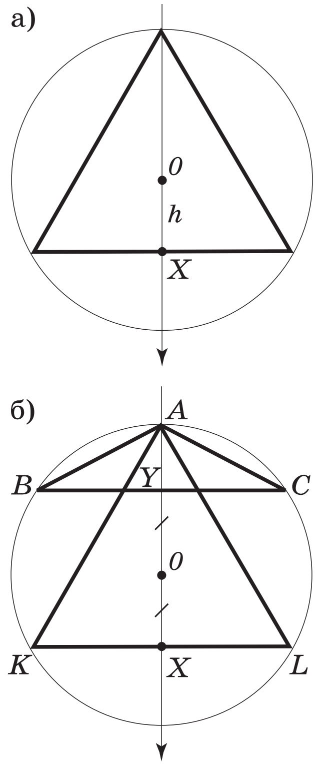


Рис. 9.7

IX.230. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

IX.232. $y = -0{,}25x + 0{,}75$. **Решение.** Пусть прямая, проходящая через точку A, имеет угловой коэффициент k. Тогда её уравнение имеет вид $y - 0{,}25 = k(x - 2)$, откуда нетрудно получить квадрат длины отрезка BC:

$$l(k) = |BC|^2 = (0{,}25 - 2k)^2 + \left(2 - \frac{1}{4k}\right)^2; \quad l'(k) = \frac{(8k - 1)(64k^3 + 1)}{k^3}.$$

Учитывая то, что $k < 0$, получаем, что наименьшее значение $l(k)$ достигается при $k = -0{,}25$.

§ 60. Вторая производная. Выпуклые функции

Понятие выпуклости является одним из центральных в современной теории оптимизации, функциональном анализе и иных дисциплинах. Кроме того, применение неравенства Йенсена к конкретным выпуклым функциям позволяет получать множество полезных неравенств (например, неравенство Коши, как показано в п. 5). Соображения выпуклости используются также при получении неравенств, связанных с оценками площадей криволинейных трапеций (см. главу X). Поэтому при наличии времени материал данного параграфа будет очень полезен для развития математической культуры учащихся.

Тем не менее глубину изучения материала, степень сложности решаемых задач учитель может определять сам для каждого конкретного класса.

Решения и указания к задачам

IX.235. а) 0. б) 100!. в) $101!x$. г) $64 \cdot 100!$. д) $\sin x$. е) $\cos x$.

IX.236. а) $\frac{60}{(x+1)^6} - \frac{60}{(x-1)^6}$. **Решение.** $f^{(5)}(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(5)} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^{(5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-120}{(x-1)^6} + \frac{120}{(x+1)^6}\right) = \frac{60}{(x+1)^6} - \frac{60}{(x-1)^6}.$$

б) $\frac{1}{2}\left(\frac{-120}{(x-3)^6} + \frac{120}{(x-1)^6}\right)$.

IX.237. а), б) Выпукла на области определения. в) Выпукла на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, вогнута на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) Выпукла на $[0;\ +\infty)$ и вогнута на $(-\infty;\ 0]$.

IX.238. а) Вогнута на $[0;\ +\infty)$, выпукла на $(-\infty;\ 0]$. б) Выпукла на $[0;\ +\infty)$, вогнута на $(-\infty;\ -1)$ и $(-1;\ 0]$ (но не на их объединении!). в) Выпукла на $(-\infty;\ -6)$ и $[0;\ 6]$, вогнута на $[-6;\ 0]$ и $[6;\ +\infty)$. **Решение.** Ответ следует из того, что $y' = \frac{x^2(x^2+36)}{(x^2+12)^2}$, $y'' = \frac{-24x(x^2-36)}{(x^2+12)^3}$. г) Выпукла на $(\sqrt{3+\sqrt{12}};\ +\infty]$, вогнута на $[\sqrt{3};\ \sqrt{3+\sqrt{12}}]$ и $[-\sqrt{3};\ 0]$.

IX.239. *Указание.* Решение аналогично решению примера 74 главы IX.

IX.241 а) $x = \pm 1$. б) $y'' = \frac{-6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$, точка перегиба $x = 0$. в) $x = 2$. г) $x = 1$.

IX.242. а) Выпукла на $\left[1 + \sqrt{\frac{4}{3}};\ +\infty\right]$, вогнута на $\left[0;\ 1 + \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$, точка перегиба $x = 1 + \sqrt{\frac{4}{3}}$. *Указание.* $y'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 - 6x - 1}{x\sqrt{x}(x+1)^3}$. б) Выпукла на $(0;\ +\infty)$, вогнута на

$(-\infty;\ 0)$, точек перегиба нет. *Указание.* $y'' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
г) Выпукла на $[3;\ +\infty)$, $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ 1]$, вогнута на $[1;\ 3]$, точки перегиба $x = 3$ и $x = 1$. *Указание.*
$$y'' = \begin{cases} -\frac{2(x-3)}{x^4}, & x < 0 \text{ и } 0 < x < 1, \\ \frac{2(x-3)}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$$
е) Выпукла на $[-1;\ 0]$, вогнута на $[0;\ +\infty)$ и $(-\infty;\ -1]$, точки перегиба $x = -1$ и $x = 0$.

IX.243. Решение. Если функция выпукла на промежутке, то её производная возрастает (может быть, нестрого) на этом промежутке. В то же время в точках экстремума (по теореме Ферма) производная равна нулю. Значит, если у функции есть две точки экстремума a и b, то на отрезке $[a;\ b]$ производная равна нулю (она равна нулю в точках a и b и не убывает на $[a;\ b]$), а значит, функция постоянна на нём, что и требовалось доказать.

IX.244. Решение. Функция $f(x) = \sin x$ выпукла на отрезке $[0;\ \pi]$. Пусть $\theta = 0{,}25$ и $x,\ y \in [0;\ \pi]$. По определению выпуклости $f(\theta x + (1 - \theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$, т. е. $\sin\frac{x+3y}{4} \geqslant \frac{\sin x + 3\sin y}{4}$, что и требовалось доказать.

IX.245. $a \neq 0$.

IX.246. *Указание.* $y'' = \frac{2(x^3 - 3x + 3x^2 - 1)}{(x^2+1)^3}$, откуда точки перегиба $x = 1$ и $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Нетрудно проверить, что соответствующие точки графика лежат на одной прямой.

IX.247. *Указание.* Неравенство верно в силу выпуклости функции $f(x) = x \cdot \ln x$ (см. задачу IX.244).

IX.248. Решение. Заметим, что любой многочлен p нечётной степени имеет корень нечётной кратности (т. е. такой корень x_0, что $p(x) = (x - x_0)^{2n+1}q(x)$ и x_0 не является корнем q). В самом деле, если бы все корни имели бы чётную кратность, то и многочлен имел бы чётную степень. Далее заметим, что вторая производная многочлена нечётной степени, большей 1, — многочлен нечётной степени, который имеет корень нечётной кратности. Этот корень и будет искомой точкой перегиба по достаточному условию точки перегиба.

IX.249. $a = -1{,}5$ и $b = 4{,}5$. **Решение.** Во-первых, необходимо, чтобы точка $(1;\ 3)$ принадлежала графику функции f, т. е. выполнялось равенство $f(1) = 3 \Leftrightarrow a + b = 3$. Далее, $f''(x) = 6ax + 2b$. Для того чтобы точка $(1;\ 3)$ была бы точкой перегиба, необходимо, чтобы $f''(1) = 0$, т. е. $6a + 2b = 0$. Если $a \neq 0$, то это условие является и достаточным (вторая производная в точке $x = 1$ меняет знак, а значит, точка $x = 1$ является точкой перегиба по достаточному условию). Учитывая условие $a+b=3$, получаем $a=-1{,}5$ и $b=4{,}5$. Нетрудно видеть, что $a=0$ не подходит.

IX.250. а) **Решение.** Если функция выпукла на $[a;\ b]$, то по определению выпуклости любая её хорда лежит не ниже графика функции, в частности, если мы рассмотрим хорду, соединяющую точки $(x_1;\ f(x_1))$ и $(x_2;\ f(x_2))$ и любую точку $(x;\ f(x))$ $(x_1 < x < x_2)$, то будет выполняться неравенство $f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ (значение функции в точке x не больше «значения хорды» в точке x), равносильное требуемому. Геометрически данное неравенство означает, что угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $(x_1;\ f(x_1))$ и $(x;\ f(x))$, не больше углового коэффициента хорды, соединяющей точки $(x;\ f(x))$ и $(x_2;\ f(x_2))$ (рис. 9.8). б) *Указание.* Устремляя x сначала к x_1, а потом к x_2 в доказанном в IX.250 а) неравенстве, получим $f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$, откуда мгновенно следует требуемое утверждение.

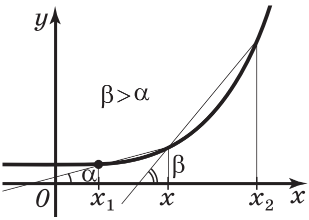


Рис. 9.8

IX.251. а) **Решение.** Доказывается по индукции.

Для $n=2$ неравенство верно по определению выпуклости.

Пусть данное неравенство верно для $n=k$. Рассмотрим точки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k+1}$ из промежутка выпуклости. Пусть даны неотрицательные числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k+1}$, такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1} = 1$. Обозначим сумму чисел $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \beta$. Очевидно, что точка $x = \frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k}{\beta}$ принадлежит промежутку выпуклости. Тогда верно $f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = f(\beta x + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \geqslant \beta f(x) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) =$

$$= \beta f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k\right) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \geqslant \beta\left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_k}{\beta} f(x_k)\right) +$$

$+ \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})$, что и требовалось доказать.

б) *Указание.* Неравенство следует из IX.251 а), применённого к функции x^2, выпуклой на $\boldsymbol{R}$.

в) *Указание.* Неравенство следует из IX.251 б), достаточно положить в качестве $\alpha_i = \frac{b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}$ и $x_i = \frac{a_i}{b_i} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$.

§ 61. Построение эскизов графиков с помощью производной. Решение задач с помощью производной

Задачи на построение графиков и исследование свойств функции в школьном курсе, к сожалению, часто напоминают гербарий: школьникам предлагается план исследования функции, состоящий из 10—12 пунктов, как то: область определения, множество значений, промежутки возрастания и убывания, выпуклости, асимптоты и т. д., и начинается тренировка на построение графиков функций и исследование их свойств согласно этому плану.

Вне всяких сомнений несколько подобного рода примеров необходимо решить со школьниками, однако авторам значительно ближе те задачи, в которых построение графика не является самоцелью, а служит инструментом решения задач. В качестве примера можно привести задачи, в которых нужно ещё сообразить, какой график нужно построить; задачи, в которых возможно построение нескольких графиков и выбор нужного графика зачастую является творческой задачей, существенно упрощающей решение задачи (например, IX.276, IX.270—IX.300).

При составлении подборки этих задач авторы старались выбирать задачи, в которых, кроме стандартных алгоритмов, есть «что-то ещё» (необходимость логически рассуждать, а не просто следовать известному алгоритму; возможность переформулировки задачи, с тем чтобы свести её, например, к задаче на исследование свойств функции; просто красивая и нестандартная идея). Эти задачи можно предлагать школьникам на уроках, в домашних заданиях и даже для небольших исследовательских работ.

Выбор конкретных задач зависит от уровня подготовки класса и вкуса учителя.

Отметим также, что при доказательстве неравенств часто можно пользоваться утверждением из п. 2 § 61, рассматривая соответствующие функции f и g.

Решения и указания к задачам

IX.258. а) **Решение.** Пусть $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$. Тогда $f(1) = g(1)$ и при $x > 1$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x^2} = g'(x)$, откуда и следует требуемое неравенство. б) **Решение.** Пусть $f(x) = e^x$ и $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Заметим, что $f(0) = g(0)$, и докажем, что при $x > 0$ выполняется неравенство $f'(x) > g'(x)$ $\Leftrightarrow$ $e^x > 1 + x$. Для этого заметим, что

$f'(0) = g'(0)$ и при $x > 0$ выполняется неравенство $f''(x) > g''(x) \Leftrightarrow e^x > 1$. Таким образом, согласно утверждению из п. 2 § 63, $f'(x) > g'(x)$ при $x > 0$, а значит, и $f(x) > g(x)$ при $x > 0$. в) *Указание.* Решение аналогично решению задачи IX. 258 б).

IX.259. Решение. Пусть $f(x) = 2x + \frac{3}{8}$ и $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Тогда $f\left(\frac{1}{16}\right) = g\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}$ и при $x > \frac{1}{16}$ выполняется неравенство $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 2 \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

IX.260. б) **Решение.** $\frac{\sin x}{x} > \cos x \Leftrightarrow \sin x > x\cos x$. Пусть $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x\cos x$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$ и при $\frac{\pi}{2} > x > 0$ выполняется неравенство $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos x > \cos x - x\sin x$.

IX.262. б) **Решение.** Пусть $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{x}{2}(\pi - x)$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$. Докажем, что при $\frac{\pi}{2} > x > 0$ выполняется неравенство $f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow \cos x < \frac{\pi}{2} - x$. В самом деле, функция $h(x) = \cos x + x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (её производная меньше нуля) и её значение в точке $x = \frac{\pi}{2}$ равно $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, а значит, $h(x) < \frac{\pi}{2}$ при $\frac{\pi}{2} > x > 0$. в) **Решение.** $2ab\ln\frac{b}{a} < b^2 - a^2 \Leftrightarrow 2\ln\frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{ab} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$. Обозначим $x = \frac{b}{a}$. Таким образом, нам нужно доказать, что при $x > 1$ выполняется $2\ln x < x - \frac{1}{x}$. Обозначим $f(x) = 2\ln x$ и $g(x) = x - \frac{1}{x}$. Заметим, что $f(1) = g(1) = 0$, а при $x > 1$ выполняется $f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{2}{x} < 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)^2}{x^2} > 0$.

IX.263. Решение. Пусть $f(x) = \ln\frac{2x-3}{x-7} + \frac{x}{11}$. Функция f определена при всех отрицательных x, и её производная равна

$$f'(x) = \frac{1}{11} \cdot \frac{2x^2 - 17x - 100}{(2x-3)(x-7)} = \frac{1}{11} \cdot \frac{(2x-25)(x+4)}{(2x-3)(x-7)}.$$

Нетрудно заметить, что на промежутке $(-\infty;\ 0]$ наибольшее значение функции достигается в точке $x=-4$ (f возрастает на промежутке $(-\infty;\ -4]$ и убывает на промежутке $[-4;\ 0]$). Для доказательства исходного неравенства достаточно показать, что $f(-4)\leqslant 0$. Имеем: $f(-4)=\ln 1-\dfrac{4}{11}=-\dfrac{4}{11}<0$, что и требовалось доказать.

IX.264. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ на промежутке $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, на котором она возрастает $\left(f'(x)=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}>\dfrac{x-\sin x}{x^2\cos^2 x}>0\right)$.

IX.270. $E(y)=[-1;\ +\infty)$.

IX.271. 3. **Решение.** Рассмотрим функцию $f(x)=4e^{-x}\times(x^2+x-5)-1$. Вычислим её производную: $f'(x)=4\cdot e^{-x}\cdot(-x^2+x+6)$. Исследовав знак производной, можно сделать вывод, что функция f убывает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[3;\ +\infty)$ и возрастает на промежутке $[-2;\ 3]$. Заметим также, что $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, а значения функции в точках $x=-2$ и $x=3$: $f(-2)=-8e^2-1<0$ и $f(3)=28\cdot e^{-3}-1>\dfrac{28}{27}-1>0$.

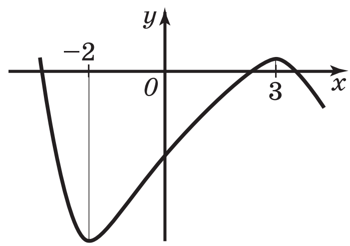


Рис. 9.9

Изобразим схематично график функции f (рис. 9.9). Из рисунка видно, что функция f имеет ровно один корень на каждом из промежутков $(-\infty;\ -2]$, $[-2;\ 3]$ и $[3;\ +\infty)$ (это можно формально доказать, используя теорему Больцано — Коши и монотонность функции на данных промежутках).

IX.272. *Указание.* Утверждение следует из возрастания на $\boldsymbol{R}$ функции $f(x)=x^3+3x^2+6x+5+\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{4}$.

IX.273. 2. **Решение.** Исследовав производную, можно доказать, что f убывает на промежутке $(-\infty;\ 1]$ и возрастает на промежутке $[1;\ +\infty)$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)<0$, поэтому функция f имеет один корень на промежутке $(-\infty;\ 1]$ и один корень на промежутке $[1;\ +\infty)$.

IX.274. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. **Решение.** Область определения функции $D(f)=(2;\ +\infty)$. Квадрат расстояния от точки $M(2;\ 0)$ до

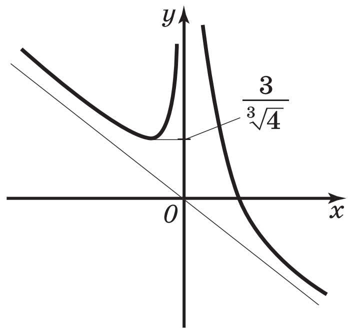


Рис. 9.10

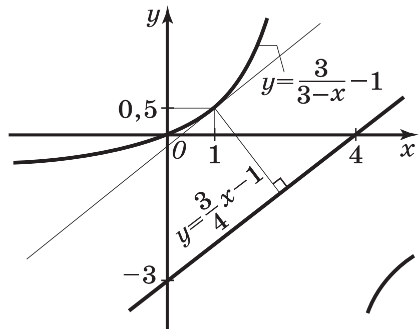


Рис. 9.11

точки графика функции f с координатами $(x;\ f(x))$ равен $l(x)=(x-2)^2+\frac{2}{27(x-2)}$. Квадрат расстояния от точки M до графика функции f — это наименьшее значение $l(x)$ на промежутке $(2;\ +\infty)$.

Исследуем функцию $l(x)$. Сделаем замену переменной $t=x-2$ и будем искать наименьшее значение функции $h(t)=t^2+\frac{2}{27t}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$. Вычислим

$$h'(t)=2t-\frac{2}{27t^2}=\frac{2(27t^3-1)}{27t^2}.$$

Тогда $h'(t)<0$ при $t\in\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$. Таким образом, наименьшее значение функции $h(t)$ достигается при $t=\frac{1}{3}$ и равно $h_{\min}=\frac{1}{3}$, откуда искомое расстояние равно $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

IX.275. $x=\frac{1}{16}$. *Указание.* См. задачу IX.259.

IX.276. $a<\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **Решение.** Заметим, что $b^2(b+a)=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^3-1=-ab^2\Leftrightarrow\frac{1-b^3}{b^2}=a$ и переформулируем задачу: какие значения a функция $f(b)=\frac{1-b^3}{b^2}=-b+\frac{1}{b^2}$ принимает ровно 1 раз. Схематичный график функции f изображён на рисунке 9.10. Ответ можно «считать» по графику: $a<\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

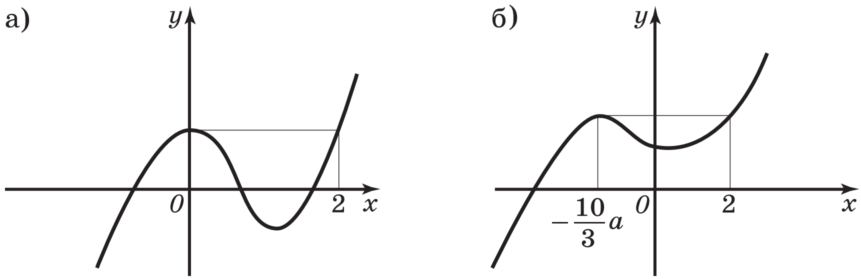


Рис. 9.12

IX.278. (1; 0,5). **Решение.** Преобразуем уравнение: $\log_3(y+1)+\log_3(3-x)=1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{3-x}-1,\ x<3$. Таким образом, нужно найти расстояние от прямой $y=\frac{3}{4}x-3$ до ветви гиперболы $y=\frac{3}{3-x}-1,\ x<3$ (рис. 9.11). Расстояние от любой точки графика до прямой будет равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Наименьшая длина такого перпендикуляра будет у перпендикуляра, опущенного из точки, касательная в которой параллельна данной прямой (это следует из выпуклости графика функции). Найдём точку x_0, в которой касательная параллельна прямой $y=\frac{3}{4}x-3$. Для этого найдём точки x_0, в которых $y'(x_0)=\frac{3}{4}$. $y'(x)=\frac{3}{(3-x)^2}$. Таким образом, $x_0=1$.

IX.279. $a=-0{,}4$. **Решение.** $f'(x)=3x\left(x+\frac{10}{3}a\right)$, откуда следует, что функция при $a\neq 0$ имеет две точки экстремума: $x=0$ и $x=-\frac{10}{3}a$.

Если $a<0$, то график функции выглядит как на рисунке 9.12, *а* и условие выполняется в том и только в том случае, когда $f(0)=f(2) \Leftrightarrow 2a=8+22a \Leftrightarrow a=-0{,}4$.

Если $a>0$ (случай $a=0$, очевидно, нас не устраивает), график выглядит как на рисунке 9.12, *б* и наибольшее значение достигается в двух точках тогда и только тогда, когда $f(2)=-\frac{10}{3}a$, что равносильно условию $125a^3-135a-54=0$.

Решим это уравнение $125a^3-135a-54=125a^3+27-(135a+27\cdot 3)=(5a+3)(25a^2-15a+9)-27(5a+3)=$

$= (5a+3)(25a^2 - 15a - 18) = 0$, откуда (с учётом того, что мы рассматриваем положительные a) $a = 1{,}2$. Итак, мы получили единственного кандидата на ответ среди положительных a. Осталось проверить, что точка экстремума функции $x_0 = -\frac{10}{3}a = -\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{5} = -4$ попадает в нужный нам промежуток $[-2\sqrt{3};\ 2]$. Но это не так $(-4 < -2\sqrt{3})$, в ответ входит только одно значение a из первого случая.

IX.280. 0,5. **Решение.** Пусть отрезок имеет концы $(x_1;\ b)$ (и эта точка принадлежит графику функции $y = 2x - \sqrt{1+x^2}$) и $(x_2;\ b)$ (эта точка принадлежит графику функции $y = 2x$). Тогда выполняются равенства

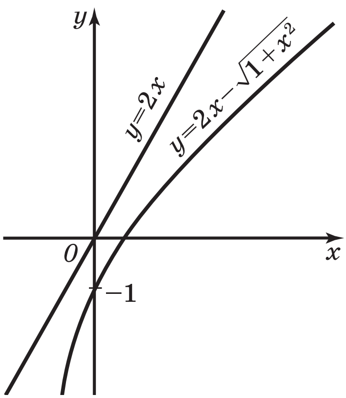


Рис. 9.13

$$2x_1 - \sqrt{1+x_1^2} = b$$

и

$$2x_2 = b,$$

откуда $x_1 - x_0 = \frac{\sqrt{1+x_1^2}}{2} \leqslant 0{,}5$. Нетрудно убедиться, что при $x_1 = 0$ и $x_2 = -0{,}5$ наименьшее значение достигается (рис. 9.13).

IX.281. $\frac{3}{4\sqrt{2}}$. **Решение.** Найдём точку, в которой касательная к графику $y = -x^2$ будет параллельна прямой $y = x + 1$. Расстояние между этими прямыми и будет искомым (рис. 9.14). Имеем: $(-x^2)' = -2x = 1$, откуда $x = -0{,}5$ и уравнение касательной к графику $y = -x^2$ в точке $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$ имеет вид $y = x + \frac{1}{4}$. Расстояние между этой прямой и прямой $y = x + 1$ равно $\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

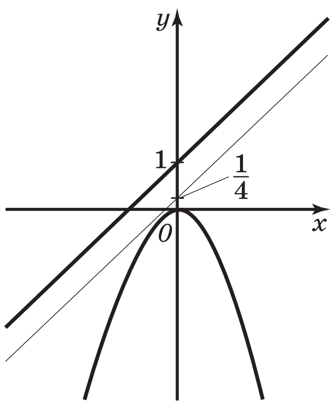


Рис. 9.14

IX.282. $(\sin 1^\circ)^{\cos 1^\circ} > (\cos 1^\circ)^{\sin 1^\circ}$. *Указание*. Исследовать на возрастание и убывание функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

IX.284. $a \in \left(\frac{27}{4};\ 8\right]$. **Решение.** $x^3 - ax - a \Leftrightarrow a = \frac{x^3}{x+1}$. График функции $y = \frac{x^3}{x+1}$ изображён на рисунке 9.15. По графику нетрудно определить, что данное уравнение имеет три корня на отрезке $[-2;\ 4]$ при $a \in \left(\frac{27}{4};\ 8\right]$.

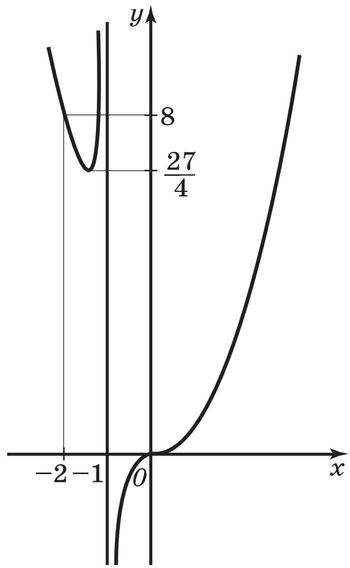


Рис. 9.15

IX.285. $a > \frac{283}{64}$. *Указание.* Задачу удобно переформулировать. Уравнение $x^4 - ax^3 + 27 = 0$ имеет хотя бы один корень, больший 4, тогда и только тогда, когда уравнение $a = \frac{x^4+27}{x^3}$ имеет корень, больший 4, т. е. фактически нужно найти множество значений функции $y = \frac{x^4+27}{x^3}$ при $x \in (4;\ +\infty)$.

IX.286. $a = 0$, $a = 4$. *Указание.* Задачу удобно переформулировать. Какие значения производная данной функции $y' = x^3 - 3x + 2$ принимает ровно два раза? Ответ легко увидеть, построив график производной.

IX.287. $a \in [3;\ +\infty)$. *Указание.* Задачу удобно переформулировать. Нужно найти множество значений функции $y = \frac{x^3+2}{x}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

IX.288. При $a < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ три корня, при $a > -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ один корень, при $a = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ два корня. *Указание.* Задачу переформулировать. Сколько корней у уравнения $-\frac{x^3+1}{x} = a$ в зависимости от a? График функции $f(x) = -\frac{x^3+1}{x}$ изображён на рисунке 9.16.

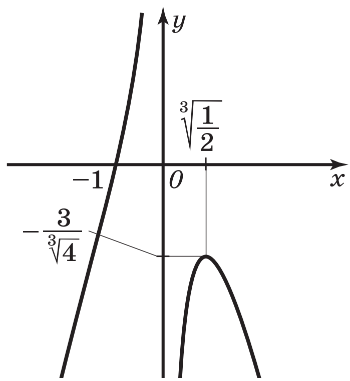


Рис. 9.16

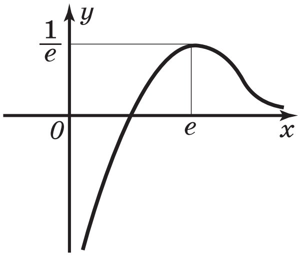


Рис. 9.17

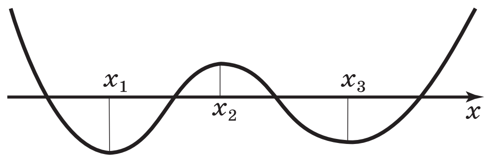


Рис. 9.18

IX.289. а) При $a > e$ два корня, при $a = e$ и $a < 0$ один корень, при $a \in [0;\ e)$ корней нет. *Указание*. Исследовать функцию $f(x) = -\frac{e^x}{x}$.

IX.290. При $a = e^{\frac{1}{e}}$ и $0 < a \leqslant 1$ один корень, при $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ два корня, при остальных a нет корней. **Решение.** Заметим, что решения уравнения могут быть только при $x > 0$, а тогда $a^x = x \Leftrightarrow x\ln a = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln a$. Эскиз графика функции $y = \frac{\ln x}{x}$ изображён на рисунке 9.17. Из графика видно, что уравнение $\frac{\ln x}{x} = \ln a$ имеет один корень, при $\ln a = \frac{1}{e}$ или $\ln a \leqslant 0$, два корня при $\ln a \in \left(0;\ \frac{1}{e}\right)$ и ни одного корня при остальных a.

IX.293. Решение. Нетрудно заметить, что функция $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ возрастающая на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, а тогда

$$\frac{\operatorname{tg}5^\circ \cdot \operatorname{tg}9^\circ}{3} = 15\frac{\operatorname{tg}5^\circ}{5} \cdot \frac{\operatorname{tg}9^\circ}{9} < 15\frac{\operatorname{tg}6^\circ}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg}10^\circ}{10} = \frac{\operatorname{tg}6^\circ \cdot \operatorname{tg}10^\circ}{4}$$

(коэффициенты перевода из градусов в радианы в левой и правой частях неравенства одинаковые).

IX.294. Решение. Ясно, что график данного многочлена выглядит как на рисунке 9.18 (x_1, x_2, x_3 — точки экстремума). $f'(x) = x(4x^2 + 3ax + 2b)$, откуда следует, что одной из точек экстремума является 0 ($b \neq 0$, так как производная должна иметь три корня по теореме Ролля). Разберём случай $x_1 = 0$. Тогда x_2 и x_3 — два других (положительных) корня производной и их произведение по теореме Виета равно $0{,}5b$, тем самым мы получили, что $b > 0$.

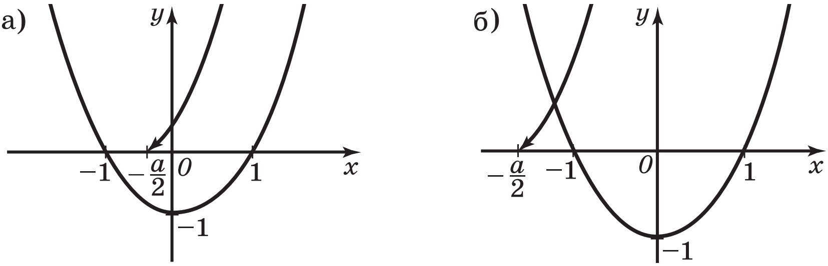


Рис. 9.19

Осталось заметить, что $c = f(0) < 0$ (иначе многочлен не имеет корня на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и тем самым четыре корня на $\boldsymbol{R}$), а значит, $bc < 0$, что и требовалось доказать. Аналогично разбираются случаи $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$.

IX.295. **Решение.** Функция f выпукла, поэтому её производная f' возрастает. Для того чтобы доказать, что $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, достаточно показать, что при сколь угодно больших значениях аргумента производная принимает сколь угодно близкие к нулю значения.

Пусть M — произвольное число, для любого $\varepsilon > 0$ существует число K, такое, что при $x_1,\ x_2 > K$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. По теореме Лагранжа существует $c > K$, такое, что $f'(c) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, откуда и следует требуемое утверждение.

IX.296. $a \in (2;\ +\infty)\backslash\{1 + 2\sqrt{2}\}$. **Решение.** От уравнения $\log_{a+2x}(x^2 - 1) = n$ перейдём к уравнению $x^2 - 1 = (a + 2x)^n$, при этом $a + 2x > 0$, $a + 2x \neq 1$ и $|x| > 1$. Построим графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = (a + 2x)^n$ при $a \in (0;\ 2]$ (рис. 9.19, *а*). Ясно, что при $n \geqslant 2$ уравнение $x^2 - 1 = (a + 2x)^n (a + 2x > 0,\ a + 2x \neq 1,\ |x| > 1)$ корней не имеет, а значит, данные a нас не устраивают. В то же время при $a > 2$ корень будет при любом n (см. рис. 9.19, *б*). Осталось исключить случай, когда общая точка графиков совпадает с точкой $(-\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$, что происходит при $a = 1 + 2\sqrt{2}$.

IX.297. *Указание*. Свести задачу к нахождению наименьшего значения функции $y = \dfrac{(x+1)^{n+1}}{x}$ и воспользоваться тем, что $e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ при любом натуральном n.

ГЛАВА X. Определённый интеграл

Изложение материала главы следует историческому пути появления понятия определённого интеграла. А именно центральным является утверждение о том, что площадь под графиком непрерывной функции является первообразной данной функции.

В соответствии с общим подходом к уровню строгости изложения авторы не доказывают существования площади криволинейной трапеции под графиком непрерывной функции. Однако принципиально важным является упоминание о том, что этот факт необходимо доказывать (см. с. 172 учебника). Также следует упомянуть об отсутствии доказательства аддитивности площади — свойства, эквивалентного формуле Ньютона — Лейбница.

Вообще говоря, материал главы может излагаться с различной степенью подробности. Например, можно не доказывать свойства определённого интеграла (или доказать их только для непрерывных функций), не рассматривать общий подход к понятию определённого интеграла и т. п.

Существенным моментом, который должен быть «прорисован» в изложении хотя бы эскизно, авторы считают схему введения определённого интеграла.

Определённый интеграл вводится с помощью формулы Ньютона — Лейбница, тем самым **он определяется для функций, имеющих конечное число точек разрыва на промежутке интегрирования.**

Однако в сильном классе можно рассмотреть общее определение интеграла Римана с помощью сумм Дарбу (с. 187—189 учебника). В этой ситуации можно доказать формулу Ньютона—Лейбница для непрерывных функций (это доказательство фактически повторит доказательство утверждения на с. 180). Но такой путь представляется противоестественным для большинства школьников, тем более что придётся доказывать те свойства площади, которые «кажутся очевидными» (ту же аддитивность).

Следует обратить особое внимание учащихся на то, что формула Ньютона—Лейбница верна только для функций, непрерывных на отрезке между пределами интегрирования.

Особое внимание следует уделить решению задач, связанных с приложениями определённого интеграла, в том числе решению физических задач. Было бы желательным провести несколько интегрированных уроков с участием учителей физики, на которых можно было бы рассмотреть различные задачи с физическим содержанием.

План изучения материала главы X приведён в таблице (количество часов дано для 4 и 5 часов алгебры и начал математического анализа в неделю).

Глава X. Определённый интеграл	**10**	**16**
Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл. Формула Ньютона—Лейбница	1	2
Свойства определённого интеграла	2	2
Применения определённого интеграла. Вычисление площадей. Вычисление длин кривых	3	4
Физические задачи		2
Различные задачи на определённый интеграл	2	4
Контрольная работа № 7	2	2

§ 62. Площадь криволинейной трапеции

Этот параграф посвящён определению площади криволинейной трапеции и связи её с первообразной. Особенностью параграфа является большое количество сформулированных, но недоказанных утверждений. К основным таким утверждениям можно отнести:

- существование площади под графиком непрерывной функции;
- возможность вычисления площади с помощью разбиений на равные части (утверждение на с. 175 учебника);
- аддитивность площади криволинейной трапеции.

Полезно сформулировать учащимся эти утверждения, обратив внимание на то, что они являются недоказанными.

Центральной теоремой параграфа является теорема о площади под графиком первообразной. Если в классе нет времени обсуждать вопрос об определении площади криволинейной трапеции, можно сразу перейти к доказательству этой теоремы, надеясь на то, что понятие площади криволинейной трапеции для современных школьников является столь же интуитивно ясным, как для Ньютона и Лейбница.

Таким образом, материал этого параграфа служит фундаментом для появления понятия определённого интеграла, в силу чего степень подробности изучения такого материала можно варьировать в зависимости от уровня подготовки класса, наличия времени и т. д.

Авторы сочли излишним дублировать вузовский курс в части приближённых методов интегрирования, однако полезным является решение нескольких примеров, показывающих, как с помощью определения можно приближённо вычислить интеграл (задачи X.1, X.3). Эти задачи служат для «прощупывания руками» определения площади под графиком и понимания того, что это определение пригодно для практических целей вычисления конкретных площадей. При этом задача X.3 показывает, как можно априори оценивать точность вычисления площади под графиком.

Задача X.4, с одной стороны, аналогична примеру 4 учебника, а с другой — требует от учащихся внимательности, так как требуется вычислить площадь под графиком функции, принимающей отрицательные значения на соответствующем промежутке. Поэтому эту задачу уместно разобрать в классе с пояснением того, какая же величина найдена при помощи вычислений, аналогичных приведённым в примере 4.

Решения и указания к задачам

X.1. а) $S=\frac{5}{8}$; $s=\frac{1}{8}$. б) $S=\frac{14}{27}$; $s=\frac{5}{27}$. в) $S=\frac{15}{32}$; $s=\frac{7}{32}$.

X.2. 14. **Решение.** Решение задачи аналогично примеру 2 из §62 учебника. Разделим отрезок [1; 3] на n равных частей. Длина каждой части равна $\frac{2}{n}$. Точки, делящие отрезок, соответствуют числам $x_i=1+\frac{2i}{n}$. Наибольшее значение данной функции на каждом отрезке достигается на правом конце этого отрезка. Поэтому

$$S_n=\frac{2}{n}\left(2\left(1+\frac{2}{n}\right)+3+2\left(1+\frac{4}{n}\right)+3+\ldots+2\left(1+\frac{2k}{n}\right)+3+\ldots+\right.$$

$$\left.+2\cdot 3+3\right)=10+\frac{8}{n^2}(1+2+\ldots+k+\ldots+n)=10+\frac{4(n+1)}{n}.$$

Таким образом, искомая площадь равна $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=14$.

Замечание. Конечно, задача носит учебный характер, и не следует с помощью определения площади криволинейной трапеции вычислять площадь «обыкновенной» трапеции. Однако полезно обратить внимание учащихся на совпадение результатов вычисления площади двумя способами, т. е. на то, что определение площади криволинейной трапеции согласуется с обычным определением площади многоугольной фигуры.

X.3. 11; 41. **Решение.** Решение задачи аналогично примеру 3 из §62 учебника. Разделим отрезок [0; 1] на n частей. Приближения по недостатку и по избытку функции g будут равны $S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^4\right)$,

$s_n = \frac{1}{n}\left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^4\right)$. Тогда $S_n - s_n = \frac{1}{n}$, а требуемое условие переписывается в виде неравенства $\frac{1}{n} < 0{,}1$. Наименьшее значение n, удовлетворяющее такому неравенству, равно 11.

Случай отрезка [−1; 1] требует более тонких вычислений.

Если число отрезков разбиения чётно (т. е. $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$), то одной из точек разбиения является число 0. В этом случае каждый из отрезков [−1; 0] и [0; 1] разбивается на k частей, причём в силу предыдущего случая разность приближений по недостатку и по избытку на каждом из этих отрезков будет отличаться на $\frac{1}{k}$. Тогда $S_n - s_n = \frac{2}{k} = \frac{4}{n}$.

Пусть $n = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$ (здесь не рассмотрен случай разбиения на 1 отрезок). Приближения по недостатку и по избытку функции g будут равны $S_n = \frac{2}{2k+1}\Bigg((-1)^4 +$

$$+\left(-1 + \frac{2}{2k+1}\right)^4 + \ldots + \left(-1 + \frac{2k}{2k+1}\right)^4 + \left(-1 + \frac{2k+4}{2k+1}\right)^4 + \ldots + 1^4\Bigg)$$ и

$$s_n = \frac{2}{2k+1}\Bigg(\left(-1 + \frac{2}{2k+1}\right)^4 + \ldots + \left(-1 + \frac{2k}{2k+1}\right)^4 + 0 + \left(-1 + \frac{2k+2}{2k+1}\right)^4 +$$

$+ \ldots + \left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)^4\Bigg)$. Тогда $S_n - s_n = \frac{2}{2k+1}\left(2 - \frac{1}{(2k+1)^4}\right) =$

$= \frac{2}{n}\left(2 - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{4}{n} - \frac{2}{n^5}$. Наименьшее чётное n, удовлетворяющее неравенству $\frac{4}{n} < 0{,}1$, равно 42. В то же время наименьшее нечётное n, удовлетворяющее неравенству $\frac{4}{n} - \frac{2}{n^5} < 0{,}1$, равно 41.

X.4. *Замечание.* Задача носит пропедевтический характер к изучению определённого интеграла (см. рис. 10.6 на с. 183 учебника). Решение задачи было бы аналогично примеру 4 учебника и сводилось бы к отысканию предела суммы $R_n = \frac{\pi}{2n}\left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2n} + \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{2n} + \cos 2 \cdot \frac{3\pi}{2n} + \ldots + \right.$ $\left. + \cos 2 \cdot \frac{n\pi}{2n}\right)$, если бы функция не принимала отрицательных значений на данном промежутке.

Решение. В самом деле, аналогично приёму, использованному в примере 4 (а ранее в примере 30 главы VI учебника 10 класса), можно умножить каждый из косинусов на $\sin\frac{\pi}{2n}$ и представить произведение синуса и косинуса в виде полуразности синусов. Получаем

$$R_n = \frac{\frac{\pi}{2n}\left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = -\frac{\pi}{2n},$$

откуда искомый предел равен нулю.

Замечание. Функция $\cos 2x$ принимает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому, прежде чем пускаться в вычисления, полезно обсудить с учащимися, что за величину мы найдём с помощью этих вычислений. Таким образом, можно естественно прийти к идее считать площадь, находящуюся под осью абсцисс, отрицательной. Здесь можно привести иллюстрации, показывающие естественность такого определения. Например, если соответствующая функция иллюстрирует прибыль в единицу времени, разумно изображать убытки в виде отрицательной прибыли. В этом случае площадь под графиком такой функции будет равна прибыли за соответствующий период времени, причём в этой ситуации разумно считать площадь, находящуюся под осью абсцисс, отрицательной.

X.5, X.6. Такие функции существуют. Это функции, похожие на функцию Дирихле. А именно пусть одна из функций — функция Дирихле $D(x)$, а другая задаётся условием $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \boldsymbol{Q}, \\ 1, & x \notin \boldsymbol{Q} \end{cases}$ (отметим, что $f(x) = 1 - D(x)$).

Тогда при всех вещественных значениях x имеем $f(x) \cdot D(x) = 0$, а $f(x) + D(x) = 1$. Тем самым эти функции удовлетворяют условиям задач X.5 и X.6.

§ 63. Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла вводится для функций, имеющих конечное число точек разрыва на промежутке между пределами интегрирования. Для этого определение с помощью формулы Ньютона—Лейбница, введённое для функций, непрерывных на отрезке, обобщается на функции, непрерывные на промежутке, а затем с помощью суммирования интегралов по промежуткам непрерывности распространяется на функции, имеющие конечное число точек разрыва.

Эта схема может излагаться с разной степенью подробности, но мы полагаем методологически полезным обрисовать её хотя бы эскизно, поскольку введение новых понятий «от частного к общему» весьма распространено в науке вообще.

Несмотря на то что теорема об интеграле с переменным верхним пределом в данном изложении является простым следствием определения, мы полагаем необходимым выделить и сформулировать её отдельно в силу того, что её применение позволяет решать большой класс задач.

Задачи X.7—X.10 предназначены для иллюстрации вводимого понятия и не требуют никаких размышлений, кроме применения определения интеграла. Нахождение первообразных в этих задачах не требует значительных усилий. Задачи различаются классами интегрируемых функций. Естественно в течение урока решить один-два пункта каждой из этих задач, задав остальные в качестве домашнего задания.

Задачи X.11—X.15 предназначены не только для применения определения и формулы Ньютона—Лейбница, но и для анализа применимости этой формулы (X.12 б), решения задач с параметром, сведения к системам и т. п.

Задачи X.16—X.20 также отрабатывают применение определения, но нахождение первообразных в них затруднено. Эти задачи могут решаться по схеме примера 7 из § 63 учебника как нахождением первообразной, так и вычислением площади. Здесь используется либо подход к нахождению первообразной кусочно-заданной функции, либо геометрическая интерпретация определённого интеграла. При этом полезным является равенство $|x| = x\operatorname{sign}x$. Например, с помощью этого равенства легко можно получить $\int |x|dx = \frac{x|x|}{2} + C$, не занимаясь «склеиванием» первообразных на отдельных частях области определения. Обобщением этой формулы является формула

$$\int x^a|x|dx = \frac{1}{a+2}\cdot x^{a+1}|x| + C.$$

В задачах X.21—X.23, помимо трудностей с нахождением первообразных (которые для кусочно-заданных функций находятся «склеиванием» на отрезках подобно примеру 39 из § 68 учебника), добавляется необходимость анализа применимости формулы Ньютона—Лейбница, а также чёткое понимание того, по какой переменной ведётся интегрирование (X.23).

Задачи X.25—X.30 посвящены расширению понятия определённого интеграла и требуют понимания того, что такое интеграл функции, непрерывной на промежутке (X.25, X.26), и применения определения интеграла для функции с конечным числом точек разрыва (X.27—X.30).

Решение задач X.31—X.33 позволит учащимся осознать связь между понятиями определённого интеграла и производной и использовать эту связь для быстрого решения задач. Отметим, что большая часть этих задач может быть решена «в лоб», но на такое решение потребуется неизмеримо больше времени, а вероятность ошибки существенно повысится.

Особо отметим задачу X.34, которая показывает, что к применению теоремы Барроу нужно относиться внимательно. Если переменная встречается не только в пределе интегрирования, но и в подынтегральной функции, получается сложная функция, к которой теорема Барроу неприменима.

Решения и указания к задачам

X.7. а) $-3\frac{3}{4}$. б) $\frac{23}{21}$. в) 12. г) $\frac{5\pi}{12}$. д) $6-4\ln 3$. е) $-\frac{103}{108}$. *Указание.* Полезно представить подынтегральное выражение в виде $(x-1)^3-1$, что существенно упростит вычисления.

X.8. а) $-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. б) 2. в) $-0{,}4$.

X.9. а) $1-\frac{2}{\ln 2}$. б) $-\frac{4}{\ln 2}$. в) $\frac{6+2\ln 7}{\ln 2}$.

X.10. $\frac{\pi}{4}$.

X.11. а) $a=3^{\frac{2}{3}}-1$. **Решение.** $\int\limits_{-1}^{a}\sqrt{x+1}\,dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{a}=$ $=\frac{2}{3}(a+1)^{\frac{3}{2}}$. Задача сводится к решению уравнения $\frac{2}{3}(a+1)^{\frac{3}{2}}=2$, откуда $a=3^{\frac{2}{3}}-1$.

б) $a = 2$. *Указание*. Аналогично задаче X.11 а), приходим к уравнению $12 - a^2 - a = a^3 - a$, откуда $a = 2$.

X.12. а) $\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{aligned}\right.$ $k \in \mathbf{Z}$.

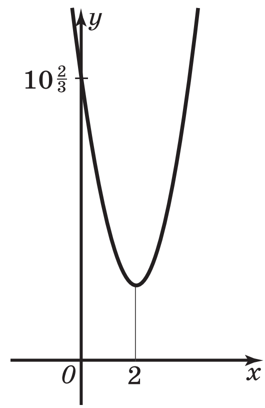


Рис. 10.1

б) $x = \pm e$. **Решение.** Имеем $\int\limits_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{t} = \left.= \ln t\right|_{x^2}^{x^4} = \ln x^2$. Тогда исходное уравнение даёт $\ln x^2 = 2$, откуда $x = \pm e$.

X.13. Решение. Здесь важно всё время помнить, что интегрирование ведётся по переменной t: $\int\limits_0^2 (2t - x)^2 dt = \left.= \frac{(2t-x)^3}{6}\right|_0^2 = \frac{(4-x)^3 - (-x)^3}{6} = 10\frac{2}{3} - 8x + 2x^2$.

Итак, $f(x) = 2x^2 - 8x + 10\frac{2}{3}$. График представлен на рисунке 10.1.

X.14. а) $\frac{1}{3}$. **Решение.** Способ 1. $\int\limits_1^b x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^b = \frac{b^4 - 1}{4}$, откуда искомый предел равен

$$\lim_{b \to 1} \frac{b^4 - 1}{4(b^3 - 1)} = \lim_{b \to 1} \frac{(b^2+1)(b-1)(b+1)}{4(b-1)(b^2+b+1)} = \frac{1}{3}.$$

Способ 2. Другой подход состоит в том, чтобы, обозначив $\int\limits_1^b x^3 dx = f(b)$, заметить, что так как $f(1) = 0$, то $\lim\limits_{b \to 1} \frac{\int_1^b x^3 dx}{b-1} = \lim\limits_{b \to 1} \frac{f(b) - f(1)}{b-1} = f'(1)$. Функция $f(b)$ задана как интеграл с переменным верхним пределом, поэтому её производная равна подынтегральной функции. Тем самым $f'(1) = 1^3 = 1$. Теперь осталось заметить, что

$$\lim_{b \to 1} \frac{\int_1^b x^3 dx}{b^3 - 1} = \lim_{b \to 1} \frac{\int_1^b x^3 dx}{b - 1} \cdot \lim_{b \to 1} \frac{1}{b^2 + b + 1} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

б) $-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$. **Решение.** Здесь также возможны два способа решения. Приведём более изящное из них.

Пусть $f(a)=\int\limits_a^2 \sqrt[3]{x}dx$, $g(a)=\int\limits_2^a \sqrt{x+1}dx$. Тогда, по определению интеграла $f(a)=F(2)-F(a)$, $g(a)=G(a)-G(2)$, где F — первообразная функции $y=\sqrt[3]{x}$, а G — первообразная функции $y=\sqrt{x+1}$. Умножив числитель и знаменатель исходной дроби на $a-2$, получаем исходный предел равным $\lim\limits_{a\to 2}\left(\dfrac{F(2)-F(a)}{a-2}\cdot\dfrac{a-2}{G(2)-G(a)}\right)=-\dfrac{F'(2)}{G'(2)}=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+1}}$ (в первом переходе мы использовали определение производной).

X.15. а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{4}{3}$. **Решение.** Представим квадратичную функцию в виде $f(x)=a(x-b)^2+c$ (представление в таком виде достигается выделением полного квадрата). Следовательно, $\int\limits_0^1 f(x)dx=\left.\left(\dfrac{a(x-b)^3}{3}+cx\right)\right|_0^1=\dfrac{a(1-b)^3}{3}+\dfrac{ab^3}{3}+c=$ $=\dfrac{a}{3}(1-3b+3b^2)+c$. Аналогично

$\int\limits_1^2 f(x)dx=\dfrac{a}{3}\cdot(7-9b+3b^2)+c$; $\int\limits_2^3 f(x)dx=\dfrac{a}{3}\cdot(19-15b+3b^2)+c$.

Итак, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}\cdot(1-3b+3b^2)+c=-\dfrac{7}{6}, & (1)\\ \dfrac{a}{3}\cdot(7-9b+3b^2)+c=-\dfrac{1}{6}, & (2)\\ \dfrac{a}{3}\cdot(19-15b+3b^2)+c=\dfrac{11}{6}. & (3)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), а из уравнения (2) — уравнение (1), получаем систему-следствие: $\begin{cases}\dfrac{a}{3}(12-6b)=2,\\ \dfrac{a}{3}(6-6b)=1,\end{cases}$ из которой, разделив одно уравнение на другое, получаем $\dfrac{2-b}{1-b}=2$, откуда $b=0$. Тогда $a=\dfrac{1}{2}$, и наконец, $c=-\dfrac{4}{3}$.

Замечание. Конечно, можно было действовать, обозначив стандартным образом неизвестные коэффициенты трёхчлена f. При этом получается система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, также решаемая последовательным вычитанием уравнений.

б) **Решение.** Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда $\int\limits_0^1 f(x)dx =$
$= \frac{a}{2} + b;\ \int\limits_1^2 f(x)dx = \frac{3a}{2} + b;\ \int\limits_2^3 f(x)dx = \frac{5a}{2} + b$. Видно, что указанные числа образуют арифметическую прогрессию с разностью a. Необходимым и достаточным условием того, что три числа образуют арифметическую прогрессию, является то, что сумма двух из них равна удвоенному третьему. Таким образом, $A + C = 2B$.

Замечание. Легко видеть, что любые три числа, образующие арифметическую прогрессию, могут быть интегралами линейной функции, угловой коэффициент которой равен разности прогрессии, а свободный член легко находится. До искомого соотношения легко догадаться, используя геометрические соображения (рис. 10.2).

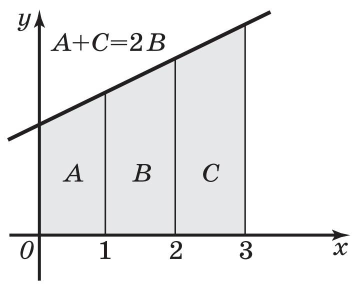


Рис. 10.2

X.16. а) 1. б) −18. в) $\frac{19}{6}$.

г) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$. **Решение.** Способ 1. $\int\sqrt{2x - x^2}dx =$
$= \int\sqrt{1 - (x-1)^2}dx = \frac{\arcsin(x-1)}{2} + \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2} + C$ (в последнем равенстве мы воспользовались результатом примера 49 главы IX).

Тогда $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{2x - x^2}dx = \frac{\arcsin(x-1)}{2} + \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{\pi}{4} -$
$- \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Способ 2. Можно вычислить этот же интеграл из геометрических соображений подобно примеру 8 из §63 учебника. Искомый интеграл равен площади закрашенной фигуры, равной сумме площадей прямоугольного треу-

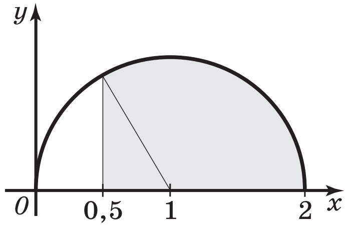


Рис. 10.3

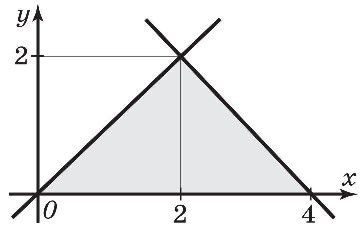


Рис. 10.4

гольника и кругового сектора с центральным углом 120° (рис. 10.3).

д) $\dfrac{9\arcsin\frac{1}{3}}{2}+\sqrt{2}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи X.16 г), поскольку $\sqrt{6x-x^2}=\sqrt{9-(x-3)^2}$.

X.17. *Замечание.* При разборе задач этого номера полезно упомянуть, что в дальнейшем, после доказательства свойства аддитивности определённого интеграла, можно будет решать задачи интегрирования кусочно-заданных функций, складывая интегралы на отдельных частях области определения.

а) 4. **Решение.** Способ 1. Найдём первообразную подынтегральной функции. Заметим, что подынтегральная функция равна $\begin{cases} x, & x<2, \\ 4-x, & x\geqslant 2. \end{cases}$

Поэтому одна из её первообразных будет равна $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-4, & x<2, \\ -\dfrac{(4-x)^2}{2}, & x\geqslant 2. \end{cases}$ Тогда $\int\limits_0^4 \min(x;\ 4-x)dx=F(4)-$ $-F(0)=0-(-4)=4.$

Способ 2. *Указание.* Ответ может быть получен из геометрических соображений как площадь треугольника на рисунке 10.4.

б) 3,5. в) $\dfrac{59}{6}$.

X.18. а) $\dfrac{4}{\ln 3}$. б) $19-\dfrac{1}{\ln 2}$.

X.19. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{2}{3}$. **Решение.** Найдём первообразную подынтегральной функции на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, обозначив подынтегральную функцию f. Получим $f(x)=\begin{cases}-\sin x\cdot\cos 2x, & -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x\cdot\cos 2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ Тогда одна из первообразных будет равна $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+\frac{2}{3}, & -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 0,\\ -\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ откуда искомый интеграл равен

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0-\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}.$$

б) $\frac{3+\pi}{2}$.

в) $40\sqrt{2}$. **Решение.** Для упрощения вычислений, чтобы не «склеивать» первообразную в двадцати точках, можно воспользоваться геометрическим смыслом интеграла, заметив, что искомый интеграл равен суммарной площади под двадцатью арками синусоиды $y=\sqrt{2}\cos x$. (рис. 10.5). Площадь под одной такой аркой равна

$$\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x=2\sqrt{2}.$$

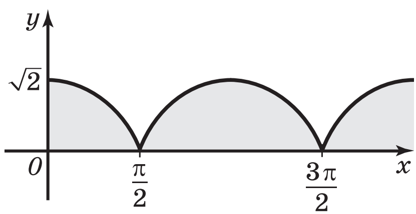


Рис. 10.5

г) $20\sqrt{2}$. *Указание*. Решение аналогично решению задачи X.19 в).

X.20. а) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$. б) 0,5.

X.21. а) $\sqrt[3]{2}-1$. **Решение.** Типичное решение, которое предъявляют школьники, состоит в следующем:

$$\int_{-x}^{2x}\frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}\Bigg|_{-x}^{2x}=-\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{x+2},\quad -\frac{1}{2}\int_{1}^{x}tdt=-\frac{1}{4}t^2\Bigg|_{1}^{x}=\frac{1-x^2}{4}.$$

Приравняем полученные выражения и, избавившись от знаменателей, получим уравнение $x^4 + x^3 - 3x^2 - 7x + 2 = 0$. Это уравнение имеет корень $x = 2$. После деления левой части уравнения на $x - 2$ получаем $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Это уравнение приводится к виду $(x+1)^3 = 2$, откуда $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

Однако важно заметить, что если в промежуток интегрирования функции $y = \frac{1}{(t-2)^2}$ попадает её точка разрыва $t = 2$, то соответствующего интеграла не существует. Точка $x = 2$ не является ответом, поскольку $t = 2$ содержится в отрезке $[-2;\ 4]$. А вот точка $x = \sqrt[3]{2} - 1$ ответом является, так как $1 - \sqrt[3]{2} < 2$, и $2(\sqrt[3]{2} - 1) < 2$.

б) $x = 0$. **Решение.** Здесь, как и в предыдущей задаче, аналогичная ситуация с проверкой принадлежности точки разрыва подынтегральной функции промежутку интегрирования. Уравнение сводится к следующему:

$$\operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}x = \sin x, \text{ откуда } \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x \cdot \cos 2x = 1,\end{array}\right.$$

следовательно, $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

При всех найденных значениях x, кроме нуля, в промежутке между x и $2x$ будет точка вида $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

X.22. Решение. При $x < 2$ на промежутке интегрирования подынтегральная функция тождественно равна 2. Следовательно, при $x < 2$ $y = 2x - 2$.

При $x \geqslant 2$ первообразная подынтегральной функции равна $\begin{cases} 2t - 4, & t < 2,\\ t^2 - 2t, & t \geqslant 2,\end{cases}$ а тогда

$$y = x^2 - 2x - (2 \cdot 1 - 4) = x^2 - 2x + 2.$$

Итак, $y = \begin{cases} 2x - 2, & x < 2,\\ x^2 - 2x + 2, & x \geqslant 2.\end{cases}$ График представлен на рисунке 10.6.

X.23. а) Если $t < 0$, то на промежутке $[0;\ 1]$ подынтегральная функция равна $x^2 - 2tx$, а тогда

$$F(t) = \left(\frac{x^3}{3} - tx^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - t.$$

Если $t > 0{,}5$, то на промежутке $[0;\ 1]$ подынтегральная функция равна $2tx - x^2$, откуда $F(t) = \left(tx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = t - \frac{1}{3}$.

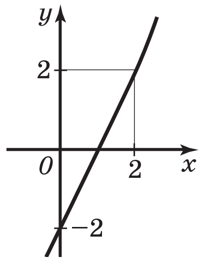


Рис. 10.6

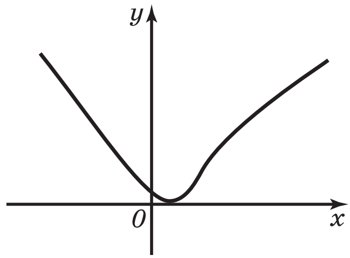


Рис. 10.7

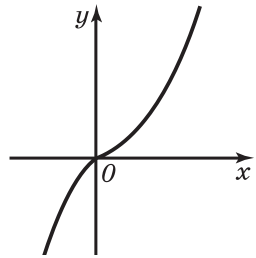


Рис. 10.8

Если $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$, то подынтегральная функция равна

$$\begin{cases} tx^2 - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{8t^3}{3}, \ 0 \leqslant x \leqslant 2t, \\ \dfrac{x^3}{3} - tx^2, \ 2t \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{а тогда } F(t) = \frac{8t^3}{3} - t + \frac{1}{3}.$$

График функции представлен на рисунке 10.7.

б) *Замечание*. Решать задачу можно аналогично задаче X.23 а), а можно упростить решение, если понимать, что в процессе интегрирования x является константой.

Решение. Используя сделанное замечание о первообразной модуля, получаем, что первообразная подынтегральной функции равна $G(t) = x\frac{(2t-x)|2t-x|}{4}$, а тогда $F(t) = x\frac{(2t-x)|2t-x|}{4}\Big|_0^1 = \frac{x(2-x)|2-x|}{4} + \frac{x^2|x|}{4}$. График функции представлен на рисунке 10.8.

X.24. а) **0.** **Решение.** Действительно, любая нижняя сумма Дарбу для функции $x^2R(x)$ равна нулю. Поскольку $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ на отрезке $[-1;\ 1]$, любая верхняя сумма Дарбу функции $x^2R(x)$ не превосходит верхней суммы Дарбу функции Римана. Поэтому, коль скоро для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение, верхняя сумма Дарбу для которого меньше ε, тем более для этого же разбиения верхняя сумма Дарбу функции $x^2R(x)$ будет меньше ε.

б) Не существует. **Решение.** Подынтегральную функцию можно описать как $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q}, \ x = \frac{p}{q}, \\ 0, \ x \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases}$ Тогда в любой рациональной точке, не являющейся целым числом, имеет место неравенство $F(x) \geqslant 0{,}5$.

Возьмём произвольное разбиение отрезка $[0;\ 1]$ на конечное число промежутков. Тогда на любом промежутке разбиения максимум функции будет не меньше $0{,}5$, а потому любая верхняя сумма Дарбу функции F будет не меньше 0,5. В то же время любая нижняя сумма Дарбу равна нулю. А значит, интересующий нас интеграл не существует.

X.25. а) $\frac{\pi}{4}$. *Указание.* Решение аналогично примеру 9 из § 63 учебника.

б) Не существует. **Решение.** $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln \varepsilon = -\ln \varepsilon$.

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = +\infty$. Искомого интеграла не существует.

в) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}$. **Решение.** $\int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}$.

X.26. Существует при $a > -1$. **Решение.** Заметим, что при $a \neq -1$ выполнено $\int_{\varepsilon}^{1} x^a dx = 1 - \frac{1}{a+1} \varepsilon^{a+1}$ (случай $a = -1$ рассмотрен в задаче X.25 б). При этом можно считать $\varepsilon > 0$, в соответствии с замечанием об области определения степенной функции с произвольным показателем. Тогда при $a > -1$ выполнено $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{1}{a+1} \varepsilon^{a+1}\right) = 1$, а при $a < -1$ предела не существует. Таким образом, интеграл $\int_{\varepsilon}^{1} x^a dx$ существует при $a > -1$.

X.27. а) **Решение.** Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x = 0$. В соответствии с определением интеграла для такой функции получаем

$$\int_{-3}^{5} x^2 \operatorname{sign} x\, dx = \int_{-3}^{0} x^2 \operatorname{sign} x\, dx + \int_{0}^{5} x^2 \operatorname{sign} x\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{5} x^2 dx = -9 + \frac{125}{3} = \frac{98}{3}.$$

б) $\sin 3 - \sin 1$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи X.27 а).

X.28. а) $\frac{41}{3}$. б) -4. в) $-\frac{9\pi^2}{2}$.

X.29. $\frac{10}{3}$.

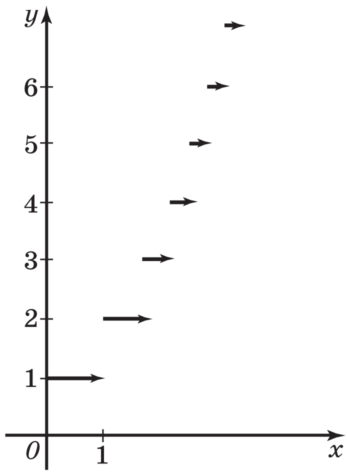


Рис. 10.9

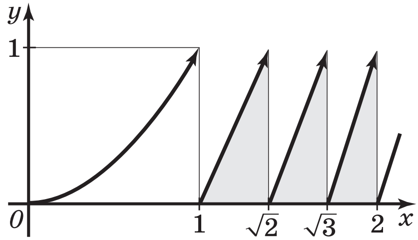


Рис. 10.10

X.30. а) $17-\log_2(315)$. **Решение.** $\int\limits_0^3 \left[2^x\right]dx = \int\limits_0^1 1dx +$

$+\int\limits_1^{\log_2 3} 2dx + \int\limits_{\log_2 3}^{2} 3dx + \int\limits_2^{\log_2 5} 4dx + \int\limits_{\log_2 5}^{\log_2 6} 5dx + \int\limits_{\log_2 6}^{\log_2 7} 6dx + \int\limits_{\log_2 7}^{3} 7dx.$

График подынтегральной функции приведён на рисунке 10.9.

б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{8}{3}$. График подынтегральной функции представлен на рисунке 10.10.

X.31. а) $\sqrt{1+x^2}$.

б) **Решение.** Пусть $G(x)$ — первообразная функции $\sqrt{1+x^2}$ (знать явный вид этой первообразной не обязательно). Так как по определению интеграла $\int\limits_x^1 \sqrt{1+t^2}dt =$ $= G(1)-G(x)$, то $F'(x)=(G(1)-G(x))'=-G'(x)=-\sqrt{1+x^2}$.

в) **Решение.** $\int\limits_1^{x+1} \sqrt{1+t^2}dt = G(t+1)-G(1)$. Поэтому $F'(x)=(G(x+1))'=G'(x+1)\cdot(x+1)'=\sqrt{1+(x+1)^2}$. г) **Решение.** $F'(x)=\sqrt{1+(x+1)^2}-\sqrt{1+x^2}$. д) **Решение.** $F'(x) =$

$= 2x\sqrt{1+x^4}$. е) **Решение.** Поскольку $F(x) = G(x^3) - G(x^2)$, то $F'(x) = 3x^2\sqrt{1+x^6} - 2x\sqrt{1+x^4}$.

X.32. а) $-\frac{e^{-4}}{2} + \frac{e^{-1}}{2}$. б) $\left[\frac{e^{-1}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{e^{-1}}{2}\right)$.

в) $y = 2e^{-4}(x-2) + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-4}}{2}$. **Решение.** Заметим, что $g'(2) = 2e^{-4}$, т. е. $g'(2)$ равно значению подынтегральной функции в точке $x_0 = 2$. Воспользуемся уравнением касательной и результатом задачи X.32 а). Получим

$$y = 2e^{-4}(x-2) + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-4}}{2}.$$

X.33. $y = -x - 3 + \pi + 4\pi k$; $y = -x + \frac{\pi}{3} + 4\pi k + \frac{5\sqrt{3}}{4} - 3$; $y = -x + \frac{5\pi}{3} + 4\pi k - \frac{5\sqrt{3}}{4} - 3$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **Решение.** Чтобы касательная была параллельна данной прямой, необходимо, чтобы её угловой коэффициент был равен -1. В свою очередь, угловой коэффициент касательной — это производная данной функции в точке касания. А производная данной функции — это подынтегральная функция. Значит, для нахождения абсциссы точки касания получаем уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x = -1$.

Решив это уравнение, получаем

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Для составления уравнения касательной необходимо знать значение функции в точке касания. Поэтому придётся получить явное выражение для функции f, а именно $f(x) = x + 3\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x - 3$. Тогда соответствующие касательные имеют такие уравнения: $y = -x - 3 + \pi + 4\pi k$, $y = -x + \frac{\pi}{3} + 4\pi k + \frac{5\sqrt{3}}{4} - 3$, $y = -x + \frac{5\pi}{3} + 4\pi k - \frac{5\sqrt{3}}{4} - 3$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Видно, что ни одна из полученных прямых не совпадает с прямой $y = -x + 5$, поэтому совокупность полученных уравнений образует ответ.

X.34. 4. **Решение.** $F(x) = (t^3 - 2xt^2 + 3xt)\Big|_0^x = -x^3 + 3x^2$. Тогда $F'(x) = -3x^2 + 6x$. Итак, производная при положительных значениях x единственный раз меняет знак с «+» на «−» при $x = 2$, поэтому в точке $x = 2$ достигается наибольшее значение функции, равное 4.

Замечание. Обратите внимание, что производная функции F не совпадает с подынтегральной функцией, в которую вместо t подставлен x. Это связано с тем, что x имеется не только в верхнем пределе интегрирования, но и в записи подынтегральной функции. Поэтому в данном случае теорему Барроу применять нельзя.

§ 64. Свойства определённого интеграла

В параграфе рассматриваются свойства, связанные с арифметическими действиями, свойства, связанные с неравенствами, и отдельно выделяемое свойство подстановки, которое позволяет вычислять определённые интегралы, не возвращаясь к исходной переменной.

Считаем, что в классе со средней успеваемостью и мотивацией можно ограничиться доказательством свойств для непрерывных подынтегральных функций, приняв их без доказательства для функций, имеющих конечное число точек разрыва. Доказательства в этой ситуации элементарны и сводятся к манипуляциям с формулой Ньютона—Лейбница.

Для более сильных учащихся можно задать самостоятельно разобрать доказательство остальных свойств (кроме свойства 1, доказанного в тексте) для функций, имеющих конечное число точек разрыва.

Полезными при решении задач являются сформулированные в пункте 3 учебника свойства интеграла чётных и нечётных функций по симметричному относительно нуля промежутку, а также свойства интеграла периодической функции. Приведённые в учебнике примеры показывают, как использовать эти свойства при решении задач.

Задачи к этому параграфу в соответствии с идеологией авторов иллюстрируют положения теории и особенности их применения.

Можно обратить внимание на задачи X.43—X.45, в которых использована техника дифференцирования функций, записанных с помощью интеграла с переменным верхним пределом, отработанная при решении задачи X.31.

Обращаем также внимание на то, что подстановки в определённом интеграле удобно записывать в одном из двух видов: $x = \varphi(t)$ или $y = f(x)$. В последнем случае теорема о подстановке в определённом интеграле читается справа налево: $\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy = \int\limits_a^b g(f(x))g'(x)dx$, поэтому естественно, что такая подстановка также имеет право на использование. Выбор тех или иных подстановок диктуется соображениями удобства. В решении задачи X.46 а) продемонстрировано использование подстановок обоих типов.

Стоит также заострить внимание учащихся на том, что пределы интегрирования после подстановки должны соответствовать тем, которые были до подстановки. В примере 20 из § 64 учебника при подстановке $x = -t$ получился интеграл от 1 до 0 в соответствии с тем, во что перешли пределы интегрирования исходного интеграла после подстановки. Соответствующее изменение пределов интегрирования особенно ярко заметно в задачах X.46 в), X.49.

Обратим внимание, что в задачах X.48—X.50 использование свойств определённого интеграла необходимо, поскольку соответствующие первообразные не выражаются в явном виде через элементарные функции.

Решения и указания к задачам

X.35. а) $e^{\pi} - 1$. **Решение.** По свойству 1 определённого интеграла, связанному с арифметическими действиями, запишем:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx + \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} (e^x \sin^2 x + e^x \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} e^x dx = e^{\pi} - 1.$$

Замечание. Отметим, что непосредственное вычисление двух данных интегралов возможно, но достаточно громоздко.

б) $2 + 2\ln 3$.

X.36. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. **Решение.** $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx =$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Второе слагаемое будет положительным как интеграл неотрицательной непрерывной функции, не равной тождественно нулю на промежутке интегрирования. Поэтому $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{x^2} \cos x dx > \int_0^{\pi} 2^{x^2} \cos x dx$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи X.36 а) с той разницей, что «лишнее» слагаемое будет отрицательным.

Замечание. Обратим внимание, что интегралы в задании X.36 не вычисляются в явном виде.

X.37. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2^{x^2}\cos x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2^x \cos x$. **Решение.** Заметим, что на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ выполнено неравенство $x^2 < x$, откуда $2^{x^2} < 2^x$, а с учётом положительности функции $y = \cos x$ на этом промежутке получим $2^{x^2}\cos x < 2^x\cos x$, откуда $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2^{x^2}\cos x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2^x \cos x$. *Замечание.* Во втором издании учебника будет исправлена верхняя граница интегрирования на $\frac{\pi}{4}$.

б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. **Решение.** Так как на отрезке [1; 2] выполнено $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| = x$, то $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}$, а следовательно, и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

X.38. а) **Решение.** Заметим, что на отрезке [0; 1] выполнено неравенство $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1$, причём обе части неравенства обращаются в строгие в некоторых точках отрезка. Тогда на отрезке [0; 1] выполнено неравенство $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9$. По теореме об интегрировании неравенств с учётом того, что обе части данного неравенства становятся строгими в некоторых точках отрезка, получаем $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{2}}dx < \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \int\limits_0^1 x^9 dx$. Из того что $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{2}}dx = \left.\frac{x^{10}}{10\sqrt{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\int\limits_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}$, следует требуемое неравенство.

Замечание. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$ можно непосредственно (разложив x^9 по степеням $x+1$), но это вычисление не облегчит доказательства неравенства.

б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи X.36 а) и сводится к интегрированию неравенства $0 < \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$, верного на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

X.39. 0. **Решение.** На отрезке [0; 1] выполнено неравенство $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$. По теореме об интегрировании неравенств получаем $0 \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \frac{1}{n+1}$. А тогда по теореме о сжатой последовательности искомый предел равен нулю.

Замечание. Задача служит логическим продолжением задачи X.38 а). Кроме того, вычислить $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ можно и непосредственно. Для этого, выделив в дроби $\frac{x^n}{x+1}$ целую часть, получим $\frac{x^n}{x+1} = x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{x+1}$, откуда $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \ln 2$. Таким образом, доказанное нами утверждение можно сформулировать так (разделив выражение для интеграла на $(-1)^n$):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \ldots + (-1)\right) = -\ln 2.$$

X.40. 2. **Решение.** Так как при $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ (сравните с задачей IX.258 в), то $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, откуда $\int\limits_1^n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx \leqslant$ $\leqslant \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \leqslant \int\limits_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$, т. е. $2\sqrt{n} - 2 - \ln n \leqslant \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \leqslant$ $\leqslant 2\sqrt{n} - 2$. Таким образом, получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n} - 2 - \ln n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n} - 2).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n} - 2 - \ln n) = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n} - 2) = 2$, то по теореме о сжатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 2$.

X.41. Решение. Справедливость неравенства следует из соотношения между площадью трапеции $CDAE$ (AE — касательная к графику функции f в точке A), представляющей собой левую часть неравенства, площадью под графиком функции f, равной $\int\limits_a^b f(x)dx$, и площадью трапеции $ABCD$, представляющей собой правую часть неравенства (рис. 10.11).

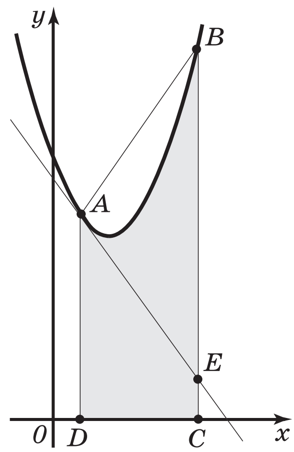


Рис. 10.11

X.42. Решение. Пусть в некоторой точке x_0 выполнено неравенство $f(x_0) < 0$. Тогда по свойству 2 функции, непрерывной в точке (с. 30 учебника) в некоторой окрестности $(\alpha; \beta)$ точки x_0, функция будет отрицательной. Тогда и $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx < 0$, вопреки условию.

X.43. Решение. Рассмотрим функцию $G(x) = x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt$ и докажем, что она неотрицательна при $x \geqslant 0$ (утверждение, равносильное утверждению задачи).

Действительно, $G'(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ (первые два слагаемые — результат дифференцирования произведения). Заметим, что так как функция f положительна при $x \geqslant 0$, то и $\int\limits_0^x f(t)dt > 0$. Таким образом, $G'(x) > 0$ при $x > 0$, а тогда $G(x) > G(0)$ при $x > 0$. Для окончания доказательства осталось заметить, что $G(0) = 0$.

Таким образом, доказано более сильное утверждение о том, что функция G положительна при $x > 0$.

X.44. Решение. Возьмём производную функции φ и докажем, что производная будет положительной при $x > 0$.

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\cdot\int\limits_0^x f(t)dt - f(x)\cdot\int\limits_0^x tf(t)dt}{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\left(x\cdot\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

Последняя дробь положительна при $x > 0$, так как положительны выражения $f(x)$, $\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2$ и $x \cdot \int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt$ (положительность последнего выражения доказана в задаче X.43).

X.45. Решение. Действительно, рассмотрим функцию $G'(x) = \dfrac{xf(x) - \int\limits_0^x f(t)dt}{x^2}$ и покажем, что $G'(x) > 0$ при $x > 0$.

А для этого достаточно показать, что $xf(x) - \int\limits_0^x f(t)dt > 0$.

Рассмотрим функцию $F(x) = xf(x) - \int\limits_0^x f(t)dt$. Вычислим производную этой функции: $F'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x)$. Так как по условию функция f возрастает при $x > 0$, то при $x > 0$ произведение $xf'(x)$ положительно, значит, функция F возрастает на $[0; +\infty)$. Так как $F(0) = 0$, то $F(x) > 0$ при $x > 0$. Таким образом, доказано, что

$$xf(x) - \int\limits_0^x f(t)dt > 0.$$

X.46. а) $-\frac{1}{3}$. **Решение.** Способ 1. С помощью подстановки $x = \sin t$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0$ получаем

$$\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t \sin t dt = -\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{3}.$$

Способ 2. Воспользуемся подстановкой $y = 1 - x^2$. Тогда $dy = -2xdx$, откуда $\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(-\frac{dy}{2}\right) = -\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}.$

б) $2 - \sqrt{2}$. **Решение.** Воспользуемся подстановкой $y = 1 + x^2$, получим

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\limits_2^4 \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y}\Big|_2^4 = 2 - \sqrt{2}.$$

в) $\frac{17}{480}-\frac{11\sqrt{3}}{160}$.

X.47. $-\frac{\pi}{2}$. **Решение.** $F'(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}$. Производная равна 0 в точке $x=1$, в которой она меняет знак с «−» на «+», поэтому в этой точке функция имеет минимум, который, будучи единственным экстремумом на области определения, является и наименьшим значением функции.

Итак, наименьшее значение функции — это

$$F(1)=\int_{-1}^{1}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}x\,dx-\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{4}dx.$$

Первое слагаемое равно 0 как интеграл нечётной функции по промежутку, симметричному относительно 0. Таким образом, $F(1)=-\frac{\pi}{2}$.

X.48. $y = 2^{\operatorname{tg}^2 1}(x - 1)$. **Решение.** Схема решения напоминает решение задач X.32 и X.33. Но, в отличие от упомянутых задач, интеграл не выражается через элементарные функции. Однако $F(1) = 0$ как интеграл от нечётной функции по промежутку, симметричному относительно нуля. Так как $F'(1) = 2^{\operatorname{tg}^2 1}$, то искомое уравнение касательной записывается как $y = 2^{\operatorname{tg}^2 1}(x - 1)$.

X.49. **Решение.** Воспользуемся подстановкой $x=\frac{\pi}{2}-t$, получим $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-1)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos t}dt$ (знак «−» исчез в результате перемены мест пределов интегрирования).

X.50. 0.

X.51. а) 0. **Решение.** Так как подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, то при $x>0$ интеграл будет положителен, а при $x<0$ — отрицателен. Поэтому единственным решением уравнения является $x=0$.

б) πk, $k\in\mathbf{Z}$. **Решение.** Воспользуемся подстановкой $t=\frac{\pi}{2}-u$, получим

$$\int_{0}^{x}\cos^{n}t\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos^{n}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)=\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}u\,du.$$

Заметим, что при $x = \pi$ полученный интеграл равен 0 как интеграл нечётной функции по промежутку, симметричному относительно 0. Итак, $\int\limits_0^{\pi} \cos^n t dt = 0.$

Рассмотрим теперь $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos^n t dt.$ Воспользуемся подстановкой $t = \pi + u$. Получим

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos^n t dt = \int\limits_0^{\pi} \cos^n(\pi + u) du = -\int\limits_0^{\pi} \cos^n u du = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^n t dt = \int\limits_0^{\pi} \cos^n t dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos^n t dt = 0.$$

Так как функция $\cos^n x$ периодична с периодом 2π и интеграл этой функции по одному из промежутков длины 2π равен 0, то интеграл по любому промежутку, длина которого кратна периоду, будет равен 0.

Тогда $\int\limits_0^{2\pi k} \cos^n t dt = 0,$ и $\int\limits_0^{\pi+2\pi k} \cos^n t dt = \int\limits_0^{\pi} \cos^n t dt + \int\limits_{\pi}^{\pi+2\pi k} \cos^n t dt = 0,$ $k \in \boldsymbol{Z}$.

Более того,

$$F(x + 2\pi) = \int\limits_0^{x+2\pi} \cos^n t dt = \int\limits_0^{x} \cos^n t dt + \int\limits_x^{x+2\pi} \cos^n t dt = \int\limits_0^{x} \cos^n t dt = F(x),$$

т. е. функция F периодична с периодом 2π.

Таким образом, все числа вида $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ являются корнями исходного уравнения.

Докажем теперь, что других корней у уравнения нет. Для этого, в силу периодичности функции F, достаточно показать, что их нет на промежутке $[0; 2\pi]$.

1) Докажем сначала, что других корней нет на интервале $(0; \pi)$. В самом деле, если $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то подынтегральная функция $\cos^n x$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, а потому $\int\limits_0^{x} \cos^n t dt > 0.$

Пусть теперь $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Тогда

$$\int_0^x \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos^n t dt.$$

Во втором слагаемом применим подстановку $t = \pi - u$, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos^n t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - x} \cos^n(\pi - u)(-du) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - x} \cos^n u du = -\int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du.$$

Итак,

$$\int_0^x \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt - \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du =$$

$$= \int_0^{\pi - x} \cos^n t dt + \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt - \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \int_0^{\pi - x} \cos^n t dt > 0$$

(здесь учтено, что $0 < \pi - x < \frac{\pi}{2}$, поэтому оставшийся интеграл будет положителен).

2) Рассмотрим $\pi < x < 2\pi$. Заметим, что $\int_0^x \cos^n t dt = \int_0^{\pi} \cos^n t dt + \int_{\pi}^x \cos^n t dt = \int_{\pi}^x \cos^n t dt$. С помощью подстановки $t = \pi + u$ получаем $\int_{\pi}^x \cos^n t dt = -\int_0^{x - \pi} \cos^n t dt$. В рассуждении 1) было показано, что полученный интеграл не может быть равен нулю.

Геометрический смысл рассуждения ясен из рассмотрения рисунка 10.12, на котором схематически изображён график функции $\cos^n x$ при нечётном n. Криволинейные трапеции, ограниченные графиком этой функции на отрезках $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, равны как геометрические фигуры, но одна находится над осью абсцисс, а другая — под ней. Итак, корнями уравнения являются числа вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

X.52. При нечётных n. **Решение.** Фактически нужное рассуждение проведено в решении предыдущей задачи.

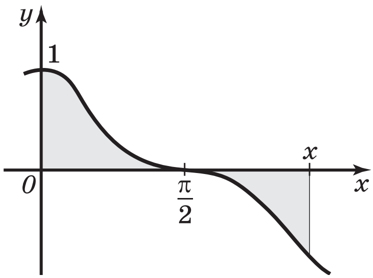


Рис. 10.12

Действительно, пусть функция F периодична с некоторым периодом T, т. е. $F(x+T) = F(x)$, что означает

$$\int_0^{x+T} \sin^n t dt = \int_0^x \sin^n t dt, \quad \text{откуда}$$

$$\int_x^{x+T} \sin^n t dt = 0 \qquad (1)$$

при всех значениях x. Если n — чётное число, то равенство (1) не выполняется ни при каком положительном значении T, поскольку подынтегральная функция будет неотрицательна и не равна нулю во всех точках.

При нечётном n выполнено $\int_x^{x+2\pi} \sin^n t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n t dt = 0$ (рассуждение дословно повторяет использованное в примере 21 из § 64 учебника). И значит, функция $F(x)$ будет периодической.

X.53. а) Примером может служить функция $f(t) = \sin^2 t$. В предыдущей задаче доказано, что соответствующая функция F будет непериодической.

б) **Решение.** Такого рода условие найдено в задаче X.52. Это существование такого $T_1 > 0$, для которого при всех вещественных значениях x выполняется равенство

$$\int_x^{x+T_1} f(t)dt = 0.$$

Докажем, что в качестве T_1 можно взять T. Предположим противное. Пусть $\int_x^{x+T} f(t)dt = a \neq 0$ при всех вещественных x (то, что этот интеграл не зависит от x, составляет содержание свойства на с. 198 учебника). Не умаляя общности, можно считать $a > 0$. Так как F непрерывна и периодична, то она ограничена на $\boldsymbol{R}$ и достигает своих наибольшего и наименьшего значений (задача VIII.84). Обозначим их M и m соответственно. Однако, рассмотрев при натуральных k выражение $\int_0^{kT} f(t)dt = ka$ (поскольку этот интеграл равен сумме k интегралов по промежуткам длины T, каждый из которых равен a), получим, что $F(kT)$ может принимать сколь угодно большие значения.

Тем самым показано, что для периодичности функции F необходимо и достаточно выполнения при всех значениях x равенства

$$\int\limits_x^{x+T} f(t)dt = 0.$$

По свойству интеграла периодической функции (с. 198 учебника) получим

$$\int\limits_x^{x+T} f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt.$$

Таким образом, для периодичности функции F, заданной как интеграл непрерывной периодической функции, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^T f(t)dt = 0$, где T — период подынтегральной функции.

Замечание. В рассуждениях нигде не использовалось, что T — главный период подынтегральной функции, поэтому сформулированное утверждение верно для произвольного периода подынтегральной функции.

в) Является. **Решение.** Отметим прежде всего, что подынтегральная функция периодична с периодом 2π. Преобразуем подынтегральное выражение с помощью формулы преобразования произведения косинусов в сумму. Тогда под интегралом окажется сумма косинусов, аргументы которых представляют собой выражения вида $\frac{1}{2^{2007}}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{2007} \pm 3^k\right)t$ для различных комбинаций знаков «+» и «−». Количество слагаемых в этой сумме будет равно 2^{2007}.

Заметим, что ни у одного из косинусов аргумент не равен 0 (поскольку в сумме $\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{2007} \pm 3^k\right)$ все слагаемые, кроме 1, кратны 3).

Воспользуемся теперь тем, что $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{a}} \cos(at)dt = 0$. Так как все числа вида $\frac{2\pi \cdot 2^{2007}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{2007} \pm 3^k}$ соизмеримы с 2π, то существует число T, «кратное» всем таким числам, а также числу 2π, а значит, интеграл от 0 до T каждого из слагаемых будет равен 0. Таким образом, $\int\limits_0^T \cos t \cdot \cos 3t \cdot \cos 3^2 t \cdot \ldots \times$ $\times \cos 3^{2007} t dt = 0$, причём T является периодом подынтегральной функции. Как показано в предыдущем пункте, этого достаточно, чтобы F была периодической.

Так как периодом функции F является любой период подынтегральной функции (см. замечание к задаче X.53 б)), то функция F периодична с периодом 2π.

X.54. Оба интеграла равны 0. *Указание.* Для вычисления нужно разбить промежуток интегрирования на два промежутка числом 1, после чего в одном из полученных интегралов сделать замену $x = \frac{1}{t}$.

X.55. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. **Решение.** С помощью замены $x = t + 2\pi$ получаем $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(t + 2\pi)}{t + 2\pi} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + 2\pi} dt$.

Остаётся заметить, что на интервале $(0; \pi)$ выполнено неравенство $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{x + 2\pi}$, а тогда и $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

X.56. Решение. Пусть $2\pi(k-1) < x \leqslant 2\pi k$, $k \in \mathbf{N}$. Докажем требуемое индукцией по k.

База индукции. $k = 1$. При $0 < x \leqslant \pi$ требуемое неравенство выполнено в силу неотрицательности подынтегральной функции, не равной тождественно нулю.

Пусть $\pi < x \leqslant 2\pi$. Тогда $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t^2} dt + \int\limits_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$.

Во втором слагаемом воспользуемся подстановкой $t = y + \pi$. Получим $\int\limits_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{x-\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{1+(y+\pi)^2} dy = -\int\limits_0^{x-\pi} \frac{\sin y}{1+(y+\pi)^2} dy$, а тогда

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t^2} dt + \int\limits_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{x-\pi} \frac{\sin t}{1+t^2} dt + \int\limits_{x-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1+t^2} dt - \int\limits_0^{x-\pi} \frac{\sin t}{1+(t+\pi)^2} dt.$$

Осталось отметить, что при выбранных значениях x на промежутке от 0 до $\pi - x$ выполнено неравенство $\frac{\sin t}{1+t^2} > \frac{\sin t}{1+(t+\pi)^2}$, что и даёт положительность искомого выражения. Тем самым показана положительность данного интеграла при всех x от 0 до 2π. База индукции доказана.

Индукционный переход. Пусть утверждение выполнено для $2\pi(k-1) < x \leqslant 2\pi k$. Докажем его для $2\pi k < x \leqslant 2\pi(k+1)$.

При $2\pi k < x \leqslant \pi + 2\pi k$ запишем данный интеграл в виде $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2}dt$. Первое слагаемое положительно в силу индукционного предположения, а второе неотрицательно в силу неотрицательности подынтегральной функции.

При $\pi + 2\pi k < x \leqslant 2\pi(k+1)$ аналогично доказательству базы получаем $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{\pi+2\pi k}^{x} \frac{\sin t}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{x-\pi+2\pi k} \frac{\sin(\pi+y)}{1+(\pi+y)^2}dy$, откуда, используя неравенство $\frac{\sin t}{1+t^2} > \frac{\sin t}{1+(t+\pi)^2}$, верное на промежутке $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi(k+1))$, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{2\pi k}^{x-\pi+2\pi k} \frac{\sin(\pi+y)}{1+(\pi+y)^2}dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{x-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt + \left(\int\limits_{2\pi k}^{x-\pi+2\pi k} \frac{\sin t}{1+t^2}dt - \int\limits_{2\pi k}^{x-\pi+2\pi k} \frac{\sin y}{1+(\pi+y)^2}dy \right).$$

В полученной сумме первое слагаемое положительно по индукционному предположению, а оставшиеся два слагаемых неотрицательны.

§ 65. Применения определённого интеграла

Содержание этого параграфа включает в себя пункты, посвящённые вычислению площадей фигур, длин кривых, нахождению пределов последовательностей и решению задач с физическим содержанием.

В пункте «Вычисление площадей» полезно обратить внимание учащихся на сноску о выделении полного квадрата под знаком интеграла.

Авторы полагают, что изучение данного материала ни в коей мере не дублирует институтский курс высшей математики, но призвано показать, как именно развитие аппарата математического анализа стимулировало развитие науки и техники. Поэтому среди задач к параграфу, помимо стандартных задач (задачи X.57—X.65) на технику вычисления неопределённого интеграла, есть и задачи, связанные с более глубоким пониманием сути того, что есть определённый интеграл. Обратим внимание на способ вычисления площади, применяемый в решении задачи X.57, помогающий избежать технических трудностей. Тот же способ в общем виде применяется при решении задачи X.70 в).

При изучении параграфа можно руководствоваться соображениями наличия времени и уровнем подготовки класса. Например, в более слабом классе можно ограничиться только вычислением площадей, лишь показав решение примеров остальных пунктов, тем самым сформировав у учащихся представление о возможных применениях определённого интеграла. В более сильном классе можно решать и более сложные задачи (X.88—X.99).

В сильном классе можно обратить внимание на то, что при решении примера 24 учебника два полученных интеграла оказались равными, что является частным случаем утверждения задачи X.74. Задачи X.73 и X.74 представляют результаты, полученные ещё Архимедом. Основная трудность этих задач — техника преобразований с большим числом переменных.

Авторы считают существенным иллюстрацию того, как определённый интеграл «работает» в физике. В зависимости от уровня подготовки класса было бы полезно рассмотреть построение математической модели физического явления, особенно там, где удачный выбор этой модели сильно упрощает вычисления (задача X.86). Для общего развития учеников крайне желательно не выпускать из рассмотрения задачи X.81—X.87.

Задачи X.75, X.76, а также X.88, X.90—X.93 являются задачами на геометрический смысл интеграла как площади, но требуют от учащихся дополнительных соображений, подчас нетривиальных (см., например, решение задачи X.76.

В соответствии с концепцией избежать дублирования институтского курса задачи на вычисление длины кривых затронуты лишь мельком (X.77—X.79), их решение сводится к подстановке в формулу. Именно поэтому и вопросу вычисления пределов с помощью интегралов посвящена лишь задача X.80, которая при нехватке времени может быть пропущена без ущерба для остального материала.

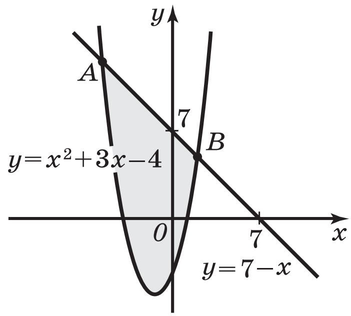


Рис. 10.13

X.57. а) $20\sqrt{5}$. **Решение.** Данная в условии фигура изображена на рисунке 10.13. Решая уравнение $x^2 + 3x - 4 = 7 - x$, находим абсциссы точек A и B, т. е. пределы интегрирования: $x_A = -2 - \sqrt{15}$ и $x_B = -2 + \sqrt{15}$.

Поскольку вести вычисления с такими числами неудобно, будем производить преобразования в буквенном виде, подставив численные значения только в конце вычислений. При этом воспользуемся для облегчения вычислений теоремой Виета.

Так как на участке между точками A и B прямая находится выше параболы, то:

$$S = \int_{x_A}^{x_B} ((7 - x) - (x^2 + 3x - 4))dx = \int_{x_A}^{x_B} (-x^2 - 4x + 11)dx =$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} (15 - (x + 2)^2)dx = 15\Big|_{x_A}^{x_B} - \frac{(x + 2)^3}{3}\Bigg|_{x_A}^{x_B} =$$

$$= 15(x_B - x_A) - \frac{(x_B + 2)^3 - (x_A + 2)^3}{3}.$$

Преобразовав числитель последней дроби по формуле разности кубов, получим $(x_B + 2)^3 - (x_A + 2)^3 = (x_B - x_A) \times$ $\times (x_B^2 + 4x_B + 4 + x_A^2 + 4x_A + 4 + x_Ax_B + 2(x_A + x_B) + 4)$. Так как по теореме Виета $x_A + x_B = -4$ и $x_A \cdot x_B = -11$, то $x_A^2 + x_B^2 = (x_A + x_B)^2 - 2x_Ax_B = 38$. Таким образом, $(x_B + 2)^3 -$ $- (x_A + 2)^3 = (x_B - x_A) \cdot 15$. Итак, искомая площадь равна $10(x_B - x_A) = 20\sqrt{5}$.

б) $\frac{1}{6}$.

X.58. а) $\frac{1}{3}$. **Решение.** Изобразим соответствующие графики (рис. 10.14). Искомая площадь равна $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$. Обратим внимание на то, что рисунок симметричен относительно пря-

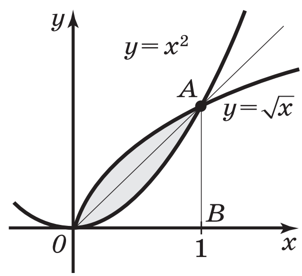


Рис. 10.14

мой $y=x$, поэтому можно было найти половину площади как разность площади треугольника OAB, равной $\frac{1}{2}$, и площади под параболой, равной $\frac{1}{3}$.

б) $\frac{1}{2}$.

X.59. а) $8\log_2(4+\sqrt{15})+16-\frac{2\sqrt{15}+6}{\ln 2}$. б) $3\ln 2-2$.

X.60. а) $2\sqrt{2}$. б) $1-\ln 2$.

X.61. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Искомая площадь равна площади, ограниченной графиками функций, обратных данным (т. е. $f_1(x)=\frac{\sin x}{2}$ и $g_1(x)=\sin x$), на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 10.15).

X.62. а) $\frac{16}{3}$. б) $\frac{5}{12}$.

X.63. $\frac{121}{4}$.

X.64. $\frac{2}{3}$.

X.65. $\frac{16}{3}$.

X.66. $a=2{,}25$ или $a=0{,}25$. **Решение.** Бо́льшая площадь равна $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx=4\sqrt{x}\Big|_1^4=4$. Значит, меньшая площадь должна быть равна 2.

Заметим, что прямая $x=a$ может находиться как правее, так и левее прямой $x=1$. Общая формула для двух случаев будет выглядеть так: $\left|\int\limits_1^a \frac{2}{\sqrt{x}}dx\right|=|4\sqrt{a}-4|$.

Решая уравнение $|4\sqrt{a}-4|=2$, получаем $a=2{,}25$ или $a=0{,}25$.

X.67. а) $a=2$. **Решение.** Очевидно, что решением является прямая $x=2$, поскольку указанная прямая — ось симметрии чертежа. При сдвиге этой прямой в ту или иную сторону площадь по одну сторону от прямой увеличивается, а по другую — уменьшается. Значит, других решений нет.

б) $a=5-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. **Решение.** Нетрудно выяснить, что площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x+1$

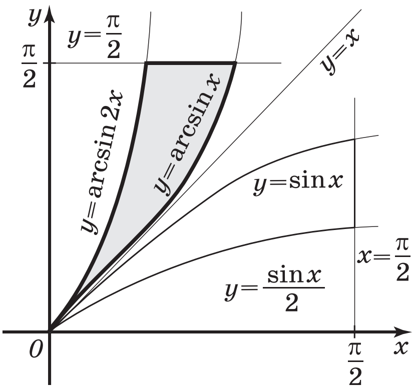


Рис. 10.15

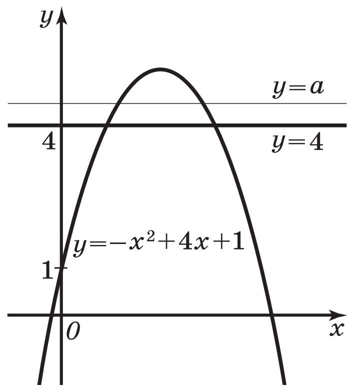


Рис. 10.16

и прямой $y=4$, равна $\frac{4}{3}$. Таким образом, нужно найти такую горизонтальную прямую, чтобы площадь, ограниченная ею и параболой $y=-x^2+4x+1$, была бы равна $\frac{2}{3}$.

Обозначим абсциссы точек пересечения прямой $y=a$ и параболы x_1 и x_2 (рис. 10.16). Тогда нужно выяснить, при каких значениях a выполнено равенство $\int\limits_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x+1-a)dx=\frac{2}{3}$. Для облегчения вычислений будем использовать теорему Виета (аналогично решению задачи X.57).

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x+1-a)dx=$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}(-(x-2)^2+5-a)dx=(5-a)(x_2-x_1)-\frac{(x_2-2)^3-(x_1-2)^3}{3}=$$

$$=\frac{x_2-x_1}{3}\cdot(15-3a-(x_1^2+x_2^2+x_1x_2-6(x_1+x_2)+12)).$$

Так как x_1 и x_2 являются корнями уравнения $-x^2+4x+1=a$, то $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ x_1x_2=a-1,\end{cases}$ откуда $x_1^2+x_2^2=4-2(a-1)=6-2a$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x+1-a)dx=\frac{x_2-x_1}{3}\cdot(10-2a). \qquad (1)$$

Получив выражения для x_1 и x_2 как корней уравнения $-x^2+4x+1=a$, можем записать $x_2-x_1=2\sqrt{5-a}$. Подставив это значение в формулу (1), получим уравнение $\frac{4}{3}\sqrt{5-a}(5-a)=\frac{2}{3}$, откуда $a=5-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

X.68. $\frac{16}{3}$. *Указание.* Пусть график квадратного трёхчлена задаётся формулой $y=x^2+ax+b$. Поскольку прямая $y=4x-13$ является касательной к этому графику, уравнение $x^2+ax+b=4x-13$ имеет кратный корень, т. е. его дискриминант равен 0. Следовательно, $(a-4)^2-4(b+13)=0$. Аналогично получаем уравнение $(a+4)^2-4(b-3)=0$. Вычитая из одного уравнения другое, находим $a=-4$, а затем находим $b=3$.

Теперь задача превратилась в стандартную (аналогичную, например, задачам X.64 или X.65).

X.69. $S(a)=\begin{cases}-\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}, & a<-1,\\ 0, & -1\leqslant a\leqslant 1,\\ \frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}, & a>1.\end{cases}$ **Решение.** Из графиков функций видно, что при больших по модулю отрицательных a, а точнее при $a<-1$, искомая фигура ограничена параболой и прямой $y=x-a$ (рис. 10.17, *а*). Парабола и прямая пересекаются в точке с абсциссой a, поэтому из теоремы Виета можно получить, что абсцисса второй точки пересечения равна -1. Тогда искомая площадь равна $\int\limits_a^{-1}(-x^2+ax-x+a)dx=-\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}$.

При $a=-1$ парабола и прямая касаются (рис. 10.17, *б*), и далее, при $-1<a\leqslant 1$, фигура вырождается в точку, т. е. площадь фигуры равна 0.

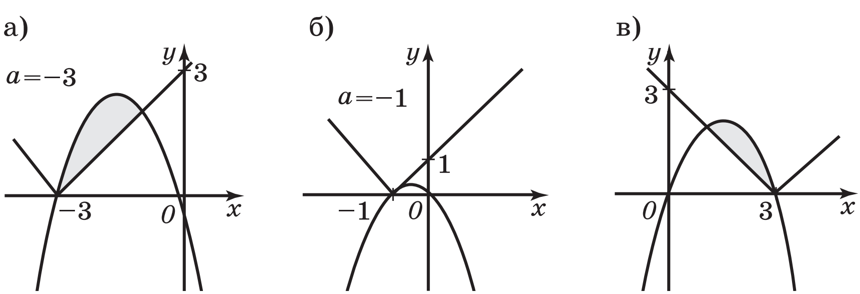


Рис. 10.17

При $a > 1$ искомая фигура ограничена параболой и прямой $y = a - x$ (рис. 10.17, *в*). Эта прямая и парабола пересекаются в точке с абсциссой a, значит, абсцисса второй точки пересечения равна 1. Тогда искомая площадь равна $\int\limits_1^a (-x^2 + ax + x - a)dx = \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}$.

X.70. *Замечание.* Задачи X.70 а) и X.70 б) являются частными случаями результатов задачи X.70 в). Их решение должно облегчить написание соответствующих формул в общем виде.

в) $S_{\min} = \frac{4\sqrt{(q-b)^3}}{3}$. **Решение.** Так как $q > b$, искомая фигура будет непустой (рис. 10.18). Пусть абсциссы точек пересечения прямой и параболы равны x_1 и x_2. Вновь, как в решении задач X.57 и X.67, будем использовать теорему Виета.

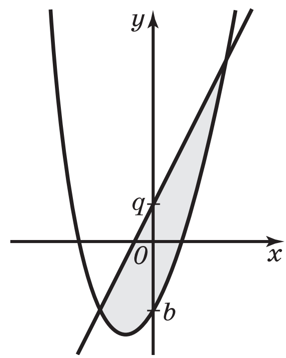


Рис. 10.18

Искомая площадь равна

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} (px + q - (x^2 + ax + b))dx =$$

$$= \frac{px_2^2 - px_1^2}{2} + q(x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} - \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{2} - b(x_2 - x_1).$$

Вынося за скобки $\frac{x_2 - x_1}{6}$, получаем

$$S = \frac{x_2 - x_1}{6} \cdot (3p(x_1 + x_2) + 6q - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) - 3a(x_1 + x_2) - 6b).$$

Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + b = px + q$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = p - a, \\ x_1x_2 = b - q. \end{cases}$ Тогда $S = \frac{x_2 - x_1}{6} \cdot (p^2 + a^2 - 2ap - 4b + 4q)$.

Подставив вместо x_1 и x_2 их выражения как корней квадратного уравнения $x^2 + ax + b = px + q$, получим $x_2 - x_1 = \sqrt{(p-a)^2 - 4(b-q)}$. Таким образом,

$$S = \frac{\left(\sqrt{(p-a)^2 - 4(b-q)}\right)^3}{6}.$$

В этой формуле переменной по условию задачи является только p. Значение площади будет наименьшим, если $p = a$. Тогда $S_{\min} = \frac{4\sqrt{(q-b)^3}}{3}$. Поучительно сравнить эту формулу с формулой, полученной в задаче X.67 б).

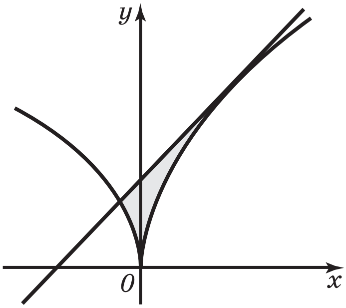


Рис. 10.19

X.71. x^2-2x-4. *Указание.* Полезно использовать формулу, полученную в предыдущей задаче, а также соображения о равенстве дискриминанта нулю, фигурировавшие в решении задачи X.68.

X.72. 4. **Решение.** Обозначим абсциссу точки касания за t $(t>0)$. Так как при положительных x график функции f совпадает с графиком функции $y=4\sqrt{x}$, то уравнение касательной будет иметь вид $y-4\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{t}}(x-t)$. Запишем его в виде $y=\frac{2}{\sqrt{t}}x+2\sqrt{t}$. Для нахождения абсциссы второй общей точки касательной и графика функции (рис. 10.19) нужно решить (относительно x) уравнение $3\sqrt{-x}=\frac{2}{\sqrt{t}}x+2\sqrt{t}$ (t является в этом уравнении параметром)[1]. Решив его, найдём $x=-\frac{t}{4}$.

Итак, площадь фигуры равна

$$S=\int_{-\frac{t}{4}}^{0}\left(\frac{2}{\sqrt{t}}x+2\sqrt{t}-3\sqrt{-x}\right)dx+\int_{0}^{t}\left(\frac{2}{\sqrt{t}}x+2\sqrt{t}-4\sqrt{x}\right)dx,$$

откуда $S=\frac{3t\sqrt{t}}{16}+\frac{t\sqrt{t}}{3}=\frac{25t\sqrt{t}}{48}$. Решив уравнение $\frac{25t\sqrt{t}}{48}=\frac{25}{6}$, найдём $t=4$.

Замечание. Эта задача была предложена на выпускном экзамене 2000 года в варианте для математических классов.

X.73. **Решение.** Не умаляя общности, можно считать, что парабола задаётся уравнением $y=x^2$ (так как все параболы как геометрические фигуры подобны). Касательная к параболе в точке с абсциссой t задаётся уравнением $y=2tx-t^2$. Поскольку хорда параллельна касательной, её уравнение имеет вид $y=2tx-b$ (для некоторого $b<t^2$). Пусть абсциссы точек B и C равны x_1 и x_2 соответственно. Как уже неоднократно было получено

---

[1] Проще всего решить это уравнение, приняв $\sqrt{-x}$ за новую неизвестную.

(см., например, решение задачи X.70), площадь фигуры, ограниченной параболой и хордой BC, равна $\frac{(x_2-x_1)^3}{6}$.

Найдём площадь треугольника ABC. Заметим, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 = 2tx - b$, поэтому $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2t, \\ x_1x_2 = b. \end{cases}$ Тогда $t = \frac{x_1+x_2}{2}$, т. е. абсцисса точки A — середина отрезка между абсциссами точек B и C. Значит, если провести через точку A вертикальную прямую, то она пересечёт отрезок BC в его середине — точке D (рис. 10.20). Таким образом, AD — медиана треугольника ABC, а тогда треугольники ADB и ADC равновелики.

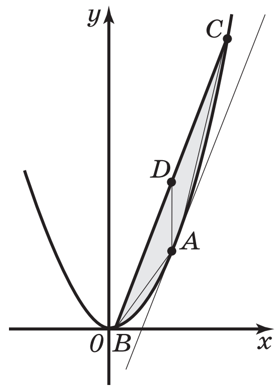


Рис. 10.20

Площадь каждого из этих треугольников можно вычислить как половину произведения медианы AD на высоту к ней, опущенную из точек B и C соответственно. Каждая из таких высот равна $\frac{x_2-x_1}{2}$ (как расстояние между вертикальными прямыми, проведёнными через точки A и B, равное разности абсцисс точек A и B).

Остаётся найти длину AD. Заметим, что эта длина равна разности ординат точек D и A. Ордината точки A равна t^2, а ордината точки D равна результату подстановки абсциссы точки D (т. е. t) в правую часть уравнения прямой BC. Таким образом, ордината точки D равна $2t^2 - b$. Тогда $AD = t^2 - b$. Осталось заметить, что $t^2 - b = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - x_1x_2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{4}$. Итак, площадь треугольника ABC получилась равной $\frac{(x_2-x_1)^3}{8}$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{(x_2-x_1)^3}{8} = \frac{(x_2-x_1)^3}{6},$$

что и доказывает утверждение задачи.

X.74. Решение. Как и в предыдущей задаче, не умаляя общности, можно считать, что парабола задана уравнением $y = x^2$. Пусть касательные к параболе проведены в точках с абсциссами a и b. Тогда уравнения этих касательных имеют вид $y = 2ax - a^2$ и $y = 2bx - b^2$. Из уравнения $2ax - a^2 = 2bx - b^2$ найдём абсциссу точки C пересече-

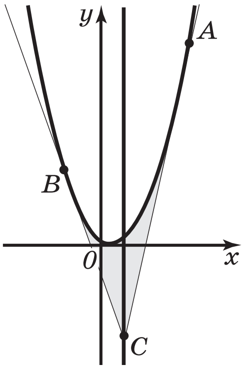


Рис. 10.21

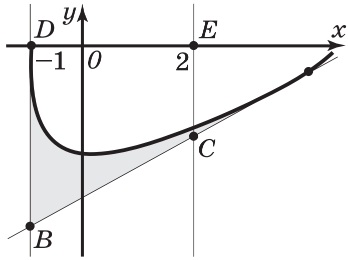


Рис. 10.22

ния этих касательных: $\frac{a+b}{2}$. Значит, абсцисса точки пересечения касательных есть середина отрезка между абсциссами точек касания (рис. 10.21).

Таким образом, площадь фигуры слева от прямой $x=\frac{a+b}{2}$ равна $\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2-2ax+a^2)dx=\left.\frac{(x-a)^3}{3}\right|_a^{\frac{a+b}{2}}=\frac{(b-a)^3}{24}$.

Аналогично площадь фигуры справа от прямой $x=\frac{a+b}{2}$ равна $\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x^2-2bx+b^2)dx=\left.\frac{(x-b)^3}{3}\right|_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{(b-a)^3}{24}$.

X.75. $x_0=0{,}5$. **Решение.** Искомая площадь равна разности площади трапеции $BCED$ и площади под графиком функции на отрезке $[-1;\ 3]$, взятой по модулю (рис. 10.22). Площадь под графиком функции остаётся неизменной, а значит, наименьшая искомая площадь будет при наименьшей площади трапеции $BCED$.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту. Высота трапеции — отрезок DE — постоянна. Значит, наименьшее значение площади будет при наименьшей средней линии. В свою очередь, длина средней линии равна модулю значения линейной функции, задающей касательную (обозначим её g), в точке $x=0{,}5$.

Итак, требуется найти наименьшее по модулю значение линейной функции g в точке $x=0{,}5$. Заметим, что заданная функция f выпукла, а значит, её график находится над любой её касательной. Следовательно, $f(0{,}5)\geqslant g(0{,}5)$, какой бы ни была линейная функция g, задающая касательную. Равенство достигается лишь в случае, когда касательная проведена в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$.

Замечание. В приведённых рассуждениях имеется дефект, связанный с тем, что при некоторых значениях a

и для некоторых касательных часть фигуры «вылезает» в верхнюю полуплоскость. Чтобы сохранить рассуждения, проще всего «поднять чертёж», т. е., например, рассмотреть вместо функции f функцию $g(x) = f(x) + 100$. Искомая фигура от этого не изменится, а неопределённость чертежа исчезнет.

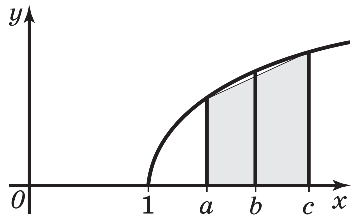


Рис. 10.23

X.76. Решение. С помощью производной можно убедиться, что функция $f(x)=\sqrt{\log_2 x}$ является вогнутой. Поэтому площадь под графиком этой функции больше, чем площадь выделенной трапеции на рисунке 10.23. Аналитически это неравенство записывается следующим образом:

$$\int\limits_a^c \sqrt{\log_2 x}dx \geqslant (c-a)\cdot\frac{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 c}}{2}.$$

Заметим, что $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 c} \geqslant \sqrt{\log_2 a+\log_2 c} = \sqrt{\log_2(ac)} = \sqrt{\log_2 b^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\log_2 b}$. Следовательно,

$$\int\limits_a^c \sqrt{\log_2 x}dx \geqslant (c-a)\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\log_2 b}}{2}.$$

Откуда очевидным образом следует требуемое.

X.77. $\ln(2+\sqrt{3})$.

X.78. $\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{8}$.

X.79. $3 + \ln 2$.

X.80. а) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. б) $\int\limits_0^5 x^3dx=\frac{625}{4}$. в) $\frac{\pi}{4}$. *Указание.* Преобразовать $x_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$ и получить

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

г) $\frac{1}{e}$. **Решение.** Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ с общим членом $y_n=\ln x_n$. Тогда $y_n=\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n)-$

$-\ln n = \frac{1}{n}(\ln 1 - \ln n + \ln 2 - \ln n + ... + \ln n - \ln n) = \frac{1}{n}\Big(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} +$ $+ ... + \ln\frac{n}{n}\Big)$. Теперь видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \int\limits_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 =$ $= -1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{-1}$.

Замечание. Обратим внимание, что найден интеграл от функции, не определённой в точке 0, т. е. использовано обобщение понятия определённого интеграла. Поучительно сравнить решение этой задачи с нахождением того же предела в задаче VII.96 учебника для 10 класса.

X.81. $1 + 2\ln 2$. **Решение.** Из условия задачи следует, что скорость тела в момент времени $t = 0$ равна нулю. Формулу скорости найдём из равенства $v(t) = \int\limits_0^t \frac{4}{1-x}dx =$ $= -4\ln t$ (не нужно рассматривать промежутки времени, большие 1, так как функции скорости и ускорения не могут претерпевать разрыв). Из равенства $-4\ln t = 8\ln 2$ найдём значение времени $t = 0{,}25$.

Осталось найти путь, пройденный телом, по формуле

$$x(t) = \int\limits_0^{0{,}25} -4\ln t dt = (-4t\ln t + 4t)\Big|_0^{0{,}25} = 1 + 2\ln 2.$$

X.82. $2\pi\cos 1$.

X.83. $k\ln 3$. *Указание.* При изотермическом сжатии давление и объём связаны соотношением $p = \frac{k}{V}$, где k — некоторая константа. Работа, совершаемая над газом, вычисляется по формуле (V_2 и V_1 — соответственно начальный и конечный объёмы газа):

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p(V)dV = k\ln V\Big|_{V_1}^{V_2} = k\ln\frac{V_2}{V_1} = k\ln 3.$$

Замечание. Как видно, знание радиуса цилиндра было несущественным, а для уточнения ответа необходимо знать постоянную изотермического процесса. Для её выяснения можно, например, задать давление в начальный или в конечный момент процесса.

X.84. $\frac{gR^2mH}{R(R+H)}$. **Решение.** В условии задачи тело можно считать материальной точкой, т. е. пренебречь его размерами и формой по сравнению с Землёй. В соответствии со сноской на с. 215 учебника модуль силы, действующей на материальную точку массы m, находящуюся на высоте x над поверхностью Земли, равен $F = G\dfrac{mM}{(x+R)^2}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

Будем перемещать тело вдоль радиуса, соединяющего это тело с центром Земли[1], на малое расстояние $\dfrac{H}{n}$. При этом модуль силы практически не изменяется, а её направление параллельно направлению перемещения, поэтому работа этой силы будет примерно равна (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка)

$$F \cdot \frac{H}{n} = G\frac{mMH}{n(x+R)^2}.$$

Найдём значение работы на каждом промежутке длины $\dfrac{H}{n}$ от $x=0$ до $x=H$ и сложим эти значения. Таким образом, мы получим приближённое значение искомой работы, равное римановой сумме функции $f(x) = \dfrac{GmM}{(x+R)^2}$ на отрезке $[0;\ H]$. Поэтому искомая работа A равна

$$\int_0^H \frac{GmM}{(x+R)^2}dx = -\frac{GmM}{x+R}\bigg|_0^H = \frac{GmMH}{R(R+H)}.$$

Заметим, что значение массы Земли не дано. Вспомним, однако, что ускорение свободного падения $g = \dfrac{GM}{R^2}$, поэтому $M = \dfrac{gR^2}{G}$ и окончательно $A = \dfrac{gR^2mH}{R(R+H)}$.

Замечание. Обратим внимание, что формулой силы тяжести mg пользоваться нельзя, так как эта формула верна только вблизи поверхности Земли.

X.85. $0{,}5\pi g R^2 H^2$. **Решение.** Рассмотрим слой воды на расстоянии $\dfrac{kH}{n}$ от поверхности, толщина которого равна $\dfrac{H}{n}$ (рис. 10.24). Чтобы его выкачать, нужно поднять его на поверхность (дальше вода выльется сама). Масса слоя равна $\pi R^2\dfrac{H}{n}$ (с учётом того, что плотность во-

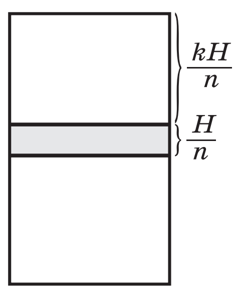


Рис. 10.24

[1] Можно показать, что сила тяготения *консервативна*, т. е. работа этой силы над телом не зависит от траектории, по которой двигалось тело.

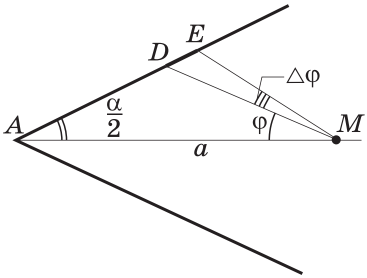


Рис. 10.25

ды равна 1), а расстояние, которое необходимо преодолеть слою воды, можно считать равным $\frac{kH}{n}$. Таким образом, работа по подъёму данного слоя воды на поверхность равна $\pi g R^2 H^2 \frac{k}{n^2}$.

Для нахождения работы по подъёму всей воды на поверхность достаточно найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\int\limits_0^1 x dx = 0{,}5$. Тогда искомая работа равна $0{,}5\pi g R^2 H^2$.

Замечание. Конечно же, указанный предел мог быть найден и без применения интеграла.

X.86. $F=\frac{2Gm\rho}{a}$. **Решение.** Из соображений симметрии ясно, что искомая сила будет направлена вдоль биссектрисы угла. Поэтому, как в решении примера 29 из § 65 учебника, будем сразу рассматривать и суммировать проекции силы на биссектрису.

Рассмотрим маленький кусочек стержня DE (рис. 10.25) и вычислим, с какой силой он притягивает материальную точку M. Для этого нужно найти массу этого кусочка, а, поскольку дана линейная плотность, для нахождения массы достаточно найти длину DE.

Обозначим $\angle DMA=\varphi$, а $\angle DAM=\frac{\alpha}{2}$. Из теоремы синусов в треугольнике AMD следует: $\frac{AD}{\sin\varphi}=\frac{\alpha}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}$, откуда

$$AD=\frac{\alpha\sin\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Из этого же треугольника $DM=\frac{\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}$. Аналогично из треугольника AEM имеем $AE=\frac{\alpha\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\sin\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}$. Обозначим расстояние между вершиной угла и материальной точкой a. Тогда

$$DE = AE - AD = a\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin(\varphi+\Delta\varphi)-\sin\varphi\cdot\sin\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= a\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\Delta\varphi\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\Delta\varphi\right)}{2\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)} = a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\Delta\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Если отрезок DE мал, то угол $\Delta\varphi$ тоже мал, поэтому можно приближённо считать (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\Delta\varphi$), что

$$DE = a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\Delta\varphi}{\sin^2\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Тогда модуль силы, с которой отрезок DE притягивает материальную точку, равен

$$\Delta F = Gm\rho a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\Delta\varphi}{\sin^2\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)} : \left(\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = \frac{Gm\rho\Delta\varphi}{a\sin\frac{\alpha}{2}}$$

(за расстояние между отрезком и точкой взята длина DM). Осталось найти проекцию этой силы на биссектрису: $\Delta F_x = \frac{Gm\rho\Delta\varphi}{a\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\varphi$.

Угол φ может меняться от 0 до $\pi-\frac{\alpha}{2}$. Если разделить этот угол на n частей и в качестве $\Delta\varphi$ брать одну из этих частей, а затем суммировать полученные выражения, получим риманову сумму для функции $f(\varphi)=\frac{Gm\rho}{a\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\varphi$, поэтому сила, с которой луч AD действует на материальную точку, будет равна $\int\limits_0^{\pi-\frac{\alpha}{2}}\frac{Gm\rho}{a\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\varphi d\varphi = \frac{Gm\rho}{a}$. Полученный результат следует удвоить, так как с такой же горизонтальной составляющей точка притягивается другой стороной угла.

Замечание. Обратим внимание, что ответ не зависит от величины угла, в который согнут стержень. Заметим также, что задачу можно было решить, рассматривая силу как функцию расстояния от вершины угла. Однако при этом интегрирование (отыскание первообразной) будет более сложным и потребуется находить интеграл с бесконечным верхним пределом.

X.87. $4\pi\rho_0(R^2 + 2R + 2)$. **Решение.** Рассмотрим слой атмосферы, находящийся на высоте h над поверхностью Земли и имеющий малую толщину Δh. Объём этого слоя (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δh) равен $4\pi(R+h)^2\Delta h$. В силу малости Δh можно считать, что плотность атмосферы во всём слое одинакова и равна $\rho_0 \cdot e^{-h}$, а потому масса этого слоя примерно равна $\rho_0 \cdot e^{-h} \cdot 4\pi(R+h)^2\Delta h$. Поэтому масса всей атмосферы равна $4\pi\rho_0\int\limits_0^{+\infty} e^{-h}(R+h)^2dh = 4\pi\rho_0(R^2+2R+2)$ (при нахождении первообразной придётся дважды интегрировать по частям).

X.88. а) **Решение.** Утверждение следует из рисунка **10.26**, на котором изображён график функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $[n;\ n+1]$. Так как функция выпукла, площадь под графиком будет меньше, чем площадь трапеции. Площадь под графиком равна $\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, в то время как площадь трапеции равна $\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{2}$.

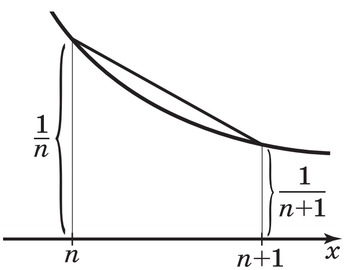


Рис. 10.26

б) *Указание.* Доказывается аналогично предыдущей задаче, только функция рассматривается на отрезке $[a;\ b]$.

X.89. **Решение.** Так как функция f непрерывна на $\boldsymbol{R}$, то у неё есть первообразная F. Из условия следует, что при всех вещественных значениях x выполнено $F(x+T) = F(x)$. Таким образом, функция F периодична с периодом T, а тогда и её производная периодична с таким же периодом (см. результат задачи IX.18).

Замечание. Требование непрерывности функции в условии задачи существенно. Например, если взять функцию, равную нулю везде, кроме непериодичного счётного множества точек, то интеграл такой функции будет равен нулю на любом промежутке, но функция не будет периодической.

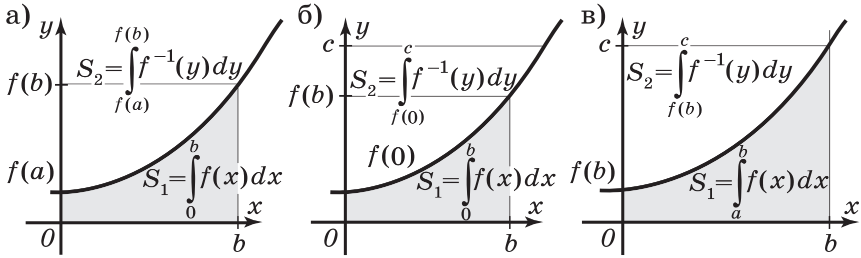


Рис. 10.27

X.90. а) $\frac{\pi}{2}$.

б) 2048. *Указание.* Задача X.90 базируется на простом геометрическом соображении, представленном на рисунке 10.27, *а*. Если на отрезке $[0;\, b]$ дана возрастающая функция f, то её график является также графиком обратной ей функции, заданной на отрезке $[f(a);\, f(b)]$, если считать её аргументами точки на оси ординат. Из рисунка видно, что

$$\int\limits_0^b f(x)dx + \int\limits_{f(0)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = b\cdot f(b).$$

Если же второй интеграл берётся на отрезке от $f(0)$ до некоторого c, то объединение соответствующих криволинейных трапеций включает в себя прямоугольник с площадью bc (рис. 10.27, *б* и 10.27, *в*).

X.91. $\frac{\pi}{2}$. *Указание.* См. указание к задаче X.90.

X.92. а) Неравенство следует из предыдущего рассуждения и рисунков 10.27, *б* и 10.27, *в*. Равенство достигается, если $b = f(a)$.

б) **Решение.** В условиях задачи функции x^{p-1} и x^{q-1} являются обратными друг другу. Неравенство является частным случаем неравенства из задачи X.92 а). Равенство достигается, если $b = a^{p-1}$ (или, что то же самое, $a = b^{q-1}$). Это неравенство можно доказать с помощью производной (см. задачу IX.265).

Замечание. Неравенства задачи X.92 называют неравенствами Юнга. Они играют важную роль в современной математике.

X.93. Решение. Функции $f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}$ и $g(x)=\sqrt[4]{x^4-1}$ являются взаимно обратными. Поэтому левое из двух неравенств есть частный случай задачи X.92 а).

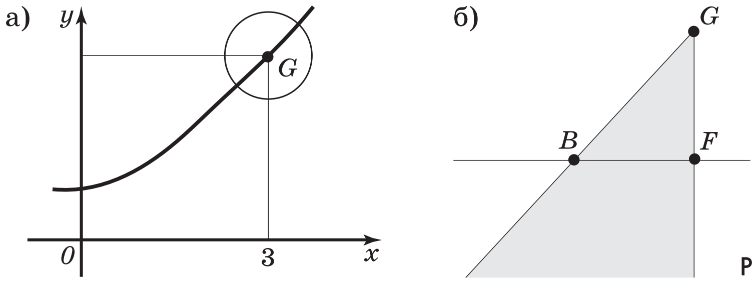


Рис. 10.28

Для доказательства правого неравенства рассмотрим рисунок 10.28, *а*, на котором изображена окрестность точки G графика функции f с абсциссой 3. Прямая BF имеет уравнение $y = 3$ (рис. 10.28, *б*).

Сумма интегралов функций f и g больше 9 на площадь криволинейного треугольника BFG. Поэтому достаточно показать, что площадь этого треугольника меньше 0,0001. Докажем, более того, что $BF \cdot GF < 0{,}0001$.

Заметим, что $GF = f(3) - 3 = \sqrt[4]{3^4+1} - 3 =$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{3^4+1}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{3^4+1}\right)^2 \cdot 3 + \sqrt[4]{3^4+1} \cdot 3^2 + 3^3} < \frac{1}{4 \cdot 3^3} < \frac{1}{100}.$$

Аналогично $BF = 3 - \sqrt[4]{3^4-1} =$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{3^4-1}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{3^4-1}\right)^2 \cdot 3 + \sqrt[4]{3^4-1} \cdot 3^2 + 3^3} < \frac{1}{4\left(\sqrt[4]{3^4-1}\right)^3}.$$

Докажем, что $\left(\sqrt[4]{3^4-1}\right)^3 > 25$, т. е. $8\sqrt[4]{125} > 25$, что следует из верного неравенства $8^4 > 5^5$. Поэтому $\dfrac{1}{4\left(\sqrt[4]{3^4-1}\right)^3} < \dfrac{1}{4 \cdot 25} = \dfrac{1}{100}$.

Итак, $BF < \dfrac{1}{100}$, $GF < \dfrac{1}{100}$, а потому площадь криволинейного треугольника BFG подавно меньше 0,0001.

X.94. Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен относительно переменной t, задаваемый равенством

$$a(t) = \int_a^b (f(x) \cdot t + g(x))^2 dx =$$

$$= t^2 \cdot \int_a^b f^2(x)dx + 2t \cdot \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx.$$

Поскольку при каждом вещественном значении t этот трёхчлен является интегралом от полного квадрата, его значение будет неотрицательным. Коль скоро при каждом вещественном t имеем $a(t) \geqslant 0$, дискриминант трёхчлена $a(t)$ будет неположителен. Записав неравенство для дискриминанта, получим требуемое.

Замечание. Это неравенство, равно как и метод его доказательства, является важным в теории гильбертовых пространств. См. также задачу X.96.

X.95. Решение. Исследовав эту функцию с помощью производной, нетрудно увидеть, что на отрезке $[0;\ 1]$ функция возрастает, удовлетворяя неравенству $1 < \sqrt{7} - 1 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) = 2$, а тогда на отрезке $[0;\ 1]$ выполнено неравенство $\frac{2}{f(x)} + f(x) \leqslant 3$, а значит, и

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{f(x)} + f(x)\right) dx \leqslant \int_0^1 3dx = 3.$$

X.96. Решение. Из условия следует, что $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$. Воспользуемся неравенством задачи X.94, получим $\left(\int_0^1 (f'(x) \cdot 1)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f'(x))^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx$, откуда и следует требуемое неравенство.

X.97. Решение. Запишем $\frac{t^2}{2} = \int_0^t x dx$. Тогда

$$\int_0^t \log_2(2^x + a)dx - \frac{t^2}{2} = \int_0^t (\log_2(2^x + a) - x)dx = \int_0^t \log_2\left(1 + \frac{a}{2^x}\right)dx.$$

Воспользовавшись неравенством $\ln(1 + x) < x$ при $x > 0$ (пример 80 а) из § 61 учебника), получим

$\log_2\left(1 + \frac{a}{2^x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{2^x}\right)}{\ln 2} < \frac{a}{2^x \ln 2}$, откуда $\int_0^t \log_2\left(1 + \frac{a}{2^x}\right)dx < \int_0^t \frac{a}{2^x \ln 2} dx = -\frac{a}{\ln^2 2 \cdot 2^x}\Bigg|_0^t = \frac{a}{\ln^2 2}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) < \frac{a}{\ln^2 2} < 4a$ (последнее неравенство выполнено в силу того, что $\frac{1}{\ln^2 2} < 4$, так как $\frac{1}{\ln 2} = \log_2 e < \log_2 4 = 2$).

X.98. Решение. Запишем требуемое неравенство в виде $\int_0^1 (2x - 1)f(x)dx \geqslant 0$. Рассмотрим $\int_{0,5}^1 (2x - 1)f(x)dx$, произведя в нём замену переменной $x = 1 - t$, получим $\int\limits_{0,5}^{1}(2x-1)f(x)dx = \int\limits_{0,5}^{0}(1-2t)f(1-t)\cdot(-dt) = -\int\limits_{0}^{0,5}(2t-1)f(1-t)dt.$

Поменяв в полученном интеграле букву t на букву x, придём к следующему: $\int\limits_{0}^{1}(2x-1)f(x)dx = \int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)f(x)dx - -\int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)f(1-x)dt = \int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)(f(x)-f(1-x))dx.$ Заметим, что на отрезке $[0;\ 0,5]$ выполнено $2x - 1 \leqslant 0$, а также $f(x) \leqslant f(1 - x)$ (в силу того что на данном отрезке $x \leqslant 1 - x$ и функция f возрастает), а потому подынтегральное выражение в полученном интеграле будет неотрицательно, а значит, и сам интеграл будет неотрицателен.

X.99. а) **Решение.** Заметим прежде всего, что из условия следует: для любого многочлена q, степень которого меньше n, выполнено равенство $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx = 0.$

Пусть многочлен p имеет корень a, не лежащий на $[0;\ 1]$. Не умаляя общности, пусть $a > 1$. Тогда $p(x) = = (x-a)q(x)$. При этом $\deg q = n - 1$. Тогда $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx = 0.$

С другой стороны, $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx = \int\limits_{0}^{1}(x-a)q^2(x)dx.$ Подынтегральная функция непрерывна, не положительна на $[0;\ 1]$ (так как $x - a < 0$ при $x \in [0;\ 1]$) и не равна нулю в некоторых точках этого отрезка (во всех, кроме конечного числа корней многочлена q). Тогда интеграл от этой функции строго отрицателен. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

б) Пусть a — кратный корень многочлена p. Тогда $p(x) = (x-a)^2q(x)$. С одной стороны, $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx = 0.$ (1)

С другой стороны, $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx = \int\limits_{0}^{1}(x-a)^2q^2(x)dx.$

Подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и равна нулю лишь в конечном числе точек. Значит, $\int\limits_{0}^{1}p(x)q(x)dx > 0$ вопреки (1). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Глава XI. Комплексные числа

Место этой главы в курсе и количество материала во многом определяются личными симпатиями авторов к этому разделу. Полагаем, что именно комплексные числа среди всего содержания школьного курса математики являются по духу наиболее близкими к современной математике.

Действительно, комплексные числа содержат в себе и тригонометрию, и теорию многочленов, и геометрические преобразования, и теорию делимости, и ещё много того, что не нашло отражения в тексте главы.

С другой стороны, этот материал относится к тому, который «не спросят на экзамене», и авторы прекрасно понимают, что именно он подвергнется сокращению в случае нехватки времени. Тем не менее считаем крайне желательным изучение этого материала хотя бы на обзорном уровне, так как полагаем, что мало найдётся тем, сравнимых с комплексными числами по силе воздействия на учащихся.

Кроме того, комплексные числа завершают построение алгебраически замкнутой числовой системы (т. е. числовой системы, в которой все многочлены с коэффициентами из этой системы имеют корни из той же системы).

Примерный план изучения главы приведён в таблице (для 4 и 5 часов алгебры и начал математического анализа в неделю).

Глава XI. Комплексные числа	**12**	**16**
Определение комплексных чисел	2	2
Геометрическое представление комплексных чисел	4	4
Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра	4	4
Корень n-й степени из комплексного числа		2
Применения комплексных чисел		2
Контрольная работа № 8	2	2

§ 66. Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма записи и арифметические действия над комплексными числами

Перед введением комплексных чисел желательно провести с учащимися вступительную беседу, в ходе которой выяснить требования, предъявляемые к расширению понятия числа. Это можно сделать, например, по следующему плану:

1) Аксиоматическое построение множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Выполнение коммутативности и ассоциативности сложения и умножения, а также дистрибутивности умножения. Неразрешимость уравнения $a + x = b$, $a > b$.

2) Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$. Существование нейтрального элемента относительно сложения и умножения, а также существование противоположного элемента. Пример кольца многочленов и некоммутативного кольца квадратных матриц. Кольцо $\boldsymbol{Z}$ — область целостности, т. е без делителей нуля. Пример кольца, не являющегося областью целостности. (Например: кольцо $\boldsymbol{Z}$, разбитое на непересекающиеся классы эквивалентности по признаку делимости на 6, образует кольцо $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$, в котором всего 6 элементов: $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ — остатки при делении на 6. Легко убедиться, что это кольцо. Однако $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, хотя сами множители не нули.) Неразрешимость уравнения $ax = b$, если b не делится на a.

3) Поле рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ — частный случай кольца, в котором существует обратимость операции умножения. Неразрешимость уравнения $x^2 = 2$.

4) Поле вещественных чисел $\boldsymbol{R}$. Поле чисел вида $a + b\sqrt{2}$, a, $b \in \boldsymbol{Z}$. Неразрешимость уравнения $x^2 = -1$.

5) Требования к расширению понятия числа:

а) Расширенное множество P' должно содержать исходное расширяемое множество P как одно из своих подмножеств. Таким образом, должно выполняться: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

б) Операции и отношения расширяемого множества P определены также и для расширенного множества P', причём их смысл в P' должен совпадать со смыслом, который они имели в P до его расширения. «Принцип перманентности».

в) В множестве P' должна быть выполнима операция, которая невыполнима (или не всегда выполнима) в множестве P.

г) Расширение множества P' должно быть минимальным из всевозможных расширений множества P, удовлетворяющих требованиям а)—в).

Уже при работе с этим параграфом необходимо всячески подчёркивать, во-первых, связь комплексных чисел с действительными числами, во-вторых, различие между ними (например, невозможность говорить о том, что одно из комплексных чисел больше другого). Это наиболее ярко демонстрируется в пункте 3. С другой стороны, во множестве комплесных чисел верны те же алгебраические тождества (например, формулы сокращённого умножения), что и во множестве вещественных чисел. В дальнейшем понятие делимости распространится и на комплексные, так называемые гауссовы числа (см. задачу XI.165).

Решения и указания к задачам

XI.4. в) $\varnothing$. **Решение.** $a^2 - 6a + 7 = -2a^2 - 8a \Leftrightarrow a \in \varnothing$.

XI.5. б) $\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}; \frac{27-5\sqrt{41}}{2}\right)$; $\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}; \frac{27+5\sqrt{41}}{2}\right)$. *Указание.* Достаточно решить систему $\begin{cases} x^2 - 3 = y, \\ 1 + 5x = y. \end{cases}$

XI.6. $\varnothing$.

XI.10. *Указание.* Необходимо прийти к выводу о том, что $i^n = \begin{cases} i, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+2, \\ -i, & n = 4k+3, \\ 1, & n = 4k, \end{cases}$ где $k \in \boldsymbol{Z}$. з) $-2i + 1$. к) $-i - 1$.

XI.11. а) $-i$. б) $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. в) $\frac{21}{29} - \frac{20}{29}i$. г) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. д) i. е) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. ж) $\frac{17}{53} + \frac{20}{53}i$. з) $\frac{68}{577} - \frac{99}{577}i$.

XI.12. а) $-\frac{8}{5}$. б) -8. в) $-1 + i$. г) 0.

XI.13. $z = 1 + i$. **Решение.** В ходе преобразований получим уравнение $5z + 5zi - 10i = 0$. Теперь пусть $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\begin{cases} 5a - 5b = 0, \\ 5a + 5b - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$

XI.14. $(1; \pm\sqrt{2})$; $\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

XI.15. б) $(-2; 3)$; $\left(1\frac{1}{5}; -3\frac{2}{5}\right)$.

XI.16. б) $(1; 2)$; $(-1; -2)$.

XI.17. а) 0; $\pm\sqrt{7}$. б) $\varnothing$.

XI.18. а) $z = 1 - i$. б) $z = -1 + 0i$.

XI.19. -2; $\pm 2i$.

Замечание. Полезно понять из условия, что z либо вещественное, либо чисто мнимое, так как $z^2 \in \boldsymbol{R}$.

XI.20. б) $x = i$; $y = 2 - 3i$.

XI.21. $z = 2 + 4i$; $w = 1 + 3i$.

XI.22. *Указание.* Доказать равенство $z - \overline{z} = 0$, эквивалентное данному.

XI.23. а) *Указание.* Доказать по индукции.

б) **Решение.** Пусть $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$, откуда $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{b}{a^2 + b^2}i = \dfrac{a + bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a + bi}{(a + bi)(a - bi)} = \dfrac{1}{a - bi} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

XI.24. б) 0; $\pm i$; ± 1.

XI.25. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

XI.26. *Указание.* а) Решение аналогично решению задачи XI.25. б) $2 + i$; $-2 - i$. в) $1 - 3i$; $-1 + 3i$.

Замечание. Полезно обратить внимание, что решением являются противоположные числа, как и при решении уравнения $x^2 = a$ в поле $\boldsymbol{R}$.

XI.27. б) $z = -3 + i$.

XI.28. б) $\pm 2i$; 2.

XI.29. а) 2^8. **Решение.** Здесь главное — сначала догадаться, что $(1 + i)^2 = 2i$. Тогда $(1 + i)^{16} = (2i)^8 = 2^8$. б) -2^{10}. в) 2^{1004}. г) $-2^{2008} + 2^{2008}i$. **Решение.** $(i - 1)^{2009} = (-2i)^{2008} \times (i - 1) = 2^{2008} \cdot (i - 1) = -2^{2008} + 2^{2008}i$.

XI.30. г) 1. **Решение.** $\dfrac{(2 - 5i)^{566} \cdot (-2 - 5i)^{566}}{(2i - 5)^{566} \cdot (5 + 2i)^{566}} = \dfrac{(4 + 25)^{566}}{(-4 - 25)^{566}} = 1$.

XI.31. а) $-1{,}3 - 0{,}9i$. б) $-1{,}5 + 4{,}7i$. в) $-3 - 8i$.

г) $-i$. **Решение.** Здесь, как и в предыдущих пунктах, полезно следить за рационализацией вычислений:

$$\left(2(1 - i)^3 + \frac{31 - 17i}{4 - 3i}\right)\frac{1 + i}{6} - 1 - i =$$

$$= \left(-4i(1 - i) + \frac{(31 - 17i)(4 + 3i)}{25}\right)\frac{1 + i}{6} - 1 - i =$$

$$= (-4i(1 - i) + 7 + i)\frac{1 + i}{6} - 1 - i = \frac{3(1 - i)(1 + i)}{6} - 1 - i = -i.$$

XI.32. а) 0. **Решение.** $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{11} = i^{11} = -i$. Следовательно, $\mathrm{Re}\, z = 0$.

б) 9. **Решение.** $\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{1}{i^{10}}=\frac{(1+i)^4}{2}-i^{10}=8-i^{10}=9.$ Следовательно, $\mathrm{Re}z = 9$.

XI.33. а) -556. *Указание.* Воспользоваться биномом Ньютона для $n = 7$.

XI.34. а) 4. **Решение.**

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}\cdot i^n}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\frac{(1-i)^2}{i^n}=\frac{i^n\cdot 4}{i^n}=4.$$

б) $(-1)^n \cdot i^{2n-1}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.34 а).

XI.35. $z=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$.

XI.36. Решение. Это упражнение иллюстрирует, что поле $\boldsymbol{C}$ — это область целостности, т. е. произведение двух комплексных чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Докажем это. Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$. Тогда $(a + bi)(c + di) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 0, \\ cb + ad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = bd, \\ bc = -ad. \end{cases}$

Перемножив уравнения последней системы, получим уравнение-следствие $ab(c^2 + d^2) = 0$. Если сумма квадратов вещественных чисел равна 0, то каждое из них равно 0, т. е. $z_2 = 0$. В противном случае одно из чисел a или b равно 0. Пусть, не умаляя общности, $a = 0$. Тогда $bd = 0$ и $bc = 0$. Если $b \neq 0$, то оба числа c и d равны 0, что неверно по предположению. Значит, $a = 0$ и $b = 0$, т. е. $z_1 = 0$.

XI.37. Решение. Обратное утверждение очевидно. Докажем, что $\begin{cases} z_1 + z_2 \in \boldsymbol{R}, \\ z_1 \cdot z_2 \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1$. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$. Тогда $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i \in \boldsymbol{R}$, и, следовательно, $bc + ad = 0$. Так как $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i \in \boldsymbol{R}$, то, следовательно, $b = -d$.

Итак, имеем систему $\begin{cases} bc + ad = 0, \\ b = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(c - a) = 0, \\ b = -d. \end{cases}$ Если $b = 0$, то и $d = 0$, и тогда $z_1, z_2 \in \boldsymbol{R}$, что не удовлетворяет условию. Если же $\begin{cases} c = a, \\ b = -d, \end{cases}$ то $z_2 = \bar{z}_1$.

XI.38. а) **Решение.** Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = i$. $S_{2008} = \frac{i(1 - i^{2008})}{1 - i} = 0$ (напомним, что $i^{2008} = 1$).

б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.34 а). Взять $q = -i$.

в) **Решение.** Можно разбить на две суммы следующим образом: $(i + 3i^3 + 5i^5 + \ldots + 2009i^{2009}) + (-2i^2 - 4i^4 - \ldots - 2008i^{2008}) = (i - 3i + 5i - \ldots + 2009i) + (2 - 4 + 6 - 8 + \ldots - 2008) = i(1 + 5 + 9 + \ldots + 2009) - i(3 + 7 + \ldots + 2007) + (2 + 6 + \ldots + 2006) - (4 + 8 + \ldots + 2008) = -1004 + 1005i$.

В каждой скобке сумма n первых членов арифметической прогрессии.

XI.41. *Указание.* Воспользоваться теоремой Виета.

XI.42. г) **Решение.** $x^2 - 6x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -4^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow (x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i) = 0$.

д) $(u - iv)(u + iv)$.

§ 67. Комплексные числа и многочлены. Основная теорема алгебры

Нетрудно указать многочлены с действительными коэффициентами степени выше нулевой, которые не имеют действительных корней: $x^2 + 1$, $x^2 + x\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $2x^4 + x^2 + 5$ и др. Однако невозможно придумать многочлен степени выше нулевой, который не имел бы комплексных корней.

Основная мысль параграфа и состоит в том, что множество комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Решения и указания к задачам

XI.43. *Замечание.* Ясно, что $f(z) + f(\overline{z}) \in \boldsymbol{R}$. а) 54. б) -18.

XI.44. Нет. *Указание.* Достаточно проверить, что $f(1 - i) = 0$.

XI.45. а) $x^3 - 9x^2 + 73x - 65 = 0$. **Решение.** По теореме из § 67 п. 1 многочлен имеет корни $z_1 = 1$; $z_2 = 4 - 7i$; $z_3 = 4 + 7i$. Пусть уравнение имеет вид $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -9, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 73, \\ z_1z_2z_3 = 65, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} b = -9, \\ c = 73, \\ d = -65. \end{cases}$$

Замечание. Задача имеет бесконечно много решений (например, достаточно разделить на 2 все коэффициенты).

в) *Указание.* Воспользоваться теоремой Виета.

XI.46. а) ± 1; $\pm\sqrt{5}i$. б) ± 3; $\pm 2i$. в) 1; $-1\pm\sqrt{2}i$. г) -1; $3 \pm 2i$.

XI.47. а) $a=-1$. *Указание.* Заметить, что $\frac{1+i}{1-i}=i$. б) $a=2$.

XI.48. а) 6. б) 6.

XI.49. $1+i$. **Решение.** Принимая во внимание, что $P(\bar{z})=\bar{P}(z)$, получим $\frac{P(-5-i)}{P(7-2i)}=\frac{\bar{P}(i-5)}{\bar{P}(2i+7)}=\frac{7-i}{3-4i}=1+i$.

XI.50. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. б) $2\pm\sqrt{3}$; $\frac{1\pm 3\sqrt{7}i}{8}$. **Решение.** Поделив левую и правую части уравнения на z и сделав замену $z+\frac{1}{z}=t$, получим $4t^2-17t+4=0$, откуда $\left[\begin{array}{l} z+\frac{1}{z}=4, \\ z+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2\pm\sqrt{3}, \\ z=\frac{1\pm 3\sqrt{7}i}{8}. \end{array}\right.$ в) 5; $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. г) -1; 3; $1\pm 2i$.

XI.51. x^4+4. **Решение.** $((x-1)^2+1)((x+1)^2+1) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=(x^2+2)^2-4x^2=x^4+4$.

XI.52. $a=b=0$. *Указание.* Достаточно поделить уголком.

XI.53. $(0{,}5-i)z+1+0{,}5i$. **Решение.** По теореме Безу $P(i)=i$, $P(-i)=2$. По теореме о делении с остатком $P(z)=(z^2+1)Q(z)+az+b$, т. е. $P(z)=(z+i)(z-i)Q(z)+ az+b$. Задача свелась к системе

$$\begin{cases} i=ai+b, \\ 2=-ai+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+0{,}5i, \\ b=0{,}5-i. \end{cases}$$

XI.54. $a=4$; $z_2=1-i$; $z_3=2$. **Решение.** По теореме Виета $z_1z_2z_3=4$. Понятно, что $1-i$ также корень. Тогда третий корень равен 2. По теореме Виета $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=a, \\ z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=2a-2, \end{cases}$ откуда $a=4$.

XI.55. $a=1$; $z_1=1$, $z_2=-2i$, $z_3=2i$. **Решение.** По теореме Виета $z_1+z_2+z_3=1$. Но $z_2=\bar{z}_3=bi$, $b\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, т. е. $z_1=1$. Тогда $1-1+a+3-4a=0 \Leftrightarrow a=1$. А так как $z_1z_2z_3=4$, то $b^2=4 \Leftrightarrow b=\pm 2$.

XI.56. $a = 5$; $z_{1,\,2} = -2 \pm i$. **Решение.** Пусть $u = 2b + bi$, $b \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\overline{u} = 2b - bi$ тоже корень уравнения. Заметим, что по теореме Виета $u + \overline{u} = -4$, откуда $b = -1$. Таким образом, $-2 - i$ и $-2 + i$ — корни уравнения, следовательно, $a = (-2 - i)(-2 + i) = 5$.

XI.57. $(-3; -2)$. **Решение.** Условие задачи означает, что уравнение $(a - 1)t^2 - 4t + a + 2 = 0$ должно иметь два различных отрицательных корня ($a = 1$ не является ответом по смыслу задачи), т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ t_1 + t_2 < 0, \\ t_1 t_2 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 4 - (a-1)(a+2) > 0, \\ \dfrac{4}{a-1} < 0, \\ \dfrac{a+2}{a-1} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow -3 < a < -2.$$

XI.58. Решение. Если z_1, ..., z_n — корни многочлена p_n, то $p_n(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$, значит, $(1 - z_1)(1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (1 - z_n) = p_n(1) = n + 1$.

XI.59. Решение. Докажем, что любой многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами, принимающий неотрицательные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с вещественными коэффициентами.

В самом деле, корни многочлена с вещественными коэффициентами разбиваются на действительные корни и пары комплексных корней. Поэтому

$$P(x) = a\prod_{j=1}^{s}(x - z_j)(x - \overline{z}_j)\prod_{k=1}^{t}(x - \alpha_k)^{m_k}, \text{ где } \alpha_k \in \boldsymbol{R}.$$

Если $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $P(x) \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$ и все числа m_k чётны, поэтому действительные корни тоже разбиваются на пары. Следовательно, $P(x) = \left(\sqrt{a}\prod\limits_{j=1}^{l}(x - z_j)\right)\left(\sqrt{a}\prod\limits_{j=1}^{l}(x - \overline{z}_j)\right)$, причём некоторые из чисел z_j могут быть действительными. Пусть $\sqrt{a}\prod\limits_{j=1}^{l}(x - z_j) = q(x) + ir(x)$, где q, r — многочлены с вещественными коэффициентами. Тогда

$$\sqrt{a}\prod_{j=1}^{l}(x - \overline{z}_j) = q(x) + ir(x).$$

В итоге получаем

$$P(x) = (q(x))^2 + (r(x))^2.$$

Замечание. Для многочленов от нескольких переменных аналогичное утверждение уже не всегда верно, т. е.

существуют неотрицательные многочлены (так мы будем называть многочлены с действительными коэффициентами, которые при всех действительных значениях переменных принимают неотрицательные значения), которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Первым это доказал Д. Гильберт в 1888 г., но он не привёл явный пример такого многочлена. Первым простой пример привёл Т. Моцкин в 1967 г. А именно он показал, что многочлен $F(x,\ y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1$ неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

§ 68. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Этот параграф как нельзя лучше подчёркивает, что комплексные числа имеют особенность «перевоплощаться» из алгебраической формы записи в тригонометрическую, затем в показательную.

Бо́льшая часть задач, посвящённых изображению комплексных чисел и модулю комплексного числа, тесно связана с комплексным уравнением окружности и прямой. Так, например, перед решением задач XI.72—XI.87 разумно получить эти уравнения, исходя из определений. При этом исключительно полезным является факт, что расстояние между точками z и w равно расстоянию между нулём и точкой $z - w$, т. е. равно $|z - w|$.

При изучении тригонометрической формы комплексного числа важно понять, что равенства $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$ не позволяют написать удобную единую форму для выражения угла φ через x и y. Во всяком случае, оно не обязано совпадать ни с $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ни с $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$: если, например, число z лежит в третьей четверти, то его главный аргумент больше π, тогда как значения арксинуса и арккосинуса не могут быть больше π. Поэтому главный аргумент конкретного заданного числа находят обычно не по формулам, а с помощью геометрического изображения.

Теоремы о сложении комплексных чисел и их произведении (делении) в тригонометрической форме «оживают» в задачах XI.101, XI.104, XI.108, XI.112.

Важно, что наряду с геометрическими способами решения присутствуют и аналитические (задачи XI.84, XI.114, XI.116). Это важно как с методической точки зрения, так и с математической, особенно когда при определённых условиях первый способ невозможен, как в задаче XI.84.

При изучении формулы Муавра наряду с техническими приобретениями, например с получением многочлена $f(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ для любого n и $f(\sin\alpha) = \sin n\alpha$ для нечётного n, в копилку учащихся попадает «метод комплексных чисел» — задачи группы С: XI.127—XI.132, что особенно важно и ценно как с точки зрения взаимосвязей в математике вообще, так и с точки зрения мотивации изучения комплексных чисел.

Решения и указания к задачам

XI.61. г) $y = -2x + 2$. **Решение.** Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $2x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$. д) $y = -1$. ж) $y > -2x$. з) $x^2 + y^2 < 1$. и) Вся плоскость. *Указание.* Условие сводится к неравенству $x^2 + 5y^2 \geqslant 0$.

XI.62. а) $x^2 - y^2 = 1$.

б) *Указание.* Привести уравнение $-\frac{y}{x^2 + y^2} = 1$ к виду $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Этим уравнением задаётся окружность.

в) Окружность $(x + 2)^2 + y^2 = 4$.

г) Пара точек $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **Решение.** Из условия получаем $z^2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$, т. е. $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2}, \\ 2xy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{4x}. \end{cases}$

д) Круг $(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$. **Решение.** $\operatorname{Im}\frac{2}{\bar{z} - 1} \geqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\frac{2x - 2 + 2iy}{(x - 1)^2 + y^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2y \geqslant (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$, а это круг.

XI.63. а) Прямая $y = -x - 1$. *Указание.* Задачу следует свести к преобразованию плоскости (параллельному переносу, гомотетии или симметрии).

По условию $y = -x$. Уравнение задаёт параллельный перенос на единицу вниз вдоль оси Oy.

б) Прямая $y = x$. *Указание.* Уравнение задаёт симметрию относительно начала координат.

в) Прямая $y = -x - 2$. *Указание.* Уравнение задаёт параллельный перенос на единицу вниз вдоль оси Oy и на единицу влево вдоль оси Ox.

г) Прямая $y = x$. *Указание.* Уравнение задаёт симметрию относительно оси Ox.

XI.64. *Указание.* См. указание к задаче XI.63 а). Условие задачи означает, что дан круг $x^2 + y^2 < 4$ без границы с центром в начале координат и радиусом, равным 2. а) *Указание.* Уравнение задаёт параллельный перенос на две единицы вправо вдоль оси Ox.

б) *Указание.* Уравнение задаёт параллельный перенос на две единицы влево вдоль оси Ox и на две единицы вверх вдоль оси Oy.

г) *Указание.* Уравнение задаёт симметрию относительно оси Ox.

д) *Указание.* Уравнение задаёт гомотетию с центром в точке $O(0; 0)$ и коэффициентом 2.

XI.65. а) $\sqrt{10}$. *Указание.* Воспользоваться формулами расстояния между двумя точками $A(7; -2)$ и $B(6; 1)$. в) 2.

XI.66. а) Да. *Указание.* См. указание к задаче XI.65 а). б) Да.

XI.67. б) **Решение.** Рассмотрим точки комплексной плоскости, соответствующие данным комплексным числам: $A(-4; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 9)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(3; 6)$, $\overrightarrow{BC}(3; 6)$. Так как $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

Замечание. Уместно отметить, что три различные точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \boldsymbol{R}$. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться признаком коллинеарности векторов для вектора с началом в точке z_1 и концом в точке z_3 и вектора с началом в точке z_1 и концом в точке z_2.

XI.68. б) $(-3; 0)$; $(3; -2)$; $(1; 4)$. *Указание.* Обозначить точки, соответствующие данным комплексным числам $A(0; -1)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 2)$. Ясно, что задача имеет три решения (рис. 11.1). Из условия, что диагонали делятся пополам, в каждом из случаев найти координаты точки D_i, $i = 1, 2, 3$.

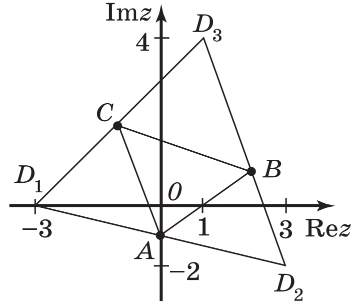


Рис. 11.1

в) $z = z_1 + z_2 - z_3$; $z = z_1 + z_3 - z_2$; $z = z_2 + z_3 - z_1$. *Указание.*

Достаточно перейти к рисунку и рассмотреть комплексные числа z_1, z_2, z_3 как векторы на плоскости.

XI.69. а) $\pm\sqrt{3}$.

б) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. **Решение.** Из рисунка понятно, что точка C должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в точках (0; 0) и (1; 1), т. е. на прямой $y = -x + 1$. Так как $BA = CA = \sqrt{2}$, то $\sqrt{2} = \sqrt{(x-0)^2 + (-x+1-0)^2} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

в), г) *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.69 б).

XI.70. а) $z = \frac{u+v}{2}$. б) $z = \frac{2v+3u}{5}$. *Указание.* Достаточно перейти к векторам и использовать теорему о координатах точки, делящей отрезок в данном отношении.

XI.72. г) Окружность с центром (–1; –2) и радиусом $\sqrt{5}$. д) Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках (1; 0) и (–1; 0), т. е. прямая $x = 0$.

XI.73. $\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i$. а) Данное множество есть окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Так как геометрический смысл $|z|$ — это расстояние от точки до начала координат, то изобразим рисунок 11.2. На нём $|z|$ принимает минимальное значение в точке A, и, следовательно, $z = x + xi$. С другой стороны, точка A принадлежит окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, и тогда

$$z = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i.$$

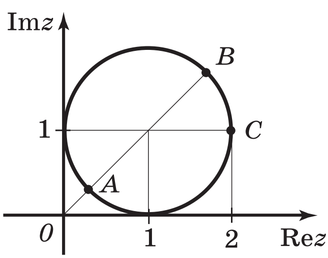


Рис. 11.2

б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i$. *Указание.* Ясно, что наибольшее значение $|z|$ принимает в точке B — точке, диаметрально противоположной точке A.

в) $2 + i$. *Указание.* Вещественная часть равна 2 в точке C.

г) $\sqrt{2} + \left(1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)i$. *Указание.* $(\sqrt{2}-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

XI.74. $3-\sqrt{\frac{3}{5}}i$.

XI.75. $-4i$. **Решение.** Пусть $z = x + iy$, x, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $2\sqrt{x^2+(y+3)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+(y+4)^2=4$, а это уравнение окружности с центром в точке $(0; -4)$ и радиусом 2. Так как точка a равноудалена от любых точек окружности, то это и есть её центр.

XI.76. **Решение.** Из условия следует, что $a^4=-\frac{1}{4}$. Пусть $z = x + iy$, x, $y \in \boldsymbol{R}$, тогда $(x + yi)(x - yi) - 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. Следовательно, множество A есть окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом, равным 2. Множество B задаётся уравнением $(0{,}5 + 0{,}5i)(x + yi) + (0{,}5 - 0{,}5i) \times$ $\times (x - yi) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x-y=2\sqrt{2}$. Таким образом, множество B есть прямая, проходящая через точки $(0; -2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}; 0)$. Найдём общие точки для множеств A и B:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x-2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y=-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Значит, множества A и B имеют одну общую точку $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ (прямая касается окружности, рис. 11.3).

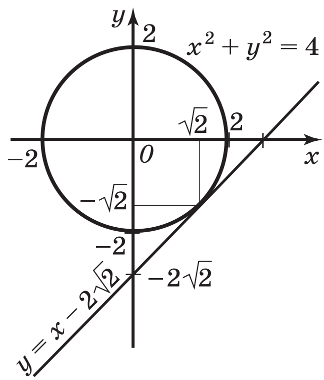


Рис. 11.3

XI.77. а) Круг $x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$. б) Круг $x^2 + (y + 1)^2 \leqslant 1$. в) Круг без границы $(x - 3)^2 + y^2 < 4$.

д) Полуплоскость $y \leqslant -\frac{x}{2}$ без начала координат. **Решение.** $\frac{x}{x^2+y^2} \leqslant -\frac{2y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant -\frac{x}{2}, \\ x \neq 0,\ y \neq 0. \end{cases}$

XI.78. а) Кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1$ и $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=9$.

Решение. $3 < |3iz + 1 - i| < 9 \Leftrightarrow 3 < |3i|\left|z+\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right| < 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < \left|z+\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right| < 3.$

б) *Указание.* Аналогично решению задачи XI.78 а) вынести $|1 - i| = \sqrt{2}$, получить кольцо, задаваемое неравенством $1 < \left|z - \frac{i}{1-i}\right| < 2$.

в) Верхняя полуплоскость, границей которой является прямая $y = -1$.

XI.79. а) Пересекаются. **Решение.** Достаточно вспомнить, что две окружности имеют общие точки, если $|R_1 - R_2| \leqslant O_1O_2 \leqslant |R_1 + R_2|$, где O_1 и O_2 — центры этих окружностей, а R_1 и R_2 — радиусы. Из условия следует, что $O_1(0;\ 2)$, $O_2(2;\ 0)$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$. Так как $1 < O_1O_2 = 2\sqrt{2} < 3$, то множества пересекаются.

б), в), г) *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.79 а).

XI.80. г) $-0{,}6 - 1{,}2i$ — число с наименьшим модулем; числа с наибольшим модулем не существует. **Решение.** Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$, тогда из условия следует $(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$. Уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через начало координат, имеет вид $y = 2x$. Тогда точка пересечения этих прямых $(-0{,}6;\ -1{,}2)$ — искомая. Второй способ решения приведён в задаче XI.81 а).

XI.81. а) 0,5. **Решение.** Рассмотрим точки $A(0;\ 1)$, $B(-\sqrt{3};\ 0)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{3};\ -1)$. Так как искомая прямая перпендикулярна $\overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ — нормаль к прямой, и, значит, $-\sqrt{3}x - y + c = 0$ — её общее уравнение. Находим c из условия, что данная прямая проходит через точку $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ — середину отрезка AB. Имеем $-\sqrt{3}x - y - 1 = 0$. Воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, найдём наименьший модуль.

XI.82. *Указание.* Преобразовать условие к виду $|zi - 3i + 4| = |i||z + 3 + 4i| = |z + 3 + 4i|$, продолжить решение аналогично задаче XI.81.

XI.83. а) *Указание.* Преобразовать условие к виду $|z_1||z - z_2| = |z_2||z - z_1|$. Но $|z_1| = |z_2| = 5$, поэтому $|z - z_2| = |z - z_1|$, а это уже обсуждалось в задаче XI.81.

XI.84. б) $3 + 4i$; $4 + 3i$. **Решение.** Приведём два способа решения задачи. Способ 1. Пусть $z = x + yi$, где x, $y \in \boldsymbol{R}$, тогда $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, а значит, $x^2 + y^2 = 25$ — уравнение окружности с центром в начале координат. Геометрически сумма модулей $|z-7|+|z-7i|$ означает сумму расстояний от точки, соответствующей комплексному числу z, до точек $A(7;\ 0)$ и $B(0;\ 7)$ (рис. 11.4). Окружность пересекает отрезок AB в двух точках P и Q, они и соответствуют тем числам, для которых $|z-7|+$ $+|z-7i|$ принимает минимальное значение, так как для P и Q значение $|z-7|+|z-7i|$ равно длине отрезка AB. Заметим, что для любой точки окружности N по неравенству треугольника $AN+BN>AB$. Координаты точек P и Q находим из системы

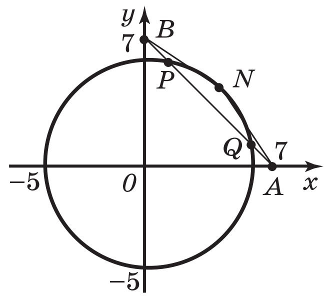


Рис. 11.4

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Способ 2. Учитывая, что $x^2+y^2=25$, можем записать $|z-7|=\sqrt{(x-7)^2+y^2}=\sqrt{74-14x}$, $|z-7i|=\sqrt{x^2+(y-7)^2}=$ $=\sqrt{74-14y}$. Рассмотрим функцию $\varphi(x;\ y)$ от двух переменных $\varphi(x;\ y)=\sqrt{74-14x}+\sqrt{74-14y}$, заданную при условии $x^2+y^2=25$. Так как $\varphi(x;\ y)\geqslant 0$ при любых x и y, то можно найти минимум функции $\frac{1}{2}\varphi^2(x;y)=$ $=74-7(x+y)+\sqrt{(74-14x)(74-14y)}$. Значит, $\frac{1}{2}\varphi^2(x;y)=$ $=74-7(x+y)+\sqrt{98(x+y)^2-74\cdot 14(x+y)+3026}$. Выразим $2xy=(x+y)^2-25$ и сделаем замену $t=7(x+y)$. Тогда минимальное значение функции $\frac{1}{2}\varphi^2(x;y)$ совпадёт с минимальным значением функции $g(t)=74-t+$ $+\sqrt{2t^2-148t+3026}$; $g(t)=37+(37-t)+\sqrt{2(t-37)^2+288}$. Сделав замену $p=t-37$, найдём минимальное значение функции $f(p)=37-p+\sqrt{2p^2+288}$; $f'(p)=\dfrac{2p}{\sqrt{2p^2+288}}-1$; $f'(p)=0\Leftrightarrow p=12$.

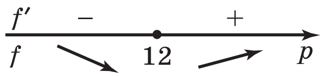


Рис. 11.5

Так как функция f убывает на промежутке $(-\infty;\ 12]$, а на промежутке $[12;\ +\infty)$ возрастает (рис. 11.5), то минимальное значение функция принимает в точке $p = 12$: $\min\limits_{p \in D(f)} f(p) = f(12)$. Но при $p = 12$ выполнено $t = 49$, а значит, $x + y = 7$. Так как $x^2 + y^2 = 25$, то $x = 3$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 3$.

Замечание. Этот способ трудоёмкий, но более универсальный. Если бы на отрезке AB не нашлось бы ни одной точки, удовлетворяющей условию $x^2 + y^2 = 25$, то решение первым способом было бы невозможно.

XI.85. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3};\ \sqrt{2}\right]$. **Решение.** Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда из условия имеем $x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1 + 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 4(x + y) + 2 = 0$. Обозначим $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = c$, $c \geqslant 0$. Переформулируем задачу: при каких неотрицательных значениях c система $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) - 4(x + y) + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$ имеет решения?

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{cases} 3c^2 - 4x - 4y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + \dfrac{3c^2 + 2}{4}, \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + \dfrac{3c^2 + 2}{4}, \\ 2x^2 - \dfrac{3c^2 + 2}{4}x + \dfrac{(3c^2 + 2)^2}{16} - c^2 = 0. \end{cases}$$

Понятно, что у квадратного уравнения в системе нужно потребовать неотрицательность дискриминанта (и этого будет достаточно, чтобы система имела решение), т. е.

$$9c^4 - 20c^2 + 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9} \leqslant c^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \leqslant c \leqslant \sqrt{2}\ (c \geqslant 0).$$

XI.86. -1; 4. **Решение.** Пусть $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$. Условие означает, что верны равенства

$$\begin{cases} (a + 10)^2 + b^2 = 65, \\ a^2 + (b - 2)^2 = 13. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём b.

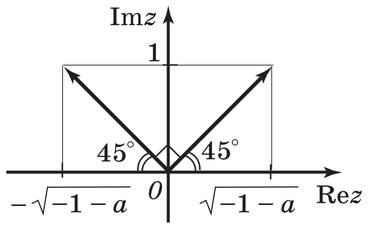


Рис. 11.6

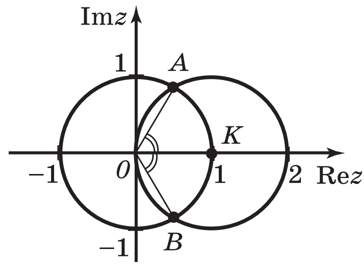


Рис. 11.7

XI.87. *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.86.

XI.88. Прямую.

XI.89. −2. **Решение.** Рассмотрим уравнение $z^2 - 2iz + a = 0 \Leftrightarrow z = i \pm \sqrt{-1-a}$. Заметим, что корни уравнения имеют одинаковую мнимую часть (рис. 11.6). Очевидно, что угол между векторами, изображающими корни данного уравнения, будет равняться 90°, если модуль вещественной части равен модулю мнимой, а именно

$$\sqrt{-1-a} = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$

XI.90. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Решение.** Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнения следующей системы:

$$\begin{cases} |z| = |z^2 - z|, \\ |z| = |z^2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = |z-1|, \\ |z| = 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решить, исходя из геометрических соображений: две окружности (рис. 11.7) одинакового радиуса ($r = 1$) пересекаются в точках $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Можно решить систему и алгебраически. Если положить $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$, то, решая систему, получим

$$\begin{cases} a^2 = (a-1)^2, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

XI.91. **Решение.** Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$ и числу i соответствует точка $A(0; 1)$, числу $z - i$ — точка $B(x; y-1)$, а числу $z + i$ — точка $C(x; y+1)$. По условию должно выполняться хотя бы одно из равенств $AB = AC$,

$AB = BC$ и $AC = BC$, т. е. должно быть выполнено условие $\left[\begin{aligned} &\sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2}, \\ &\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 2, \\ &\sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &y = 1, \\ &x^2+(y-2)^2 = 4, \\ &x^2+y^2 = 2. \end{aligned}\right.$ Первое уравнение задаёт прямую, а второе и третье — окружности. По условию должно выполняться хотя бы одно из равенств $AB = AC$, $AB = BC$ и $AC = BC$, т. е. искомое множество задаётся полученной совокупностью уравнений.

XI.92. Решение. Пусть числу u соответствует вектор $\vec{a}$, а числу v — вектор $\vec{b}$, тогда нужно доказать, что $|\vec{a}-\vec{b}| \geqslant |\vec{a}| - |\vec{b}|$. Если $|\vec{a}| - |\vec{b}| < 0$, то неравенство очевидно. Если $|\vec{a}| - |\vec{b}| \geqslant 0$, то $|\vec{a}-\vec{b}|^2 \geqslant (|\vec{a}| - |\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})^2 \geqslant |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \geqslant$ $\geqslant |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$ (так как $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$), что верно по определению скалярного произведения, причём равенство достигается, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. если $\dfrac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u} = \dfrac{\operatorname{Im} v}{\operatorname{Re} v}$. С геометрической точки зрения неравенство означает, что сторона треугольника больше разности двух других его сторон (рис. 11.8).

XI.93. *Указание.* Опять-таки, как и в задаче XI.92, можно перейти на язык векторов. Ясно, что полученный четырёхугольник — параллелограмм (рис. 11.9) и его диагонали равны. Значит, это прямоугольник.

XI.94. Геометрически это равенство означает, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

XI.95. 0; $\dfrac{6+\sqrt{19}}{5}$. *Замечание.* Во втором издании будет исправлено первое неравенство: $|z-i| \leqslant 3$. **Решение.** 1) Пусть $a = 0$. Тогда $\begin{cases} |z-i| \leqslant 3, \\ |z| \leqslant 0 \end{cases}$ выполняется для единственного числа $z = 0$.

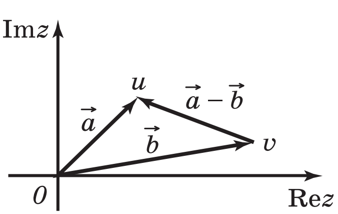


Рис. 11.8

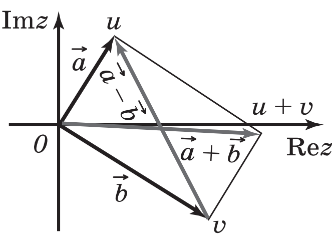


Рис. 11.9

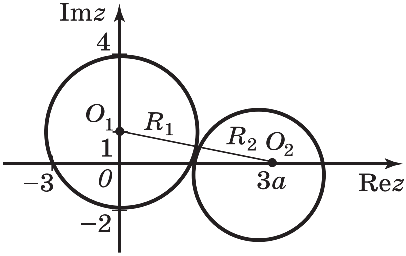


Рис. 11.10

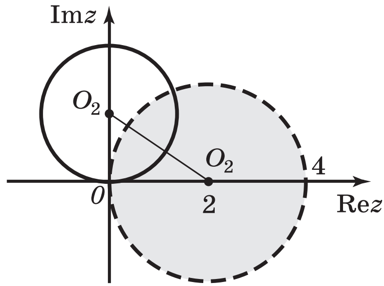


Рис. 11.11

2) Пусть $a > 0$ ($a < 0$ не подходит, так как $\forall z \in \mathbf{C}$ $|z| \geqslant 0$). Тогда множество $|z - i| \leqslant 3$ задаёт круг с центром в точке $O_1(0;\ 1)$ и радиусом $R_1 = 3$, а $|z - 3a| \leqslant 2a$ задаёт круг с центром $O_2(3a;\ 0)$ и радиусом $R_2 = 2a$. Условие задачи означает, что круги касаются внешним образом (рис. 11.10), т. е. $O_1O_2 = R_1 + R_2$, а значит,

$$\begin{cases} 9a^2 + 1 = 3 + 2a, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{6 + \sqrt{19}}{5}.$$

XI.96. 0; $\dfrac{-6 + \sqrt{57}}{7}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.95.

XI.97. а) $(-\infty;\ 0) \cup \left(\dfrac{4}{3};\ +\infty\right)$. **Решение.** Понятно, что при $a < 0$ система решений не имеет. При $a \geqslant 0$ данные уравнения задают две окружности, эти окружности не имеют общих точек, если $\left[\begin{array}{l} O_1O_2 > R_1 + R_2, \\ O_1O_2 < |R_1 - R_2|, \end{array}\right.$ где $O_1(a;\ 0)$ и $O_2(0;\ 1)$ — центры данных окружностей, а $R_1 = 1$, $R_2 = \dfrac{a}{2}$ — их радиусы. Итак, $\left[\begin{array}{l} a^2 + 1 > \left(1 + \dfrac{a}{2}\right)^2, \\ a^2 + 1 < \left(1 - \dfrac{a}{2}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a > \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

XI.98. $\left(-\dfrac{8}{3};\ 0\right)$. **Решение.** Множество $|z - 2| < 2$ задаёт на комплексной плоскости внутренность круга с центром $O_1(2;\ 0)$ и радиусом $R_1 = 2$, а множество $|z - ai| = a + 4$ при $a > -4$ задаёт окружность с центром $O_2(0;\ ai)$ и радиусом $R_2 = a + 4$. Геометрически (рис. 11.11) это означает, что их пересечение не пусто. Тогда $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$, т. е. $a + 2 < \sqrt{4 + a^2} < a + 6 \Leftrightarrow -\dfrac{8}{3} < a < 0$.

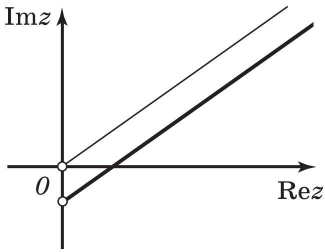


Рис. 11.12

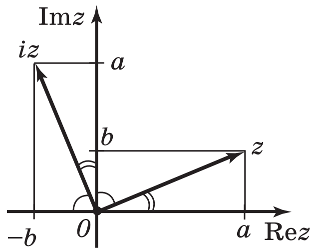


Рис. 11.13

При $a = -4$ выполняется $|z - 4i| = 0 \Leftrightarrow z = 4i$. Но тогда не выполняется второе неравенство $|4i - 2| = \sqrt{20} < 2$, значит, решений нет. При $a < -4$ левая часть первого неравенства $|z - ai| \geqslant 0$, а его правая часть меньше нуля, значит, решений нет.

XI.101. г) См. рис. 11.12. *Указание.* Пусть $z + i = w$. Тогда $z = w - i$.

д) См. рис. 11.13. *Указание.* Полезно доказать тот факт, что при умножении на i происходит поворот вектора, изображающего число z на комплексной плоскости, на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат (на угол $-\frac{\pi}{2}$, если умножить на $-i$). Это ясно из рисунка 11.13. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда $(a + bi)i = -b + ai$. Далее действовать как в п. г): $\arg w = \frac{\pi}{2}$, $w = zi$. Следовательно, $z = \frac{w}{i} = -wi$ (рис. 11.14).

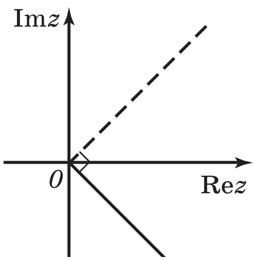


Рис. 11.14

и) **Решение.** Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\frac{i+1}{z} = \frac{x + y + (x - y)i}{x^2 + y^2}$. Откуда

$$\begin{cases} \cos(-\pi) = \dfrac{\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)^2}}, \\ \sin(-\pi) = \dfrac{\dfrac{x-y}{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2}}, \\ 0 = \dfrac{x-y}{\sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x = y. \end{cases}$$

XI.102. в) **Решение.** $16-16\sqrt{3}i=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

XI.104. а) -1. б) $3i$. в) $1-i$. **Решение.** $\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)(i+1)=-i(i+1)=1-i$. г) $-\sqrt{6}+\sqrt{6}i$. **Решение.**

$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)(-3+\sqrt{3}i)=$$

$$=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\sqrt{12}=\sqrt{12}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$$

$$=-\sqrt{6}+\sqrt{6}i.$$

Указание. Полезно учесть, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Сумма главных аргументов не является, вообще говоря, главным аргументом произведения. Это будет верно лишь в том случае, когда сумма главных аргументов сомножителей меньше 2π.

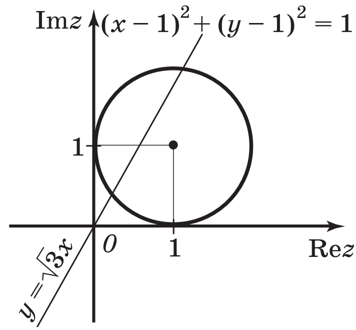


Рис. 11.15

XI.105. а) $z=1$. б) $z=i$. в) *Указание*. Достаточно решить систему $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1,\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$ (рис. 11.15).

XI.106. $\sqrt{14}$; $\frac{2\pi}{3}$.

XI.107. $8\sqrt{2}$; $\frac{5\pi}{4}$.

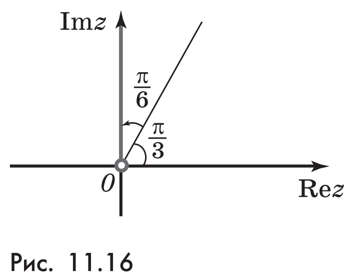


Рис. 11.16

XI.108. б) **Решение.** Решение аналогично решению задачи XI.101 е). Пусть $w=\frac{z}{i+\sqrt{3}}$. Тогда $z=w(i+\sqrt{3})$, $\arg(i+\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$, $|i+\sqrt{3}|=2$, т. е. поворот луча $\left(\arg w=\frac{\pi}{3}\right)$ на угол $\frac{\pi}{6}$ (рис. 11.16). В итоге получаем луч, совпадающий с положительной полуосью оси Oy без начала координат.

XI.109. в) $\sqrt{13}\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)$.

Замечание. Перед выполнением задач XI.110—XI.112 полезно устно повторить формулы приведения.

XI.110. а) $\cos 38^\circ + i\sin 38^\circ$. б) $\cos 218^\circ + i\sin 218^\circ$. в) $\cos(-48^\circ) + i\sin(-48^\circ)$. г) $\cos 132^\circ + i\sin 132^\circ$. **Решение.** $-\cos 48^\circ + i\sin 48^\circ = \cos(180^\circ - 48^\circ) + i\sin(180^\circ - 48^\circ) = \cos 132^\circ + i\sin 132^\circ$.

XI.111. а) $\cos(-58^\circ) + i\sin(-58^\circ)$. *Замечание.* Во втором издании условие было заменено на $\sin 32^\circ + i\cos 148^\circ$. **Решение.** $\sin 32^\circ + i\cos 148^\circ = \cos 58^\circ + i\cos(90^\circ + 58^\circ) = \cos 58^\circ - i\sin 58^\circ = \cos(-58^\circ) + i\sin(-58^\circ)$.

в) $\sqrt{2}\cos 70^\circ\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **Решение.** $\sin 20^\circ + i\cos 70^\circ = \cos 70^\circ + i\cos 70^\circ$. Заметим, что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z > 0$, т. е. $\arg z = \frac{\pi}{4}$, $|z| = \sqrt{2\cos^2 70^\circ} = \sqrt{2}\cos 70^\circ$. Тогда

$$z = \sqrt{2}\cos 70^\circ\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{11}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$.

XI.112. $\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ$.

XI.113. $1 + i\sqrt{3}$. **Решение.** Пусть $z = x + yi$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\bar{z} = x - yi$; $z + \bar{z} = 2x$; $z - \bar{z} = 2yi$. Далее $(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4xyi$, откуда по условию задачи $4xyi = 4\sqrt{3}i$, т. е. $xy = \sqrt{3}$. Значит, $x \neq 0$ и $y \neq 0$, так как $\arg z = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$, $x > 0$, $y > 0$. Таким образом, $\begin{cases} xy = \sqrt{3}, \\ \frac{y}{x} = \sqrt{3}, \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}, \\ x = 1. \end{cases}$

XI.114. $p > 2$. **Решение.** Способ 1 (аналитический). Если $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то $z = x + xi$, $x > 0$. Тогда

$$|x + xi - 1 + i + \sqrt{3}i| = \sqrt{(x-1)^2 + (x + \sqrt{3})^2} \leqslant p.$$

Ясно, что $p \leqslant 0$ не подходит. Рассмотрим $p > 0$, тогда

$$(x-1)^2 + (x+\sqrt{3})^2 \leqslant p^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x + 4 - p^2 \leqslant 0. \qquad (*)$$

Теперь задачу можно переформулировать: при каких значениях $p > 0$ неравенство (*) имеет хотя бы одно положительное решение?

Проверим сначала случай $\begin{cases} D = 0, \\ x > 0. \end{cases}$ Так как $\frac{D}{4} = -4 - 2\sqrt{3} + 2p^2$, следовательно $\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow p = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Тогда

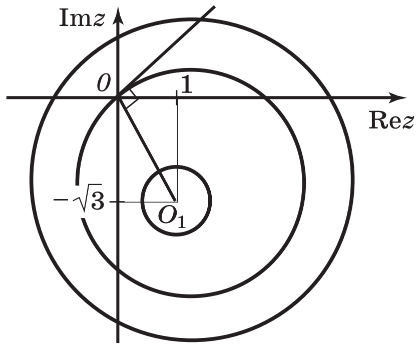


Рис. 11.17

$x^2+(\sqrt{3}-1)x+2-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin [0;+\infty)$. Теперь достаточно потребовать, чтобы $x_2 > 0$, где x_2 — больший корень уравнения. А это значит, что $\dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{2p^2-4-2\sqrt{3}}}{2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2p^2-4-2\sqrt{3}} > \sqrt{3}-1 \quad p > 2$ $(p > 0)$. Заметим, что $\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2$.

Способ 2 (геометрический). Неравенство $|z-(1-\sqrt{3}i)| \leqslant p$, где $p > 0$, задаёт круг с центром в точке $(1; -\sqrt{3})$ и радиусом p, а числа с аргументом $\dfrac{\pi}{4}$ лежат на луче $y = x$, $x > 0$ (рис. 11.17).

Условие означает непустое пересечение луча и окружности, а это произойдёт, если $p = OO_1 > 2$.

XI.115. См. решение задачи XI.116.

XI.116. $\left[\dfrac{1}{4}(6-\sqrt{6}); \dfrac{1}{4}(6+\sqrt{6})\right]$. **Решение.** Способ 1. Множество чисел z, для которых $|z-3-4i| \leqslant 1$, — это круг $(x-3)^2+(y-4)^2 \leqslant 1$. Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\mathrm{Im}z = y$, $\mathrm{Re}z = x$, $\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z} = \dfrac{y}{x}$. Переформулируем задачу: при каких значениях $c \in \boldsymbol{R}$ система

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2 \leqslant 1,\\ \dfrac{y}{x} = c\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? Система имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение неравенство $(c^2+1)x^2-2(3+4c)x+24 \leqslant 0$. Так как $c^2+1 > 0$, то достаточно потребовать, чтобы $\frac{D}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow -8c^2 + 24c - 15 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(6 - \sqrt{6}) \leqslant c \leqslant \frac{1}{4}(6 + \sqrt{6})$.

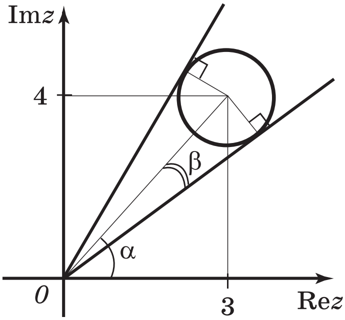


Рис. 11.18

Способ 2. Из рисунка 11.18 ясно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{24}}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{24}}$. Поэтому $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{24}}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}} = \frac{6 - \sqrt{6}}{4}$. Аналогично получим, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{6 + \sqrt{6}}{4}$.

XI.117. а) $2 \pm 2\sqrt{7} - 3i$.

б) $\left[\frac{158 - 12\sqrt{145}}{5};\ \frac{158 + 12\sqrt{145}}{5}\right]$. в) $[0;\ 2\pi)$.

XI.118. а) $2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. в) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{28}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{28}\right)\right)$.

XI.120. Луч $\arg c = \frac{\pi}{4}$.

XI.121. а) **Решение.** $(\sqrt{3} - i)^{2008} = 2^{2008}\left(\cos 2008\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin 2008\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{2008}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

XI.122. б) **Решение.** Решение аналогично решению примера 37 из § 68. По формуле Муавра

$$\cos 12\alpha + i\sin 12\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{12} =$$
$$= \cos^{12}\alpha + C_{12}^1\cos^{11}\alpha\cdot i\sin\alpha + C_{12}^2\cos^{10}\alpha(i\sin\alpha)^2 +$$
$$+ C_{12}^3\cos^9\alpha(i\sin\alpha)^3 + C_{12}^4\cos^8\alpha(i\sin\alpha)^4 + \ldots,$$

$\cos 12\alpha = \cos^{12}\alpha - C_{12}^2\cos^{10}\alpha\sin^2\alpha + C_{12}^4\cos^8\alpha\sin^4\alpha - C_{12}^6\cos^6\alpha\sin^6\alpha + C_{12}^8\cos^4\alpha\sin^8\alpha - C_{12}^{10}\cos^2\alpha\sin^{10}\alpha + \sin^{12}\alpha$.

XI.123. **Решение.** Запишем уравнение $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ в виде $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 2\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \Leftrightarrow z = \cos\theta \pm i\sin\theta$. Тогда $z^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta \Leftrightarrow \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\cos n\theta \pm i\sin n\theta} =$

$= \cos n\theta \mp i\sin n\theta$. Сложив последние два равенства, получим $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

XI.124. Решение.

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \left(\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}\right)^n = \frac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} = \frac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}$$

(перед последним равенством числитель и знаменатель разделили на $\cos n\alpha$).

XI.125. а) $a = -1$; $\left\{\pm i; \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. **Решение.** $u = \left(\sin\dfrac{\pi}{12} -\right.$

$\left. - i\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^6 = \left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)^6 = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right) = -i.$

Так как $u = -i$ корень, то $(-i)^4 - (-i)^3 + (a^2 - 3)(-i)^2 - ai - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Тогда уравнение примет вид $z^4 - z^3 - 2z^2 - z - 3 = 0$. Поделив по схеме Горнера на $z + i$, получим $(z + i)(z^3 - (1 + i)z^2 + (i - 3)z + 3i) = 0$. А так как i тоже корень уравнения, то

$$(z+i)(z-i)(z^2 - z - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i, \\ z = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Замечание. Можно было увидеть, что $z^4 - z^3 - 2z^2 - z - 3 = z^4 - z^3 - 3z^2 + z^2 - z - 3 = (z^2 - z - 3)(z^2 + 1)$.

в) $a = 1$; $\{1 \pm i; 2\}$.

XI.126. а) $4 \pm 3i$. *Указание.* По условию z удовлетворяет уравнению $z^2 - z + 1 = 0$, т. е. $z^3 = -1$, так как $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$. Поскольку $z^{239} = (z^3)^{79} \cdot z^2 = -z^2$, то нужно вычислить z^2.

XI.127. Решение. Пусть $\cos 1^\circ = \dfrac{p}{q}$, где p и q целые положительные числа. Тогда $\cos 45^\circ = \cos(45 \cdot 1^\circ)$ можно было представить в виде многочлена с целыми коэффициентами от $\cos 1^\circ$ (см. задачу XI.122), т. е. число $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ оказалось бы рациональным числом, что не так.

XI.128. $n \in N$. **Решение.** Докажем, что условие задачи выполняется для любого натурального n. Положим, $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$. Но $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ и $f(i) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 0$ на основании формулы Муавра. Аналогично убеждаемся, что $f(-i) = 0$, и наше предположение доказано.

XI.129. *Указание.* Частный случай задачи XI.130 при $\lambda = 1$. Эту задачу уместно дать как подготовительную к решению задачи XI.130.

XI.130. **Решение.** Разложим многочлен $x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2$ на множители, линейные относительно x. Для этого найдём корни квадратного уравнения:

$$x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda\cos\alpha \pm \sqrt{\lambda^2\cos^2\alpha - \lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda(\cos\alpha \pm i\sin\alpha).$$

Обозначим $f(x) = x^n\sin\alpha - \lambda^{n-1}x\sin n\alpha + \lambda^n\sin(n-1)\alpha$. Осталось показать, что $f(\lambda(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)) = 0$. А это легко проверить с помощью формулы Муавра, как в задаче XI.128.

XI.131. $n \neq 3k$, $k \in \mathbf{Z}$. **Решение.** Поскольку $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, то корнями многочлена $x^2 + x + 1$ являются числа $\varepsilon \neq 1$, такие, что $\varepsilon^3 = 1$. Для того чтобы доказать, что $p(x) = x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$, достаточно убедиться, что если $\varepsilon^3 = 1$ и $\varepsilon \neq 1$, то $p(\varepsilon) = 0$.

Если $n = 3k + 1$, то $\varepsilon^{2n} + \varepsilon^n + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Аналогично рассматривается случай $n = 3k + 2$. Конечно, здесь мы использовали тот факт, что корни квадратного трёхчлена не являются кратными.

XI.132. **Решение.** Пусть $u = \cos x + i\sin x$, $v = \cos y + i\sin y$, $w = \cos z + i\sin z$. Данные равенства равносильны тому, что $u + v + w = 0$. Сложение комплексных чисел — это сложение векторов, поэтому векторы u, v и w образуют треугольник. Поскольку все они являются единичными, то этот треугольник равносторонний, откуда и следует, что углы между соответствующими векторами равны $\pm\frac{2\pi}{3}$. А тогда, например, если $y = x \pm \frac{2\pi}{3}$, то $\sin 3x = \sin 3y$.

§ 69. Корень *n*-й степени из комплексного числа

Определение корня в начале параграфа является напоминанием и ещё раз подчёркивает логическую возможность существования нескольких корней данной степени из данного комплексного числа. Как мы увидим далее, положение с корнями в множестве комплексных чисел совершенно иное, чем в множестве действительных чисел: для любого комплексного числа, отличного от нуля, существует ровно n корней степени n.

Особый интерес с геометрической точки зрения представляют корни из 1.

Кроме указанных в учебнике свойств этих корней, можно добавить и то, что всякий корень степени n из 1 является степенью первого корня; более точно: $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Это немедленно следует из формулы Муавра. Кроме того, интересен и тот факт, что сумма всех корней степени n из 1 равна нулю. Далее в § 70 это не раз пригодится, и всё-таки уделить этому внимание полезно при изучении именно этого параграфа (задачи XI.139, XI.148, XI.160).

При изучении арифметических действий с корнями степени n следует особо подчеркнуть новый взгляд на равенство $\sqrt[n]{z_1}\cdot\sqrt[n]{z_2}=\sqrt[n]{z_1 z_2}$ (привычное в поле $\boldsymbol{R}$) как на равенство двух множеств! Кроме того, корень степени n впервые для учащихся представляет многозначную (или, как говорят в теории функций комплексной переменной, многолистную) функцию, т. е. отображение, значениями которого являются некоторые множества.

Решения и указания к задачам

XI.133. а) $\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k=0,\ 1,\ 2$. в) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+$ $+\,i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0,\ 1,\ 2$.

XI.135. 0. **Решение.** Заметим, что $z^4=1-i\sqrt{3}=$ $=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Тогда $w_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+\right.$ $\left.+\,i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$. Ясно, что $\sum\limits_{k=0}^{3}w_k=0$, так как w_k есть не что иное, как вершины квадрата на комплексной плоскости. Следовательно, есть две пары противоположных векторов, сумма которых равна 0.

XI.136. а) $3+\sqrt{3}i,\ -3-\sqrt{3}i,\ \sqrt{3}+3i,\ -\sqrt{3}-3i$. **Решение.** $(\overline{z})^4=(3-i\sqrt{3})^4\Leftrightarrow z^4=(3+i\sqrt{3})^4\Leftrightarrow(z-3-i\sqrt{3})(z+3+$

$$+\,i\sqrt{3})(z^2+(3+i\sqrt{3})^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3+\sqrt{3}i,\\ z=-3-\sqrt{3}i,\\ z=-6+6\sqrt{3}i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3+\sqrt{3}i,\\ z=-3-\sqrt{3}i,\\ z=\sqrt{3}+3i,\\ z=-\sqrt{3}-3i.\end{array}\right.$$

XI.137. а) Если $u=1$, то n; если $u\neq 1$, то 0. **Решение.** Для этого докажем, что всякий корень степени n из 1 является степенью первого корня; более точно: $u_k=u_1^k$. Это равенство немедленно следует из формулы Муавра: $u_1^k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$. Тогда $u_0+u_1+u_2+$ $+\ldots+u_{n-1}=1+u_1+u_1^2+\ldots+u_1^{n-1}=\frac{u_1^n-1}{u_1-1}=0$, так как

$u_1^n = 1$, т. е. попутно доказали, что сумма всех корней из степени n из 1 равна 0.

б) Если $u = 1$, то $\frac{n(n+1)}{2}$, если $u \neq 1$, то $\frac{n}{u-1}$. **Решение.** Пусть $s = 1 + 2u + 3u^2 + \ldots + nu^{n-1}$. Умножим обе части равенства на $1 - u$. Получим $(1 - u)s = 1 + 2u + 3u^2 + \ldots + nu^{n-1} - u - 2u^2 - 3u^3 - \ldots - nu^n$; $(1 - u)s = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1} - nu^n$. Из задачи XI.137 а) следует $1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1} = 0$ и $u^n = 1$. Тогда $s = \frac{n}{u-1}$.

XI.138. -1 при n чётном, 1 при n нечётном. **Решение.** $u_0 \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_{n-1} = 1 \cdot u_1 \cdot u_1^2 \cdot \ldots u_1^{n-1} = u_1^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Так как $u_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, то $u_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) = \cos(\pi n - \pi) + i\sin(\pi n - \pi) = \cos\pi(n-1)$, а

$$\cos\pi(n-1) = \begin{cases} -1, \text{ если } n \text{ чётное,} \\ 1, \text{ если } n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

XI.139. $\frac{1}{2}$. **Решение.** Рассмотрим уравнение $x^{2n+1} + 1 = 0$, корнями которого являются числа -1, $\varepsilon_k = \cos\frac{\pi k}{2n+1} + i\sin\frac{\pi k}{2n+1}$, и $\bar{\varepsilon}_k = \cos\frac{\pi}{2k+1} - i\sin\frac{\pi}{2k+1}$, $k = 1, 3, 5, \ldots, 2k - 1$.

Эти числа являются вершинами правильного $2n+1$-угольника (рис. 11.20). Тогда их сумма равна нулю. Поэтому

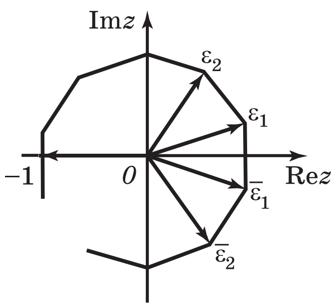


Рис. 11.20

$$-1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} + i\sin\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + i\sin\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots +$$
$$+ \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} - i\sin\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} -$$
$$- i\sin\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} - i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = 0,$$

откуда и получим $\cos\frac{\pi}{2k+1} + \cos\frac{3\pi}{2k+1} + \ldots + \cos\frac{(2k-1)\pi}{2k+1} = \frac{1}{2}$.

XI.140. а) **Решение.** Из равенства комплексных чисел $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ следует равенство их модулей, а поэтому $|(z - 1)^n| = |(z + 1)^n| \Leftrightarrow |z - 1|^n = |z + 1|^n$, или $|z + 1| = |z - 1|$.

А это множество точек, равноудалённых от точек -1 и 1, которое и есть прямая — ось Oy. Значит, все корни данного уравнения расположены на одной прямой.

б) **Решение.** Аналогично решению задачи XI.140 а) получим равенство модулей комплексных чисел $|2z - 2| = |z + 1|$. Можно доказать, что на комплексной плоскости равенством $|z - a| = k|z - b|$ при $k \neq 1$ задаётся окружность — окружность Аполлония: $2|z-1| = |z+1| \Leftrightarrow \dfrac{|z+1|}{|z-1|} = 2$, т. е. множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек равно данному числу.

Аналитически можно доказать это следующим образом: пусть $z = x + yi$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $4((x-1)^2 + y^2) = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3y^2 = -4 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{13}{9}$, а это и есть уравнение окружности.

§ 70. Применения комплексных чисел

В параграфе и задачном материале к нему содержится практически основной спектр идей применения комплексных чисел. Это и доказательство равенств, формул, и геометрические преобразования (вплоть до упоминания функции Жуковского), и делимость многочленов, и геометрические задачи на доказательство. Особый интерес вызывают так называемые сюжетные задачи (XI.148—XI.150, XI.156—XI.165), в которых результат одного из пунктов задачи можно смело применять в других пунктах или частный случай общего результата содержится в начале, а сам результат (обобщённый) рассматривается в последнем пункте.

С методической точки зрения такие задачи весьма полезны. Главный аргумент в пользу изучения комплексных чисел состоит в том, что с их помощью можно решать задачи, которые трудно решать иными средствами, т. е оставаясь в рамках теории действительных чисел.

Решения и указания к задачам

XI.141. а) Окружность $x^2 + (y+1)^2 = 1$. **Решение.** Множество $|z - i| = 1$ есть окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$ на плоскости xOy. Отображение φ задаёт симметрию относительно оси Ox. б) Окружность $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. **Решение.** Отображение φ задаёт параллельный перенос на вектор $\vec{s}(1;\ 1)$. в) Окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Решение. Отображение φ задаёт поворот на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат.

г) Окружность $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$. **Решение.** Отображение φ задаёт композицию гомотетии с коэффициентом $|1 + i| = \sqrt{2}$ с центром в начале координат и поворота на угол $\alpha = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ вокруг начала координат.

XI.142. 1. **Решение.** Пусть $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$. $|ai - b + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - b)^2 + a^2 = \frac{1}{4}$, т. е. множество M_1 — окружность с центром в точке $O_1(0; \sqrt{2})$, радиус которой равен $\frac{1}{2}$ (рис. 11.22). Множество M_2 — это окружность M_1, полученная поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат, т. е. $O_2(-\sqrt{2}; 0)$ — её центр. Очевидно, что окружности не имеют общих точек. Поэтому ближайшими их точками являются точки A и B, расположенные на линии центров O_1O_2. Итак,

$$AB = O_1O_2 - (O_1B + O_2A) = \\ = 2 - 2 \cdot 0{,}5 = 1.$$

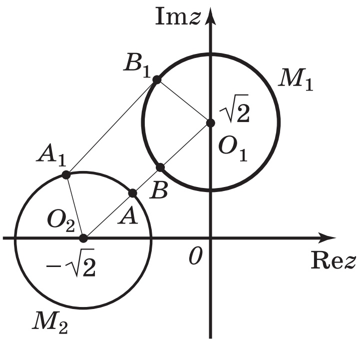


Рис. 11.22

XI.143. Окружность $x^2 + y^2 = 4$. **Решение.** Пусть $z = x + yi$, x, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда отображение $\varphi(z) = z - i$ комплексной плоскости есть параллельный перенос на вектор $\vec{s}(0; -1)$, т. е. в результате этого отображения мы получим окружность M_1: $x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим преобразование $\varphi_1(z) = \frac{1}{z}$, $z \in M_1$. Так как $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \bar{z}$ и $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1$, то преобразование $\varphi_2(z) = \bar{z}$ переводит множество M само в себя. Поэтому осталось только проделать преобразование $\varphi_3(z) = 2z$. А это гомотетия с центром в точке $O(0; 0)$ и коэффициентом, равным 2.

XI.144. Полуокружность ACB с центром в точке $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{2}$ (рис. 11.23). **Решение.** Способ 1. Так как $\frac{1 - 3i}{1 + 2i} = \frac{-5 - 5i}{5} = -1 - i$ и $\bar{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то

$$w = -\bar{z}(1 + i) = -(\cos\varphi - i\sin\varphi)(1 + i) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \varphi\right)\right).$$

По условию $-\pi \leqslant -\varphi \leqslant 0$, откуда находим $\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{4} - \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}$. Таким образом, модуль комплексного числа w равен $\sqrt{2}$, а $\alpha = \frac{5\pi}{4} - \varphi = \arg w$. Иными словами, комплексное число w лежит на полуокружности комплексной плоскости с центром в точке (0; 0) радиуса $\sqrt{2}$ (полуокружность находится над биссектрисой 1 и 3 координатных углов).

Способ 2. Из условия следует, что M — полуокружность с центром в точке (0; 0) радиуса 1, расположенная над осью абсцисс. Обозначим через $\overline{M}$ множество точек $z_1 = \overline{z}$, где $z \in M$. Тогда $\overline{M}$ — полуокружность с центром в точке (0; 0) радиуса 1, расположенная под осью абсцисс. Фактически каждое число w получается из некоторого числа $z_1 \in \overline{M}$ умножением на комплексное число $-(1 + i)$, имеющее модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $-\frac{3\pi}{4}$. Иначе говоря, длина вектора, соответствующего числу $z_1 = \overline{z}$, увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а сам вектор поворачивается на угол $\frac{3\pi}{4}$ по часовой стрелке. В результате ответ тот же.

XI.145. Четверть окружности с центром в точке (0; 0) и радиусом $\sqrt{2}$ (рис. 11.24).

XI.146. См. задачу XI.141 г). *Указание.* Решение аналогично решению задачи XI.144.

XI.147. $a \geqslant 1$; $a \leqslant -1$. **Решение.** Множество точек, удовлетворяющих уравнению $|z - 1| = |z - a - (a + 1)i|$, есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках (1; 0) и $(a;\ a + 1)$.

Тогда неравенство $|z - 1| \geqslant |z - a - (a + 1)i|$ задаёт полуплоскость, границей которой является этот серединный

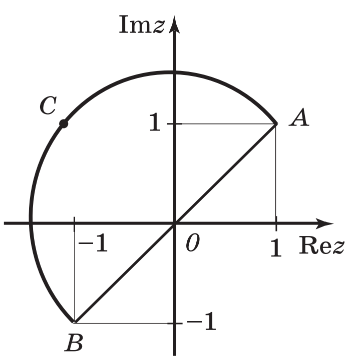


Рис. 11.23

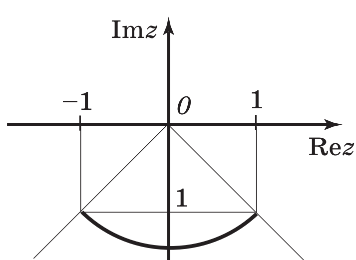


Рис. 11.24

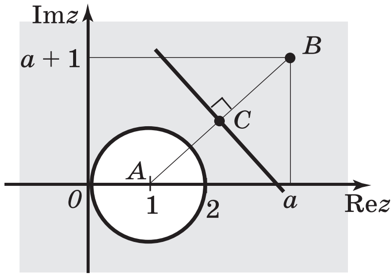


Рис. 11.25

перпендикуляр, а именно: множество точек, расстояние от которых до точки (a; $a + 1$) меньше, чем до точки (1; 0).

Множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z - 1| \geqslant 1$, есть внешняя область круга со своей границей радиуса 1 с центром в точке (1; 0). Условие задачи означает, что внешняя область круга должна содержать данную полуплоскость (рис. 11.25). А это означает, что середина отрезка AB — точка C должна удовлетворять условию $AC \geqslant R = 1$. $AC = \sqrt{\left(1 - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{2}\right)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 1, \\ a \leqslant -1. \end{array}\right.$

XI.148. а) **Решение.** Не умаляя общности, рассмотрим правильный пятиугольник $A_0A_1A_2A_3A_4$, вписанный в окружность радиуса 1 с центром в точке $O(0; 0)$.

Расположим точки A_k, $k \in \boldsymbol{Z}$ так, чтобы точка A_0 попала на ось абсцисс. Пусть z_k, $k \in \boldsymbol{Z}$ — комплексные числа, соответствующие точкам A_k, $k \in \boldsymbol{Z}$ единичной окружности, таким образом, $z_0 = 1$ и $z_k = z_1^k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а $z_1^5 = 1$. Тогда $1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = \frac{1 - z_1^5}{1 - z_1} = 0$ (см. задачу XI.137).

б) 0. **Решение.** Докажем, что $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$ или $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$. Пусть $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Из формулы Муавра следует, что все корни 5-й степени из единицы являются степенями числа z_1. Тогда утверждение о том, что сумма всех корней 5-й степени из единицы равна 0 (см. рассуждение в § 69 учебника), записывается в виде $1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = 0$. Далее, $\overline{z}_1^2 = z_1^3$ и $\overline{z}_1 = z_1^4$, откуда следует, что $1 + z_1 + \overline{z}_1 + z_1^2 + \overline{z}_1^2 = 0$. Осталось заметить, что $z_1 + \overline{z}_1 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ и $z_1^2 + \overline{z}_1^2 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. Доказанное в задаче XI.148 а) тождество имеет следующую тригонометрическую форму: $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$ (рис. 11.26). Тогда если $z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $z_4=\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$, то $z_1+z_4=2\cos\frac{2\pi}{5}$. Аналогично получим $z_2+z_3=2\cos\frac{4\pi}{5}$, а по доказанному в задаче XI.148 а) $1+z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

Замечание. Здесь было бы уместно вспомнить «тригонометрическое доказательство» (см. пример 31 из § 35 учебника для 10 класса).

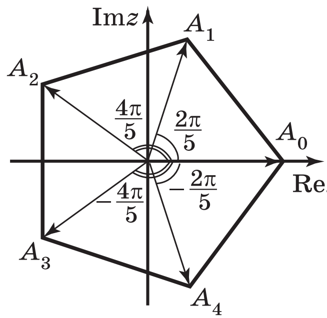


Рис. 11.26

в) **Решение.** Из задачи XI.148 а) следует, что если $z_1^5=1$, $z_1\neq 1$, то $1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4=0$, следовательно, $1+z_1^4+z_1^8+z_1^{12}+z_1^{16}=1+z_1^4+z_1^3+z_1^2+z_1=0$. Таким образом, всякий корень второго многочлена является корнем первого, а значит,

$$(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)\ \vdots\ (x^4+x^3+x^2+x+1).$$

XI.150. а) **Решение.** Обозначим через $M(z)$ точку плоскости, соответствующую комплексному числу z. Рассмотрим точки $A_i(z_i)$, где $i=1, 2, 3$. Докажем, что точки $B_i(z_i^{-1})$ лежат на одной прямой. Действительно, $\frac{1}{z_3}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{2}$, поэтому точка B_3 — середина отрезка B_1B_2.

б) **Решение.** Пусть $z_1=a+bi$. Тогда $z_2=a-bi$ (по условию $a\neq 0$, $b\neq 0$), $z_3=\frac{a^2+b^2}{a}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA_1}(a;\ b)$; $\overrightarrow{A_1A_3}\left(\frac{b^2}{a};\ -b\right)$. Тогда $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=0$, т. е. $\overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{A_1A_3}$, значит, $\angle OA_1A_3=90^\circ$, что и требовалось доказать.

в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Решение.** Пусть $z_1=a+bi$. Треугольник OA_1A_3 прямоугольный. Поэтому $S(\triangle OA_1A_3)=\frac{1}{2}|b|\frac{a^2+b^2}{|a|}$. Так как $z_2=\overline{z_1}$, то треугольник OA_1A_3 равнобедренный и

$S(\triangle OA_1A_3) = |ab|$. $\dfrac{S(\triangle OA_1A_3)}{S(\triangle OA_1A_2)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right)$. Таким образом, отношение площадей будет наибольшим тогда, когда будет наибольшим отношение $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\operatorname{tg}(\arg z_1)\right|$. Так как $|z_1 - 2| \leqslant 1$ есть круг с центром в точке (2; 0) радиуса 1, то наибольшее значение выражения $|\operatorname{tg}(\arg z_1)|$ достигается, если z_1 лежит на касательной, проведённой из точки O к окружности, задаваемой уравнением $|z_1 - 2| = 1$ (рис. 11.27). Из геометрических соображений $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

г) **Решение.** Пусть данные точки не лежат на одной прямой. Тогда если точки O, A_1, A_2, A_3 лежат на одной окружности, то четырёхугольник $OA_1A_3A_2$ вписанный. Заметим, что $\angle A_1OA_2 = \angle 1 + \angle 2$; $\angle A_1A_3A_2 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$, т. е. $\angle A_1OA_2 + \angle A_1A_3A_2 = 180^\circ$. Значит, если удастся доказать, что отрезок A_2A_3 виден из точек O и A_1 под равными углами, а отрезок A_1A_3 из точек O и A_2 под равными углами, то это означает, что четырёхугольник $OA_1A_3A_2$ — вписанный (рис. 11.28).

Покажем первое (второе аналогично).

Для этого достаточно доказать, что $\arg z_3 - \arg z_2 = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$, т. е. что $\arg\dfrac{z_3}{z_2} = \arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Ясно, что если $z_2 = 0$ или $z_2 = z_1$, то все данные точки лежат на одной прямой. Но

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_2(z_3 - z_1)}{z_3(z_2 - z_1)} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} \cdot \frac{\dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} - z_1}{\dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}} = \frac{z_2(z_1z_2 - z_1^2)}{2(z_2 - z_1)z_1z_2} = \frac{1}{2}.$$

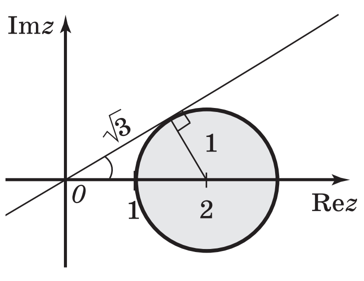


Рис. 11.27

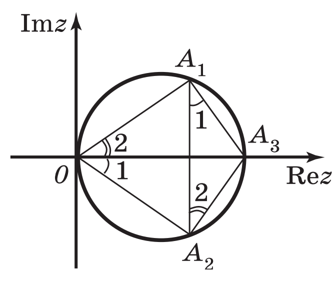


Рис. 11.28

Получили, что отношение двух комплексных чисел $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{OW_1}$ и $\overrightarrow{OW_2}$ коллинеарны, где W_1, W_2 — точки комплексной плоскости, изображающие числа w_1 и w_2 (здесь мы учли случай, что точки могут лежать на одной прямой). Значит, $\arg w_1 = \arg w_2$ и $\arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg\frac{z_3}{z_2}$, что и требовалось доказать.

XI.150. а) **Решение.** $p_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 0$, если $x^{n+1} = 1$, $x \neq 1$. Это возможно, только если $n + 1$ — чётное число и $x = \sqrt[n+1]{1} \neq 1$. Тогда n — нечётно.

б) **Решение.** Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ корни многочлена p_n, то $p_n(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$. Значит, $(1 - z_1) \times (1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (1 - z_n) = p_n(1)$, но $p_n(1) = n + 1$, следовательно, $(1 - z_1)(1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (1 - z_n) = n + 1$.

XI.151. *Указание.* См. задачу XI.149 г).

XI.152. $a = 0$, $b \in \boldsymbol{R}$. **Решение.** Во втором издании учебника треугольник дан равносторонний. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни многочлена, тогда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Так как по условию корни многочлена лежат в вершинах равностороннего треугольника, то числа z_1, z_2, z_3 являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они также и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое, тем самым, будет иметь по крайней мере три различных корня, что возможно только при $a = 0$.

XI.153. *Указание.* В примере 43 из § 70 учебника указан общий путь к решению таких задач.

Решение. Докажем сначала тождество

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1\right).$$

Корнями многочлена $x^{2n+1} - 1$ являются корни степени $2n + 1$ из 1, т. е. числа 1, $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{2n+1}$ и числа $\overline{\varepsilon}_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{2n}((x - \varepsilon_k)(x - \overline{\varepsilon}_k))$. Искомое равенство следует из того, что $(x - \varepsilon_k)(x - \overline{\varepsilon}_k) = x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1$.

Теперь подставим в это равенство $x = -1$ и, воспользовавшись тем, что $2 + 2\cos\alpha = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$, а затем извлекая квадратный корень из обеих частей, получим требуемое.

XI.154. Р е ш е н и е. Докажем сначала следующее утверждение. Пусть u, v и w — различные комплексные числа, $\varepsilon \neq 1$ — кубический корень из 1. Треугольник с вершинами в точках u, v и w является равносторонним тогда и только тогда, когда $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0$.

Доказательство. Так как $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = u + \varepsilon v - (1 + \varepsilon) \times \times w = \varepsilon(v - w) - (w - u)$, то $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(v - w) = w - u$, т. е. когда одна из сторон треугольника получается из другой поворотом на угол $\frac{2\pi}{3}$, что имеет место тогда и только тогда, когда треугольник является равносторонним.

Перейдём к доказательству утверждения задачи.

Обозначим через a, b и c комплексные числа, в которых расположены вершины данного треугольника. В силу вышеприведённого утверждения третьи вершины равносторонних треугольников, построенные на сторонах данного, расположены соответственно в точках $(-\varepsilon a - \varepsilon^2 b)$, $(-\varepsilon b - \varepsilon^2 c)$ и $(-\varepsilon c - \varepsilon^2 a)$, где $\varepsilon \neq 1$ — кубический корень из 1. Следовательно, центрами этих треугольников являются точки $u = \frac{1}{3}(a + b - \varepsilon a - \varepsilon^2 b)$, $v = \frac{1}{3}(b + c - \varepsilon b - \varepsilon^2 c)$ и $w = \frac{1}{3}(c + a - \varepsilon c - \varepsilon^2 c)$. Прямое вычисление показывает, что $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0$. И тогда согласно утверждению точки u, v и w являются вершинами равностороннего треугольника.

XI.155. Р е ш е н и е. Способ 1. Докажем сначала, что если $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$, то треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 содержит начало координат.

Если $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$, то $\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_3} = 0$, т. е. $\frac{z_1}{|z_1|^2} + \frac{z_2}{|z_2|^2} + \frac{z_3}{|z_3|^2} = 0$. Это равенство можно записать в виде $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Таким образом, начало координат принадлежит треугольнику с вершинами в точках z_1, z_2, z_3.

Если z_0 — корень уравнения $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$, $a_i = z_0 - z_i$, то $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 0$. В силу вышеприведённого утверждения начало координат лежит внутри треугольника с вершинами a_1, a_2 и a_3, следовательно, z_0 находится внутри треугольника с вершинами z_1, z_2, z_3.

Способ 2. Докажем сначала утверждение. Пусть z_1, z_2, z_3 — отличные от нуля комплексные числа, лежащие в полуплоскости $\alpha < \arg z < \alpha + \pi$. Тогда $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \neq 0$. Это становится ясно после выяснения того, что все числа z_i^{-1} лежат в полуплоскости $\pi - \alpha < \arg z < 2\pi - \alpha$. Если точка z лежит вне треугольника $z_1z_2z_3$, то векторы $z - z_1$, $z - z_2$, $z - z_3$ расположены в одной полуплоскости относительно некоторой прямой, проведённой через z, а значит, сумма этих векторов ненулевая.

XI.156. а) 1. *Указание*. Искомое расстояние равно длине отрезка AK (рис. 11.29).

б) **Решение.** Так как $|z_2| = |z_3| = 1$, то

$$|z - z_1| = |zz_2 - z_1z_2| \text{ и } |z - z_2| = |zz_3 - z_2z_3|,$$

поэтому искомое множество — серединный перпендикуляр к отрезку AB, т. е. прямая CD (см. рис. 11.29).

в) Отрезок B_1C_1 (рис. 11.30), где $B_1(z_2z_3)$, $C_1(z_3^2)$.

Решение. Поскольку $z_2 = -z_3$ — точки единичной окружности с центром в начале координат, то геометрически умножение на z_2 и z_3 — это повороты на углы $\arg z_2$ и $\arg z_3 = \arg z_2 + \pi$. Так как отрезок BC симметричен относительно нуля, то образы U и V при этих поворотах совпадают.

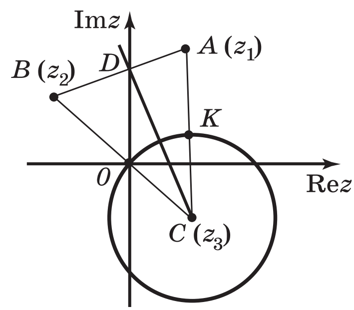


Рис. 11.29

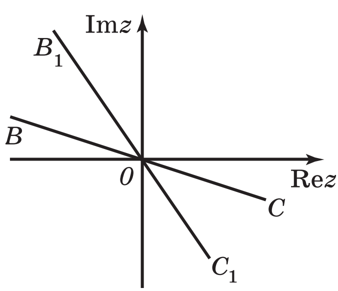


Рис. 11.30

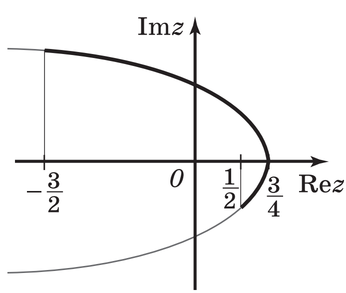


Рис. 11.31

г) Дуга параболы $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}y^2$ между точками с координатами $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Если z — точка отрезка AC, то $z=it+\frac{\sqrt{3}}{2}$, где $t\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, откуда $w=\left(it+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}-t^2+it\sqrt{3}$. Следовательно, образ отрезка AC — множество точек $w = x + yi$, где $x=\frac{3}{4}-t^2$, $y=t\sqrt{3}$. Значит, $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}y^2$, причём $y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, т. е. искомый образ — дуга параболы $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}y^2$ между точками с координатами $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (рис. 11.31).

XI.157. а) **Решение.** Найдём $OA^2 = (2z + 1)(2\overline{z} + 1) = 4|z|^2 + 2(z + \overline{z}) + 1 = 2(z + \overline{z}) + 5$ и $OB^2 = (z + 2)(\overline{z} + 2) = |z|^2 + 2(z + \overline{z}) + 4 = 2(z + \overline{z}) + 5$. Тогда $OA = OB$.

б) **Решение.** Сделав параллельный перенос, переводящий вершину A треугольника в точку O, получим $\triangle OB_1C_1$, где точкам B_1 и C_1 соответствуют комплексные числа $z + 2 - (2z + 1) = 1 - z$ и $z^2 + 2z - (2z + 1) = z^2 - 1 = -(1 - z)(1 + z)$ соответственно. Следовательно, умножение на $1 - z$ переводит треугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$ и $-(z + 1)$ в подобный ему $\triangle OB_1C_1 = \triangle ABC$. Коэффициент подобия $\lambda=|z - 1|$.

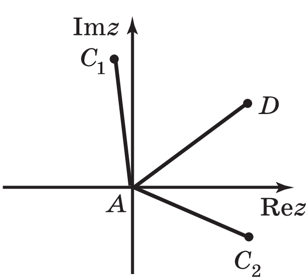


Рис. 11.31

в) $(1; 3)$. **Решение.** Если $|z| = 1$, то $OC = OB$, значит (см. задачу XI.157 а), точка O — центр описанной около данного треугольника окружности радиуса $R = |z + 2|$. При $z = \pm1$ треугольник вырождается, при остальных значениях z, $|z| = 1$ получаем, что $R \in (1; 3)$.

г) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. **Решение.** Площадь треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$ и $-(z + 1)$ равна

$\frac{1}{2}|\mathrm{Im}z|$, поэтому для площади S подобного ему $\triangle ABC$ (см. задачу XI.157 б)) получаем формулу

$$S = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}z||z-1|^2 = \frac{1}{2}|\sin\varphi|((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi) = |\sin\varphi|(1-\cos\varphi)$$

где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi \in [0;\ 2\pi]$. Тогда

$$S(\varphi) = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi,\ S'(\varphi) = \cos\varphi - \cos 2\varphi = 2\sin\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$

и $S'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = \frac{4\pi}{3},\\ \varphi = \frac{2\pi}{3},\\ \varphi = 0.\end{array}\right.$ Значение $S\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ является наибольшим.

XI.158. в) $E(1;\ 0)$, треугольник произвольный. **Решение.** Если z_1, z_2, z_3 — вершины лежащего на окружности S равностороннего треугольника, то $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{3}|z - z_i|^2 = 3|z|^2 + 3$ (см. задачу XI.158 а)), и $\max|z|$ при $z \in D$ реализуется в точке $z = 1$.

г) Да. **Решение.** Множество точек, указанного в задаче вида, как следует из рассуждений в задаче XI.158 б), является кругом с диаметром $[z_k;\ z_j]$. Три круга, построенные на отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, накрывают этот треугольник хотя бы потому, что он тупоугольный.

XI.159. а) $\frac{1 \mp \sqrt{3} + (1 \pm \sqrt{3})i}{2}$. **Решение.** Способ 1. Пусть $w = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{R}$. Тогда $|AB| = |BC| = |AC|$, но $|AB| = 2$, поэтому

$$\begin{cases}a^2 + b^2 = 2,\\ (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b = 2,\\ a^2 + b^2 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\\ b = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}a = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\\ b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Способ 2. Можно было рассуждать и так. Для того чтобы получить третью вершину равностороннего треугольника ABC, можно повернуть вершину B (рис. 11.31) на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат (первой вершины $\triangle ABC$). Исходя из геометрического смысла умножения комплексных чисел для этого достаточно умножить v на число $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

б) **Решение.** $4i - 3 = (1 + 2i)^2$. Тогда $z^2 = (1 + 2i)z + 3 - 4i \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+2i}\right)^2 - \frac{z}{1+2i} + 1 = 0 \Leftrightarrow z = (1+2i)\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = v \cdot \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

В силу задачи XI.159 а) треугольник ABC — равносторонний.

в) **Решение.** Предположим, что могут. Но тогда рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$, для которого $v - u$ с вершинами $A_1(0)$, $B_1(v - u)$, $C_1(w - u)$. Он, очевидно, равносторонний, действительные и мнимые части чисел $v - u$ и $w - u$ рациональны. Но либо точка C из точки B, либо точка B из точки C получены поворотом на $\frac{\pi}{3}$ относительно точки $O(A_1)$, т. е. $\left[\begin{aligned} & w - u = (v - u)\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \\ & w - u = (v - u)\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \frac{w-u}{v-u} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \\ & \frac{w-u}{v-u} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \end{aligned}\right.$

т. е. если $\begin{cases} u = x_1 + y_1 i, \\ v = x_2 + y_2 i, \\ w = x_3 + y_3 i, \end{cases}$ то $\left[\begin{aligned} & \frac{(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)i}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \\ & \frac{(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)i}{(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}\right.$

Но поскольку все числа в скобках рациональные, очевидно, получаем противоречие, так как $\sqrt{3} \notin \boldsymbol{Q}$.

г) **Решение.** $u^2 + v^2 + w^2 = uv + vw + wu \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 2uv + 2vw + 2wu \Leftrightarrow (u - w)^2 + (v - u)^2 + (w - u)^2 = 0$. Пусть $\begin{cases} u - v = a, \\ v - w = b, \\ w - u = c. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 0. \end{cases}$

Следовательно,

$$2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Итак, $\begin{cases} a + b + c = 0, \\ ab + bc + ca = 0. \end{cases}$ По теореме Виета для многочлена третьей степени получаем, что a, b, c — корни уравнения вида $z^3 = k$, и поэтому $|a| = |b| = |c|$, т. е. $|u - v| = |v - w| = |w - u|$. Следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний.

XI.160. а) Равносторонний. **Решение.** $\varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$. Так как $\varepsilon \neq 1$, то

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0. \qquad (*)$$

$\arg\varepsilon = \pm\frac{2\pi}{3}$, так как $\varepsilon = \sqrt[3]{1} \neq 1$. Если $a = 0$ и $u = 0$, то $b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$. Тогда $b = c(-\varepsilon)$. Следовательно, точка B получена из точки C поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат, совпадающего с вершиной A этого треугольника. Поэтому он равносторонний.

б) **Решение.** Пусть произведён параллельный перенос на вектор, определяемый комплексным числом z. Тогда

$$u' = a + z + (b + z)\varepsilon + (c + z)\varepsilon^2 = u + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)z = u,$$

так как $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Постоянство числа v проверяется аналогично.

в) **Решение.** В силу задачи XI.160 б) мы вправе считать, что точка A совпадает с началом координат.

Если $\triangle ABC$ равносторонний, то точка B получается из точки C поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ в одном из двух направлений, значит, одно из чисел b или c получается из другого умножением на $-\varepsilon$, поэтому либо $b = c(-\varepsilon)$, либо $c = b(-\varepsilon)$, т. е. $b + \varepsilon c = 0 \Leftrightarrow b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ и $a = 0$, следовательно, $u = 0$, а значит, $uv = 0$. Аналогично рассматривается другой случай.

Теперь пусть $uv = 0$. Не умаляя общности, пусть $\begin{cases} u = 0, \\ a = 0. \end{cases}$ Тогда из задачи XI.160 а) получим $b = c(-\varepsilon)$, а значит, $\triangle ABC$ равносторонний.

г) Круг радиусом 3 с центром в начале координат. **Решение.** В силу задачи XI.160 б) мы вправе предположить, что единичный круг имеет начало координат своим центром. Следовательно, $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, $|c| \leqslant 1$. Тогда $|u| \leqslant 1$.

Обратно, если положить $b = \varepsilon^2 a$, $c = \varepsilon a$, где $|a| \leqslant 1$, то $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 3a$, поэтому любое комплексное число u, $|u| \leqslant 3$ является значением суммы ($a = 1$, $|u| = 1$) $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ для некоторой тройки чисел $|a|$, $|b|$, $|c|$, модуль каждого из которых не превосходит 1.

XI.161. а) -1; $-i$; $1 + i$. б) $b = 0$, a — любое. **Решение.** По условию $z_1 + z_2 = 2z_3$. В силу формул Виета $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, поэтому $z_3 = 0$, значит, $b = 0$.

в) $a = 0$, $b \neq 0$. **Решение.** Способ 1. Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то центр треугольника совпадает с началом координат, поэтому $z_i = c\left(\cos\frac{2\pi i}{3} + i\sin\frac{2\pi i}{3}\right)$. Прямая проверка показывает, что $a = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 0$.

Способ 2. Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, следует, что они являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они также и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое, тем самым, имеет по крайней мере три различных корня. Значит, $a = 0$.

г) **Решение.** Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда $|p(z)|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 + (a_1\cos2\varphi + a_2\sin2\varphi) + (b_1\cos3\varphi + b_2\sin3\varphi) + (a\overline{b}z + \overline{a}b\overline{z}) \geqslant 1 + (a_1\cos2\varphi + a_2\sin2\varphi) + (b_1\cos3\varphi + b_2\sin3\varphi)$. Осталось показать, что если $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, то найдётся решение системы неравенств $\begin{cases} a_1\cos2\varphi + a_2\sin2\varphi \geqslant 0, \\ b_1\cos3\varphi + b_2\sin3\varphi \geqslant 0, \end{cases}$ для которого хотя бы одно из этих неравенств является строгим (тогда $|p(z)| > 1$!). Действительно, если $a_1\cos2\varphi_0 + a_2\sin2\varphi_0 > 0$, то и $a_1\cos2(\pi + \varphi_0) + a_2\sin2(\pi + \varphi_0) > 0$. С другой стороны, при подстановке φ_0 и $\varphi_0 + \pi$ во второе выражение получаем значения противоположных знаков.

XI.162. В следующих далее формулировках мы для краткости будем отождествлять комплексные числа с их изображением как точек плоскости.

а) **Решение.** По условию $p(z) = z^2 + az + 1$, $|a| \leqslant 2$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Если $a = \pm2$, тогда $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ и $|z_1| = |z_2| = 1$, т. е. корни лежат на единичной окружности.

Если $|a| < 2$ (обозначим $a = 2\cos x$), то

$$p(z) = z^2 + 2\cos xz + 1,\ p(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \cos x + i\sin x, \\ z = \cos x - i\sin x, \end{cases}$$

$$|z_1| = |z_2| = |\cos x \pm i\sin x| = 1,$$

и снова корни лежат на единичной окружности.

б) $\sqrt{3}$. **Решение.** По условию $p(z) = z^2 + az + 1$, $|a| \leqslant 1$, $a \in \boldsymbol{C}$. Пусть $p(z) = 0$. Тогда $|z_1 - z_2| = \left|\sqrt{a^2 - 4}\right|$. Зна-

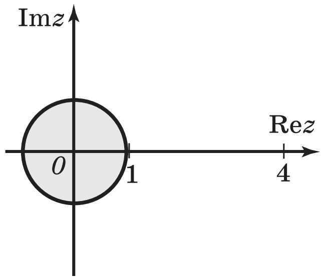


Рис. 11.32

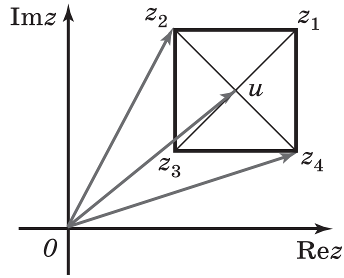


Рис. 11.33

чит, $|z_1 - z_2| = \left|\sqrt{a^2-4}\right| = \sqrt{|a^2-4|}$. Так как $|a| \leqslant 1$, то $|a^2| = |a|^2 \leqslant 1$ и среди точек вида a^2 — произвольных точек единичного круга — ближайшей к точке 4 является точка 1. Тогда $\min\limits_{|a|\leqslant 1,\, a\in \boldsymbol{C}} = \sqrt{|1-4|} = \sqrt{3}$ (рис. 11.32).

в) **Решение.** Докажем, что равенство $\sum\limits_{k=1}^{4} p(z_k) = 4p(u)$ инвариантно относительно параллельного переноса на вектор $\vec{\alpha}(m;\ n)$.

$\sum\limits_{k=1}^{4} p(z_k + m + ni) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 4(m^2 - n^2) + 2(m + ni) \times (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 8mni + a(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 4a(m + ni) + 4b = \sum\limits_{k=1}^{4} p(z_k) + 4(m^2 - n^2) + 2(m + ni)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 8mni + 4a(m + ni)$.

Используем условие: $4p(u + m + ni) = 4(u^2 + m^2 - n^2 + 2um + 2uni + 2mni + au + a(m + ni) + b) = 4(u^2 + au + b) + 4(m^2 - n^2) + 2(m + ni)u + 8mni + 4a(m + ni) = 4p(u) + 4(m^2 - n^2) + 2(m + ni)u + 8mni + 4a(m + ni)$. Но $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4u$, если z_1, z_2, z_3, z_4 — вершины квадрата с центром u. Это вытекает из геометрического представления сложения комплексных чисел (рис. 11.33). $\frac{1}{2}\overrightarrow{Ou} = \overrightarrow{Oz_4} + \overrightarrow{Oz_2}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{Ou} = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_3}$. Тогда $4u = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, и мы вправе считать, что $u = 0$, т. е. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ (не умаляя общности, считаем, что вершины квадрата занумерованы так, что обход квадрата совершается против часовой стрелки).

Так как $z_2 = iz_1$, $z_4 = iz_3$, то $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$,

$$\sum_{k=1}^{4} p(z_k) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + a(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 4b =$$
$$= 4b = 4p(0) = 4p(u).$$

г) **Решение.** Пусть точка u, в которой достигается наибольшее значение $|p(z)|$, в круге $|z| \leqslant 1$ не лежит на единичной окружности, в частности $|p(u)| > m$.

Рассмотрим квадрат, центром которого является точка u, а одна из вершин которого (z_1) лежит на единичной окружности. В силу выбора точки u верно $|p(z_k)| \leqslant |p(u)|$. Из задачи XI.162 в) следует, что

$$|p(u)| = \left|\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} p(z_k)\right| = \frac{1}{4}\left|\sum_{k=1}^{4} p(z_k)\right| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} |p(z_k)| \leqslant |p(u)|.$$

Тогда $|p(z_k)| = |p(u)|$, т. е. $|p(z_1)| = |p(u)|$. Но $m < |p(u)| = |p(z_1)| \leqslant m$. Получили противоречие, и тем самым наше утверждение доказано.

Замечание. В приведённом рассуждении использовалась вторая теорема Вейерштрасса для функций от двух переменных (непрерывная функция двух переменных достигает своих наибольшего и наименьшего значений на замкнутых ограниченных множествах плоскости, частным случаем которых является круг).

XI.163. а) 1; $-1 \pm i$. **Решение.** $z^3 + z^2 = 2 \Leftrightarrow z^3 - 1 + z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)(z^2 + z + 1 + z + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1, \\ z^2 + 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1, \\ z = -1 \pm i. \end{array}\right.$$

б) 1. **Решение.** По условию $z^3 + z^2 - 2008 = 0$. По формулам Виета $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -1, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 0, \\ z_1z_2z_3 = 2008, \end{cases}$ а тогда $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 =$

$= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2z_1z_2 - 2z_2z_3 - 2z_1z_3 = 1 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 1$.

в) $\left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. **Решение.** Способ 1. $p(z) = c \Leftrightarrow z^3 + z^2 = c$.

1) Уравнение имеет три вещественных корня. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + x^2 - c$, $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$. Из схематичного графика (рис. 11.34) видно, что все корни будут принадлежать отрезку $[-1; 1]$, если

$$\begin{cases} f(1) \geqslant 0, \\ c > 0, \\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right) > 0, \\ f(-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0, \\ c \leqslant 2, \\ c < \dfrac{4}{27} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < c < \frac{4}{27}.$$

2) Уравнение имеет два вещественных корня. Это произойдёт, если (рис. 11.34) $\left[\begin{array}{l} c = 0 \text{ при } f(-1) < 0, \\ c = \dfrac{4}{27} \text{ при } f(1) > 0. \end{array}\right.$ По теореме Вейерштрасса второй корень существует, так как функция меняет знак и оба корня, что характерно, по модулю меньше 1. Мнимых корней в этом случае нет.

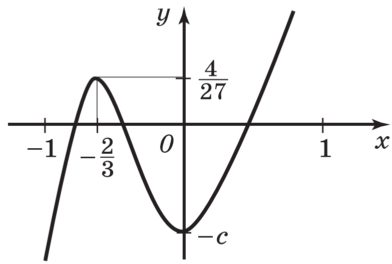


Рис. 11.34

Если $z = a \in \boldsymbol{R}$ — корень уравнения $z^3 + z^2 - c = 0$, то два оставшихся корня являются корнями уравнения $z^2 + (a + 1)z + (a^2 + a) = 0$. (Это результат деления исходного многочлена на $z - a$ с учётом того, что $c = a^3 + a^2$.) Эти корни являются комплексными при $a < -1$ или $a > \frac{1}{3}$, причём первый случай нас не интересует (поскольку действительный корень $a < -1$). Так как корни этого уравнения комплексно сопряжены, то $|z_1 z_2| = |z_1|^2 \leqslant 1$, если $a^2 + a \leqslant 1$, откуда $\frac{1}{3} < a \leqslant \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Найдя множество значений $c = a^3 + a^2$ при $\frac{1}{3} < a \leqslant \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, получаем с учётом случая вещественных корней $0 \leqslant c \leqslant \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

г) **Решение.** Способ 1. Докажем, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то $|a + b + c| = |ab + bc + ac|$. Действительно, $|ab + bc + ac|^2 = (ab + bc + ac)(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac}) = ab\overline{ab} + ab\overline{bc} + ab\overline{ac} + bc\overline{ab} + bc\overline{bc} + bc\overline{ac} + ca\overline{ab} + ca\overline{bc} + ca\overline{ca} = 3 + a\overline{c} + b\overline{c} + c\overline{a} + b\overline{a} + c\overline{b} + a\overline{b} = |a + b + c|^2$.

Пусть x, y и z — корни исходного уравнения с модулем 1. Тогда согласно доказанному утверждению $|x + y + z| = |xy + yz + zx|$. Но по теореме Виета $x + y + z = -1$, а $xy + yz + zx = 0$. Таким образом, модули всех корней уравнения не могут быть равны 1.

Способ 2. Докажем это же утверждение по-другому. Положим $a = \cos x + i\sin x$, $b = \cos y + i\sin y$ и $c = \cos z + i\sin z$. Тогда $|ab + bc + ca|^2 = (\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x))^2 + (\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x))^2 = 3 + 2(\cos(x + y)\cos(y + z) + \sin(x + y)\sin(y + z) + \cos(y + z)\cos(z + x) + \sin(y + z)\sin(z + x) + \cos(z + x) \times \cos(x + y) + \sin(z + x)\sin(x + y)) = 3 + 2(\cos(x - z) + \cos(y - z) + \cos(z - y)) = 3 + 2\cos x\cos y + 2\cos y\cos z + 2\cos z\cos x + 2\sin x\sin y + 2\sin y\sin z + 2\sin z\sin x = |a + b + c|^2$.

Заметим, что первый способ решения проще. Приведём ещё одно более изящное рассуждение.

Способ 1′. Поскольку $|a| = |b| = |c| = 1$, то $|ab + bc + ac| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| = |\overline{a + b + c}| = |a + b + c|$.

XI.164. в) Дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$ при $x < 1$.

б) См. рисунок 11.35. **Решение.** Так как $f(z) = u(z - a) + a$, то отображение $z \to f(z)$ представляет собой поворот на угол $\arg u$ относительно точки a с последующей гомотетией с коэффициентом $|u|$. Тогда отображение f переводит точки верхней полуплоскости в точки правой полуплоскости тогда и только тогда, когда $u = -ti$, где $t \in \boldsymbol{R}$ и $t > 0$.

Если точка, изображающая комплексное число a, лежит во второй четверти, то, так как она остаётся на месте, никакого u найти не удастся. Положив $u = v + wi$, $a = b + ci$, v, w, b, $c \in \boldsymbol{R}$, покажем, что искомое множество есть объединение всех полуплоскостей $b \geqslant tc$ при всех $t \geqslant 0$.

XI.165. а) **Решение.** Пусть $z = (x + yi)(1 + 2i) = x - 2y + i(y + 2x)$. Так как $\arg z = \frac{\pi}{4}$, то $x - 2y = y + 2x \Leftrightarrow x = -3y$ и $z = -(3 - i)(1 + 2i)y$, $y \in \boldsymbol{Z}$.

б) Не существует. **Решение.** Пусть u, $v \in K$: $\arg\frac{u}{v} = \frac{\pi}{8}$ существуют. Так как $z = a + bi$, a, $b \in \boldsymbol{Z}$ и $z = \frac{u}{v}$, где u, $v \in K$, то a, $b \in \boldsymbol{Q}$. Следовательно, $|z|^2 \in \boldsymbol{Q}$. Если $z = |z|\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, то $z^2 = |z|^2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Но $\cos\frac{\pi}{4} \notin \boldsymbol{Q}$. Получили противоречие тому, что a, $b \in \boldsymbol{Q}$. Значит, таких u, $v \in K$: $\arg\frac{u}{v} = \frac{\pi}{8}$ не существует.

в) **Решение.** Пусть $w \in K$. Тогда $w = (x + yi)(1 + 2i) = x(1 + 2i) + y(i - 2)$, x, $y \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, совокупность всех чисел w — это множество узлов решётки,

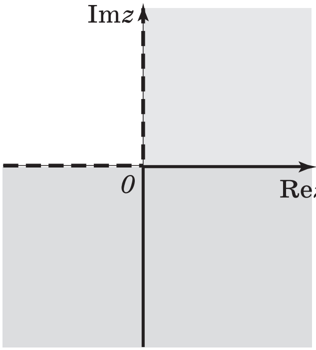


Рис. 11.35

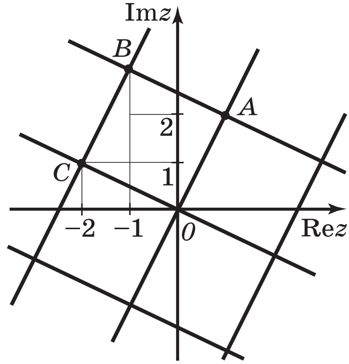


Рис. 11.36

полученной при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\sqrt{5}$ и повороте вокруг начала координат O на угол $\operatorname{arctg} 2$ координатной решётки (рис. 11.36).

Любое гауссово число z оказывается таким образом внутри или на сторонах какого-то квадрата со стороной $\sqrt{5}$, вершины которого принадлежат K.

Не умаляя общности, рассмотрим гауссовы числа, лежащие внутри или на сторонах квадрата $OABC$, где A, B, C — точки, соответствующие числам $1 + 2i$, $-1 + 3i$, $-2 + i$ соответственно (остальные случаи можно свести к этому параллельным переносом). Но для этих чисел (это 0, i, $2i$, $1 + 2i$, $-1 + i$, $-1 + 2i$, $-1 + 3i$, $-2 + i$) очевидно, что расстояние от них до ближайшей из вершин квадрата $OABC$ не превосходит 1.

ГЛАВА XII. Элементы теории вероятностей

Эта глава носит в большей степени мировоззренческий характер и призвана дать учащимся представление о случайных событиях и их вероятностях.

При изучении материала полезно всё время обращаться к жизненному опыту учащихся. Например, спрашивать их: можно ли надеяться на наступление события, вероятность которого равна 0,01? Можно ли считать надёжным механизм, работающий в течение гарантийного срока с вероятностью 0,9? Обсуждение этих вопросов поможет учащимся осознать, нащупать границы вероятности, начиная с которой, событие можно считать достоверным с житейской точки зрения.

Важным является вопрос о том, откуда мы узнаём значения вероятностей событий. Ясно, что при бросании кубика или монетки соответствующие вероятности получаются из соображений симметрии. Однако как узнаются вероятности попадания стрелком в мишень, наличия или отсутствия урожая и т. п.?

Здесь есть повод поговорить с учащимися о социологии, статистике, а самое главное — о том, что соответствующие вероятности никогда не узнаются точно. Соответственно и вычисления их на практике ведутся с той или иной степенью точности. Также уместно упомянуть о законе больших чисел, утверждающем, что при определённых условиях частота выпадения события стремится с увеличением числа опытов к вероятности этого события. Это позволяет вычислять вероятности опытным путём, последовательно производя много однотипных опытов и исследуя частоты выпадения соответствующих событий. Таким способом, например, случайно бросая точки и находя частоты их попадания в какую-либо фигуру, можно приближённо найти площадь этой фигуры (метод Монте-Карло).

К сожалению, этим вопросам в учебнике уделено недостаточно внимания, равно как и не затронуты вопросы, связанные со случайными величинами. Однако, будучи практикующими учителями, авторы понимают, что на изучение теории вероятностей в школьном курсе не удастся выкроить столько времени, сколько нужно, чтобы осветить указанные темы. Поэтому они ограничились лишь случайными событиями, на материале которых попытались передать соответствующие представления о теории вероятностей.

План изучения материала главы XII приведён в таблице:

Глава XII. Элементы теории вероятностей	14	18
Случайные события. Классическое определение вероятности	4	4
Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса	4	8
Геометрическая вероятность	4	4
Контрольная работа №9	2	2

§ 71. Случайные события. Классическое определение вероятности

Основной целью изучения данного параграфа является понимание события как множества, состоящего из элементарных событий.

В случае если элементарных событий (они же — возможные исходы опыта) конечное количество, каждому из них приписывается определённая вероятность, и вероятность события есть сумма вероятностей составляющих его элементарных событий.

В случае если множество элементарных событий несчётно, среди всех его подмножеств выделяются те, которые разумно называть событиями и приписывать им разумным образом вероятность. Можно показать, что для несчётных множеств объявить событием любое подмножество, приписав ему разумным образом вероятность, невозможно.

Полезно акцентировать внимание учащихся на том, что классическое определение вероятности действует в случае, если вероятности элементарных событий равны. Однако соображения о том, откуда берётся значение вероятности, не относятся к ведению теории вероятностей. Они либо оговорены в условии задачи, либо следуют из какой-либо симметрии (как, например, в случае монетки или кубика).

При решении задач на классическое определение полезно повторять соответствующие комбинаторные рассуждения.

Как и при изучении комбинаторики, рекомендуем оставлять ответы, содержащие выражения, имеющие комбинаторный смысл (числа сочетаний, размещений, перестановок и т. п.). Это поможет по ответу увидеть ход рассуждений ученика.

На задачи к данному параграфу приходится более трети всех задач главы, что связано с требованиями стандарта, в котором владение классическим определением требуется на уровне навыка. Кроме задач к данному параграфу, по классическому определению можно решать также задачи XII.31, XII.32, XII.39 в).

Решения и указания к задачам

XII.2. а) Нет. б) Да.

XII.3. а) Нет. б) Да.

XII.6. а) Да. б) Нет. в) Нет. г) Нет.

XII.7. в) Поскольку $A \subset B$, то $A \cup B = A$. Сформулировать словами событие $B \setminus A$ — это, скорее, задача по русскому языку. Например, формулировка может быть такой: «Работают один, два или четыре станка».

XII.8. Событие «партия закончилась вничью».

XII.9. а) Вероятность выпадения всех граней, кроме 6, равна $\frac{3}{16}$, грани 6 равна $\frac{1}{16}$. б) $\frac{7}{16}$. в) $\frac{7}{16}$.

XII.10. а) *Указание.* По условию вероятность выпадения числа k равна $\frac{1}{k} \cdot a$, где a — коэффициент пропорциональности. Поскольку сумма вероятностей элементарных событий равна 1, то $a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1$, откуда $a = \frac{20}{49}$. Отсюда соответствующие вероятности восстанавливаются однозначно. б) $\frac{55}{147}$. в) $\frac{37}{147}$.

XII.11. а) $\frac{8}{17}$. **Решение.** Число способов разбить 18 команд на 2 группы равно C_{18}^{9} (нужно выбрать 9 команд для одной группы, оставшиеся 9 образуют вторую группу). Возьмём две данные команды и определим их в одну группу (это можно сделать 2 способами). Теперь в эту группу доберём ещё 7 команд (это можно сделать C_{16}^{7} способами). Таким образом, число разбиений, где две данные команды находятся в одной группе, равно $2 \cdot C_{16}^{7}$. Искомая вероятность равна $\frac{2C_{16}^{7}}{C_{18}^{9}} = \frac{8}{17}$.

б) $\frac{27}{34}$. **Решение.** Найдём количество разбиений, где три заданные команды попадут в одну группу. Аналогично задаче XII.11 а) это количество равно $2C_{15}^{6}$. Значит, количество разбиений, при которых команды не попадут в одну группу, равно $C_{18}^{9} - 2C_{15}^{6}$. Искомая вероятность равна $\frac{C_{18}^{9} - 2C_{15}^{6}}{C_{18}^{9}} = 1 - \frac{2C_{15}^{6}}{C_{18}^{9}} = 1 - \frac{7}{34} = \frac{27}{34}$.

XII.12. Решение. По легенде, ландскнехт рассуждал так: число 11 можно получить как $3 + 4 + 4$, или $3 + 3 + 5$, или $2 + 4 + 5$, или $2 + 3 + 6$, или $1 + 5 + 5$, или $1 + 4 + 6$ (слагаемые расположены в порядке возрастания, чтобы быть уверенным в полноте перебора и не повторить варианты), т. е. шестью способами.

Число 12 можно получить как $4 + 4 + 4$, или $3 + 4 + 5$, или $3 + 3 + 6$, или $2 + 4 + 6$, или $2 + 5 + 5$, или $1 + 5 + 6$, т. е. тоже шестью способами.

Таким образом, вероятности должны быть равны.

Однако Галилей показал, что суммы, в которых все слагаемые различны, встречаются с вероятностью $\frac{3!}{6^3}$; суммы, где два слагаемых одинаковы, встречаются с вероятностью $\frac{3}{6^3}$; сумма из одинаковых слагаемых встретится с вероятностью $\frac{1}{6^3}$. Таким образом, вероятность получить 11 равна $\frac{27}{6^3}$, а вероятность получить 12 равна $\frac{25}{6^3}$.

Здесь 6^3 — количество возможных выпадений троек кубиков (с учётом порядка), 3! — количество способов получить данную комбинацию трёх различных слагаемых (равно количеству перестановок этих слагаемых) с учётом их порядка и т. д.

XII.13. Вероятность первого события больше. **Решение.** Рассмотрим вероятность того, что ни на одном из четырёх кубиков не выпадет 6 очков. Общее количество комбинаций на четырёх кубиках равно 6^4, а количество комбинаций без шестёрок равно 5^4. Таким образом, вероятность того, что при одном бросании 4 кубиков не выпадет шестёрка, равна $\frac{5^4}{6^4}$. По свойству 3 из п. 4 § 71 учебника вероятность противоположного события (т. е. того, что выпадет хотя бы одна шестёрка) равна $1-\frac{5^4}{6^4}$.

Количество исходов при 24 бросаниях двух костей равно 36^{24}. При каждом бросании количество исходов, где нет двух шестёрок, равно 35. Поэтому вероятность того, что ни разу не выпадет две шестёрки, равна $\frac{35^{24}}{36^{24}}$. Соответственно вероятность противоположного события равна $1-\frac{35^{24}}{36^{24}}$.

Остаётся сравнить числа $1-\frac{5^4}{6^4}$ и $1-\frac{35^{24}}{36^{24}}$, т. е. сравнить числа $\frac{35^{24}}{36^{24}}$ и $\frac{5^4}{6^4}$, соотношение между которыми такое же, как между $\frac{35^6}{36^6}$ и $\frac{5}{6}$.

Согласно неравенству Бернулли[1] $\left(\frac{35}{36}\right)^6 = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^6 \geqslant 1 - 6 \times \times \frac{1}{36} = \frac{5}{6}$. Поскольку сравниваемые числа, очевидно, не равны, получаем, что $\frac{35^6}{36^6} > \frac{5}{6}$, а значит, вероятность получить одну шестёрку на четырёх кубиках больше, чем получить один раз две шестёрки при 24 бросаниях двух кубиков.

XII.14. $\frac{1}{6!}$.

XII.15. а) $\frac{496}{1785}$. **Решение.** Число способов вынуть из колоды три карты (без учёта их порядка) равно C_{36}^3. Чтобы среди этих трёх карт был ровно один туз, нужно взять одного из четырёх тузов (это можно сделать 4 способами) и выбрать из 32 карт, не являющихся тузами, оставшиеся 2 карты (это можно сделать C_{32}^2 способами). Таким образом, вероятность того, что среди трёх карт ровно один туз, равна $p = \frac{4C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{496}{1785}$. б) $p = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$. в) $p = \frac{C_4^3}{C_{36}^3}$.

Замечание. Отметим, что, если считать комбинации с учётом порядка вынутых карт, вероятности не изменятся.

в) *Указание.* В случае если вынутая карта возвращается, общее количество исходов (с учётом порядка вытащенных карт) будет равно 36^3, количество исходов с одним тузом будет равно $3 \cdot 4 \cdot 32^2$, количество исходов с двумя тузами будет равно $3 \cdot 4^2 \cdot 32$, количество исходов с тремя тузами будет равно 4^3. Отсюда несложно получить искомые вероятности.

XII.16. а) $\frac{6 \cdot 64}{1000}$. *Указание.* На каждой из шести граней большого куба расположены 64 окрашенные грани малых кубиков, у которых эта окрашенная грань единственная. б) $\frac{12 \cdot 8}{1000}$. *Указание.* На каждом из 12 рёбер большого куба расположены по 8 кубиков с двумя окрашенными гранями. в) $\frac{8}{1000}$.

---

[1] $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

XII.17. $\frac{4C_9^2}{C_{36}^2}$ (если колода состоит из 36 карт).

XII.18. а) $\frac{3!\cdot 4^3}{A_{52}^3}=\frac{4^3}{C_{52}^3}$. б) $\frac{4^3}{A_{52}^3}$.

XII.19. $\frac{(C_{18}^9)^2}{C_{36}^{18}}$. *Замечание.* Если среди 18 карт имеется ровно 9 карт чёрной масти, то остальные будут красной масти.

XII.20. а) $1-\frac{C_{21}^5}{C_{28}^5}$. б) $1-\frac{21^5}{28^5}$.

XII.21. а) 0,3. **Решение.** Троек отрезков, из которых можно составить треугольник, всего три: 2, 3, 4; 2, 4, 5; 3, 4, 5. Всего троек отрезков $C_5^3=10$, откуда искомая вероятность равна 0,3.

б) 0,8. **Решение.** Выбрать четыре отрезка из пяти — всё равно, что выбрать один оставшийся, всего таких способов $C_5^1=C_5^4=5$. Заметим, что из четырёх отрезков 1, 2, 3, 5 невозможно выбрать три, из которых можно составить треугольник. Значит, искомая вероятность равна 0,8.

XII.22. а) $\frac{4}{9}$. **Решение.** Способ 1. На конце числа должна стоять одна из четырёх чётных цифр. Поэтому исходов, благоприятствующих событию, будет $4\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. Всего исходов $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{4}{9}$.

Способ 2. Результаты появления каждой цифры на конце равновероятны. Поэтому пространством элементарных событий можно считать события вида «на конце числа цифра 1», «на конце числа цифра 2» и т. д. Таких событий 9, благоприятствующих исследуемому событию 4.

б) $\frac{4}{9}$. *Указание.* Воспользоваться способом 2 решения задачи XII.22 а).

в) $\frac{4}{9}$. *Указание.* Воспользоваться способом 2 решения задачи XII.22 а).

XII.23. а) 8. **Решение.** Пусть в наборе x карточек с цифрой 9. Вероятность получить чётное число равна $\frac{4\cdot(x+7)\cdot(x+6)\cdot(x+5)}{(x+8)\cdot(x+7)\cdot(x+6)\cdot(x+5)}=\frac{4}{x+8}$ (можно было использовать такое же рассуждение, как и в решении задачи XII.22 а). Решив уравнение $\frac{4}{x+8}=0{,}25$, получим $x=8$.

б) Нет. **Решение.** Вероятность получить нечётное число равна $\frac{x+4}{x+8}$. Решив уравнение $\frac{x+4}{x+8}=0{,}4$, получим отрицательное нецелое число. Это можно было заметить сразу, так как при добавлении к числителю и знаменателю правильной дроби одного и того же положительного числа дробь увеличивается. Поэтому при положительных x выполнено $\frac{x+4}{x+8}>\frac{4}{8}>0{,}4$.

XII.24. $\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91}<0{,}5$. **Решение.** Искомая вероятность равна

$$\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91}.$$

Преобразуем выражение

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot 94\cdot 93\cdot 92\cdot 91}=\frac{9}{10}\cdot\frac{89}{99}\cdot\ldots\cdot\frac{81}{91}.$$

и заметим, что каждая из дробей меньше, чем $\frac{9}{10}$. Поэтому искомая вероятность меньше $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Заметим, что $10^{10}=(9+1)^{10}>9^{10}+10\cdot 9^{9}>2\cdot 9^{10}$, поэтому $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}<\frac{1}{2}$. Таким образом, полученная вероятность меньше 0,5.

XII.26. а) *Указание.* Пространство элементарных событий состоит из упорядоченных пар элементов. Таких пар будет 9, из которых 3 будут соответствовать ничейному исходу. б) $\frac{2}{3}$. в) $\frac{1}{3}$. *Указание.* Кроме непосредственного вычисления, здесь возможно рассуждение о том, что по условиям игры оба игрока равноправны, значит, вероятности их выигрыша равны. А сумма вероятностей выигрыша обоих игроков составляет вероятность того, что игра не закончилась ничьей.

XII.27. а) $\frac{C_{16}^{3}}{C_{21}^{3}}$. б) $\frac{C_{16}^{2}\cdot C_{5}^{1}}{C_{21}^{3}}$. в) $\frac{C_{16}^{1}\cdot C_{5}^{2}}{C_{21}^{3}}$. г) $\frac{C_{5}^{3}}{C_{21}^{3}}$. д) $\frac{C_{16}^{2}\cdot C_{5}^{1}}{C_{21}^{3}}+\frac{C_{16}^{1}\cdot C_{5}^{2}}{C_{21}^{3}}$. е) $\frac{C_{16}^{3}}{C_{21}^{3}}+\frac{C_{5}^{3}}{C_{21}^{3}}$. ж) $1-\frac{C_{16}^{3}}{C_{21}^{3}}$. з) $\frac{C_{5}^{3}}{C_{21}^{3}}+\frac{C_{16}^{2}\cdot C_{5}^{1}}{C_{21}^{3}}$.

XII.28. а) 15. **Решение.** Пусть ученик выучил $a<16$ вопросов. Вероятность успешного ответа на оба поставленных вопроса равна $\frac{C_{a}^{2}}{C_{16}^{2}}=\frac{a(a-1)}{15\cdot 16}$. Решив неравенство $\frac{a(a-1)}{15\cdot 16}\geqslant\frac{7}{8}$ с учётом того, что $a<16$, получим $a=15$.

б) 6 или 10. **Решение.** Число способов для ученика выбрать пару вопросов, один из которых он знает, а другой не знает, равно $a(16-a)$. Поэтому решение задачи сводится к решению уравнения $\frac{a(16-a)}{C_{16}^2}=\frac{1}{2}$, откуда $a=6$ или $a=10$.

в) $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **Решение.** Вероятность ответить на один случайно выбранный вопрос равна $\frac{a}{16}$. Выбрать три вопроса, которые ему известны, ученик может C_a^3 способами. Выбрать три вопроса, из которых ему известны ответы только на два, ученик может $C_a^2 \cdot C_{16-a}^1$ способами. Таким образом, вероятность того, что ученик ответит хотя бы на два из трёх случайных вопросов, равна $\frac{C_a^3+C_a^2 \cdot C_{16-a}^1}{C_{16}^3}=\frac{a(a-1)(23-a)}{7 \cdot 15 \cdot 16}$. Решив неравенство $\frac{a(a-1)(23-a)}{7 \cdot 15 \cdot 16}<\frac{a}{16}$, получаем $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

г) $\frac{32}{143}$. **Решение.** Количество способов разбить 16 вопросов на 8 билетов по 2 вопроса равно $C_{16}^2 \cdot C_{14}^2 \cdot \ldots \cdot C_4^2 = 8! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15$.

Сосчитаем число способов разбить 16 вопросов на 8 билетов так, чтобы в каждом билете оказался вопрос, который ученик знает. Разложим вначале 8 вопросов из числа тех, которые ученик знает, по 8 билетам. Это можно сделать A_{10}^8 способами. Затем 8 вопросов (среди которых есть 2, известных ученику) разложим по билетам, что можно сделать 8! способами. При этом каждый из тех двух билетов, в которых ученику известны ответы на оба вопроса, посчитан дважды. Поэтому полученный результат надо разделить на 4. Итак, искомое число способов равно $\frac{A_{10}^8 \cdot 8!}{4}$, а искомая вероятность равна

$$\frac{A_{10}^8 \cdot 8!}{4} : (8! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15)=\frac{32}{143}.$$

XII.29. а) $\frac{4}{n(n-1)}$. **Решение.** Общее количество исходов — это количество упорядоченных четвёрок чисел от 1 до n, т. е. $n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Количество исходов, благоприятствующих событию, — это количество упорядоченных четвёрок, в которых на первом или третьем месте стоит число 1, а на втором или четвёртом месте стоит число 2.

Рассмотрим всевозможные **неупорядоченные** четвёрки чисел от 1 до n, содержащие 1 и 2. Таких четвёрок будет C_{n-2}^2 (для того, чтобы получить четвёрку, надо добавить в неё два числа из оставшихся $n-2$). В каждой такой четвёрке сосчитаем количество таких её перестановок, при которых число 1 стоит на нечётной позиции, а число 2 — на чётной. Для 1 можно выбрать одну из двух позиций, для 2 — тоже одну из двух позиций, и оставшиеся два числа двумя способами разместить на оставшихся позициях. Таким образом, одной неупорядоченной четвёрке соответствует восемь упорядоченных подходящих нам четвёрок. Итак, количество исходов, благоприятствующих событию, равно $8C_{n-2}^2$. Искомая вероятность равна

$$\frac{8C_{n-2}^2}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{4}{n(n-1)}.$$

б) $\frac{1}{6}$. **Решение.** Рассмотрим неупорядоченную четвёрку различных чисел от 1 до n. Её можно упорядочить нужным образом, поставив два меньших числа на нечётные позиции (двумя способами), а два больших числа на чётные позиции (тоже двумя способами). Таким образом, среди всех упорядоченных четвёрок, полученных из данной перестановками (а их будет $4!=24$), только четыре будут упорядочены нужным образом. Поскольку это верно для любой неупорядоченной четвёрки, то доля «подходящих» упорядоченных четвёрок составляет $\frac{1}{6}$ всех упорядоченных четвёрок. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$.

в) 796. **Решение.** Очевидно, что упорядоченных четвёрок, в которых сумма чисел, выбранных первым игроком, меньше суммы чисел, выбранных вторым, будет столько же, сколько таких, в которых сумма чисел, выбранных первым, больше суммы чисел, выбранных вторым (перестановка пар чисел между чётными и нечётными местами устанавливает взаимно однозначное соответствие).

Кроме упомянутых четвёрок, остаются ещё те, в которых суммы чисел, выбранных игроками, равны. Их количество можно посчитать непосредственно. Для этого нужно взять возможные числа, представимые в виде суммы двух различных слагаемых двумя способами (например, $5=1+4=2+3$). Полученную четвёрку $\{1, 2, 3, 4\}$ можно упорядочить нужным образом четырьмя способами: (1, 2, 4, 3); (1, 3, 4, 2); (4, 2, 1, 3); (4, 3, 1, 2). Таким образом, зная количество пар представлений данного числа в виде суммы различных слагаемых, мы умножением на 4 узнаем количество соответствующих четвёрок.

Заполним таблицу:

Значение суммы	**Различные представления этой суммы**	**Число пар**
5	$1 + 4 = 2 + 3$	1
6	$1 + 5 = 2 + 4$	1
7	$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$	3
8	$1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$	3
9	$1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$	$6 = C_4^2$
10	$2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$	3
11	$3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$	3
12	$4 + 8 = 5 + 7$	1
13	$5 + 8 = 6 + 7$	1

Итак, всего пар представлений чисел в виде суммы двух различных слагаемых 22, значит, соответствующих упорядоченных четвёрок будет 88.

Всего упорядоченных четвёрок $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$. Значит, четвёрок, в которых суммы чисел, набранных первым и вторым игроками, не равны, будет $1680 - 88 = 1592$. Тогда четвёрок, в которых сумма чисел первого игрока будет меньше суммы чисел второго, будет $1592 : 2 = 796$.

г) $\frac{\pi}{4}$. **Р е ш е н и е.** Фактически требуется определить, какова среди упорядоченных пар различных натуральных чисел, меньших n, доля тех, сумма квадратов которых меньше n^2.

Поставим в соответствие каждой упорядоченной паре натуральных чисел точку с соответствующими координатами. Тогда тот факт, что сумма квадратов чисел в паре меньше n^2, означает, что соответствующие точки лежат внутри четверти круга радиуса n.

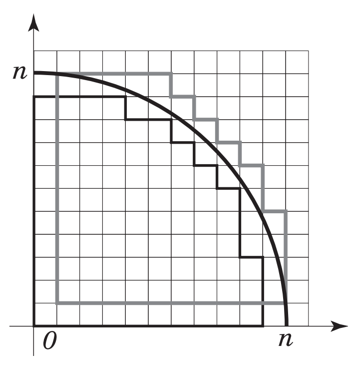


Рис. 12.1

Обратимся к рисунку 12.1. Поставим в соответствие каждой из таких целочисленных точек единичный квадрат, правым верхним углом которого она является. Тогда количество точек внутри круга численно равно площади ступенчатой фигуры с вершиной в начале координат. Ясно, что площадь этой фигуры меньше площади четверти круга.

Поставим теперь в соответствие каждой из точек, лежащих внутри круга, единичный квадрат, левой нижней вершиной которого она является. Объединение этих квадратов даёт ступенчатую фигуру, равную первой, но сдвинутую на 1 влево и на 1 вверх. Если теперь к этой фигуре добавить $2n - 1$ квадрат (по n примыкающих к каждой оси, начиная с квадрата, имеющего вершину в начале координат), то полученная фигура будет содержать четверть круга радиуса n.

Если обозначить за $q(n)$ количество точек с натуральными координатами, лежащих внутри круга радиуса n, приведённые геометрические рассуждения дают возможность написать неравенство:

$$q(n) < \frac{\pi n^2}{4} < q(n) + 2n - 1, \text{откуда } \frac{\pi n^2}{4} - 2n + 1 < q(n) < \frac{\pi n^2}{4} \; (*).$$

Поскольку нас интересуют только точки, координаты которых различны, нужно вычесть количество точек, лежащих на прямой $y = x$, которых внутри круга будет $\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]$.

В соответствии с изложенным искомая вероятность $p_n = \dfrac{q(n) - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]}{n^2 - n}$. Используем неравенство (*):

$$\frac{\frac{\pi n^2}{4} - 2n + 1 - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]}{n^2 - n} < p_n < \frac{\frac{\pi n^2}{4} - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]}{n^2 - n}.$$

При стремлении n к бесконечности крайние части неравенства стремятся к $\frac{\pi}{4}$, поэтому и $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \frac{\pi}{4}$.

§ 72. Условная вероятность. Независимые события

Особое внимание при изучении параграфа следует уделить мотиву появления определения условной вероятности как обычной вероятности, но на суженном пространстве элементарных событий. При такой трактовке формула условной вероятности становится естественной.

Обратим внимание, что чаще используется не определение условной вероятности формула (1), а следствие из него формула (2).

Центральным понятием параграфа является понятие независимых событий. Важно понимать, что независимость событий не означает отсутствия взаимосвязи между ними. Обратим внимание на то, что формулировка определения «событие A не зависит от события B», необходимость в которой возникает из-за того, что формула условной вероятности $P(A|B)$ не сохраняется при перестановке местами A и B, диктует необходимость доказательства корректности (утверждение на с. 287 учебника), позволяющего заменить эту формулировку «равноправной» относительно событий A и B (т. е. не меняющейся при перестановке событий местами).

При изучении независимых событий обязательно следует рассмотреть задачу XII.41, либо задав её учащимся на дом, либо решив в классе. Результат задачи показывает, что попарно независимые события могут не являться независимыми в совокупности.

Важно понимать, что обычно в практической жизни сведения о независимости событий берутся из каких-либо житейских представлений, а не являются следствием каких-либо вычислений условных вероятностей.

Важнейшим применением понятия независимых событий является схема Бернулли. Она является предтечей как нормального распределения, так и распределения Пуассона.

Весьма трудно отделить «чистое» использование условной вероятности от простейших случаев формулы полной вероятности. Поэтому часть задач несёт пропедевтическую нагрузку (например, задачи XII.31, XII.32, XII.36, XII.42 в), XII.44 б) и т. д.).

Решения и указания к задачам

XII.31. б) $\frac{40}{77}$. Пусть событие A — «первым вынут белый шарик», событие B — «вторым вынут белый шарик».

Тогда интересующее нас событие «вынуты разноцветные шарики» записывается как $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Поскольку объединяемые события несовместны, то $p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{B} \mid A)p(A) + p(B \mid \bar{A})p(\bar{A})$.

Легко видеть, что $p(A) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$, $p(\bar{B} \mid A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$, $p(\bar{A}) = \frac{6}{11}$, $p(B \mid \bar{A}) = \frac{10}{21}$. Отсюда получаем, что искомая вероятность равна $\frac{40}{77}$.

Если решать эти задачи, пользуясь классическим определением вероятности, станет понятно, что ответы в задачах XII.31 а) и б) одинаковы (числитель и знаменатель дроби из первой задачи в два раза больше числителя и знаменателя дроби из второй задачи).

XII.32. Решение. Пусть событие A — «первый вынутый шар — чёрный», событие B — «второй вынутый шар — чёрный». Нас интересует $p(A \cap B) = p(B \mid A)\, p(A)$. Осталось заметить, что $p(B \mid A) = \frac{12}{22}$ и $p(A) = \frac{12}{22}$, откуда искомая вероятность равна $\frac{36}{121}$.

Замечание. События B и A в условиях данной задачи оказались независимыми, что очевидно и без всякого вычисления вероятностей. В самом деле, вероятность вытащить чёрный шар не зависит от того, что на какой-то из шаров из ящика перед этим кто-то посмотрел.

XII.33. 0,3. *Указание.* Воспользоваться формулой (2) со с. 286 учебника.

XII.35. *Указание.* Переписать формулу (4) теоремы со с. 282 учебника в виде $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) \geqslant$ $\geqslant p(A) + p(B) - 1$. Дальнейшее очевидно.

XII.36. $\frac{1}{5}$. *Указание.* Решение аналогично примеру 7 из §72 учебника.

XII.37. а) $\frac{1}{8}$.

б) $\frac{5}{128}$. **Решение.** Пусть событие B — «в четвёртый раз извлечён чёрный шар». Пусть событие A_k — «в k-й раз извлечён белый шар» ($k = 1;\ 2;\ 3$). Нужная нам вероятность по условию задачи — это $p(B \cap A_3) = p(B \mid A_3)\ p(A_3)$ (поскольку событие B без A_3 наступить не сможет, то $p(B) = p(B \cap A_3)$). Ясно, что если четвёртый раз вынут чёрный шар, то три предыдущие раза вынимались белые шары. Поэтому в ящике после трёх раз имеется 7 белых и 1 чёрный шар. Поэтому $p(B \mid A_3) = \frac{1}{8}$.

Найдём $p(A_3)$. Так как третье извлечение могло состояться только при условии, что первые два раза извлекли белые шары, получаем: $p(A_3) = p(A_3 \cap A_2) = p(A_3 \mid A_2)p(A_2)$. Ясно, что $p(A_3 \mid A_2) = \frac{5}{6}$.

Аналогично $p(A_2) = p(A_2 \cap A_1) = p(A_2 \mid A_1)p(A_1)$. При этом $p(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{4}$, а $p(A_1) = \frac{1}{2}$. Окончательно получаем $p(B) = \frac{5}{128}$.

Замечание. Обратим внимание, что эту задачу трудно решать с помощью классического определения. Имеющиеся исходы не равновероятны (не говоря уже о том, что их бесконечное количество, так как последовательность вытащенных первыми белых шаров может быть сколь угодно длинной).

XII.38. $\frac{15}{29}$. **Решение.** Интересующее нас событие является объединением следующих несовместных событий:

a_1 — первый стрелок попал сразу, $p(a_1) = 0{,}3$;

a_2 — первый стрелок промахнулся, второй промахнулся, затем первый стрелок попал. Эти события независимы, поэтому $p(a_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3$;

a_3 — первый стрелок промахнулся, второй промахнулся, первый промахнулся, второй промахнулся, затем первый попал, $p(a_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = (0{,}7 \cdot 0{,}6)^2 \cdot 0{,}3$;

...

a_k — стрелки промахивались до тех пор, пока первый своим k-м выстрелом не попал, $p(a_k) = (0{,}7 \cdot 0{,}6)^{k-1} \cdot 0{,}3$;

...

Поэтому искомая вероятность $p = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + (0{,}7 \cdot 0{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + \ldots + (0{,}7 \cdot 0{,}6)^{k-1} \cdot 0{,}3 + \ldots = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6} = \frac{15}{29}$.

XII.39. а) $\frac{1}{3}$. *Указание.* Это вероятность того, что A выиграл во второй партии. б) $\frac{1}{3}$. *Указание.* Вновь это вероятность выигрыша игроком A второй партии.

в) $\frac{1}{3}$. **Решение.** Оба игрока могут либо не выиграть ни одной партии, вероятность чего равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (результаты разных партий независимы), либо игрок A выиграет первую партию, а игрок B — вторую, либо B выиграет первую партию, а A — вторую. В двух последних случаях вероятности одинаковы и равны $\frac{1}{9}$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Замечание. Можно было решить эту задачу непосредственным подсчётом по классическому определению вероятности в пространстве элементарных исходов двух партий, т. е. множества пар, каждый элемент которых тоже пара.

XII.41. а) $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$.

б) Да. **Решение.** Например, если произошло событие B, т. е. вынут шар с чёрным цветом, то вероятность вынуть шар с красным цветом равна $\frac{1}{2}$, поскольку из шаров с чёрным цветом, которых имеется 2, только на одном есть белый. Значит, $p(A \mid B) = p(A)$.

в) Нет. **Решение.** $p(A \mid B \cap C) = 1$. г) Нет. д) Нет.

XII.42. *Указание.* В условиях задачи любые два встреченных автомобильных номера будут независимыми.

а) $\frac{1}{27}$.

б) $\frac{7}{27}$. **Решение.** Событие является объединением четырёх несовместных событий A, B, C и D: событие A — «все три номера кратны трём (вероятность этого события равна $\frac{1}{27}$)»; событие B — «первый номер не кратен трём, остальные два кратны трём (вероятность этого события равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$)»; события C и D — «не кратный трём номер встретился вторым» и «не кратный трём номер встретился третьим». Вероятность каждого из таких событий также равна $\frac{2}{27}$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{7}{27}$.

Замечание. Эту задачу можно считать пропедевтической для изучения схемы Бернулли. Желательно, чтобы дети решили её сами.

в) $3 \cdot \left(\frac{10}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \left(1 - \frac{1}{1000}\right) + \frac{270}{1000} \cdot \frac{3}{1000}\left(1 - \frac{3}{1000}\right) + \frac{720}{1000} \times\right.$ $\left.\times \frac{6}{1000}\left(1 - \frac{6}{1000}\right)\right)$. **Решение.** Рассмотрим два номера. Вероятность того, что они состоят из одинаковых цифр, зависит от того, есть ли в их составе одинаковые цифры, и не зависит от положения цифр в номере.

Если первый номер (таких номеров может быть 10) состоит из одной цифры, повторенной трижды (например, 111), то вероятность того, что второй номер с ним совпадёт, равна $\frac{1}{1000}$ (среди 1000 номеров есть только один из тех же цифр).

Если первый номер состоит из дважды повторенной одной цифры и другой цифры (таких номеров будет 270), то вероятность того, что второй номер будет состоять из тех же цифр, будет равна $\frac{3}{1000}$.

Если первый номер состоит из трёх различных цифр (таких номеров будет 720), то вероятность того, что второй номер будет состоять из тех же цифр, будет равна $\frac{6}{1000}$.

Таким образом, вероятность встретить два номера с одними и теми же цифрами равна $\frac{10}{1000}\cdot\frac{1}{1000}+\frac{270}{1000}\cdot\frac{3}{1000}+$ $+\frac{720}{1000}\cdot\frac{6}{1000}=\frac{514}{100000}$.

Будем считать, что вопрос задачи подразумевает, что третий номер должен состоять из других цифр. Тогда искомая вероятность считается как $3\cdot\left(\frac{10}{1000}\cdot\frac{1}{1000}\cdot\left(1-\frac{1}{1000}\right)+\right.$ $\left.+\frac{270}{1000}\cdot\frac{3}{1000}\left(1-\frac{3}{1000}\right)+\frac{720}{1000}\cdot\frac{6}{1000}\left(1-\frac{6}{1000}\right)\right)$ (множитель 3 появился за счёт того, что отличающийся номер может быть на одной из трёх позиций).

XII.43. 21. *Указание.* Задача сводится к нахождению наименьшего целого решения неравенства $1-(0{,}8)^x\geqslant 0{,}99$, откуда $x\geqslant\log_{0{,}8}0{,}01$. Наименьшим целым решением такого неравенства является число 21.

XII.44. *Указание.* По ответам ясна схема решения.

а) $0{,}7^3\cdot 0{,}9^2$. б) $3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9^2+2\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1$. в) $3\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9^2+0{,}7^3\cdot 0{,}1^2$. г) *Указание.* Ответ получается вычитанием из 1 суммы ответов предыдущих пунктов.

XII.45. а) Вероятность выигрыша первого игрока равна $\frac{2}{3}$, а вероятность выигрыша второго игрока равна $\frac{1}{3}$.

Решение. Решение аналогично решению задачи XII.38 со значениями вероятностей $\frac{1}{2}$.

Кроме подсчёта сумм геометрических прогрессий, может быть применено следующее рассуждение. Пусть вероятность выигрыша первого игрока равна p, а вероятность выигрыша второго игрока равна q.

Первый игрок с вероятностью $\frac{1}{2}$ выигрывает сразу, если выпадет герб, а с вероятностью $\frac{1}{2}$ он передаёт ход второму, который становится первым в оставшейся игре, т. е. второй выигрывает с вероятностью p при условии, что первый не выиграл сразу. Тогда $q=\frac{1}{2}p$ (*).

Если же второй не выиграл сразу же (а это произойдёт с вероятностью $\frac{1}{4}$), то в оставшейся игре вероятность выигрыша первого снова равна p. Таким образом, имеем уравнение $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$, откуда находим p, а затем из равенства (*) находим q.

Замечание. Интересно, что сумма полученных вероятностей равна 1, т. е. с вероятностью 1 игра рано или поздно закончится. Действительно, вероятность бесконечной последовательности решек равна нулю (это интуитивно очевидно, но может быть доказано непосредственно).

б) $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$. *Указание.* Воспользоваться решением задачи XII.45 а).

XII.46. 2,88. **Решение.** Пусть событие A — «ученик не сдал ЕГЭ по математике», событие B — «ученик не сдал ЕГЭ по русскому языку». Чтобы события A и B были независимыми, необходимо и достаточно выполнения равенства $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. В нашем случае, очевидно, вероятности равны соответствующим долям, поэтому события будут независимыми, только если $\frac{a}{100} = \frac{12}{100} \cdot \frac{24}{100}$, откуда $a = 2{,}88$.

XII.48. 3.

XII.49. а) 0,36332.

б) 0,21476. Если первый попал 1 раз, то второй должен попасть 0 раз, вероятность совместного наступления этих двух событий равна $3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2^3$.

Если первый попал 2 раза, то второй может попасть 0 или 1 раз. Вероятность совместного наступления этих событий равна $3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8)$.

Если первый попал 3 раза, то второй должен не попасть 3 раза. Вероятность совместного наступления этих событий равна $0{,}7^3 \cdot (1 - 0{,}8^3)$.

Искомая вероятность равна сумме найденных вероятностей.

XII.50. а) 0,992. **Решение.** Стрелок должен не попасть все три раза в девятку, т. е. искомая вероятность равна $1 - 0{,}2^3 = 0{,}992$.

б) 11. **Решение.** Вероятность при n выстрелах попадать всё время в десятку равна $0{,}8^n$. Вероятность попасть в девятку хотя бы один раз равна $1 - 0{,}8^n$. Нужно найти наименьшее решение неравенства $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9$, откуда $n \geqslant \log_{0,8} 0{,}1$. Следовательно, $n = 11$. *Указание.* Можно воспользоваться результатом задачи XII.43, поделив его пополам.

§ 73. Формула полной вероятности

Основным содержанием параграфа являются примеры применения формулы полной вероятности, а также формулы Байеса.

Следует подчеркнуть, что формула полной вероятности оценивает вероятность событий до того, как они произошли, если они могут произойти по нескольким причинам, а формула Байеса даёт вероятность того, что событие произошло в силу определённой причины. При этом формула полной вероятности является естественной, она интуитивно ощущается учениками. Из опыта работы авторов известно, что ученики совершенно спокойно решают задачи из предыдущего параграфа, сводящиеся фактически к применению формулы полной вероятности с небольшим количеством причин (например, XII.31, XII.32, XII.36, XII.42 в), XII.44 б). Новым является лишь применение метода составления рекуррентных соотношений (пример 15 из § 73 учебника), который может быть обобщён на составление систем дифференциальных уравнений.

Отметим, что материал данного параграфа не входит в содержание стандарта профильного уровня, однако существенно расширяет круг методов, становящихся доступными при решении задач по теории вероятностей.

Кроме того, обращаем внимание на появление нового способа решения задач с помощью дерева исходов (задачи XII.51, XII.56 а), XII.57 а), б)).

Решения и указания к задачам

XII.51. 5 : 11. **Решение.** Способ 1. Будем исходить из предположения, что ставка делится пропорционально вероятности выигрыша в том положении, когда игра была прервана. Пусть p — вероятность выиграть для второго игрока (для данной ситуации в игре).

Если второй игрок проиграл, то в полученной позиции и тому и другому осталось до выигрыша две партии. Игроки равносильны, поэтому вероятность выигрыша в этой позиции у каждого из них равна $\frac{1}{2}$.

Если же второй игрок выиграл, то он выиграет во всех случаях, кроме того, как первый выиграет три раза подряд, вероятность чего равна $\frac{1}{8}$. Таким образом, вероятность выигрыша второго игрока в этой позиции равна $\frac{7}{8}$.

По формуле полной вероятности получаем $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{11}{16}$. Тогда вероятность выигрыша для первого

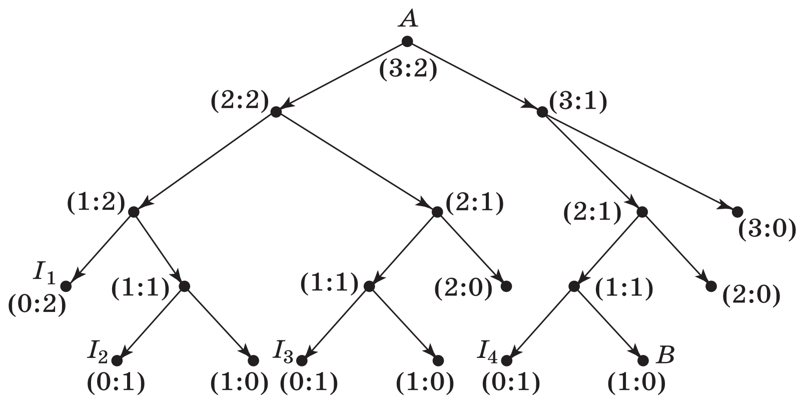


Рис. 12.2

игрока равна $\frac{5}{16}$. Таким образом, ставку следует разделить в отношении $5 : 11$.

Способ 2. Тот же самый результат можно получить, построив дерево исходов (рис. 12.2). На нём точки изображают позиции в игре, а рёбра — переходы от одной позиции к другой. Позиция обозначается количествами партий, которые нужно выиграть каждому из игроков для выигрыша всей игры. Стрелки, идущие влево, означают выигрыш первого игрока, а идущие вправо — выигрыш второго игрока. На данном рисунке все вероятности переходов равны $\frac{1}{2}$ (их можно записывать на рёбрах дерева, мы этого делать не будем, чтобы не загружать рисунок). Чтобы узнать вероятность того или иного пути, надо умножить вероятности рёбер, составляющих этот путь. Например, вероятность пути из A в B равна $\frac{1}{16}$.

Позиции, в которых выиграл первый игрок, — это позиции, у которых на первом месте стоит 0. Среди них есть одна позиция I_1, достигаемая с вероятностью $\frac{1}{8}$, и три позиции I_2, I_3, I_4, достигаемые с вероятностью $\frac{1}{16}$ каждая. Складывая указанные вероятности, получаем вероятность достижения выигрыша первым игроком, равную $\frac{5}{16}$.

Замечание. Метод построения дерева исходов можно применить также в решении задач XII.56 а) и XII.57 а), б).

XII.52. $\frac{7}{18}$. **Решение.** Пусть кости извлекаются последовательно. Возможны две ситуации для вытащенной первой кости — вытащен дубль (таких костей в наборе 7), к которому можно приставить 6 костей домино, или вытащен не дубль, к которому можно приставить 12 костей домино. По формуле полной вероятности имеем

$$p = \frac{7}{28} \cdot \frac{6}{27} + \frac{21}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

XII.53. $\frac{79}{190}$.

XII.54. 0,5.

XII.55. $\frac{21}{44}$. **Решение.** Пусть A — событие, состоящее в том, что из правого кармана извлекли монету первого вида.

Возможны 6 гипотез.

Гипотеза B_1 — вытащены 5 монет первого вида. Вероятность этого равна $\frac{C_6^5}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_1) = \frac{8}{12}$.

Гипотеза B_2 — вытащены 4 монеты первого вида и 1 монета второго вида. Вероятность этого равна $\frac{C_6^4 \cdot C_5^1}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_2) = \frac{7}{12}$.

Гипотеза B_3 — вытащены 3 монеты первого вида и 2 монеты второго вида. Вероятность этого равна $\frac{C_6^3 \cdot C_5^2}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_3) = \frac{6}{12}$.

Гипотеза B_4 — вытащены 2 монеты первого вида и 3 монеты второго вида. Вероятность этого равна $\frac{C_6^2 \cdot C_5^3}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_4) = \frac{5}{12}$.

Гипотеза B_5 — вытащены 1 монета первого вида и 4 монеты второго вида. Вероятность этого равна $\frac{C_6^1 \cdot C_5^4}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_5) = \frac{4}{12}$.

Гипотеза B_6 — вытащены 5 монет второго вида. Вероятность этого равна $\frac{1}{C_{11}^5}$, тогда $p = (A \mid B_6) = \frac{3}{12}$.

По формуле полной вероятности получаем

$$p(A) = \frac{8C_6^5 + 7C_6^4C_5^1 + 6C_6^3C_5^2 + 5C_6^2C_5^3 + 4C_6^1C_5^4 + 3}{12C_{11}^5} = \frac{21}{44}.$$

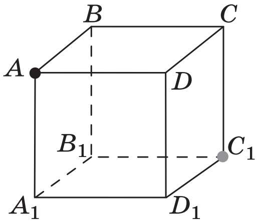


Рис. 12.3

XII.56. а) $\frac{2}{9}$. **Решение.** Обозначим искомую вероятность через p (рис. 12.3). Пусть q — вероятность побывать в вершине C не более чем за 3 хода, выйдя из вершины, соседней с вершиной A (из соображений поворотной симметрии куба относительно диагонали AC_1 ясно, что для всех вершин, соседних с A, эта вероятность будет одна и та же).

По формуле полной вероятности $p = \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}q = q$.

Заметим, что за следующий ход с вероятностью $\frac{2}{3}$ муха попадёт в вершину, соседнюю с вершиной C_1, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ вернётся обратно в вершину A. Таким образом, за два хода из вершины A в вершину C_1 добраться невозможно.

Пусть r — вероятность за не более чем два хода побывать в вершине C_1, выйдя из соседней вершины. Из упомянутых соображений симметрии эта вероятность одинакова для всех вершин, соседних с C_1. Поэтому $q = \frac{2}{3}r$.

Заметим, что с вероятностью $\frac{1}{3}$ из соседней с C_1 вершины муха попадёт в вершину C_1, а с вероятностью $\frac{2}{3}$ уйдёт в другую вершину, откуда за 1 ход уже не сможет попасть в C_1. Таким образом, $r = \frac{1}{3}$, откуда $q = p = \frac{2}{9}$.

Замечание. Тот же результат можно было получить, построив дерево исходов и учитывая то, что до вершины C_1 можно добраться за нечётное число ходов, не меньшее 3. Действительно, если взять систему координат с началом в точке A, оси которой идут по рёбрам куба, то координаты точки C_1 будут (1; 1; 1). За один ход одна из координат меняется на 1, поэтому количество ходов будет нечётно и не меньше 3. Трёхзвенных путей в C_1 из A существует 6, вероятность каждого пути равна $\frac{1}{27}$.

б) $\frac{2401}{6561}$. **Решение.** Будем действовать таким же образом, как и в предыдущем пункте. Будем искать вероятность того, что муха прилипнет за первые 10 ходов. Поскольку из вершины A до вершины C_1 можно добраться за нечётное число ходов, то, если муха не прилипла за 9 ходов, она не прилипнет и за 10. Поэтому достаточно найти вероятность того, что муха прилипнет за первые не более чем 9 ходов.

Обозначим за p_9 вероятность того, что муха прилипнет за 9 ходов, отправляясь из точки A. Пусть q_8 — вероятность того, что муха прилипнет не более чем за 8 ходов, отправляясь из точки, соседней с A. Тогда, аналогично задаче XII.56 а), получим $p_9 = q_8$. Пусть r_7 — вероятность прилипнуть за не более чем 7 ходов, отправляясь из точки, соседней с C_1.

Будем далее обозначать p_k — вероятность прилипнуть за не более чем k ходов, отправляясь из точки A, q_k — вероятность прилипнуть за не более чем k ходов, отправляясь из точки, соседней с A, наконец, r_k — вероятность прилипнуть за не более чем k ходов, отправляясь из точки, соседней с C_1.

Тогда можем записать равенства: $p_k = q_{k-1}$ (1), $q_k = \frac{2}{3}r_{k-1} + \frac{1}{3}p_{k-1}$ (2) (из вершины, соседней с A, с вероятностью $\frac{2}{3}$ муха попадёт в вершину, соседнюю с C_1, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ вернётся в вершину A), $r_k = \frac{2}{3}q_{k-1} + \frac{1}{3}$ (3) (из вершины, соседней с C_1, с вероятностью $\frac{2}{3}$ муха попадёт в вершину, соседнюю с A, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ придёт в вершину C_1, где и прилипнет).

Осталось только применить равенства (1), (2) и (3), уменьшив индексы:

$$p_k = q_{k-1} = \frac{2}{3}r_{k-2} + \frac{1}{3}p_{k-2} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}q_{k-3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}q_{k-3} = \frac{7}{9}q_{k-3} + \frac{2}{9},$$

откуда, с учётом равенства (1), получаем $p_k = \frac{7}{9}p_{k-2} + \frac{2}{9}$.

Так как из задачи XII.56 а) известно, что $p_3 = \frac{2}{9}$, тогда $p_5 = \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{32}{81}$, откуда $p_7 = \frac{7}{9}\cdot\frac{32}{81} + \frac{2}{9} = \frac{386}{729}$, а тогда

$$p_9 = \frac{7}{9}\cdot\frac{386}{729} + \frac{2}{9} = \frac{4160}{6561}.$$

Искомая в задаче вероятность равна $1 - p_9 = \frac{2401}{6561}$.

Замечание. Можно получить общую формулу для p_{2n+1}, руководствуясь полученным рекуррентным соотношением, доказав по индукции соотношение $p_{2n+1}=1-\left(\frac{7}{9}\right)^n$. Из этой формулы можно получить формулы для остальных вероятностей:

$$q_{2n}=1-\left(\frac{7}{9}\right)^n,\ \ r_{2n-1}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{3}=1-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}.$$

в) *Указание.* Первый путь доказательства состоит в том, чтобы в полученных в задаче XII.56 б) формулах устремить n к бесконечности и получить в пределе 1, т. е. вероятность того, что муха когда-либо прилипнет, будет равна 1.

Рассмотрим другой способ доказательства.

Обозначим $p(A)=p$, $p(B)=p(D)=p(A_1)=q$, $p(B_1)=$ $=p(D_1)=p(C)=r$. Аналогично рассуждениям предыдущего пункта получим соотношения $\begin{cases} p=q, \\ q=\frac{2}{3}r+\frac{1}{3}p, \\ r=\frac{2}{3}q+\frac{1}{3}. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем $p=q=r=1$.

XII.57. а) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$. **Решение.** Построим дерево исходов (рис. 12.4). Из него видно, что в нижней строчке a встречается два раза, а b и c — по три раза. Так как вероятность каждого пути равна $\frac{1}{8}$, то $p_3(a)=\frac{1}{4}$, $p_3(b)=p_3(c)=\frac{3}{8}$.

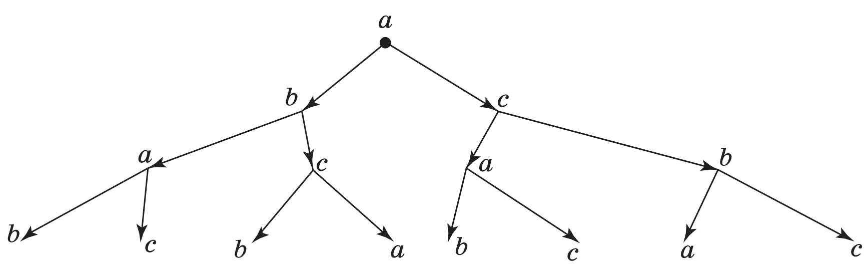


Рис. 12.4

б) Нет. **Решение.** Мысленно построим дерево исходов. На уровне, соответствующем n переменам состояния устройства, будет 2^n равновероятных исходов, среди которых некоторые k будут соответствовать данному состоянию. Соответствующая вероятность будет равна $\frac{k}{2^n}$, что, очевидно, не будет равно $\frac{1}{3}$ ни при каких значениях n.

в) **Решение.** Обозначим $a_n = p_n(a)$. В состоянии a на n-м переходе устройство может оказаться, если на предыдущем шаге оно будет в другом состоянии, что происходит с вероятностью $1 - a_{n-1}$. При этом вероятность из каждого из других состояний попасть в состояние a равна $\frac{1}{2}$. Поэтому получаем $a_n = \frac{1}{2}(1 - a_{n-1})$, $a_0 = 1$.

Аналогично получаем

$$b_n = \frac{1}{2}(1 - b_{n-1}),\ b_0 = 0 \text{ и } c_n = \frac{1}{2}(1 - c_{n-1}),\ c_0 = 0.$$

Выведем явную формулу для a_n, доказав заодно требуемое утверждение о пределе этой последовательности. Для этого в рекуррентной формуле $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_{n-1}$ «расщепим» константу $\frac{1}{2}$ в отношении коэффициентов перед членами последовательности, т. е. в отношении $2:1$. Имеем: $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_{n-1}$, откуда $a_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_{n-1}$, т. е. $a_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - a_{n-1}\right)$, а значит, $a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$. Таким образом, последовательность $a_n - \frac{1}{3}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $-\frac{1}{2}$, а значит, предел этой последовательности равен нулю, откуда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Однако поскольку $a_0 = 1$, то «нулевой член» геометрической прогрессии $a_n - \frac{1}{3}$ равен $\frac{2}{3}$, откуда следует, что $a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Таким образом, окончательно

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \qquad (1)$$

Аналогично получаем, что

$$b_n = c_n = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \qquad (2)$$

Впрочем, поскольку ясно, что при начальном состоянии устройства a состояния b и c равноправны, то вероятности нахождения устройства в состояниях b и c будут равны, а потому их можно найти как $b_n = c_n = \frac{1 - a_n}{2}$.

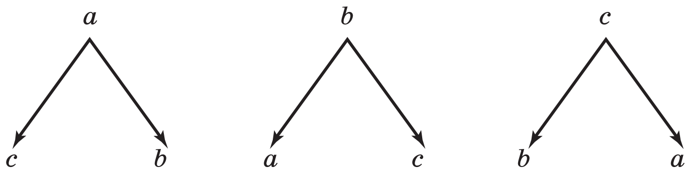


Рис. 12.5

г) **Решение.** Приведённая в утверждении задачи формула $\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k\equiv l} C_n^k$ задаёт какую-либо из вероятностей $p_n(a)$, $p_n(b)$, $p_n(c)$ в зависимости от остатка, даваемого числом n от деления на 3.

Действительно, в воображаемом дереве переходов из каждой вершины уходят две стрелки вниз — одна вправо, другая влево. Будем писать b на конце стрелки, идущей из a вправо, и c на конце стрелки, идущей из a влево. Аналогично будем писать c на конце стрелки, идущей из b вправо, и a на конце стрелки, идущей из b влево; будем писать a на конце стрелки, идущей из c вправо, и b на конце стрелки, идущей из c влево (рис. 12.5). Будем кодировать стрелку вправо как 1, а стрелку влево как -1. Тогда, например, чтобы устройство вернулось в состояние a, нужно, чтобы количества 1 и -1 различались на число, кратное 3.

Если среди n переходов будет k по стрелкам вправо, то остальные $n-k$ будут по стрелкам влево. Чтобы попасть из состояния a в состояние a, нужно, чтобы $(k-(n-k)) \vdots 3$, что бывает, если $k \equiv 2n(\mathrm{mod} 3)$. А выбрать k стрелок вправо среди n возможных можно C_n^k способами. Таким образом, например, при n, кратных 3, имеем $p_n(a)=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k\equiv 0} C_n^k$. Теперь утверждение задачи следует из задачи XII.57 в).

Замечание. Вычислить эту сумму можно и непосредственно. Найдём, например, $\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k\equiv 0} C_n^k$. Заметим, что эта сумма будет равна $\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\overline{\varepsilon})^n}{3}$, где ε — корень третьей степени из 1. В самом деле, если раскрыть все n-е степени по формуле бинома Ньютона, то для всех степеней k, не кратных 3, сумма $C_n^k + C_n^k\varepsilon^k + C_n^k\overline{\varepsilon}^k$ равна нулю. Преобразовав число $1+\varepsilon$ в тригонометрическую форму $1+\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $1+\overline{\varepsilon}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, получим, что $\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\overline{\varepsilon})^n}{3}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$. Теперь видно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}=\frac{1}{3}$. Кроме того, из этой формулы понятно, что в зависимости от остатка от деления n на 3 будут получаться формулы (1) и (2) из XII.56 в).

XII.58. а) $\frac{1}{2}$. **Решение.** Способ 1. Можно решить эту задачу по формуле схемы Бернулли. В самом деле, вероятность появления одного герба при n бросаниях монеты равна $\frac{C_n^1}{2^n}$, вероятность появления трёх гербов равна $\frac{C_n^3}{2^n}$, вероятность появления пяти гербов равна $\frac{C_n^5}{2^n}$ и т. д. Таким образом, вероятность выпадения нечётного числа гербов равна $\frac{C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots}{2^n}=\frac{1}{2}$ (поскольку сумма биномиальных коэффициентов с нечётными верхними индексами равна 2^n, см. задачу I.151).

Способ 2. Возможен и другой подход к решению этой задачи. Пусть p_n — искомая вероятность. После первого бросания монетки возможны два исхода: первый — выпал герб, и должно выпасть ещё чётное число гербов с вероятностью $1-p_{n-1}$; второй — выпала решка, и должно выпасть ещё нечётное число гербов с вероятностью p_{n-1}.

Таким образом, по формуле полной вероятности получаем $p_n=\frac{1}{2}(1-p_{n-1})+\frac{1}{2}p_{n-1}=\frac{1}{2}$.

б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. **Решение.** Вероятность выпадения герба равна $\frac{2}{3}$. Аналогично второму способу решения задачи XII.58 а) получаем $p_n=\frac{2}{3}(1-p_{n-1})+\frac{1}{3}p_{n-1}$. Таким образом, $p_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}p_{n-1}$.

Аналогично решению задачи XII.57 в) «расщепим» константу $\frac{2}{3}$ в отношении $1:\frac{1}{3}$, т. е. 3 : 1. Получим $p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}p_{n-1}$, откуда $p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-p_{n-1}\right)$, таким образом, последовательность $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $-\frac{1}{3}$. При этом $p_1 = \frac{2}{3}$, поэтому первый член этой геометрической прогрессии равен $\frac{1}{6}$. Следовательно, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Замечание. Аналогично решению задачи XII.58 а) можно получить $p_n = C_n^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + C_n^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} + \ldots$.

Так мы доказали равенство

$$C_n^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + C_n^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

XII.59. а) Вошедший ученик — отличник. **Решение.** Заметим, что вероятность отличника ответить на 2 вопроса из билета равна 1, вероятность троечника ответить на 2 вопроса из билета равна $\frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{9}{38}$, вероятность двоечника ответить на 2 вопроса равна $\frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{1}{19}$. Вероятность вошедшего случайно человека ответить на 2 вопроса равна $\frac{5}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{38} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{19} = \frac{221}{380}$. Тогда по формуле Байеса знаменатели выражений вероятностей того, что вошедший ученик — отличник, троечник или двоечник, одинаковы, а наибольший числитель будет в том случае, если вошедший ученик — отличник.

б) $\frac{3}{7}$. **Решение.** Вероятность отличнику ответить только на 1 вопрос равна нулю, вероятность троечнику ответить только на 1 вопрос равна $\frac{10 \cdot (20-10)}{C_{20}^2} = \frac{10}{19}$, вероятность двоечнику ответить только на 1 вопрос равна $\frac{5 \cdot (20-5)}{C_{20}^2} = \frac{15}{38}$. Вероятность того, что вошедший ученик — двоечник, по формуле Байеса равна $\dfrac{\frac{15}{38}}{\frac{15}{38} + \frac{10}{19}} = \frac{3}{7}$.

в) $\frac{27}{221} \cdot \frac{4}{7}$ и $\frac{190}{221} \cdot \frac{3}{7}$. *Замечание.* Во втором издании первый вопрос: какова вероятность того, что они оба троечники? **Решение.** Вероятность того, что ответивший на два вопроса — троечник, равна $\frac{27}{380} : \frac{221}{380} = \frac{27}{221}$ (см. задачу

XII.59 а)). Из задачи XII.59 б) получим, что вероятность того, что ответивший на 1 вопрос человек — троечник, равна $\frac{10}{19} : \frac{35}{38} = \frac{4}{7}$. Таким образом, искомая вероятность того, что вошедшими были двое троечников, равна $\frac{27}{221} \cdot \frac{4}{7}$. Вероятность того, что вошедшими были отличник и двоечник, равна $\frac{190}{221} \cdot \frac{3}{7}$.

XII.60. а) $\frac{4}{19}$. **Решение.** Вероятность кабану быть убитым двумя пулями равна $0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}38$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4}{0{,}38} = \frac{4}{19}$.

б) $\frac{625}{1881}$; $\frac{188}{855}$; $\frac{418}{1045}$. **Решение.** Разделим вначале кабана между парами охотников в соотношении вероятностей того, что кабан убит именно соответствующей парой. Эти вероятности для пар «первый—второй», «первый—третий», «второй—третий» соответственно равны $\frac{4}{19}$; $\frac{9}{19}$; $\frac{6}{19}$. Внутри каждой пары делим часть кабана пропорционально вероятностям попадания охотников этой пары. Например, первый охотник получит $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{19}$ кабана, будучи участником первой пары «первый—второй», и $\frac{5}{11} \cdot \frac{9}{19}$ кабана, будучи участником пары «первый—третий». Таким образом, первый получит $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{19} + \frac{5}{11} \cdot \frac{9}{19} = \frac{625}{1881}$ кабана, второй получит $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{19} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{19} = \frac{188}{855}$ кабана, третий получит $\frac{6}{11} \cdot \frac{9}{19} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{19} = \frac{418}{1045}$ кабана.

XII.61. 5. **Решение.** Пусть среди 5 изделий ровно 1 бракованное. Вероятность того, что оно попадётся, равна $\frac{1}{5}$. Если среди 5 изделий ровно 2 бракованных, то вероятность того, что при выборе одного оно будет бракованным, равна $\frac{2}{5}$, и т. д.

Тогда по формуле Байеса вероятность того, что бракованное изделие будет одно, равна $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}} = \frac{1}{15}$. Дальнейшие вероятности равны $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{15}$. Таким образом, наиболее вероятным является то, что среди 5 изделий все были бракованными (в решении мы предполагали, что наличие любого количества бракованных изделий среди 5 имеющихся равновероятно).

XII.62. $\dfrac{10^5}{C_{10}^1 + C_{10}^2 \cdot 2^5 + C_{10}^3 \cdot 3^5 + \ldots + C_{10}^{10} \cdot 10^5}$.

§ 74. Геометрическая вероятность

Особенностью геометрических вероятностей по сравнению с ранее изученной вероятностью является то, что пространство элементарных событий имеет бесконечное (несчётное) число элементов.

Обратим внимание, что геометрическая вероятность применяется лишь в том случае, когда есть основания полагать, что вероятность попадания в область пропорциональна мере этой области. Вообще говоря, такое предположение сделать весьма нелегко. Так, в примере 19 из § 74 учебника это предположение считалось интуитивно ясным, хотя никаких доказательных соображений не приводилось. Продолжением этого разговора как раз и является парадокс Бертрана, показывающий, как важно точно формулировать, пропорциональной какой именно мере будет вероятность.

Задачи XII.71 (задача о встрече) и XII.73 (задача Бюффона) могут служить хорошим дополнением к теории. По поводу задачи XII.73 учащимся можно рассказать о том, что из полученного результата следует, что с помощью бросания иголки на разлинованную плоскость можно подсчитывать приближённое значение числа π.

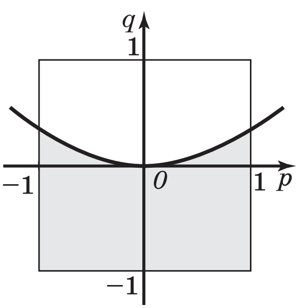


Рис. 12.6

Решения и указания к задачам

XII.63. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **XII.64.** $\dfrac{1}{24\sqrt{3}\pi}$.

XII.65. $\dfrac{13}{24}$. **Решение.** Уравнение имеет два вещественных корня, если $p^2 > 4q$. Изобразим множество возможных выборов коэффициентов точками квадрата на плоскости $(p;\ q)$ (рис. 12.6). Тогда площадь пространства элементарных событий равна 4, а площадь исследуемого события равна $2 + \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{p^2}{4}dp = 2\dfrac{1}{6}$. Искомая вероятность равна $\dfrac{13}{24}$.

XII.66. а) $\frac{3}{4}$. *Указание.* В остроугольном треугольнике сумма двух углов больше третьего, а в тупоугольном сумма двух углов меньше третьего. Таким образом, задача может быть сформулирована так: палку длиной π ломают на 3 части. Какова вероятность того, что из них нельзя сложить треугольник? Ответ на этот вопрос фактически дан в примере 19 учебника. Искомая вероятность равна 0,75. б) 0.

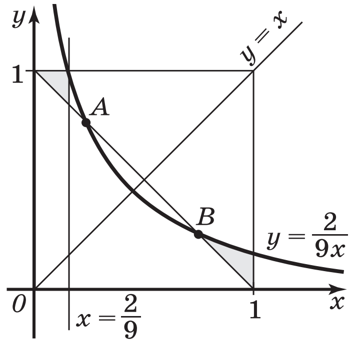


Рис. 12.7

XII.67. $\frac{4}{9}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{9}$. **Решение.** Изобразим элементарные события точками координатной плоскости (рис. 12.7). Из чертежа видно, что искомое событие состоит из двух равных частей, симметричных относительно прямой $y = x$.

Найдём площадь верхней части. Она равна сумме площади равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом $\frac{2}{9}$ и площади, ограниченной прямыми $x = \frac{2}{9}$, $x + y = 1$ и гиперболой $xy = \frac{2}{9}$. Эта площадь равна $\int\limits_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{9x} - (1 - x)\right)dx = \frac{2}{9}\ln\frac{3}{2} - \frac{13}{162}$. Таким образом, площадь верхней части равна $\frac{2}{9}\ln\frac{3}{2} - \frac{13}{162} + \frac{2}{81} = \frac{2}{9}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{18}$.

Тогда площадь всей закрашенной части, а значит, и искомая вероятность (поскольку площадь всего пространства элементарных событий равна 1), равна $\frac{4}{9}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{9}$.

XII.68. а) Нужно закрасить фигуру так, чтобы площадь её пересечения с треугольником составляла половину площади треугольника. б) Нужно закрасить фигуру той же площади, что и треугольник ABC, т. е. площадь которой равна половине площади квадрата. в) Такой фигурой может быть, например, треугольник ABD.

XII.69. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}\ln 2$ (рис. 12.8).

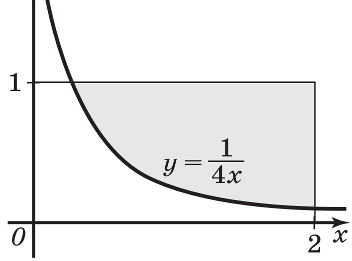


Рис. 12.8

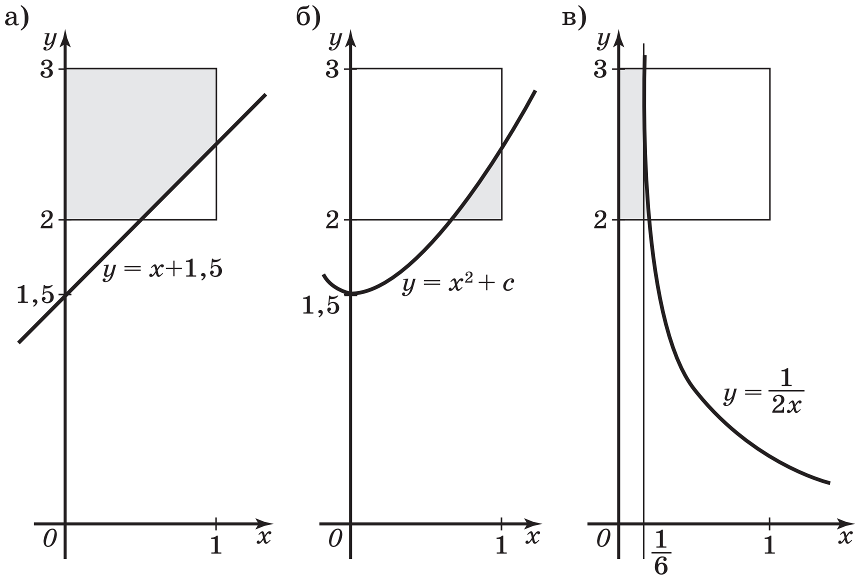


Рис. 12.9

XII.70. а) $\frac{7}{8}$ (рис. 12.9, *а*).

б) $\frac{7}{4}$. **Решение.** Пространством элементарных событий служит квадрат. Событие $y < x^2 + c$ будет непустым при $c > 1$. С ростом c площадь события будет увеличиваться, пока событие не совпадёт с пространством элементарных событий, т. е. не станет достоверным (поскольку точки события при меньших c будут точками аналогичного события при бо́льших c). При $c = 2$ площадь события равна $\frac{1}{3}$. Поэтому интересующее нас c меньше 2 и конфигурация чертежа такая, как на рисунке 12.9, *б*. Площадь интересующего нас события (а значит, и его вероятность, так как площадь пространства элементарных событий равна 1) равна $\int\limits_a^1 (x^2 + c - 2)dx = \frac{1 - a^3}{3} + (c - 2)(1 - a) = \frac{(1 - a)}{3}(a^2 + a + 3c - 5)$ (здесь за a обозначен положительный корень уравнения $x^2 + c = 2$, т. е. $a = \sqrt{2 - c}$). Выразив $c = 2 - a^2$, придём к уравнению $\frac{(1 - a)}{3}(1 + a - 2a^2) = \frac{1}{6}$, решив которое, найдём $a = \frac{1}{2}$, откуда $c = \frac{7}{4}$.

в) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **Решение.** Искомая вероятность равна площади заштрихованной фигуры (рис. 12.9, *в*), т. е. равна $\frac{1}{6}+\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{2x}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

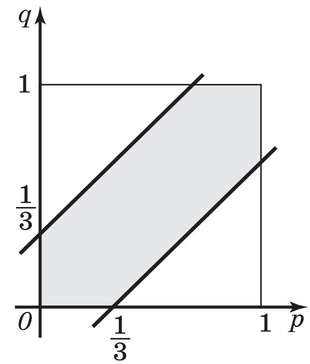


Рис. 12.10

XII.71. $\frac{5}{9}$. **Решение.** Изобразим пространство элементарных событий в виде точек на координатной плоскости (единица на осях соответствует одному часу, а за нуль на осях принят полдень). Таким образом, пространство элементарных событий — единичный квадрат.

Условие того, что двое встретятся, может быть записано как $|x-y|\leqslant\frac{1}{3}$. Из рисунка 12.10 сразу ясно, что площадь интересующего нас события (а значит, и искомая вероятность) равна разности между 1 и площадью двух равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длины $\frac{2}{3}$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{5}{9}$.

XII.72. а) См. рисунок 12.11, *а*. **Решение.** Основная сложность этой задачи по сравнению с задачей XII.65 в том, что с увеличением a меняется взаимное расположение параболы и квадрата. При малых a оно такое же, как в задаче XII.65, а затем (при $a>4$) становится таким, как на рисунке 12.11, *б*.

При $a\leqslant 4$ имеем $p(a)=\dfrac{2a^2+\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2}{4}dx}{4a^2}=\frac{1}{2}+\frac{a}{24}$.

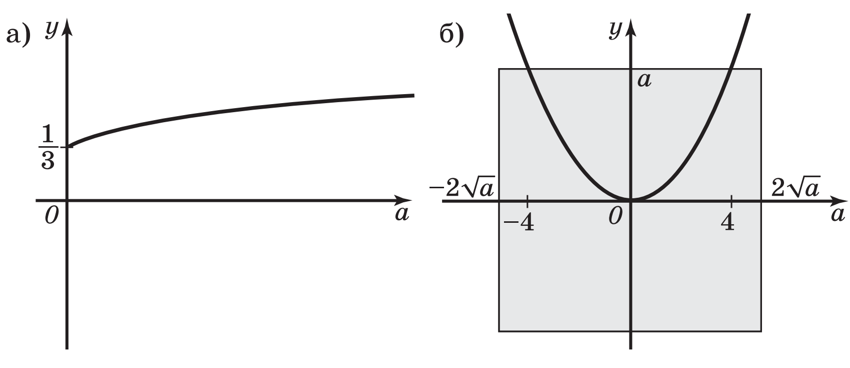


Рис. 12.11

При $a > 4$ имеем $p(a) = 1 - \dfrac{\int\limits_{-2\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}} \left(a - \dfrac{x^2}{4}\right) dx}{4a^2} = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt{a}}$.

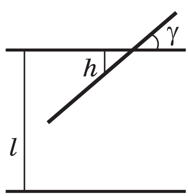
График функции $p(a)$ представлен на рисунке 12.11, *а* (для наглядности масштаб по оси абсцисс сжат по сравнению с масштабом по оси ординат).

б) *Указание.* Условие наличия двух положительных корней означает, что $p < 0$ и $q > 0$. Искомая функция получается из функции задачи XII.72 а) делением пополам (оно соответствует взятию $p < 0$) с последующим вычитанием $\dfrac{1}{4}$ (вероятности того, что $q < 0$).

в) *Указание.* Условие наличия вещественных корней разных знаков равносильно тому, что $q < 0$. Поэтому $p(a) = \dfrac{1}{2}$ при всех a (это геометрическая вероятность, рассмотренная на отрезке $[-a; a]$, из которого берутся наугад значения q).

XII.73. $\dfrac{2a}{l\pi}$. **Решение.** Рассмотрим рисунок 12.12, *а*, на котором изображены две линии из числа проведённых на плоскости, а также иголка длины a. Проведём из середины иголки перпендикуляр h к ближайшей из линий. Иголка пересечёт эту линию (и не пересечёт больше никакой другой, поскольку её длина меньше расстояния между линиями) в том и только в том случае, если $h \leqslant \dfrac{a}{2}\sin\varphi$.

а)



б)

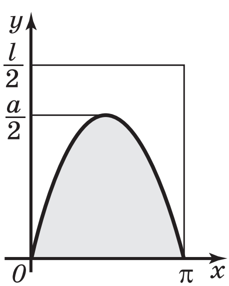


Рис. 12.12

Будем задавать положение иголки относительно ближайшей из параллельных линий двумя параметрами — h и φ, где φ — угол между иголкой и одним из направлений линий. Тогда h может принимать значения от 0 до $\dfrac{l}{2}$, а φ — от 0 до π.

Изобразим пространство элементарных событий в виде прямоугольника со сторонами $\dfrac{l}{2}$ и π на координатной плоскости (рис. 12.12, *б*). Тогда исследуемое событие изображается заштрихованной фигурой под синусоидой $h = \dfrac{a}{2}\sin\varphi$. Вероятность этого события равна $p = \dfrac{\int\limits_0^{\pi} \dfrac{a}{2}\sin\varphi d\varphi}{\dfrac{l\pi}{2}} = \dfrac{2a}{l\pi}$.

Глава XIII. Уравнения и неравенства

Эта глава посвящена наиболее традиционным школьным темам — решению уравнений и неравенств. Конечно, при изучении любой темы естественным образом возникает большая группа задач, связанная именно с решением специфических для этой темы уравнений и неравенств, и в нашем учебнике мы не стремились к искусственному разделению задач. Однако в завершение курса с целью обобщения и активизации разрозненных умений и навыков мы рассмотрим ещё раз всевозможные уравнения и неравенства курса в одной главе, дабы иметь возможность сравнить общие методы и выделить специфические, присущие узкому классу задач такого сорта. Особое внимание уделяется линии задач с параметрами. Теоретический материал не содержит здесь такого количества определений и теорем, как в предыдущих главах, зато изобилует примерами и более чем когда-либо напоминает «поваренную книгу» или набор рецептов, выстроенный в порядке, кажущемся авторам наиболее разумным.

По своему положению в курсе материал данной главы является завершающим перед итоговым повторением и подготовкой к экзаменам. Поэтому особенности изучения данной главы должны выбираться исходя из представлений об экзаменах, которые будут сдавать учащиеся, о том, что уже пройдено, об уровне подготовки класса и т. д.

Варианты планирования изучения материала 13-й главы при 4 часах в неделю и при большем количестве часов в неделю не различаются и представлены в таблице.

Глава XIII. Уравнения и неравенства	**50**
Некоторые способы решения уравнений. Целые рациональные и дробно-рациональные уравнения	4
Иррациональные уравнения и неравенства	6
Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	8
Тригонометрические уравнения и неравенства	8
Методы решения задач с параметром	10
Решение задач	12
Контрольная работа № 10	2

Поскольку фактически параграфы этой главы представляют собой указания к решению задач (без какой-либо значимой теории), комментарии к самим параграфам отсутствуют либо кратки, а основное внимание уделено решениям и ответам к задачам.

§ 75. Некоторые способы решения уравнений

§ 76. Целые рациональные и дробно-рациональные уравнения

В § 75 дан краткий обзор наиболее общих приёмов, используемых при решении уравнений. При этом особое внимание следует обратить на сопутствующие замечания и уточнения в определениях вида «произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, **а остальные имеют при этом смысл**». На определённом этапе именно такие замечания приобретают особый вес и становятся содержательной частью, а порой и основой решения.

В § 76 дан в основном материал для повторения. Пункт параграфа «Целые рациональные уравнения высших степеней» естественно восходит к главе III учебника для 10 класса («Многочлены»), а пункт «Замены в целых рациональных уравнениях» — к материалу 9 класса. Тем не менее учащимся необходимо напомнить все основные понятия и приёмы (например, важное понятие однородного уравнения и основные виды замен), поскольку они активно используются в дальнейшем при решении задач.

В задачах к этому параграфу не уделяется большого внимания решению неравенств, поскольку метод интервалов был подробно разобран и изучен в курсе 10 класса, а именно он является основным способом работы с неравенствами. Поскольку решение практически любого неравенства сводится к решению некоторого набора уравнений с последующим применением метода интервалов, мы ограничились в этом вводном разделе включением лишь нескольких примеров (см. задачу XIII.4).

Задачи раздела «Уравнения высших степеней» представляют собой стандартные упражнения. Идеи их решения полностью изложены в тексте учебника. Задачи XIII.1—XIII.4 используют подбор корней многочлена и понижение степени уравнения с использованием теоремы Безу, метод интервалов. Обратите внимание на то, что при решении неравенств в задаче XIII.4 частично используются уравнения из задачи XIII.3. Задача XIII.6 отрабатывает решение возвратных (симметрических и кососимметрических) уравнений, а задача XIII.7 — решение однородных уравнений.

Задачи XIII.8—XIII.12 раздела «Дробно-рациональные уравнения» традиционны и стандартны; решения и комментарии к ним мы не будем приводить, за редкими исключениями.

Решения и указания к задачам

XIII.1. а) 1 (два других корня иррациональные). б) -3; 2 (третий корень $\frac{1}{2}$). в) 0; 2; -2. г) -2; 1. д) -3; -2; 4. е) -4; -2; 3.

XIII.2. а) 1. б) -1; 2; $\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$. г) -1; $\frac{2}{3}$.

XIII.3. а) $\{-2; -1; 3\}$. б) $\{-7; -3; 1\}$. в) $\{1; 2 \pm \sqrt{5}\}$. г) $\{-1; -3 \pm \sqrt{11}\}$. д) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. е) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}$. ж) $\left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

XIII.4. а) $(-2; -1) \cup (3; +\infty)$. б) $(-\infty; -7) \cup (-3; 1)$. в) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. г) $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$. д) $\{1\} \cup [2; +\infty)$. е) $(-\infty; 1] \cup \{2\}$.

XIII.5. а) $\{-1; 1\}$. б) $\left\{2; -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right\}$. в) $\{-3; 1\}$. г) $\left\{0; \frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right\}$. д) $\{-2; 4\}$. е) $\{-4; 0\}$. ж) $\{1; 1 \pm \sqrt{5}\}$. з) $\{2; 3\}$. и) $\left\{-\frac{5}{2}; -2; \frac{1}{2}; 1\right\}$. к) $\{-3; 4\}$. л) $\{-1; 2\}$. м) $\{-3; 1\}$. н) $\{-3; 1\}$. о) $\{3 \pm \sqrt{5}\}$. п) $\left\{-8; -1; \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$. р) $\{-2; 11\}$. с) $\left\{\frac{1}{6}; 1; \frac{7 \pm \sqrt{601}}{12}\right\}$.

XIII.6. а) $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. *Замечание.* Во втором издании учебника условие будет исправлено: $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

б) $\left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}\right\}$. в) $\left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. г) $\left\{1; \frac{-11 \pm \sqrt{57}}{8}\right\}$. д) $\{1; 2\}$. е) $\left\{-2; 1; \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$. ж) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$. з) $\left\{-1; -\frac{1}{3}; \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}\right\}$.

XIII.7. а) $\{1; 3; -3 \pm \sqrt{11}\}$. *Замечание.* Во втором издании учебника условие исправлено: $(x^2 + 2x)^2 - (x + 2)(2x^2 - x) = 6(2x - 1)^2$. б) $\left\{-1; -\frac{1}{2}; 2; 4\right\}$. в) $\{-1; 2\}$.

г) $\left\{-\frac{5}{6}\right\}$. д) $\left\{\frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}\right\}$.

XIII.8. а) $\left\{0;\ \frac{-9\pm\sqrt{12}}{3}\right\}$. б) $\left\{1;\ -2\pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right\}$. в) $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$. г) $\{1\}$. д) $\left\{1;\ \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}\right\}$. е) $\left\{-1;\ \frac{1}{3};\ 3\right\}$.

XIII.9. а) $\{-5;\ 1;\ -1\pm\sqrt{6}\}$. б) $\{-1\}$. в) $\{0;\ 1\}$. г) $\left\{-2;\ 0;\ \frac{2\pm\sqrt{66}}{2}\right\}$. д) $\{-3;\ 1\}$.

XIII.10. а) $\{-3;\ 1;\ -7\pm\sqrt{61}\}$. б) $\left\{-\frac{9}{2};\ \frac{1}{10};\ \frac{8}{11};\ \frac{12}{5}\right\}$. в) $\left\{1;\ 3;\ \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

XIII.11. а) $\{-4;\ -1\}$. б) $\left\{-1;\ 9;\ \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}\right\}$. в) $\left\{1;\ \frac{1}{3};\ 3\right\}$. г) $\{-6;\ 3\}$. *Указание.* Чтобы увидеть удобную замену, нужно обе части уравнения умножить на знаменатель дроби в правой части и перегруппировать получившиеся множители в левой части уравнения.

XIII.12. *Указание.* Применить выделение полного квадрата (см. пример 18 из § 76 учебника). а) $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. б) $\left\{\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$. в) $\left\{\pm\frac{3}{\sqrt{11}};\ \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

XIII.13. а) $\left\{3\pm\sqrt{7};\ \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$. *Указание.* Заметить, что $x^2-5x+1=(x^2-4)-5(x-1)$. Тогда, введя двойную замену $u=x^2-4$ и $v=x-1$, прийти к однородному уравнению $u(u-5v)=6v^2$.

б) $\{1;\ 2\}$. **Решение.** В уравнении $x\cdot\frac{5-x}{x+1}\cdot\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$ вроде бы сразу видна замена $u=x$, $v=\frac{5-x}{x+1}$, но этот путь оказывается менее удобным, чем следующий, который мы приведём полностью.

Пусть $u=x\cdot\frac{5-x}{x+1}$, $v=x+\frac{5-x}{x+1}$. Из исходного уравнения $uv=6$. Но при этом $u+v=x\cdot\frac{5-x}{x+1}+x+\frac{5-x}{x+1}=\frac{5-x}{x+1}(x+1)+$ $+\,x=5$. Получаем систему $\begin{cases}uv=6,\\u+v=5,\end{cases}$ из которой $\begin{cases}u=3,\\v=2\end{cases}$

или $\begin{cases} u=2, \\ v=3. \end{cases}$ Уравнение $x \cdot \frac{5-x}{x+1} = 3$ решений не имеет. Если же $u = 2$, т. е. $\frac{x(5-x)}{x+1} = 2$, то $x = 2$ или $x = 1$ (убедитесь, что тогда $v = 3$).

в) $\{1\}$. г) $\{-5; -3\}$. **Решение.** $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$. Введём замену $x + 3 = t$. Уравнение преобразуется к виду $t^4 + (t + 2)^4 = 16$.

После раскрытия скобок получим $2t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t = 0$; $t(t^3 + 4t^2 + 12t + 16) = 0$; $t(t + 2)(t^2 + 2t + 8) = 0$. Отсюда $t = 0$ или $t = -2$. Окончательно $x = -3$ или $x = -5$.

§ 78. Уравнения и неравенства с параметром. Аналитическое исследование

После рассмотрения основных приёмов работы с определённым видом уравнений и неравенств есть два возможных варианта развития событий: перейти к системам уравнений и неравенств или обратиться к задачам с параметрами. Задачи с параметрами дают бо́льшую «глубину взгляда», позволяя устроить мини-исследование задачи и учесть частные случаи и сложности, которые могут возникнуть при их решении, если чуть-чуть изменить данные, «пошевелить» условие. Нам представляется, что решение задач с параметрами является одним из наиболее ценных навыков, которые можно приобрести в процессе решения алгебраических задач в старшей школе. Здесь учащиеся вынуждены всерьёз задумываться о существовании решений (ведь большая часть школьных задач решается исходя из принципа, что решение, причём несложное, у этой головоломки обязательно должно быть!), о количестве решений и их виде, о том, от каких дополнительных условий может зависеть количество решений и их вид.

Поэтому мы предлагаем разобраться с основными видами уравнений и неравенств с параметрами, чтобы учащиеся не удивлялись в дальнейшем тому, что каждый раздел в теме «Уравнения и неравенства» автоматически влечёт за собой соответствующий раздел «Уравнения и неравенства с параметрами», и чтобы главные навыки, привычка к работе с параметрами, связанные с ветвлением решения, перебором случаев, графическими представлениями, формировались как можно раньше и естественнее. Системы же уравнений и неравенств можно рассматривать и на завершающем этапе как вариант обобщения и повторения, включив сюда и системы с параметрами. Порядок изучения материала устанавливает учитель!

Мы начинаем с аналитических методов и самых простых уравнений и неравенств — линейных, где всё определяет коэффициент при переменной x, переходя к дробно-рациональным уравнениям и неравенствам и методу интервалов. Здесь имеет смысл выполнить все задания (например, в виде домашнего задания с обязательной проверкой и разбором в классе), поскольку это приучает к осторожному обращению с параметром и тщательному перебору случаев, даже если на первый взгляд решение кажется очевидным. С этой целью приведены ответы ко всем заданиям XIII.14—XIII.19 и решения к некоторым из них.

Задачи XIII.19 решаются стандартно с использованием метода интервалов, причём расположение корней относительно друг друга зависит от параметра. При этом в задачах XIII.19 а) и б) левая часть сразу раскладывается на множители, а вот в задачах XIII.19 в) и г) необходимо ещё учитывать условие существования корней (знак дискриминанта). В задачах XIII.19 в) и г) не лишним будет схематическое изображение графиков квадратных трёхчленов, стоящих в левых частях неравенств.

Решения и указания к задачам

XIII.14. а) Если $a \neq 0;\ 1$, то $x = \frac{3}{a^2 - a}$; если $a = 0$, $a = 1$, то $x \in \varnothing$. б) Если $a \neq -3;\ 3$, то $x = \frac{1}{a+3}$; если $a = -3$, то $x \in \varnothing$; если $a = 3$, то $x \in \boldsymbol{R}$. в) Если $a \neq -1;\ \frac{1}{3}$, то $x = \frac{1-a}{3a-1}$; если $a = -1$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = \frac{1}{3}$, то $x \in \varnothing$. г) Если $a > 0$, то $x = \pm\sqrt{a}$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a < 0$, то $x \in \varnothing$. д) Если $a > 0$, то $x \in \varnothing$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a < 0$, то $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-a}$. е) Если $a \leqslant 0$, то $x \in \varnothing$; если $a > 0$, то $x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$.

XIII.15. а) Если $a \neq -1;\ 0;\ 1$, то $x = \frac{a+2}{a+1}$; если $a = 0$, то уравнение не имеет смысла; если $a = -1$, то $x \in \varnothing$; если $a = 1$, то $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$. б) Если $a \neq 0;\ 2$, то $x = \frac{3a+7}{2-a}$; если $a = 0$, то уравнение не имеет смысла; если $a = 2$, то $x \in \varnothing$. в) Если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; если $a \neq 0$, то $x \in \varnothing$. г) Если $a \neq -\frac{5}{3};\ 1;\ \frac{11}{3}$, то $x = \frac{8}{a-1}$; если $a \in \left\{-\frac{5}{3};\ 1;\ \frac{11}{3}\right\}$, то $x \in \varnothing$.

XIII.16. а) Если $a < 1$ или $a > 4$, то $x \in \left(\frac{a-1}{3(a-4)};\ +\infty\right)$; если $1 < a < 4$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{a-1}{3(a-4)}\right)$; если $a = 1$, то неравенство не имеет смысла, если $a = 4$, то $x \in \varnothing$. б) Если $a > 3$, то $x \in \left(2;\ \frac{2a+1}{a-3}\right)$; если $a < 3$, то $x \in \left(\frac{2a+1}{a-3};\ 2\right)$; если $a = 3$, то неравенство не имеет смысла. в) Если $a < -9$ или $-1 < a < 1$, то $x \in \left(\frac{3a+7}{a+9};\ +\infty\right)$; если $-9 < a < -1$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{3a+7}{a+9}\right)$; если $a = 1;\ -9$, то $x \in \varnothing$; если $a = -1$, то неравенство не имеет смысла. г) Если $a < -10$ или $a > 2$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{5a-10}{2a+20}\right)$; если $-10 < a < 2$, то $x \in \left(\frac{5a-10}{2a+20};\ +\infty\right)$; если $a = -10$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 2$, то неравенство не имеет смысла. д) Если $a < -3$ или $a > \frac{4}{3}$, то $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$; если $-3 < a < 1$, то $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{4-3a}{a+3};\ +\infty\right)$; если $a = -3$, то $x \in (-\infty;\ 0)$; если $1 < a < \frac{4}{3}$, то $x \in \left(0;\ \frac{4-3a}{a+3}\right)$. е) Если $a > \frac{3}{2}$, то $x \in \left(-\infty;\ \frac{a^2-12a-2}{2a-3}\right)$; если $a < \frac{3}{2}$, то $x \in \left(\frac{a^2-12a-2}{2a-3};\ +\infty\right)$; если $a = \frac{3}{2}$, то $x \in \varnothing$.

XIII.17. $a \in \left[1;\ \frac{7}{3}\right]$. **Решение.** Изобразим график функции $y = kx + b$; тогда сразу видно, что при $k \neq 0$ неравенство $y < 0$ выполнено при всех $x < 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} k > 0, \\ b \leqslant 0. \end{cases}$ Если $a \neq -3$ и $a \neq 1$, то неравенство выполняется при всех $x < 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0, \\ 3a^2 - a - 14 \leqslant 0. \end{cases}$ Решением системы служит полуинтервал $\left(1;\ \frac{7}{3}\right]$. Значения $a = -3$ и $a = 1$ проверяются подстановкой.

XIII.18. $a = 2$.

XIII.19. а) Если $a < 1$, то $x \in (2a;\ 2)$; если $a > 1$, то $x \in (2;\ 2a)$; если $a = 1$, то $x \in \varnothing$. б) Если $a < -1$, то $x \in \left(\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}\right)$; если $a = -1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-1}\right)$; если $-1 < a < 1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-1}\right) \cup \left(\frac{1}{a+1}; +\infty\right)$; если $a = 1$, то $x \in \left(\frac{1}{a+1}; +\infty\right)$; если $a > 1$, то $x \in \left(\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}\right)$. в) Если $a < -\frac{1}{4}$, то $x \in \left(\frac{-2a-1+\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-2a-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$; если $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$, то $x \in \varnothing$; если $a = 0$, то $x \in (-2;\ +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$. г) Если $a < -\frac{4}{3}$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = -\frac{4}{3}$, то $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{-2\}$; если $-\frac{4}{3} < a < -1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-a+\sqrt{-3a^2-4a}}{2a+2}\right) \cup \left(\frac{-a-\sqrt{-3a^2-4a}}{2a+2}; +\infty\right)$; если $a = -1$, то $x > -1$; если $-1 < a < 0$, то $x \in \left(\frac{-a-\sqrt{-3a^2-4a}}{2a+2}; \frac{-a-\sqrt{-3a-4a}}{2a+2}\right)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

§ 79. Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами

Аналитический подход при решении задач с параметром далеко не всегда является наилучшим. Чаще предпочтительными оказываются графические методы (или сочетание графических и аналитических методов). В этом параграфе проводится необходимая подготовительная работа для грамотного и широкого применения графических методов: здесь мы учимся строить графические образы уравнений и неравенств.

Решения и указания к задачам

XIII.20. *Указание.* Основой для решения являются примеры 45 и 46 из § 79 учебника. г) Точка $O(0;\ 0)$. д) Точка $O(0;\ 0)$ и прямая $y = x + 1$. е) Точки: $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 1)$. а)—в), ж), з) См. рис. 13.1.

XIII.21. а)—е) См. рис. 13.2. ж)—л) См. рис. 13.3.

XIII.22. а)—е) См. рис. 13.4. ж)—л) См. рис. 13.5.

XIII.23. а)—д) См. рис. 13.6.

XIII.24. а)—г) См. рис. 13.7.

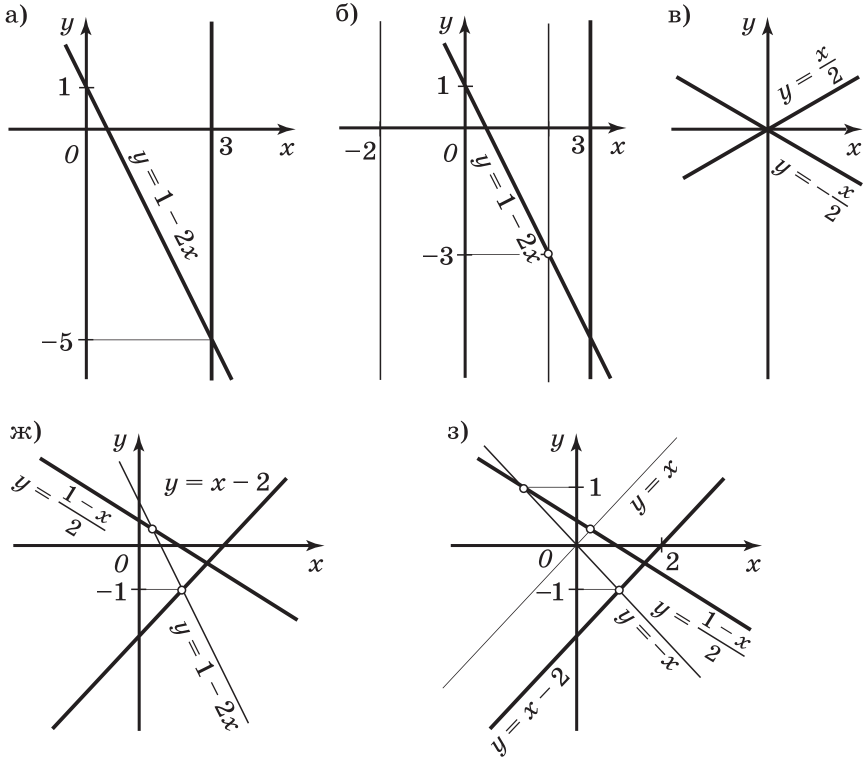


Рис. 13.1

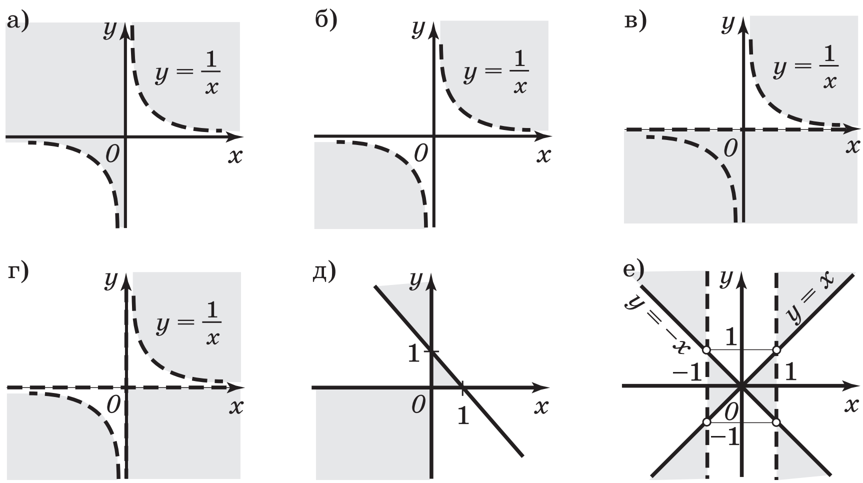


Рис. 13.2

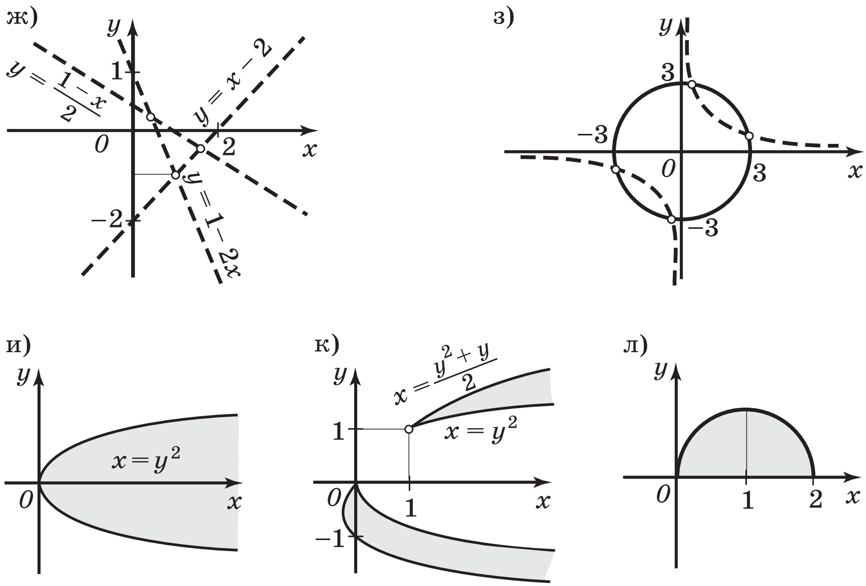


Рис. 13.3

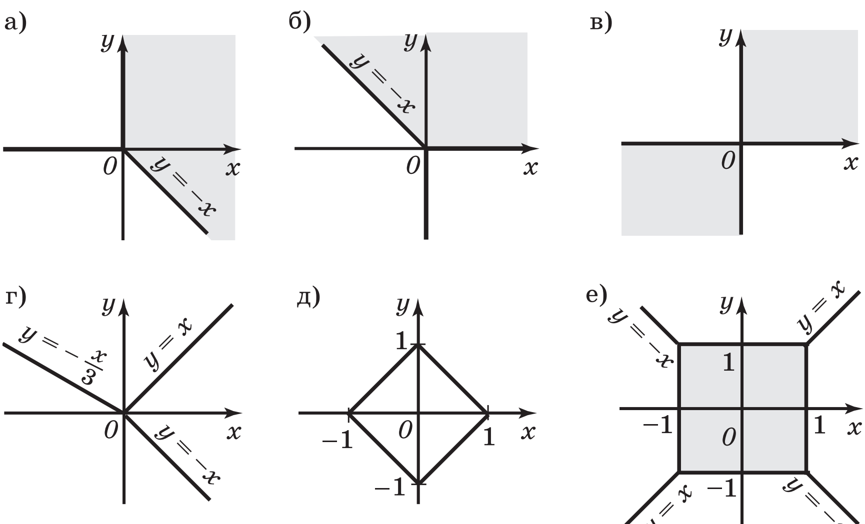


Рис. 13.4

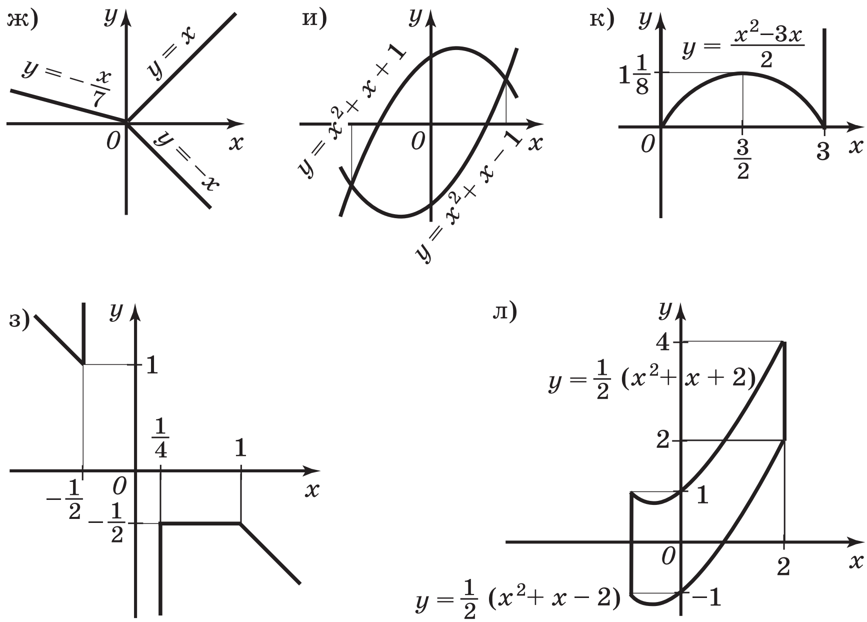


Рис. 13.5

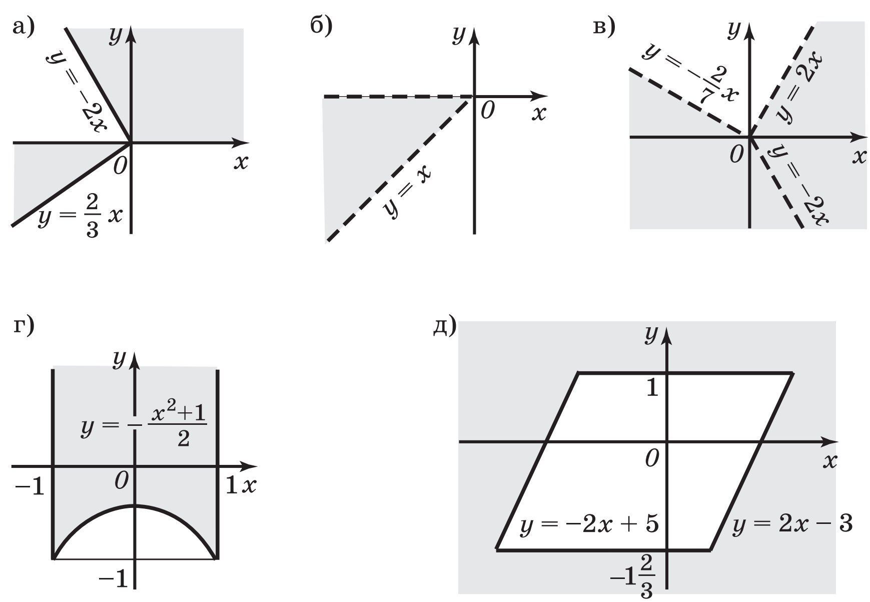


Рис. 13.6

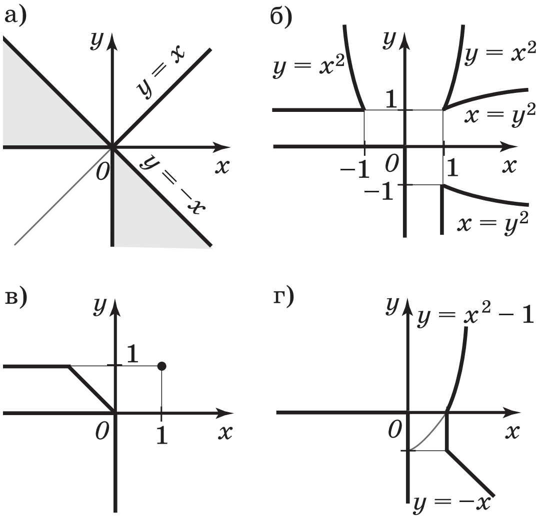


Рис. 13.7

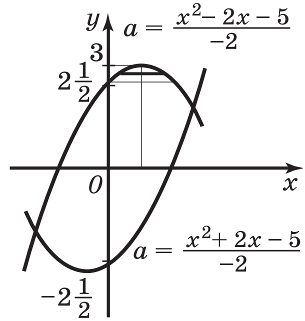


Рис. 13.8

§ 80, § 81. Графические методы решения уравнений и неравенств с параметрами

Эти два параграфа представляются исключительно важными, и читать их следует очень внимательно. Особенно активно на протяжении этой главы будет использоваться § 80 (для решения иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических задач с параметром). В этом наборе заданий всё внимание сознательно отдано плоскости $(x; a)$ в силу простоты использования и наглядности результата (задачи, в которых удобнее использовать плоскость $(x; y)$, появятся позже, в разделе, посвящённом иррациональным уравнениям и неравенствам). Обратите особое внимание на номер XIII.45 (см. комментарий ниже).

Решения и указания к задачам

XIII.25. $a = -1$. **XIII.26.** $a = -1$.

XIII.27. $a = -1$ или $a = -\frac{3}{4}$. **XIII.28.** $a < -\frac{7}{3}$ или $a > -2$.

XIII.29. $a \geqslant \frac{1}{2}$. **XIII.30.** $a > -1$. **XIII.31.** $a \in (-2; 0)$.

XIII.32. $a \in \left(-\sqrt{2}; -\frac{16}{17}\right) \cup (0; \sqrt{2})$. **XIII.33.** $a = -3$ или $a = 1$.

XIII.34. $a = 0$ или $a = 4$. **XIII.35.** $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

XIII.36. $a \in (-\sqrt{6}; \sqrt{12}) \setminus \{0; 1\}$. **XIII.37.** $a \leqslant 0$ или $a > 12$.

XIII.38. $a \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{6}; \frac{7}{2}\right] \cup [7; +\infty)$.

XIII.39. $a \in \left(2\frac{1}{2}; 3\right]$. **Решение.** Сначала в плоскости $(x;\ a)$ построим график уравнения $x^2 + 2|x - a| = 5$. Этот график (рис. 13.8) разбивает плоскость на две области. Неравенство задаёт внутреннюю из этих областей (содержащую точку (0; 0)). Все решения неравенства положительны, если отрезок прямой $a = \text{const}$, находящийся в этой области, целиком располагается в правой полуплоскости. Это возможно только при $2{,}5 < a \leqslant 3$ (см. рис. 13.8).

XIII.40. $a = \frac{13}{16}$ или $a = 15\frac{3}{4}$.

XIII.41. $a < -\frac{21}{4}$ или $a > \frac{13}{4}$. *Указание.* Условие задачи равносильно тому, что все значения функции $y = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ больше 2, т. е. **для всех** $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2$ (т. е. прямая $a = \text{const}$ должна целиком оказаться в множестве, задаваемом этим неравенством).

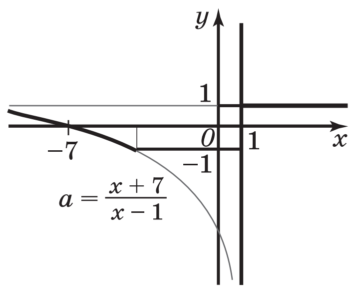


Рис. 13.9

XIII.42. Если $|a| > 1$, то $x = 1$; если $|a| < 1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a+7}{a-1}$; если $a = 1$, то $x \in [1; +\infty)$; если $a = -1$, то $x \in [-3; 1]$. См. рис. 13.9.

XIII.43. Если $a < -2$, то $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{17 - 4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17 - 4a}}{2}\right]$; если $-2 \leqslant a < 2$, то $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{17 + 4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17 - 4a}}{2}\right]$; если $a \geqslant 2$, то $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{17 + 4a}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17 + 4a}}{2}\right]$.

XIII.44. а) Если $a \leqslant -8$ или $a \geqslant 1$, то $x \in \varnothing$; если $-8 < a \leqslant 0$, то $x \in \left(-\frac{a+6}{2}; -2 + \sqrt{1 - a}\right)$; если $0 < a < 1$, то $x \in (-2 - \sqrt{1 - a}; -2 + \sqrt{1 - a})$. б) Если $a \leqslant 0$ или $a > \frac{9}{4}$, то $x \in \varnothing$; если $0 < a \leqslant 2$, то $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{9 - 4a}}{2}; 1 - \sqrt{4 - 2a}\right)$; если $2 < a \leqslant \frac{9}{4}$, то $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{9 - 4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{9 - 4a}}{2}\right]$.

XIII.45. а) $-4 \leqslant a \leqslant 4$. б) $a = \pm 4$. в) $a \in [-4; -3)$. г) $a \in (2; 4]$. д) $a \in \left[-4; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{4}; 4\right]$. е) $a \in \left(-3\frac{1}{4}; \frac{7}{16}\right)$. ж) $a \in \left[-3\frac{1}{8}; -\frac{1}{12}\right]$. з) $a \in \left[-4; -2\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 4\right]$. и) Если $a < -4$, то $x \in \varnothing$; если $a = -4$, то $x = -2$; если $-4 < a < -2$, то $x \in [-2; 2a + 6]$; если $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{12}$, то $x \in [-2; 2]$; если $-\frac{1}{12} < a < 2$, то $x \in \left[-2; \frac{-1-\sqrt{1+12a}}{3}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{1+12a}}{3}; 2\right]$; если $a = 2$, то $x \in \{-2\} \cup \left[\frac{-1+\sqrt{1+12a}}{3}; 2\right]$; если $2 < a < 4$, то $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{1+12a}}{3}; 2\right]$; если $a = 4$, то $x = 2$; если $a > 4$, то $x \in \varnothing$.

Замечание. Задача XIII.45 является в некотором роде ключевой ко всему разделу, подводящей итог всему сказанному в параграфе и обобщающей различные типы заданий, предложенные в § 79 и 80. Конечно, начинать нужно с построения графического образа системы, а потом уже с использованием готовой картинки решать предложенные задания и составлять свои. Подробное обсуждение этой задачи может стать материалом целого урока (это удобно, поскольку здесь нет технических сложностей), а в качестве домашнего задания можно предложить учащимся составить каждому своё оригинальное задание, использовав для этого, например, задачи к § 81.

§ 77. Системы алгебраических уравнений и неравенств

С понятием системы уравнений учащиеся знакомы с 7 класса, а в 9 классе уже рассматривались некоторые типы систем нелинейных уравнений (в частности, однородные и симметрические системы в соответствии с программой для классов с углублённым изучением математики), так что материал этого параграфа представляет собой обобщающее повторение.

Задачи XIII.46—XIII.49 представляют собой просто набор несложных упражнений (частично — теоретического характера), иллюстрирующих и дополняющих текст параграфа. Задачи XIII.50—XIII.55 решаются стандартно указанными методами. Пояснения будут приведены лишь к некоторым из них (где решение видно не сразу).

XIII.46. а) $\{2\}$ (заметим, что система с одной переменной!). б) $\varnothing$.

XIII.50. а) $\{(3;\ 4);\ (3;\ -4);\ (-3;\ 4);\ (-3;\ -4)\}$. б) $\{(4;\ 3);\ (4;\ -3)\}$.

XIII.51. а) $\{(7;\ 3);\ (-7;\ -3)\}$. б) $\{(-2;\ 1);\ (-1;\ 2)\}$.

XIII.52. а) $\left\{(0;\ 0);\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

XIII.53. а) $\{(1;\ 1);\ (2;\ 2)\}$. б) $\left\{(0;0);(2;-1);\left(-\frac{10}{7};-\frac{4}{7}\right)\right\}$.

XIII.54. а) $\left\{(1;\ 3);\ (-1;\ -3);\ \left(\sqrt{\frac{19}{3}};\ \sqrt{\frac{19}{3}}\right);\ \left(-\sqrt{\frac{19}{3}};\ -\sqrt{\frac{19}{3}}\right)\right\}$.

б) $\left\{(0;\ \pm\sqrt{2});\ (1;\ 1);\ (-1;\ -1);\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{3}{\sqrt{5}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right\}$.

в) $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1)\}$. г) Одно целочисленное решение $(1;\ 1)$ и два иррациональных: $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{\sqrt[3]{-68+20\sqrt{13}}};\ \sqrt[3]{\frac{2}{-17+5\sqrt{13}}}\right)$ и

$\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{\sqrt[3]{-68-20\sqrt{13}}};\ \sqrt[3]{\frac{2}{-17-5\sqrt{13}}}\right)$. д) $\left\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1);\ \left(\frac{2}{\sqrt{13}};\ \frac{5}{\sqrt{13}}\right);\right.$

$\left.\left(-\frac{2}{\sqrt{13}};\ -\frac{5}{\sqrt{13}}\right)\right\}$. е) $\{(3;\ 2);\ (-3;\ -2)\}$. ж). $\{(1;\ 3);\ (-1;\ -3)\}$.

XIII.55. а) $\{(3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$. б) $\{(3;\ 1);\ (1;\ 3)\}$. в) $\{(4;\ 1);\ (1;\ 4)\}$. г) $\{(3;\ -2);\ (-2;\ 3);\ (1+\sqrt{6};\ 1-\sqrt{6});\ (1-\sqrt{6};\ 1+\sqrt{6})\}$. д) $\{(3;\ 3);\ (-2+\sqrt{15};\ -2-\sqrt{15});\ (-2-\sqrt{15};\ -2+\sqrt{15})\}$. е) $\{(2;\ 0);\ (0;\ -2)\}$. ж) $\{(3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$. з) $\{(3;\ 1);\ (1;\ 3)\}$.

XIII.56. а) $\{(9;\ 12);\ (-12;\ -9)\}$. б) $\{(10;\ 7);\ (-7;\ -10)\}$.

XIII.57. а) $\{(1;\ 2);\ (2;\ 1)\}$.

б) $\{(3;\ 1);\ (-3;\ -1);\ (-1;\ -3);\ (1;\ 3)\}$.

г) $\{(3;\ 4);\ (4;\ 3)\}$.

в) $\left\{(2;\ 1);\ (1;\ 2);\ (-1;\ -2);\ (-2;\ -1);\ \left(\frac{\sqrt{5}}{5};\ \frac{\sqrt{5}}{10}\right);\ \left(\frac{\sqrt{5}}{10};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right);\right.$

$\left.\left(-\frac{\sqrt{5}}{5};\ -\frac{\sqrt{5}}{10}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{10};\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$.

д) $\left\{\left(\frac{1}{2};\ 5\right);\ \left(-\frac{1}{2};\ -5\right);\ (2;\ 5);\ (-2;\ -5)\right\}$.

е) $\{(2;\ 1);\ (1;\ 2);\ (-2;\ 1);\ (1;\ -2);\ (0;\ -3);\ (-3;\ 0)\}$.

ж) *Указание*. Замена $\begin{cases} 2x + y = u, \\ y - x = v \end{cases}$ становится видна после разложения на множители левой части первого уравнения: $\begin{cases} (2x + y)(x - y) = 5, \\ 2(y - x) = (2x + y)^2 + 1. \end{cases}$

XIII.58. а) $\{(0;\ 0);\ (\pm\sqrt{7};\ \pm\sqrt{7});\ (\sqrt{19};\ -\sqrt{19});\ (-\sqrt{19};\ \sqrt{19});$ $(\pm 2;\ \pm 3);\ (\pm 3;\ \pm 2)\}$.

б) $\{(0;\ 0);\ (4;\ 4);\ (1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3});\ (1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3})\}$.

в) $\left\{(0;\ 0);\ (2;\ -2);\ (-2;\ 2);\ (\sqrt{6};\ \sqrt{6});\ (-\sqrt{6};\ -\sqrt{6});\right.$ $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2};\ \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}\right);$ $\left.\left(\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2};\ \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}\right)\right\}$.

г) $\left\{(\sqrt[4]{8};\ \sqrt[4]{2});\ (-\sqrt[4]{8};\ -\sqrt[4]{2});\ \left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\ \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\ \left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\ -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)\right\}$.

XIII.59. а) $\{(1;\ 2)\}$. б) $\left\{(2;\ 1);\ \left(\frac{19\sqrt[4]{4}}{4};\ -\frac{17\sqrt[4]{4}}{4}\right)\right\}$. в) $\{(2;\ 1);$ $(-2;\ -1)\}$; г) $\{(2;\ 1)\}$. д) $\varnothing$. е) $\{(4;\ 4;\ -4)\}$.

XIII.60. *Указание*. Во всех пунктах используется общая идея: следствия системы накладывают ограничения на переменные. а) $\{(3;\ 2)\}$. **Решение.** Из первого уравнения системы $\begin{cases} 4 - y^2 = (2x - 3y)^2, \\ x^2 - xy^2 = -9 + 2x \end{cases}$ следует, что $y^2 \leqslant 4$. Второе уравнение рассмотрим как квадратное относительно x, получим $x^2 - x(y^2 + 2) + 9 = 0$. Дискриминант $D = (y^2 + 2)^2 - 36$ должен быть неотрицательным, а это возможно только при $y^2 \geqslant 4$. Таким образом, система может иметь решения только при $y^2 = 4$. Подставляем и проверяем пары решений $y = 2$, $x = 3$ (является решением) и $y = -2$, $x = -3$ (не является решением).

в) $\{(1;\ 0);\ (0;\ 1)\}$. **Решение.** Перепишем систему $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} y = \sqrt[3]{1 - x^3}, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$ Из второго уравнения следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Два решения видны сразу: $(1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$. Докажем, что других решений нет. (Здесь полезно нарисовать графики обоих уравнений.) При $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ верны неравенства $x^4 < x^3$, $y^4 < y^3$, т. е. $x^4 + y^4 < x^3 + y^3$. Кроме того, при $0 < x < 1$ в первом уравнении $y > 0$. Таким образом, при $0 < x < 1$ кривые $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и $x^4 + y^4 = 1$ общих точек не имеют. Ещё проще ситуация в случае $-1 \leqslant x < 0$: в первом уравнении $y > 1$, а во втором уравнении $|y| \leqslant 1$. Значит, других решений система не имеет.

§ 82. Иррациональные уравнения и системы

Все необходимые, а порой и весьма подробные пояснения изложены в тексте параграфа, который (как и следующий § 83, посвящённый иррациональным неравенствам) состоит из подробных объяснений того, как обращаться с такого сорта задачами, и большого количества примеров. Как и обычно, к задачам, которые необходимо решить, относятся технически несложные задачи группы А (номера XIII.61—XIII.65). Задачи группы В предназначены для учащихся и классов с хорошо развитыми навыками. В принципе для учащихся этот раздел часто оказывается сложнее, чем, например, показательные и логарифмические уравнения, поскольку здесь, как подчёркивается в тексте учебника, появление посторонних корней, как правило, не связано с областью определения уравнения, что создаёт у учащихся, которые не сталкивались с этим ранее, некоторый психологический дискомфорт.

В задачах XIII.61—XIII.62 уравнения решаются стандартными способами, которые были разобраны в учебнике (уединение радикала, возведение в степень и т. д.). При этом необходимым элементом решения является проверка или (для любителей) наложение дополнительных условий и использование равносильных систем. Заметим, что при проверке не нужно описывать сам процесс: достаточно просто написать, «подходят» ли полученные числа (т. е. являются ли найденные числа корнями исходного уравнения) или являются посторонними корнями.

В некоторых задачах полезно обратить внимание на область определения (например, в задачах XIII.61 о) и с)). В задаче XIII.62 б) удобно воспользоваться соображениями монотонности.

XIII.61. а) $\{-2; 3\}$. б) $\{3\}$. в) $\{3\}$. г) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. д) $\{7\}$. е) $\{3\}$. ж) $\{-2\}$. з) $\{-2\}$. и) $\left\{-\frac{7}{6}\right\}$. к) $\{-7; 8\}$. л) $\{9\}$. м) $\{10\}$. н) $\{8\}$. о) $\{3\}$. п) $\varnothing$. р) $\left\{\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$. с) $[3; +\infty) \cup \{0\}$.

XIII.62. а) $\{\pm 3\sqrt{21}\}$. б) $\{2\}$. в) $\{-61; 30\}$. г) $\left\{-3; -\frac{1}{2}; 2\right\}$. д) $\left\{4\frac{11}{13}\right\}$.

XIII.63. а) $\{0; 2\}$. б) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$. в) $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. г) $\{-1\}$. д) $\{2\}$. е) $\{-3; 6\}$. ж) $[1; +\infty)$. з) $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$. *Указание.* Все уравнения решаются с использованием несложных замен.

XIII.64. а) $\{2\}$. *Указание.* Замена $t = \sqrt[3]{x^3 + x - 2}$ приводит к стандартно решаемому уравнению $t^3 + t - 10 = 0$.

б) $\{-5; 2\}$. *Указание.* Ввести замену $u = \sqrt[3]{3 - x}$, $v = \sqrt[3]{6 + x}$.

в) $\{1; 2; 3\}$.

XIII.65. *Указание.* Использовать монотонность.

а) $\{4\}$. б) $\{1\}$. в) $\{0\}$. г) $\{1\}$. д) $\{1\}$.

XIII.66. а) $\left\{\frac{25}{16}\right\}$. б) $\{3\}$; в) $\{-6 \pm \sqrt{33}\}$; г) $\{-2; 0\}$; д) $\left\{-\frac{16}{25}\right\}$.

XIII.67. а) $\left\{3; \frac{9}{8}(9 - \sqrt{97})\right\}$. б) $\{8\}$. в) $\{5\}$. *Указание.* Замена $t = \sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4}$.

г) $\{3\}$. д) $\left\{\frac{841}{144}\right\}$. е) $\{1\}$. ж) $\{5\}$.

XIII.68. а) $\{0\}$. б) $\{3\}$. *Указание.* $\sqrt{x - 2} = \sqrt[3]{5 + x} - 1$. Воспользоваться заменой $u = \sqrt{x - 2}$, $v = \sqrt[3]{5 + x}$. в) $\{-2; -1; 7\}$.

г) $\left\{8; 8 \pm 12\sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$.

д) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $u = \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x}$,

$v = \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x}$, тогда $\begin{cases} u + v = 1, \\ u^5 + v^5 = 1. \end{cases}$ е) $\{16; 81\}$. ж) $\{8\}$.

XIII.69. а) $\{-1; 1\}$. б) $\left\{0; -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

в) $\left\{3; \frac{1-3\sqrt{2}}{2}\right\}$. *Указание.* Внести множитель под знак радикала.

г) $\{1; 2\}$. **Решение.** Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}$ на выражение, сопряжённое знаменателю, получим $\frac{2x+1+2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}}{3} = 2x - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = 4(x-1)$. Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x-1} \end{array}\right. \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$ Проверка показывает, что оба корня подходят.

д) $\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. е) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{-1-2\sqrt{2}}{4}\right\}$. ж) $\{1\}$.

з) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. *Указание.* Переписать уравнение в виде $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x} = \sqrt{4x+2} + \sqrt{x-1}$ и возвести в квадрат.

и) $\{7; 38\}$.

XIII.84. а) $\{(5; 4); (5; -4)\}$. б) $\{(4; 4); (2; 1)\}$. в) $\{(3+\sqrt{6}; -2-\sqrt{6})\}$. г) $\left\{\left(\frac{11+\sqrt{41}}{8}; \frac{7+\sqrt{41}}{4}\right)\right\}$. д) $\{(2; 1)\}$. е) $\left\{\left(\frac{1}{2}; 1\right)\right\}$.

XIII.85. а) $\{(4; 9); (9; 4)\}$. б) $\{(1; 8); (8; 1)\}$. в) $\{5; 7)\}$. г) $\{(3; 2)\}$.

XIII.86. а) $\left\{(-1; -2); \left(-4; -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

б) $\{(8; 4)\}$. г) $\varnothing$.

XIII.87. $a = \frac{1}{4}$. *Указание.* Задачу решать графически (в плоскости $(x; y)$).

XIII.89. $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **Решение.** Возможно аналитическое или графическое решение. Приведём графическое решение. Пучок прямых $y = ax - a - 1$ проходит

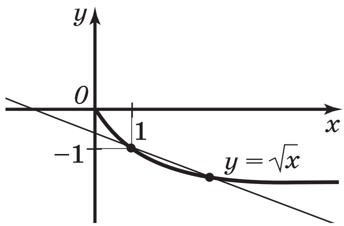


Рис. 13.10

через точку (1; −1). (Таким образом, одна общая точка у графиков есть всегда.) В зависимости от углового коэффициента a (рис. 13.10) прямая поворачивается вокруг точки (1; −1). При $a=-\frac{1}{2}$ она касается кривой, а при $-1 \leqslant a < 0$ $\left(a \neq -\frac{1}{2}\right)$ имеет две общие точки с кривой.

§ 83. Иррациональные неравенства

Практически все комментарии к § 82 относятся и к § 83. Существенное различие лишь в том, что для применения метода интервалов (а это наиболее предпочтительный способ действий) оказывается необходимым найти область определения неравенства. Как и обычно, необходимыми являются задачи группы А (номера XIII.70—XIII.73). При желании можно превратить уравнения группы А к § 82 (например, XIII.61 и XIII.63) в неравенства, чтобы, с одной стороны, уяснить тесную связь между уравнениями и неравенствами, а с другой — получить набор несложных дополнительных заданий для самостоятельной работы (домашнего контроля). Все более сложные задачи (группа В) снабжены подробными комментариями (см. ниже).

Решения и указания к задачам

XIII.73 а) *Указание.* Воспользоваться заменой переменной $t=\sqrt{\frac{2x+1}{x}}$. б) *Указание.* Воспользоваться соображениями монотонности.

в) [−1; 8). **Решение.** Способ 1. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби. Исходное неравенство $x-4<\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}$ при $x \neq 0$ равносильно неравенству $x-4<\frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{x^2}$, которое, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases} x-4<(1-\sqrt{1+x})^2, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x}<3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x < 8, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Осталось учесть, что $x = 0$ тоже входит в множество решений неравенства.

Способ 2. Замена переменной $t = \sqrt{x+1}$ приводит неравенство к виду $t^2 - 5 < \frac{(t^2-1)^2}{(t+1)^2}$ или $t^2 - 5 < (t-1)^2$. Дальнейшее очевидно.

XIII.74. а) $\left[1; \frac{25}{16}\right)$. б) $(1; +\infty)$.

в) $\left(5\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **Р е ш е н и е.** Перепишем неравенство в виде $\sqrt{(x-3)(x-5)} + \sqrt{(x+5)(x-3)} > \sqrt{(x-3)(4x-6)}$.

Найдём ООН: $x \in (-\infty; -5] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$. Обратите внимание на изолированную точку в ООН! Поскольку $x = 3$ не является решением неравенства, рассмотрим два случая: $x \geqslant 5$ и $x \leqslant -5$. 1) $x \geqslant 5$. Поделим обе части неравенства на $\sqrt{x-3}$. Получим неравенство $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} > \sqrt{4x-6}$, которое решается методом интервалов. В результате $x > 5\frac{2}{3}$.

2) $x \leqslant -5$. Теперь поделим обе части неравенства на $\sqrt{3-x}$, получим $\sqrt{5-x} + \sqrt{-x-5} > \sqrt{6-4x}$. Это неравенство решений не имеет.

XIII.75. а) $[-2; 2)$. б) $\left[0; \left(\frac{29}{12}\right)^2\right]$. в) $(-1; 4)$. г) $(3; 11)$. д) $[9; 10) \cup (34; 35]$.

е) $(-\infty; 0)$. **Р е ш е н и е.** Введём замену $u = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$, $v = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$. Тогда $v^2 - u^2 = 4x$, $x - 1 = \frac{v^2 - u^2 - 4}{2}$ и $x + 1 = \frac{v^2 - u^2 + 4}{2}$. Неравенство приобретёт вид $v^2 - u^2 + \left(\frac{v^2 - u^2 - 4}{4}\right) \cdot u + \left(\frac{v^2 - u^2 + 4}{4}\right) \cdot v < 0 \Rightarrow 4(v^2 - u^2) + u(v^2 - u^2 - 4) + v(v^2 - u^2 + 4) < 0 \Rightarrow 4(v^2 - u^2) + (u+v)(v^2 - u^2) + 4(v - u) < 0 \Rightarrow (v-u)(4(v+u) + (u+v)^2 + 4) < 0 \Rightarrow (v-u)(u+v+2)^2 < 0$. Поскольку $u + v + 2 > 0$, последнее неравенство равносильно $u > v$, т. е. $\sqrt{x^2-2x+9} > \sqrt{x^2+2x+9}$. Решая это неравенство, получаем $x < 0$.

XIII.76. а) $(-1; 1]$.

б) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. *Указание.* Умножить обе части неравенства на выражение, сопряжённое левой части.

§ 84. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами

В параграфе на одном примере разбирается применение всех трёх методов решения задач с параметрами. В учебнике задачи к этому параграфу сгруппированы именно по применяемым методам: аналитический, графический (плоскость $(x; y)$), графический (плоскость $(x; a)$).

Заметим, что графический способ (плоскость $(x; y)$) имеет смысл использовать в первую очередь для уравнений вида $\sqrt{f(x)} = ax + b$. В этом случае (если параметр присутствует в качестве углового коэффициента линейной функции в правой части уравнения) аналитические способы и использование плоскости $(x; a)$ чаще всего изобилуют техническими сложностями или вовсе неприменимы. Решение же в плоскости $(x; y)$ сводит задачу к исследованию взаимного расположения графика функции $y = \sqrt{f(x)}$ и прямой $y = ax + b$ (случаи касания, пересечения и т. д. исследуются, например, с помощью производной или из геометрических соображений). Наличие в условии задачи двух переменных x и y (помимо параметров) также указывает, как правило, на удобство использования графических подходов в плоскости $(x; y)$.

Решения и указания к задачам

XIII.77. а) $a = -3$, $b = 2$.

б) Если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + a$; если $a < 0$, то $x \in \varnothing$.

г) Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; 2]$; если $0 \leqslant a < 1$, то $x \in (-\infty; a^3 - a^2 + 2)$; если $a = 1$, то неравенство не имеет смысла; если $a > 1$, то $x \in (a^3 - a^2 + 2; +\infty)$.

д) Если $a > 0$, то $x \in \left[-\frac{a}{2}; +\infty\right)$; если $a = 0$, то $x \in [0; +\infty)$; если $a < 0$, то $x \in \left[\frac{a}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Обратите внимание на взаимное расположение точек (в зависимости от знака параметра a) при использовании метода интервалов!

XIII.78. а) $a \geqslant 3$. *Указание.* Построить графики функций $y=\sqrt{x-3}$ и $y=a-|x|$ (рис. 13.11).

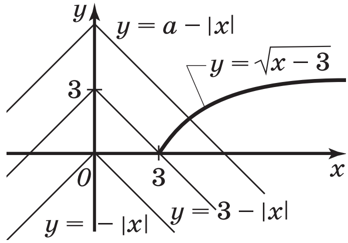


Рис. 13.11

б) $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 0{,}5$. **Решение.** Построим график функции $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$. Уравнение имеет решение, если прямая $y = = ax$ пересекает дугу AB, где $A(-3;\ 3)$, $B(6;\ 3)$ (рис. 13.12). Угловой коэффициент прямой OA равен -1, а угловой коэффициент прямой OB равен $0{,}5$.

в) $a \leqslant -2$ или $a \geqslant 4$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи XIII.78 б).

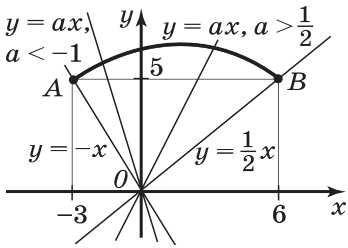


Рис. 13.12

XIII.79. а) $a<-\frac{16}{3}$ или $a>\frac{4}{3}$.

б) $a<\sqrt{2}$. *Указание.* Исследовать взаимное расположение полуокружности $y=\sqrt{1-x^2}$ и прямой $y = a - x$.

Замечание. Задачу можно решать и в плоскости $(x;\ a)$. Возможно и аналитическое решение, для чего неравенство нужно переписать в виде $a<x+\sqrt{1-x^2}$ и положить $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$. Неравенство будет иметь решение, если a будет меньше наибольшего значения f. Наибольшее значение f может быть найдено стандартным способом с использованием производной (функция f имеет на своей области определения $[-1;\ 1]$ единственную критическую точку $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, причём это точка максимума). Возможно также использование тригонометрической подстановки $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\ \pi]$ (на эту мысль наталкивает выражение $\sqrt{1-x^2}$). Представляется полезным провести решение несколькими способами и сравнить их.

в) Если $a < 0$, то $x \in \left(\frac{a}{\sqrt{5}};\ -a\right]$.

XIII.80. а) Если $a < 0$, то $x = 1 + \sqrt{1-a}$; если $0 \leqslant a < 1$, то $x \in \{1 - \sqrt{1-a};\ 1 + \sqrt{1-a}\}$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x \in \varnothing$. *Указание*. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} a = 2x - x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

в) Если $a < 0$ или $a > 1$, то решений нет; если $a = 0$, то три решения; если $0 < a < 1$, то четыре решения; если $a = 1$, то два решения.

г) $a \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \{-1\}$.

XIII.81. а) Если $a < -4$, то $x \in \varnothing$; если $a = -4$, то $x = 2$; если $-4 < a < 0$, то $x \in \left[-\dfrac{a}{4};\ 2 + \sqrt{4+a}\right]$; если $a \geqslant 0$, то $x \in [0;\ 2 + \sqrt{4+a}]$.

б) Если $a = 0$, то $x \in \left[-1;\ \dfrac{3}{5}\right]$; если $a = \dfrac{7}{20}$, то $x \in \left[-1;\ \dfrac{4}{5}\right]$. *Указание*. Здесь удобнее (хотя и необязательно) строить график уравнения в плоскости $(a;\ x)$, рассматривая x сразу как зависимую переменную и откладывая её значения на оси ординат; в этом случае прямые $a = \mathrm{const}$ будут вертикальными.

в) $a \in [0;\ 1) \cup \left(1;\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. г) $a < -1$.

XIII.82. а) Если $a < 0$, то $x \in \varnothing$; если $a \geqslant 0$, то $x = 0$. **Решение.** ООН: $\begin{cases} x \leqslant a, \\ x \geqslant -a. \end{cases}$ При $a < 0$ левая часть уравнения $\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} = x$ не существует, а при $a > 0$ функция в левой части строго убывает на своей области определения $[-a;\ a]$, т. е. уравнение имеет не более одного корня. Очевидный корень $x = 0$, других корней нет.

б) $x = a$. в) Если $a < 4$, то корней нет; если $a \geqslant 4$, то один корень.

г) Если $a \leqslant 0$ или $a > \sqrt{5}$, то корней нет; если $0 < a \leqslant \sqrt{5}$, то один корень. **Решение.** Перепишем уравнение в виде $\sqrt{2x+8} - \sqrt{2x+3} = a$ и переведём иррациональность в левой части в знаменатель дроби: $\dfrac{5}{\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+3}} = a$.

Функция $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2x+8}+\sqrt{2x+3}}$ строго убывает на своей области определения $\left[-\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$. Её наибольшее значение достигается в точке $x=-\dfrac{3}{2}$ и равно $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{5}$; множество значений $E(f)=(0;\ \sqrt{5}]$. Если число a принадлежит $E(f)$, то уравнение имеет единственный корень. д) $x=\dfrac{\left(3\sqrt{a}-\sqrt{a^2-8}\right)^2}{32}$. е) $x = a$. ж) $x = a$.

XIII.83. а) $a\in\left\{-9\dfrac{1}{4}\right\}\cup(-9;\ -3)$. *Указание.* Удобнее решать задачу в плоскости $(x;\ a)$. Уравнение равносильно системе $\begin{cases}x^2-4x+3=3x+a,\\ 3x+a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=x^2-7x+3,\\ a\geqslant -3x.\end{cases}$

б) Если $a<0$ то $x\in[1;\ +\infty)$; если $0\leqslant a\leqslant 1$, то $x\in[4a^2+1;\ +\infty)$; если $a>1$, то $x\in[1;\ a^2)\cup(4a^2+1;\ +\infty)$. *Указание.* Удобно решать графически в плоскости $(x;\ a)$. Обратить внимание на то, что есть опасность проглядеть промежуток решений $(4a^2+1;\ +\infty)$ для $a>1$.

Замечание. Имеет смысл также предложить учащимся решить нестрогое неравенство $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x-1}-2a)\geqslant 0$ и неравенство с обратным знаком $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x-1}-2a)<0$, чтобы проследить, как изменяется при этом ответ.

в) Если $a\leqslant -\dfrac{1}{2}$, то $x\in\left[a;\ \dfrac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; если $-\dfrac{1}{2}<a\leqslant -\dfrac{7}{16}$, то $x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8};\ \dfrac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; если $a>-\dfrac{7}{16}$, то $x\in\varnothing$.

г) Если $a\leqslant 1$, то $x\in\varnothing$; если $a>1$, то $x\in\left[0;\ \dfrac{(a-1)^2}{4}\right]$.

д) $|a|\geqslant 2$. е) $a=5-\sqrt{5}$ или $a=-5+\sqrt{5}$.

§ 85. Показательные уравнения и неравенства

Простейшие показательные уравнения и неравенства были рассмотрены в курсе 10 класса (глава V). Материал этого параграфа развивает теорию, изложенную в главе V (в частности, о монотонности показательной и логарифмической функций), применительно к решению разнообразных уравнений, связанных с показательной функцией.

При изучении материала важно не скатиться к классификации уравнений (однородные, сводимые к подстановке и т. д.). Иначе говоря, помимо распознавания приведённых типов уравнений, необходимо применять знание свойств показательной функции и навык преобразований степенных и показательных выражений к решению нестандартных задач (например, задача XIII.95).

Также следует обратить внимание на очередное применение метода интервалов, на этот раз для решения показательных неравенств. Полезным при решении неравенств, особенно смешанного типа (т. е. с участием выражений разных видов — показательных, логарифмических, тригонометрических и т. д.), является основная теорема о показательных неравенствах. Оба утверждения этой теоремы можно объединить в следующее: при $a > 0$ выполнено $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

Решения и указания к задачам

XIII.90. а) $\{-4\}$. б) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. в) $\{2\}$. г) $\{25\}$. д) $\{1\}$. е) $\{\log_6 27\}$. ж) $\{2\}$. з) $\{1\}$. и) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$. к) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. л) $\{2\}$. м) $\{3\}$.

XIII.91. а) $\{2\}$. б) $\{3\}$. в) $\{-1; 3\}$. г) $\{-3; 0\}$. д) $\{1\}$.

XIII.92. а) $\{2; 3\}$. б) $\{-4; 4; 2\}$. в) $\{0; 6\}$. г) $\{\log_{\frac{1}{2}} 3\}$. д) $\left\{0; \log_{\frac{2}{5}}\frac{2}{3}\right\}$. е) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. ж) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. з) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. и) $\left\{\log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{3}\right\}$. к) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Указание. Все уравнения (после соответствующей замены; в некоторых требуется перегруппировка и разложение на множители) приводятся к однородным.

XIII.93. а) $\{\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\}$. б) $\{-2; 2\}$. в) $\{-2; 2\}$. г) $\left\{\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

XIII.94. а) $\{0; \log_5 15\}$. **Решение.** Запишем уравнение в виде $5^{x^2-x+1} = 5\cdot 3^x \Rightarrow 5^{x^2-x} = 3^x$. Прологарифмируем обе части по основанию 3, получим $(x^2-x)\log_3 5 = x$. Отсюда $x = 0$ или $(x-1)\log_3 5 = 1$. Из последнего равенства $x - 1 = \log_5 3 \Rightarrow x = \log_5 3 + 1 = \log_5 15$.

б) $\{-1; \log_7 3\}$. в) $\left\{3; \log_5\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$. г) $\left\{3; \log_2\left(\frac{1}{5}\right)\right\}$.

XIII.95. *Указание.* Уравнения решаются с использованием свойств функций (как правило, монотонности и ограниченности).

а) $\{2\}$. **Решение.** Разделим обе части уравнения $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$ на $3^{\frac{x}{2}}$, получим $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (или, если так кажется удобнее, $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{2}} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$). Левая часть уравнения есть строго возрастающая функция, а правая — строго убывающая, поэтому уравнение имеет не более одного корня. Он легко угадывается.

б) $\{1\}$. в) $\{2\}$. г) $\{1\}$. д) $\{2\}$.

е) $\varnothing$. **Решение.** Очевидно, левая часть уравнения положительна при всех x, а в правой части наибольшее значение квадратного трёхчлена $-2x^2 + 6x + 9$ достигается при $x = \frac{3}{2}$ и равно $-4\frac{1}{2}$, т. е. правая часть заведомо отрицательна. Таким образом, множества значений этих функций не пересекаются (полезно для иллюстрации нарисовать графики этих функций).

ж) $\{0\}$. *Указание.* Воспользоваться ограниченностью функций в обеих частях уравнения.

з) $\{1\}$. **Решение.** В левой части уравнения $2^x + \frac{4}{2^x} \geqslant 4$ (например, из неравенства Коши), а в правой части $4\sin\frac{\pi x}{2} \leqslant 4$. Равенство возможно только при $x = 1$.

и) $\{0\}$. к) $\{0\}$.

л) $\{0\}$. **Решение.** Воспользуемся ограниченностью функций в обеих частях уравнения. В левой части $2^{x^2} \geqslant 1$. В правой части сделаем замену $t = 3^x$. Функция $g(t) = \sqrt{2t - t^2}$ достигает своего наибольшего значения одновременно с квадратным трёхчленом под знаком радикала при $t = 1$, причём $g(1) = 1$. Таким образом, в правой части уравнения выражение $\sqrt{2 \cdot 3^x - 3^{2x}} \leqslant 1$. Равенство возможно, только когда обе части равны 1.

м) $\{1\}$. *Указание.* Сравнить множества значений левой и правой частей уравнения.

XIII.96. а) $(-\infty; +\infty)$. б) $(-2; +\infty)$. в) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right]$. г) $(-\infty; -3) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. д) $(-2; 1)$. е) $(\log_{75}90; +\infty)$. ж) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. з) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$. и) $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$.

к) $[1;\ 2]\cup(5;\ +\infty)$. л) $(-\infty;\ -4)\cup(0;\ +\infty)$. м) $[-1;\ 1-\sqrt{2}]\cup$ $\cup[1+\sqrt{2};\ 3]$. н) $(-\infty;\ -4)\cup\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]$. о) $(-\infty;\ 0)\cup\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

XIII.97. а) $(1;\ +\infty)$. б) $(-1;\ 1]$. в) $(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

г) $(-\sqrt{7};\ -\sqrt{3}]\ \cup\ [\sqrt{3};\ \sqrt{7})$. д) $(-\infty;\ 3-\sqrt{3})\ \cup\ (3+\sqrt{3};\ +\infty)$.

е) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$. ж) $(-\infty;\ -1)$. з) $\left(-\infty;\ \log_3\frac{1}{2}\right]\cup\left[\log_3\frac{3}{5};\ \log_3\frac{5}{3}\right)$.

XIII.98. а) $(3;\ +\infty)$. б) $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$. в) $(-\infty;\ 1]\ \cup\ [2;\ +\infty)$. г) $(-\infty;\ -3]\ \cup\ [0;\ 3]$. д) $(-\infty;\ -1]\ \cup\ [1;\ +\infty)$. е) $(-1;\ 2)$.

XIII.99. а) $(-\infty;\ 0)$.

б) $[-1;\ 3)$. *Указание.* Замена $t=2^{\sqrt{3-x}}$

в) $(-1;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$. *Указание.* Заметить, что $\sqrt{2}-1=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Тогда $(\sqrt{2}-1)^{-x}=(\sqrt{2}+1)^x$.

г) $[-2;\ -1)\cup[1;\ +\infty)$. *Указание.* Аналогично задаче XIII.96 в) заметить, что $\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

д) $(-\infty;\ -1]$. **Решение.** Заметим, что $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=$ $=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ и $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^{-2}$. Теперь неравенство можно переписать в виде $2(\sqrt{2}-1)^x-(\sqrt{2}-1)^{2x}\leqslant-1$. Воспользуемся заменой $t=(\sqrt{2}-1)^x$. Решая получившееся неравенство, находим $t\geqslant\sqrt{2}+1$. Таким образом, $(\sqrt{2}-1)^x\geqslant\sqrt{2}+1\Rightarrow$ $\Rightarrow(\sqrt{2}-1)^x\geqslant(\sqrt{2}-1)^{-1}$. Поскольку $\sqrt{2}-1<1$ и функция $(\sqrt{2}-1)^x$ убывающая, то $x\leqslant-1$.

е) $(-1;\ 1)$. *Указание.* Аналогично задаче XIII.99 д) записать $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ и $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$.

XIII.100. *Указание.* Неравенства приводятся к виду $a^{f(x)}\geqslant b^{g(x)}$. Напомним, что такие неравенства решаются логарифмированием обеих частей по любому удобному фиксированному основанию.

а) $\{0\}\cup[\log_5 3;\ +\infty)$. **Решение.** Перепишем неравенство в виде $3^{x^2}\cdot 10\leqslant 5^{x^3}\cdot 10\Rightarrow 3^{x^2}\leqslant 5^{x^3}$. Прологарифмируем обе части по основанию 5, получим $x^2\cdot\log_5 3\leqslant x^3\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x - \log_5 3) \geqslant 0$. б) $[-1;\ 0) \cup$ $\cup\ [\log_3 16;\ +\infty)$.

XIII.101. $a \in (-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. **Решение.** Воспользуемся заменой $t = 2^x$. Исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $8t^2 + 5t + a^2 - 2 = 0$ имеет хотя бы одно положительное решение, а это условие равносильно тому, что $a^2 - 2 < 0$ (например, по теореме Виета; полезно также изобразить эту параболу, у которой ордината точки пересечения с осью Oy равна $a^2 - 2$).

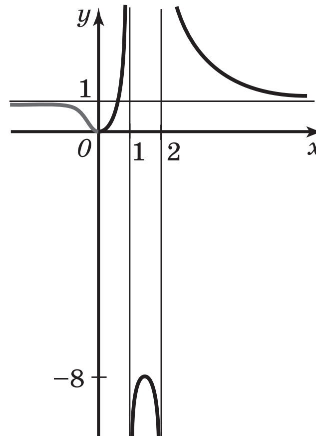


Рис. 13.13

XIII.102. $a \in \{-8\} \cup (0;\ 1]$. *Указание.* Воспользоваться заменой $t = 3^x$. Построить график функции $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 3t + 2}$ (рис. 13.13).

XIII.103. Если $a < 0$, то $x \in$ $\in (-\infty;\ \log_4(-a))$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a > 0$, то $x \in$ $x \in \left(-\infty;\ \log_4 \dfrac{a}{16}\right)$. **Решение.** Задачу удобно решать в плоскости $(x;\ a)$. Воспользуемся заменой $t = 4^x$, она приводит неравенство к виду $a^2 - 15at - 16t^2 > 0$, $t > 0$. Построим в плоскости $(t;\ a)$ множество, задаваемое этим неравенством, для чего запишем его в виде $(a + t)(a - 16t) > 0$, $t > 0$ (рис. 13.14). Получаем, что если $a < 0$, то $0 < t < -a$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a > 0$, то $0 < t < \dfrac{a}{16}$. Возвращаясь к переменной x (для чего придётся решить неравенства $4^x < -a$ и $4^x < \dfrac{a}{16}$), получим ответ.

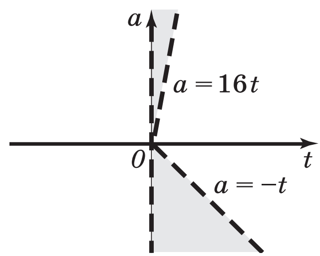


Рис. 13.14

XIII.104. $a \in (-\infty;\ 24 - 8\sqrt{3})$.

§ 86. Логарифмические уравнения и неравенства

Практически весь параграф состоит из объяснений, демонстрации стандартных приёмов, подсказок и примеров. Рекомендуем здесь обратить особое внимание на раздел «Логарифмические уравнения и неравенства с параметрами».

В задачах XIII.105—XIII.108 используются только основная теорема о логарифмических уравнениях и стандартные подходы (преобразования с учётом области определения уравнения, проверка).

Номера XIII.118—XIII.120 представляют собой чисто технические задания и несложные упражнения, связанные с применением основной теоремы о логарифмических неравенствах и стандартных преобразований.

В номере XIII.121 предлагаются неравенства с переменным основанием, причём решать их рекомендуется переходом к любому фиксированному основанию (напомним, что такой переход есть равносильное преобразование, никак не изменяющее множество решений).

В неравенствах задач XIII.122 используются идеи и приёмы предшествующих задач, но в разных сочетаниях и на несколько более высоком техническом уровне.

В задачах можно ограничиться стандартными методами: переходом к фиксированному основанию и методом интервалов, однако гораздо удобнее использовать совпадение знаков выражений $\log_a f(x)$ и $(a-1)(f(x)-1)$ там, где определено первое выражение. Задачи XIII.125 удобно решать, используя замечание о том, что

$$\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x)-g(x)) \geqslant 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Решения и указания к задачам

XIII.105. а) $\{2\}$. б) $\{2\}$. в) $\{6\}$. г) $\{8\}$. д) $\{2+\sqrt{3}\}$.

XIII.106. а) $\{\log_2 13\}$. б) $\{3\}$. в) $\{-1;\ -3\}$. г) $\{3;\ 2\}$.

XIII.107. а) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\colon\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n\colon\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n\colon\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\colon\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.108. а) $\{7\}$. б) $\{2\}$. в) $\{9\}$. г) $\{-1\}$. д) $\left\{-2+\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

XIII.109. а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. б) $\left\{\frac{1}{12};\ \frac{2}{3}\right\}$. в) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -2\right\}$. г) $\left\{2;\ \frac{1}{256}\right\}$.

д) $\left\{5;\ 5^{\frac{2}{5}}\right\}$. е) $\left\{9\frac{1}{3}\right\}$. ж) $\{2;\ 16\}$. з) $\{\sqrt[3]{2};\ 8\}$. и) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ 9\right\}$.

к) $\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ 8\right\}$. л) $\{2;\ 3\}$.

м) $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0)$. **Решение.** ООУ: $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq 1, \\ x > -2. \end{cases}$ Уравнение преобразовывается к виду $\log_{|x|}|x+2| = \log_{-x}(x+2)$; с учётом ООУ получаем $\log_{-x}(x+2) = \log_{-x}(x+2)$, а это тождество на ООУ. Тогда ответом является просто ООУ.

XIII.110. а) $\{1;\ \sqrt{3}\}$. *Указание.* Перейдём в обеих частях уравнения к логарифмам по основанию 3, получим $\frac{3\log_3 x}{1+\log_3 x} = \frac{5\log_3 x}{2+\log_3 x}$. Теперь очевидна замена $t = \log_3 x$, которая приводит к легко решаемому уравнению $\frac{3t}{1+t} = \frac{5t}{2+t}$. Обратите ещё раз внимание на то, что переход к фиксированному основанию есть равносильное преобразование, поэтому ООУ здесь использовать не нужно!

б) $\left\{1;\ \frac{1}{8}\right\}$. в) $\left\{1;\ \frac{1}{\sqrt{8}}\right\}$. г) $\left\{1;\ \frac{1}{\sqrt{27}}\right\}$. д) $\left\{\frac{1}{2};\ 1;\ 2^{\frac{6}{5}}\right\}$. *Указание.* Переход к логарифмам по основанию 2 приводит уравнение к виду $\frac{6\log_2 x}{3+\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 x}{2+\log_2 x} = \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}$ и после замены $t = \log_2 x$ к дробно-рациональному уравнению

$$\frac{6t^2}{(t+3)(t+2)} = \frac{t}{t+1}.$$

е) $\left\{3;\ \frac{1}{9}\right\}$. ж) $\{1;\ 2\}$. з) $\{2\}$. **Решение.** Уравнение преобразуется к виду $1 + \frac{\lg(4-x)-1}{\lg x} = (\lg 4 - 1)\cdot\frac{1}{\lg x}$, откуда

$$\lg x + \lg(4-x) - 1 = \lg 4 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lg x(4-x) = \lg 4 \Rightarrow 4x - x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Проверка показывает, что $x = 2$ принадлежит ООУ.

XIII.111. *Указание.* Воспользоваться приёмом, который мы назвали «предварительным логарифмированием» (логарифмирование обеих частей уравнения по одному и тому же фиксированному основанию).

а) $\left\{\frac{1}{9};\ 3\right\}$. **Решение.** Логарифмируя обе части уравнения $x^{\log_3(3x)} = 9$ по основанию 3, получим $(1 + \log_3 x) \times$

$\times \log_3 x = 2$. Вводя замену $t = \log_3 x$, находим $t = -2$ или $t = 1$, откуда $x = \frac{1}{9}$ или $x = 3$.

б) $\left\{\frac{1}{10}; 100\right\}$. *Указание.* Прологарифмировать обе части уравнения по основанию 10.

в) $\{20; 100\}$. г) $\left\{\frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 10; 100\right\}$. д) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{100}}; \sqrt[3]{100}\right\}$.

е) $\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arctg}2 + \pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.112. а) $\left\{1; \frac{\sqrt{29}-1}{2}\right\}$. б) $\{1000\}$. в) $\{1; 3\}$. г) $\{5\}$.

д) $\left\{2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. е) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.113. а) $\{4\}$. б) $\{2\}$. в) $\varnothing$. г) $\{3\}$.

д) $\{2\}$. **Решение.** Левая часть уравнения не больше 1 ($\log_2(4x - x^2 - 2) \leqslant 1$), а правая часть не меньше 1 ($2^{|x-2|} \geqslant 1$). Равенство возможно, лишь когда обе части уравнения одновременно равны 1: $\begin{cases}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1,\\ 2^{|x-2|} = 1.\end{cases}$

XIII.114. а) $\{3\}$. б) $\{-1\}$.

XIII.115. а) $\{16\}$. б) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. в) $\{3\}$. г) $\{-3; -6\}$. д) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

е) $\{-101; -2\}$. *Указание.* ООУ: $x < -1$. При этом в правой части уравнения получим

$$\lg\sqrt{(x+1)^2} = \lg|x+1| = \lg(-x-1).$$

ж) $\{1; 5\}$.

XIII.116. а) $\{4\}$. **Решение.** Воспользуемся заменой $t = x\log_2 x$. Тогда $t = \log_2 x^x$ или $x^x = 2^t$. Тем самым $(\sqrt{x})^x = 2^{\frac{t}{2}}$. Уравнение приобретает вид $2^{\frac{t}{2}} + t = 24$. Левая часть этого уравнения — строго возрастающая функция, поэтому оно имеет не более одного корня. Подбором находим $t = 8$.

Теперь решим уравнение $x\log_2 x = 8$. Переписав его в виде $\log_2 x = \frac{8}{x}$, сразу видим, что уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим корень $x = 4$.

б) $\{1;\ 3\}$. в) $\left\{\frac{1}{4};\ 2\right\}$.

XIII.117. а) $\left\{\frac{1}{100};\ 100;\ 10^3;\ \frac{1}{10^3}\right\}$. б) $\{3\sqrt{3}\}$. в) $\left\{\frac{4}{3};\ 3\right\}$.

г) $\{1;\ 6\}$. *Указание.* Ввести замену: $u = \log_2 x$, $v = \log_3 x$. Тем самым, $u = v\log_2 3$. Получим систему $\begin{cases} u + v = uv, \\ u = v\log_2 3. \end{cases}$

д) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$.

е) $\{22\}$. *Указание.* ООУ: $x > 12$. Ввести замену: $u = \lg x$, $v = \lg(x - 12)$. Уравнение приобретёт вид $uv = u + v - 1$.

XIII.118. а) $(1;\ 3)$. б) $[-7;\ -6) \cup (0;\ 1]$. в) $\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ 0\right) \cup \left(3;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. г) $[-5;\ -4) \cup (0;\ 1]$. д) $[1;\ 3)$. е) $(1;\ 2]$.

XIII.119. а) $(\sqrt{5} - 1;\ +\infty)$. б) $\left[\frac{1-\sqrt{73}}{6};\ -1\right) \cup \left(1;\ \frac{1+\sqrt{73}}{6}\right]$. в) $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ +\infty\right)$. г) $(0;\ 2)$.

XIII.120. а) $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$. б) $\left(\frac{1}{2};\ \log_2 24\right]$. в) $[2;\ +\infty)$. г) $(-\infty;\ -1)$. д) $[-9;\ 0) \cup (0;\ 1)$. е) $(1;\ 2) \cup (2;\ 11]$.

XIII.121. а) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. б) $(-2; -\sqrt{3}) \cup [-1;\ 1] \cup (\sqrt{3};\ 2)$. в) $(0;\ 1)$.

г) $\left(1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. *Указание.* Воспользоваться тем, что выражения $\log_a f(x)$ и $(a - 1)(f(x) - 1)$ имеют одинаковые знаки там, где определено первое.

д) $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$. е) $\varnothing$. ж) $\left(0;\ \frac{1}{16}\right) \cup \left(\frac{1}{8};\ 8\right)$. з) $\left(0;\ \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ 1\right)$. и) $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right) \cup (1;\ 3)$. к) $(-\infty;\ 1) \cup \left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

XIII.122. а) $(1;\ 5] \cup [25;\ +\infty)$. б) $\left(0;\ \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ 1\right) \cup [3;\ +\infty)$.

в) $(1;\ 81)$. г) $\left[\frac{1}{32};\ \frac{1}{16}\right) \cup [4;\ +\infty)$. д) $(0;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

е) $\left(0;\ 2^{-2-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\ 2^{-2+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right] \cup [4;\ +\infty)$.

XIII.123. а) $\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)$. б) $(0;\ 1]$. в) $\left(1;\ \frac{3}{2}\right]$. г) $\left[\log_3\frac{9}{10};\ 2\right)$. *Указание.* Переписать неравенство в виде $\dfrac{x-1-\log_3(9-3^x)+3}{\log_3\left(\dfrac{9-3^x}{27}\right)} \leqslant 0$. Заметить, что $\dfrac{9-3^x}{27} < 1$, а поэтому знаменатель дроби заведомо отрицателен, и неравенство равносильно следующему: $x + 2 \geqslant \log_3(9 - 3^x)$.

XIII.124. а) $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)$. *Указание.* Поскольку выражения $\log_{6x}x$ и $(6x - 1)(x - 1)$ имеют одинаковые знаки при $x > 0$, $x \neq \frac{1}{6}$ (равно как и выражения $\log_{3x}x$ и $(3x - 1) \times$ $\times\ (x - 1)$ при $x > 0$, $x \neq \frac{1}{3}$), исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(6x-1)(x-1)(3x-1)(x-1) < 0,\\ x > 0.\end{cases}$$

б) $\left(0;\ \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{5};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$. в) $\left(0;\ \frac{1}{10}\right) \cup (1;\ +\infty)$.

г) $\left(0;\ \frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)$.

XIII.125. а) $\left(-3;\ -\frac{1}{2}\right] \cup (1;\ 2)$. б) $(-2;\ 0)$. в) $(\sqrt{5};\ +\infty)$. г) $(0;\ 1) \cup [8;\ +\infty)$. д) $(1;\ 2]$.

е) $(1;\ 2)$. *Указание.* Неравенство равносильно следующему: $\log_x(x+2) + \dfrac{2}{\log_x(x+2)} > 3$. Замена $t = \log_x(x + 2)$ приводит неравенство к виду $t + \dfrac{2}{t} > 3$.

ж) $(1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

з) $[\sqrt{6}-1;\ 2)\cup(2;\ 5]$. *Указание.* Перепишем неравенство в виде $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|}\geqslant\log_{x^2}x$ и перейдём к равносильной системе

$$\begin{cases}(x^2-1)\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}-x\right)\geqslant 0,\\ x>\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

XIII.126. *Замечание.* Напомним, что основной приём при работе с показательно-степенными уравнениями и неравенствами — предварительное логарифмирование по произвольному фиксированному основанию.

а) $\left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right]\cup[\sqrt{10};\ +\infty)$. б) $\left(\dfrac{1}{100};\ 100\right)$. в) $\left(0;\ \dfrac{1}{4}\right]\cup[4;\ +\infty)$. г) $(10;\ +\infty)$. д) $(0;\ 1)$.

XIII.127. *Указание.* Воспользоваться свойствами функций (как правило — монотонностью).

а) $(3;\ +\infty)$. б) $[9;\ +\infty)$. в) $(-\infty;\ 1)$.

XIII.128. а) $\left(0;\ \dfrac{1}{7}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$. б) $\left[\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{3}\right)$. в) $(-\infty;\ -7)\cup\cup(-5;\ -2]\cup[4;\ +\infty)$. г) $[1;\ 9]$. д) $(-2;\ -\sqrt{3}]\cup(1;\ 0)$.

XIII.129. а) $(0;\ 3)$. б) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. *Указание.* При $x\leqslant 0$ неравенство решений не имеет. Поэтому рассматриваем только $x>0$. Теперь неравенство можно переписать в виде

$$\log_3 x+\log_{\frac{1}{9}}(16x^4-x^2+1)>-1.$$

в) $[2;\ 3]$. г) $(0;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$.

XIII.130. а) $(0;\ 2^{-\sqrt{8}}]\cup[2^{\sqrt{8}};\ +\infty)$. б) $(0;\ 1]$. в) $\left(0;\ 2^{1-\sqrt{\frac{3}{2}}}\right]\cup\cup\left[2^{1+\sqrt{\frac{3}{2}}};\ +\infty\right)$.

Предлагаем расширить эту серию, добавив ещё две задачи: г) $\left(\dfrac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2}\log_2 x}\geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$; д) $\left(\dfrac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2\log_2 x}}\geqslant x^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$. Приведём ответы: г) $(0;\ 1]\cup[16;\ +\infty)$. д) $(0;\ 1)\cup[\sqrt{32};\ +\infty)$.

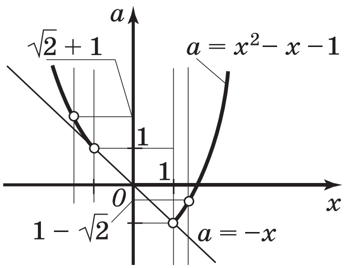


Рис. 13.15

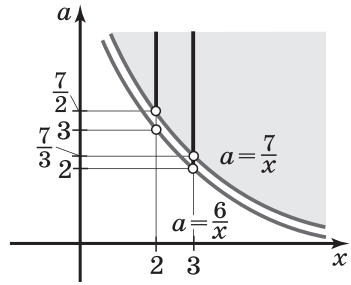


Рис. 13.16

XIII.131. $a \in (-\infty; -1] \cup \{1-\sqrt{2}\}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x+a = x^2-1, \\ x+a>0, \\ x^2-1>0, \\ x^2-1 \neq 1, \end{cases}$ которую удобно решить графически в плоскости $(x; a)$ (рис. 13.15).

XIII.132. $a \in \left(2; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 3\right] \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$. *Указание.* Решать задачу графически в плоскости $(x; a)$ (рис. 13.16).

XIII.133. $a = -\frac{1}{2}$. *Указание.* Решать графически в плоскости $(x; a)$ (рис. 13.17).

XIII.134. $a \leqslant -6$. *Указание.* Решать графически в плоскости $(x; a)$.

Замечание. Полезно сравнить условие с условием задачи XIII.133. Чрезвычайно похоже, но результаты разные. Эти номера удобно давать на самостоятельной работе (на два варианта).

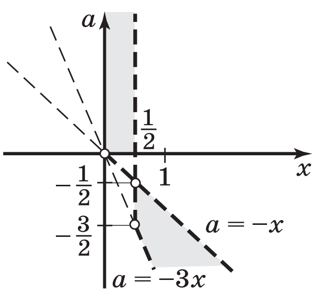


Рис. 13.17

XIII.135. $a \in (-2; 0] \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right) \cup \left[7\frac{1}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Решать графически в плоскости $(x; a)$.

XIII.136. Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то уравнение не имеет смысла; если $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$ или $a = 3$, то $x = a+2$; если $a \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x_1 = a+2$, $x_2 = a-2$; если $a = 2$, то $x \in \varnothing$.

XIII.137. а) Если $a \leqslant -1$, то $x \in \left(-a; -\frac{4}{3}a\right]$; если $-1 < a < -\frac{3}{4}$, то $x \in \left(1; -\frac{4}{3}a\right]$; если $a = -\frac{3}{4}$, то $x \in \varnothing$; если $-\frac{3}{4} < a < 0$, то $x \in \left[-\frac{4}{3}a; 1\right)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in (0; 1)$. б) Если $a < 3$, то $x \in \left(\frac{1-a}{2}; 2-a\right)$; если $3 < a < 4$, то $x \in \left(2-a; \frac{1-a}{2}\right)$; если $4 \leqslant a < 5$, то $x \in (-2; 2-a)$; если $a > 5$, то $x \in \varnothing$.

в) Если $a \leqslant -8$ или $a = -2$, то $x \in \varnothing$; если $-8 < a < -3$, то $x \in \left[\frac{a-4}{6}; 1-\sqrt{1-a}\right)$; если $-3 \leqslant a < -2$, то $x \in \left[\frac{a-4}{6}; -1\right)$; если $a > -2$, то $x \in \left(-1; \frac{a-4}{6}\right]$. г) Если $a \leqslant -2$ или $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $-2 < a < 0$, то $x \in [1-\sqrt{-2a}; a+1)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a}{2}\right)$.

д) Если $|a| \geqslant \sqrt{2}$, то $x \in \varnothing$; если $1 \leqslant |a| < \sqrt{2}$, то $x \in (0; \sqrt{2-a^2})$; если $|a| < 1$, то $x \in (0; 1-\sqrt{1-a^2}] \cup (\sqrt{2-a^2}; 1+\sqrt{1-a^2}]$. *Указание.* Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x^2+a^2}{2}-1\right)\left(x-\dfrac{x^2+a^2}{2}\right) \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2+a^2}{2} \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

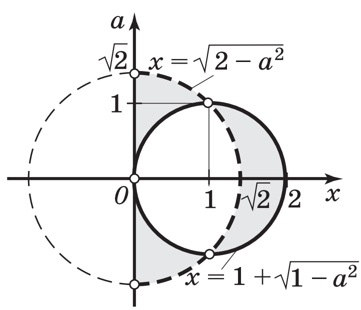


Рис. 13.18

Границы в первом неравенстве системы представляют собой две окружности: $x^2 + a^2 = 2$ и $(x-1)^2 + a^2 = 1$, причём первая из этих окружностей изображается штриховой линией (в силу условия $\frac{x^2+a^2}{2} \neq 1$). См. рисунок 13.18.

XIII.138. а) $\{(5; 1); (3; 3); (4; 2)\}$. б) $\{(3; 2)\}$. в) $\{(3; 5)\}$. г) $\{(2; 8)\}$. д) $\left\{\left(-\frac{9}{2}; 3\right)\right\}$. *Указание.* Ввести замену $u = x$, $v = 2^y$. е) $\{(0; 3); (3; 0)\}$. *Указание.* Ввести замену $u = 3^x$, $v = 3^y$.

XIII.139. а) $\{(2; 4); (4; 2)\}$. б) $\{(8; 2)\}$.

в) $\left\{\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)\right\}$. *Указание.* Замена $u = 2x + y$, $v = 2x - y$ приводит систему к виду $\begin{cases} uv = 2, \\ \log_2 u - \log_2 v = 1. \end{cases}$

г) $\{(3; 9); (9; 3)\}$. д) $\{(512; 1)\}$. *Указание.* Замена $u = \log_2 x$, $v = 3^y$ приводит к системе $\begin{cases} 2u - v = 15, \\ uv - 2u = 3v. \end{cases}$

е) $\{(\sqrt{10}; 4)\}$. *Указание.* Ввести замену $u = \lg x$, $v = \sqrt{y}$.

XIII.140. а) $\left\{(1; 1); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)\right\}$. б) $\left\{(1; 1); \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}}; \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right\}$.

в) $\{(x; x): x \in (0; +\infty)\}$. **Решение.** Логарифмируя оба уравнения системы, получаем $\begin{cases} y\ln x = x\ln y, \\ x\ln x = y\ln y. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения системы, получим

$$\begin{cases} (x+y)\ln x = (x+y)\ln y, \\ (y-x)\ln x = (x-y)\ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(\ln x - \ln y) = 0, \\ (y-x)(\ln x + \ln y) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y \neq 0$. Тогда из первого уравнения $y = x$ (при $x > 0$), что является также решением и второго уравнения.

XIII.141. а) $\{(4; 16)\}$. б) $\{(4; 16)\}$.

в) $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}; \frac{\sqrt{5}-5}{2}\right)\right\}$. *Указание.* Из условия следует, что $x - y > 0$, $x + y > 0$, $xy \neq \pm 1$. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x - y = |xy|, \\ \dfrac{2\ln|xy|}{\ln 5} \cdot \dfrac{\ln(x+y)}{\ln|xy|} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = |xy|, \\ \ln(x+y) = \ln\sqrt{5}. \end{cases}$$

Отсюда следует $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = x^2y^2, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 5. \end{cases}$ Замена $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ приводит систему к виду $\begin{cases} u - 2v = v^2, \\ u + 2v = 5. \end{cases}$

г) $\left\{\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}; \frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

XIII.142. а) $\left\{(100;\,100);\ \left(\frac{1}{100};\ \frac{1}{100}\right);\ \left(100;\ \frac{1}{100}\right);\ \left(\frac{1}{100};\ 100\right)\right\}$.

б) $\{(1;\,1;\,1);\ (4;\,2;\,\sqrt{2})\}$. **Решение.** Из условия x, y, $z > 0$. Очевидное решение — тройка $(1;\,1;\,1)$. Далее, если $x \ne 1$, то из первого уравнения $z \ne 1$, а тогда и $y \ne 1$. Пусть теперь x, y, $z \ne 1$. Прологарифмируем все уравнения системы $\begin{cases} x\ln z = \ln x, \\ y\ln z = \ln y, \\ y\ln y = \ln x. \end{cases}$ Из двух первых уравнений $\frac{x}{y} = \frac{\ln x}{\ln y}$; $x\ln y = y\ln x$. Подставим сюда вместо $\ln x$ выражение из последнего уравнения $y\ln y$: $x\ln y = y^2\ln y$. Поскольку $\ln y \ne 0$, отсюда $x = y^2$. Тогда последнее уравнение системы может быть переписано в виде $y\ln y = \ln y^2$; $y\ln y = 2\ln y$; $y = 2$. Значит, $x = 4$, а из первого уравнения системы $\ln z = \frac{1}{4}\ln 4$, откуда $z = \sqrt{2}$.

§ 87. Тригонометрические уравнения и неравенства

Так же как и в разделах задач, связанных с иррациональными, показательными и логарифмическими уравнениями и неравенствами, сначала рассматриваются уравнения, затем неравенства, уравнения и неравенства с параметрами, и лишь в завершение — системы уравнений. Это происходит по двум причинам. Во-первых, приёмы решения систем практически везде одинаковы и сводятся в основном к решению набора уравнений, о чём упоминается в п. 4 § 87. А во-вторых, эти технически нагруженные и объёмные задачи имеет смысл давать на отработку именно в конце как своего рода вариант для закрепления и обобщения материала.

Принципиально новым моментом для учащихся в этом очень обширном параграфе будет решение тригонометрических неравенств методом интервалов на тригонометрическом круге. Здесь совершенно необходимо добиться полного понимания основного алгоритма и относительно свободного применения метода. Новшеством (и достаточно трудно усваиваемым разделом) окажутся также уравнения и неравенства, связанные с обратными тригонометрическими функциями. Этот раздел не имеет такого большого веса, и при нехватке времени им можно пожертвовать, ограничившись ознакомлением и общим пониманием происходящего (т. е. не добиваясь стабильного навыка решения таких задач). Вообще задач к этой теме избыточно много, сюда включено множество задач вступительных экзаменов в вузы. Учитель может сам отобрать задачи и циклы задач на свой вкус, не стараясь охватить все, но обратив внимание на задачи с отбором корней и так называемую «смешанную тригонометрию (иррационально-тригонометрические, логарифмически-тригонометрические и другие уравнения и неравенства).

Задания к этой части начинаются с повторения стандартных методов решения тригонометрических уравнений, рассмотренных в курсе 10 класса.

Задачи XIII.153 представляют собой набор простейших упражнений, приведённый для напоминания основных приёмов работы с множествами на плоскости, задаваемыми неравенствами с двумя переменными. Серия неравенств XIII.154 включает в себя различные аспекты применения метода интервалов на тригонометрическом круге и предназначена для работы в классе (с разбором и комментарием учителя). При этом можно, например, разбирать пункты а), в), д), ж), и), а оставшиеся неравенства предоставить для самостоятельного решения тем учащимся, которые готовы работать без посторонней помощи. Задачи XIII.155—XIII.156 предназначены для отработки метода интервалов на тригонометрическом круге (все особенности применения которого обсуждались в задаче XIII.154). Их можно использовать для домашних заданий и самостоятельной работы. При решении неравенств XIII.155 можно воспользоваться уже решёнными уравнениями из задачи XIII.144. В уравнениях задачи XIII.159 используются те же стандартные приёмы, что и ранее. Однако техническая часть усложняется и, кроме того, требуется отбор корней.

Решения и указания к задачам

XIII.143. *Указание.* Уравнения привести к уравнениям относительно одной функции одного и того же аргумента.

а) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\operatorname{arctg}3+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\pi+2\pi n;\ \pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

д) $\left\{\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. е) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.144. *Указание.* Уравнения решаются разложением на множители.

а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ 2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\frac{2\pi n}{3};\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

д) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. е) $\left\{\frac{2\pi n}{5};\ \pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

ж) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.145. а) $\left\{\frac{\pi}{9}+2\pi n;\ \frac{8\pi}{9}+2\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{\pm\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{3}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\pm\frac{3\pi}{40}+\frac{2\pi n}{5}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. **Решение.** Необходимо учесть ООУ и произвести отбор корней (лучше всего на тригонометрическом круге). Действительно, уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}2x$ равносильно системе $\begin{cases}2x=\frac{\pi}{4}-x+\pi n,\\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.\end{cases}$ Отбирая корни, получаем ответ в виде двух серий $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$ или $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

д) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. е) $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

ж) $\left\{\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.146. *Указание.* Уравнения этой серии приводятся к однородным. При этом следует обратить особое внимание на случай, когда выражение, на которое мы делим обе части уравнения, равно нулю (иначе есть опасность потерять такие решения).

а) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$ (может встретиться ответ в виде $x=\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{2})+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$). г) $\left\{\operatorname{arctg}5+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.147. *Указание.* Решение следует начинать с преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi n}{7}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\frac{\pi n}{8}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.148. *Указание.* Воспользоваться формулами сложения одноимённых функций с последующим разложением на множители.

а) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{11}+\frac{2\pi n}{11}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.149. *Указание.* Здесь следует использовать метод вспомогательного аргумента. а) $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{-\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi(2n+1)}{6}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$

XIII.150. а) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{4}+\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $t = \sin x + \cos x$.

б) $\left\{\frac{\pi n}{2}: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **Решение.** Введём замену $t = \cos x - \sin x$, тогда $\sin 2x = 1 - t^2$. Получаем уравнение $|t| = 3 - 2t^2$. Найдя отсюда $t = \pm 1$, возвращаемся к переменной x: $\sin 2x = 0$.

в) $\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $t = \sin x - \cos x$. В конце решения появляется необходимость отбора корней: из условия $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}$ следует, что $\sin x > \cos x$.

г) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n: n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.151. *Указание.* Решить неравенства на тригонометрическом круге.

а) $\left(\frac{2}{9}+\frac{2n}{3};\ \frac{7}{9}+\frac{2n}{3}\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$. б) $\left(\frac{1}{3}+2n;\ \frac{5}{3}+2n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

XIII.152. *Указание.* Неравенства этой серии удобнее решать с использованием графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

а) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$. б) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

в) $\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$. г) $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

д) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)\cup\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

е) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

XIII.153. а)—е) См. рис. 13.19.

XIII.154. а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left[\pi+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

б) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}$.

в) $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \pi+4\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi n;\ 2\pi+4\pi n\right)\cup$

$\cup\left(2\pi+4\pi n;\ \frac{5\pi}{2}+4\pi n\right)\cup\left(3\pi+4\pi n;\ \frac{7\pi}{2}+4\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание*. В отличие от предыдущих пунктов здесь главный период левой части неравенства равен 4π.

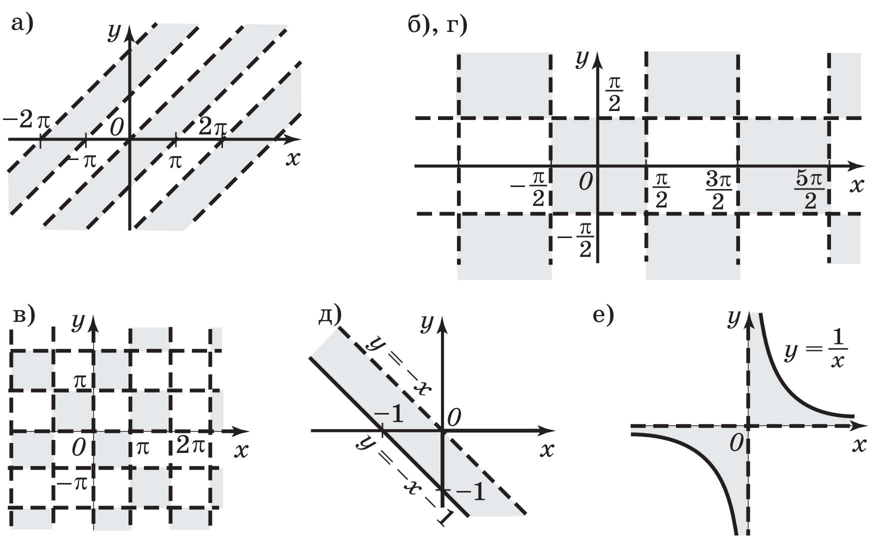


Рис. 13.19

г) $\left(12\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+12\pi n\right)\cup\left(2\pi+12\pi n;\ \frac{9\pi}{4}+12\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{15\pi}{4}+12\pi n;\ 4\pi+12\pi n\right)\cup\left(\frac{21\pi}{4}+12\pi n;\ 6\pi+12\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{27\pi}{4}+12\pi n;\ 8\pi+12\pi n\right)\cup\left(\frac{33\pi}{4}+12\pi n;\ \frac{39\pi}{4}+12\pi n\right)\cup$
$\cup\left(10\pi+12\pi n;\ \frac{45\pi}{4}+12\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Воспользоваться заменой $t=\frac{x}{6}$.

д) $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Корни числителя дроби, стоящей в левой части неравенства: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, корни знаменателя дроби: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$. Непосредственно на тригонометрическом круге видно, что промежутки, входящие в ответ, симметричны относительно центра круга (это видно также из формул корней числителя и знаменателя дроби, задающих концы этих промежутков). Поэтому полуинтервалы в ответе периодичны с периодом π.

е) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. ж) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

з) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

и) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

к) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

XIII.155. а) $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}.$

б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}.$

в) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

г) $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

д) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

е) $\left[-\frac{\pi}{8}+2\pi n;\ 2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{8}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\frac{3\pi}{8}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{8}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{8}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\pi+2\pi n;\ \frac{9\pi}{8}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{8}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\frac{13\pi}{8}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

XIII.156. а) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$ б) $\left[-\frac{5\pi}{8}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left[\frac{\pi}{8}+2\pi n;\right.$

$\left.\frac{3\pi}{8}+2\pi n\right]\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{9\pi}{8}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

в) $\left(-\pi+4\pi n;\ \frac{\pi}{3}+4\pi n\right)\cup\left(\pi+4\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+4\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}.$

г) $\left[\frac{3\pi}{5}+12\pi n;\ 3\pi+12\pi n\right]\cup\left[\frac{27\pi}{5}+12\pi n;\ \frac{39\pi}{5}+12\pi n\right]\cup$

$\cup\left[9\pi+12\pi n;\ \frac{51\pi}{5}+12\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$

д) $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$ *Указание.* Обратить внимание на кратные корни $x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

е) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi+2\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}.$

ж) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Ввести замену $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

XIII.157. а) $\varnothing$. б) $\varnothing$. в) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\frac{3\pi}{4}+\pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. д) $\{\pi n : n\in \boldsymbol{Z}\}$. е) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. ж) $\left\{2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. з) $\left\{2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.158. а) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right\}$. б) $\left\{\pm\frac{\pi}{10}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{10}+\pi n\right\}$. в) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right\}$. г) $\left\{\pm\frac{\pi}{10}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{10}+\pi n\right\}$.

XIII.159. а) $\left\{\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{8}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{8}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.160. *Указание*. Использовать ограниченность выражений, входящих в уравнение.

а) $\{2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\}$.

б) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n: n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.161. а) $\varnothing$. б) $\left\{(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{12}+\pi k;\ (-1)^k\arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k:\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{\pm\arccos\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \pm\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.162. *Указание*. Воспользоваться ограниченностью входящих в уравнение выражений (вкупе с некоторыми специальными приёмами).

а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. **Решение.** Воспользуемся методом вспомогательного аргумента для преобразования левой части уравнения: $\sqrt{1+\cos^2 4x}\cdot\sin(x+\varphi)=-\sqrt{2}$. (Впредь, когда это не является необходимым элементом решения, мы не будем уточнять, чему равен аргумент φ.) Оценим множители в левой части уравнения: $1 \leqslant \sqrt{1+\cos^2 4x} \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow -1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1$. Очевидно, левая часть равна $-\sqrt{2}$ только в том случае, когда одновременно $\sqrt{1+\cos^2 4x} = \sqrt{2}$ и $\sin(x + \varphi) = -1$, т. е. имеет место система $\begin{cases} \sqrt{1+\cos^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sin(x+\varphi) = -1. \end{cases}$ Из первого уравнения найдём $\cos 4x = \pm 1$ и подставим в исходное уравнение.

1) Итак, $\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin x + \cos x = -\sqrt{2}. \end{cases}$ Решив второе уравнение (кстати, попутно получится, что $\varphi = \frac{\pi}{4}$), найдём $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. Но при этом оказывается, что $\cos 4x = -1$, и, следовательно, система решений не имеет.

2) $\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \sin x + \cos x = -\sqrt{2}. \end{cases}$ Решая второе уравнение, находим $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Очевидно, все эти числа являются решениями системы и исходного уравнения.

б) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi n \colon n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи XIII.162 а).

в) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n \colon n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **Решение.** Заметим, что уравнение можно рассматривать как квадратное относительно $\sin x$. Замена $t = \sin x$ приводит уравнение к виду $t^2 - \sin 3x \cdot t + \frac{1}{4} = 0$. Дискриминант в этом уравнении неположителен: $D = \sin^2 3x - 1 \leqslant 0$. Но это означает, что уравнение может иметь решение лишь при $D = 0$, т. е. $\sin^2 3x = 1$. Разберём по отдельности два случая, подставляя $\sin 3x = \pm 1$ в квадратное уравнение. 1) $\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ t^2 - t + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$

Тогда $t = \frac{1}{2}$, и, следовательно, $\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Решениями последней системы являются числа вида $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ (отбор легко провести на тригонометрическом круге). 2) $\begin{cases}\sin 3x=-1,\\ t^2+t+\frac{1}{4}=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\sin 3x=-1,\\ t^2=-\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\sin 3x=-1,\\ \sin x=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решениями этой системы являются числа $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. Результат пунктов 1) и 2) полезно изобразить на одном круге, тогда можно увидеть более компактную форму ответа.

г) $\{\pi+2\pi k : k\in\boldsymbol{Z}\}$. *Указание*. Решение аналогично решению задачи XIII. 162 в).

XIII.163. а) $\left\{\frac{5\pi}{16};\ \frac{3\pi}{8}\right\}$. б) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.164. а) $\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

б) $\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание*. Решение аналогично решению задачи XIII. 164 а).

XIII.165. *Указание.* Задачи этой серии объединяет форма и методы решений: речь идёт об иррационально-тригонометрических уравнениях.

а) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. д) $\left\{\frac{\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+4\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

Указание. Ввести замену $t=\sin\frac{x}{2}$. е) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

Указание. Ввести замену $t=\cos\frac{x}{2}$. ж) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

з) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. и) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

к) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\colon n\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

л) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ 2\pi n;\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi n\colon\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin x+\cos x=\cos^2 2x,\\ \cos 2x\geqslant 0.\end{cases}$ Замена $t = \sin x + \cos x$ приведёт первое уравнение системы к виду $t^4 - 2t^2 + t = 0$. Второе уравнение системы имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ и $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Но поскольку из системы очевидно, что $t > 0$, значение $t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ отбрасывается сразу. Разбор случаев $t = 0$ и $t = 1$ не представляет труда. Пусть $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Это наиболее неприятный случай, поскольку проверка второго неравенства системы для значений $x_1=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi n$ или $x_2=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$ оказывается весьма затруднительной. Поступим так:

$$\cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь ясно, что достаточно проверить выполнение условия $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$. Ему удовлетворяет серия x_1 и не удовлетворяет x_2.

м) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Уравнение равносильно смешанной системе $\begin{cases}\sin x+\cos x=1-2\sin x\cos x,\\ \sin x-\cos x\geqslant 0.\end{cases}$

XIII.166. а) $\{\pi + 2\pi n\colon n \in \boldsymbol{Z}\}$. *Указание.* Ввести замену $u = \cos x$, $v = \cos x$.

б) $\left\{-\frac{\pi}{8}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{8}+2\pi n;\ \frac{\pi}{16}+2\pi n;\ \frac{9\pi}{16}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{16}+2\pi n;\ \frac{21\pi}{16}+2\pi n\colon\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\begin{cases}1+\sin 2x=2\cos^2 3x,\\ \cos 3x\geqslant 0.\end{cases}$

в) $\left\{1;\ \frac{3\pi}{2}-2\pi n;\ -\frac{11\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{7\pi}{6}+2\pi n\colon\ n\in \boldsymbol{N}\right\}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x\cos 2x+\sin x=\cos 2x+x\sin x,\\ x\cos 2x+\sin x\geqslant 0.\end{cases}$$

г) $\left\{1;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{N}\right\}$. *Указание*. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2\sin x+\cos x=x^2\cos x+\sin x, \\ x^2\sin x+\cos x\geqslant 0.\end{cases}$

XIII.167. а) $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. б) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. в) $\left[-\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. г) $\left[\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

д) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. е) $\left[2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

XIII.168. а) $\left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right\}$. б) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. в) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \mathrm{arctg}2+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. д) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.169. а) $\left\{2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. б) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi n:\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. д) $\left\{-\frac{\pi}{12}+2\pi m:\ m\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

е) $\left\{-\frac{\pi}{24}+\pi m:\ m\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.170. а) $\varnothing$. **Решение.** Воспользуемся тем, что $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$, и преобразуем уравнение к виду $\arccos x=\frac{4\pi}{3}$. Очевидно, такое уравнение корней не имеет.

б) $\varnothing$. *Указание*. Решение аналогично решению XIII.170 *а*).

в) $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt3}{2}\right\}$. **Решение.** Введём замену $y=\arcsin x$, тогда $\sin y=x$ и $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. При этом $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=$ $=\frac{\pi}{2}-y$. Уравнение приобретает вид $y^2+\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2=\frac{5\pi^2}{36}$.

Решая это уравнение, находим $y=\frac{\pi}{3}$ или $y=\frac{\pi}{6}$. Возвращаясь к старой переменной, получаем $x=\sin\frac{\pi}{3}$ или $x=\sin\frac{\pi}{6}$.

г) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. д) $\left\{-\frac{1}{12}\right\}$. **Решение.** Перепишем уравнение в виде $\arcsin 6x=-\frac{\pi}{2}-\arcsin(6\sqrt{3}x)$ и обозначим для удобства $\arcsin(6\sqrt{3}x)=y$. Отсюда $6x=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\Leftrightarrow 6x=-\cos y$. Поскольку по определению $\sin y=6\sqrt{3}x$ и $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos y=\sqrt{1-108x^2}$, и уравнение можно переписать в виде $6x=-\sqrt{1-108x^2}$. Отсюда находим $x=-\frac{1}{12}$.

е) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **Решение.** Перепишем уравнение в виде $\arcsin(3x-1)+2\operatorname{arctg}4x=\frac{\pi}{2}-\arcsin(1-3x)\Rightarrow\arcsin(3x-1)+$ $+2\operatorname{arctg}4x=\frac{\pi}{2}+\arcsin(3x-1)\ \Rightarrow\ \operatorname{arctg}4x=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ 4x=1\ \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ (нужно ещё проверить, что это значение попало в ООУ: $|3x-1|\leqslant 1$).

ж) $\{0;\ 1\}$.

з) $\{0;\ \pm1\}$. **Решение.** Введём замену $y=\operatorname{arctg}x$. Тогда $\operatorname{tg}y=x$ и $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Уравнение примет вид $\arcsin x=2y$. Отсюда $x=\sin 2y$; $x=\frac{2\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}^2y}\Rightarrow x=\frac{2x}{1+x^2}$. Решая это уравнение, находим $x=0$ или $x=\pm1$. Очевидно, все эти значения являются решениями исходного уравнения.

и) $\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$. **Решение.** Способ 1. Из уравнения следует, что $x=\sin(\operatorname{arcctg}x)\Rightarrow x^2=\sin^2(\operatorname{arcctg}x)$. Пусть $y=$ $=\operatorname{arcctg}x$, тогда $\operatorname{ctg}y=x\Rightarrow\frac{1}{\sin^2y}=\operatorname{ctg}^2y+1=x^2+1\Rightarrow\sin^2y=$ $=\frac{1}{x^2+1}$. Следовательно, $x^2=\frac{1}{x^2+1}$, откуда находим $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Проверка показывает, что подходит $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Способ 2. Воспользуемся определениями арксинуса и арккотангенса. Обозначим $\arcsin x=y$. По определению это означает, что $\sin y = x$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. С другой стороны, из исходного уравнения $y = \operatorname{arcctg} x$, что означает по определению, что $\operatorname{ctg} y = x$ и $y \in (0; \pi)$. Из этих соотношений получаем $\begin{cases} \sin y = \operatorname{ctg} y, \\ y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$ Решая первое уравнение, находим $\cos y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отсюда, с учётом ограничения $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, получаем $\sin y = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$. Но $\sin y = x$, поэтому $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

к) $\{\pm 1\}$. л) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

м) $\{0; \pm 1\}$. **Решение.** Обозначим $\arcsin\frac{x}{2} = y$ и $\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2} = z$. Тогда $\sin y = \frac{x}{2}$, $\cos y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ (знак косинуса выбран в связи с тем, что $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Аналогично $\sin z = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $\cos z = \sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}$. Возьмём синус от обеих частей уравнения, получим $\sin(y + z) = x \Rightarrow \sin y \cos z + \cos y \sin z = x \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{3x^2}{4}} + \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = x$. Решая последнее, находим $x = 0$ или $x = \pm 1$. Необходимо убедиться, что все эти числа являются корнями исходного уравнения.

н) $\{-2\}$. **Решение.** Обозначим $\arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = y$. Тогда из уравнения следует $\cos 2y = x + 3 \Rightarrow 2\cos^2 y - 1 = x + 3 \Rightarrow 2\left(-\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = x + 3 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x - 4 = 0$. Из последнего уравнения $x = 4$ или $x = -2$, но $x = 4$ — посторонний корень (из условия $|x + 3| \leqslant 1$).

о) $\left\{0; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. *Указание.* Взять синус от обеих частей уравнения. п) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. р) $[0; 1]$.

с) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **Решение.** Перепишем уравнение в виде $3\arccos x = 2\arcsin 2x$ и возьмём косинус от обеих частей уравнения. При этом поскольку $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, то $\cos(3\arccos x) = 4x^3 - 3x$. Далее, если $\arcsin 2x = y$, то $\sin y = 2x$, а $\cos(2\arcsin x) = \cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 1 - 8x^2$. Таким образом, получаем уравнение $4x^3 - 3x = 1 - 8x^2$, имеющее корни $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Корень $x = -\frac{\sqrt{21}+5}{2}$ отбрасываем сразу, поскольку это число меньше -1. Корень $x = \frac{\sqrt{21}-5}{2}$ тоже не подходит, поскольку это отрицательное число, и при подстановке в исходное уравнение левая и правая части имеют разные знаки. А вот $x = \frac{1}{2}$ действительно является корнем исходного уравнения.

Замечание. Проверка здесь проще, нежели учёт всевозможных ограничений в попытках сохранить равносильность переходов.

т) $\{-1\}$. **Решение.** Решение почти аналогично решению предыдущей задачи, но существенные сложности возникают в связи с проверкой (проверка здесь необходима: поскольку мы рассматриваем уравнение $\cos 2\alpha = \cos 3\beta$, где $\alpha = \arccos x$, $\beta = \arccos\frac{x}{2}$, на отрезке $[0; 2\pi]$, то может оказаться, что $\alpha = 2\pi - \beta$). Сомнительный корень, который не удаётся проверить прямой подстановкой: $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$. Приходится учитывать, что по условию $\arccos x > \arccos\frac{x}{2}$, а отсюда (в силу того что арккосинус — убывающая функция) $x < \frac{x}{2}$ и $x < 0$. Значит, $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ — посторонний корень.

у) $\left\{\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. ф) $\left\{\pm\cos\frac{\pi}{18};\ \pm\cos\frac{5\pi}{18}\right\}$. х) $\left\{\pm\frac{1-\sqrt{4\pi+9}}{4}\right\}$.

Решение. Рассмотрим сначала левую часть уравнения: $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ $(|x| \leqslant 1)$. Тогда уравнение примет вид $2x^2 - 1 = \arcsin(\cos x)$. Отсюда

$$\sin(2x^2 - 1) = \cos x \Rightarrow \sin(2x^2 - 1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 1 = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \\ 2x^2 - 1 = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 1 + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 2x^2 - 1 - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

При этом должны выполняться неравенства $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$. Неравенства выполняются только при

$n = 0$. Таким образом, остаётся решить совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} 2x^2-1+x=\dfrac{\pi}{2}, \\ 2x^2-1-x=\dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right.$ не забыв и здесь про окончательный отбор.

ц) $\{0; 1\}$. **Решение.** ООУ: $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \dfrac{2}{\pi}\arccos x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \dfrac{2}{\pi}\arcsin x \leqslant 1. \end{cases}$ Введём замену $t = \arccos x$; тогда $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - t$. Уравнение приобретает вид $\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}t\right) = \arcsin\left(1 - \dfrac{2}{\pi}t\right)$. Если каждую часть уравнения обозначить одной и той же буквой y, то $\cos y = \dfrac{2t}{\pi}$, $\sin y = 1 - \dfrac{2t}{\pi}$. Поскольку $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, то $\dfrac{4t^2}{\pi^2} + \dfrac{(\pi - 2t)^2}{\pi^2} = 1$. Отсюда находим $t = 0$ или $t = \dfrac{\pi}{2}$. Воспользовавшись прямой подстановкой, убеждаемся, что оба значения подходят. Возвращаясь к старой переменной и решая уравнения $\arccos x = 0$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, получаем ответ.

XIII.171. а) $\{1\}$. *Указание.* ООУ задаётся системой неравенств $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1. \end{cases}$ Решение этой системы составляет единственное число $x = 1$. Прямая проверка показывает, что это число является корнем уравнения.

б) $\{1\}$. **Решение.** Воспользуемся монотонностью функций. В левой части уравнения стоит строго возрастающая функция $y = \arcsin x$, а в правой — строго убывающая, поэтому уравнение имеет не более одного корня. Очевидный корень: $x = 1$.

в) $\{10\pi + 20\pi k \colon k \in \boldsymbol{Z}\}$.

XIII.172. а) $\left[-1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. б) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. в) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. г) $(-\infty; -\sqrt{3})$. д) $(-\infty; 1]$. е) $(-\infty; 0]$. ж) $\left[0; \dfrac{1}{2}\right)$. з) $[-1; 0)$. и) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. к) $(1; +\infty)$. л) $(0; 1]$. м) $\left[\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}; \dfrac{1}{3}\right]$.

XIII.173. $a \in (-\infty; -7] \cup \{-5\} \cup (-3; +\infty)$. **Р е ш е н и е.** Второе уравнение приводится к виду

$$\sin 2x(\sin 2x - 1) \cdot \left(\sin 2x + \frac{a+5}{2}\right) = 0.$$

Решения первого уравнения даются совокупностью $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin 2x = 1,\end{array}\right.$ а второго — совокупностью $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin 2x = 1,\\ \sin 2x = -\dfrac{a+5}{2}.\end{array}\right.$

Ясно, что множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго. Уравнения окажутся равносильны, если их множества решений совпадут, т. е. в данном случае либо уравнение $\sin 2x = -\frac{a+5}{2}$ не имеет корней, либо его корни входят в множества решений первых двух уравнений. Первая ситуация возникает, если $-\frac{a+5}{2} > 1$ или $-\frac{a+5}{2} < -1$ (уравнение не имеет корней в силу ограниченности синуса). Вторая ситуация имеет место, если $-\frac{a+5}{2} = 0$ или $-\frac{a+5}{2} = 1$. Обратите внимание на то, что решать сами уравнения $\sin 2x = 0$ и $\sin 2x = 1$ не потребовалось. Запись решения оказалась бы короче и содержательнее, если бы мы ввели замену $t = \sin 2x$, не забыв указать ограничение: $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

XIII.174. $a \in (-\infty; 0) \cup \{2; 3\} \cup (4; +\infty)$.

XIII.175. $a \in (-\infty; 1) \cup \{3; 4\} \cup (5; +\infty)$.

XIII.176. $a \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{6}; 0) \cup \{3\} \cup (12; +\infty)$. *Указание*. Первое уравнение приводится к виду $\cos 2x = \frac{a^2-8}{2}$, а второе — к виду $\cos 2x = \frac{6-a}{6}$. Здесь особенно важно не забыть, что уравнения равносильны и в том случае, когда они не имеют решений, т. е. их множества решений пусты (это очень коварный момент, который часто упускается из виду). В предыдущих трёх задачах это было несущественно, поскольку уравнения заведомо имели непустые множества решений! Здесь же уравнения равносильны, если одновременно $\left|\frac{a^2-8}{2}\right| > 1$ и $\left|\frac{6-a}{6}\right| > 1$. Кроме того, уравнения равносильны, если $\frac{a^2-8}{2} = \frac{6-a}{6}$ (проверять, что оба числа не превосходят 1, необязательно).

XIII.177. $a = 0$. **Р е ш е н и е.** По определению число π будет периодом функции f тогда и только тогда, когда для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(x + \pi) = f(x)$. Возьмём, например, $x=\frac{\pi}{4}$. Для этого значения должно выполняться равенство $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{a-\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}{a-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$, т. е. $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{a-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-a-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, что возможно только при $a = 0$. А при $a = 0$ наша функция превращается в функцию $f(x) = -\mathrm{tg}x$, которая действительно периодична с периодом π (после выяснения, чему может быть равно a, необходимо убедиться, что оно на самом деле будет периодом).

XIII.178. $a = 0$.

XIII.179. (–1; 0), (0; 0), (1; 0). **Решение.** По условию равенство должно выполняться при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Положим $x = 0$. Тогда исходное уравнение $\sin(ax + b) = a\sin x + b$ превратится в уравнение $\sin b = b$, которое, как известно, имеет единственное решение $b = 0$. Значит, общий вид уравнения $\sin ax = a\sin x$. Заметим, что из этого уравнения в силу ограниченности синуса следует, что $|a| \leqslant 1$. Положим теперь $x = \pi$. Получим $\sin a\pi = 0$; $a\pi = \pi n \Rightarrow a = n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Отсюда, с учётом условия $|a| \leqslant 1$, $a = \pm 1$ или $a = 0$.

XIII.180. (0; 0), (1; 0). **Решение.** Положим $x = 2\pi$. Тогда $b^2 = \cos(2a\pi + b^2) - 1$. Левая часть уравнения неотрицательна, а правая неположительна, и равенство возможно только при $b = 0$. При этом правая часть тоже равна нулю, т. е. $\cos 2a\pi = 1$, откуда $2a\pi = 2\pi n \Rightarrow a = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Вернёмся к исходному равенству. Оно имеет вид $a(\cos x - 1) = \cos ax - 1$. Заметим, что отсюда, в силу ограниченности косинуса, $0 \leqslant a \leqslant 2$. Поскольку a — целое число, то может быть $a = 0$, или $a = 1$, или $a = 2$. При $a = 0$ и $a = 1$ действительно получаются тождества, а вот при $a = 2$ — уравнение $\cos 2x - 2\cos x = -1$. Нетрудно убедиться в том, что это уже не тождество, подставив, например, $x=\frac{\pi}{6}$.

XIII.181. Если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$, $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $a > 0$, то $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $a < 0$, то $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **Решение.** Перепишем уравнение в виде $a(\sin^2 x-5\cos^2 x)=|a|\cos x\sqrt{3+5\mathrm{tg}^2 x}$. Рассмотрим три случая. 1) $a = 0$. Тогда обе части равны нулю на ООУ, т. е. при $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $a > 0$. Уравнение приобретает вид $(\sin^2 x-5\cos^2 x)=$ $=\cos x\sqrt{3+5\mathrm{tg}^2 x}$. Отсюда $(\sin^2 x-5\cos^2 x)^2=3\cos^2 x+5\sin^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 18\cos^4 x - 5\cos^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$ Проверка показывает, что подходит только $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, в ответ войдёт серия $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

3) $a < 0$. В этом случае получаем серию $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

XIII.182. Если $-1 < a < 1$ или $a = \sqrt{2}$, то уравнение имеет два корня; если $a = 1$, то три корня; если $a > 1$, $a \neq \sqrt{2}$, то четыре корня. **Решение.** Уравнение преобразуется к виду $\dfrac{\cos 2x}{\sin x} = a\cos 2x \Rightarrow \cos 2x\left(a - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \dfrac{1}{\sin x} = a. \end{array}\right.$ Первое уравнение имеет на отрезке $[0; \pi]$ два корня: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$. Второе уравнение при $|a| < 1$ и при $a < -1$ не имеет корней на отрезке $[0; \pi]$, а при $a \geqslant 1$ уравнение можно переписать в виде $\sin x = \dfrac{1}{a}$. Чтобы выяснить количество корней исходного уравнения, отметим на тригонометрическом круге точки $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ и будем двигать горизонтальную прямую $\sin x = \dfrac{1}{a}$. Найдём количество точек пересечения этой прямой с окружностью и совпадение этих точек с уже отмеченными на окружности точками.

XIII.183. $a \in (-\infty; 1) \cup \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right\} \cup [2; +\infty)$.

XIII.184. $a = 8k$ или $a = \dfrac{8k+4}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

XIII.185. Если $a < \dfrac{1}{2}$, то $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; если $a \geqslant \dfrac{1}{2}$, то $x = \pi n$ или $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-a}{a+1} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

XIII.186. Если $a < -\dfrac{2}{3}$ или $a > 2$, то $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; если $a \in \left[-\dfrac{2}{3}; 2\right]$, то $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, или $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2a}{a+2} + \pi n$, или $x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2a}{a+2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **Решение.** Уравнение можно привести к виду

$$(\sin x+\cos x)\left(\sin 2x-a\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right)=0.$$

Оно равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0,\\ \sin 2x=a\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right).\end{array}\right.$

Первое уравнение всегда имеет решение $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Второе уравнение можно переписать в виде $(a+2)\sin 2x=$ $=2a$. При $a=-2$ оно решений не имеет; при $a\neq-2$ получаем $\sin 2x=\frac{2a}{a+2}$. Последнее уравнение имеет решение только при условии $\left|\frac{2a}{a+2}\right|\leqslant 1$, откуда $a\in\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$.

Замечание. Если решать уравнение с использованием замены $t=\sin x+\cos x$ (тогда оно приобретает вид $t(t^2-1)=at\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)$, $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$), то получим совокупность $\left[\begin{array}{l}t=0,\\ (a+2)t^2=3a+2.\end{array}\right.$ Тогда ответ получится в виде: если $a<-\frac{2}{3}$ или $a>2$, то $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; если $a\in\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$, то $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ или $x=-\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\sqrt{\frac{3a+2}{2a+4}}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

XIII.187. Если $a=0$, то $x=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; если $a=\pm1$, то $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; если $a\neq 0;\ \pm1$, то $x\in\varnothing$. **Решение.** Рассмотрим уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x$ и найдём его дискриминант. Число $\frac{D}{4}=a^2(\cos^2 4x-1)$ неположительно, следовательно, уравнение имеет корни только при $\frac{D}{4}=0$, т. е. при $a=0$ или $\cos^2 4x=1$. Рассмотрим три случая. 1) $a=0$. Уравнение приобретает вид $\operatorname{tg}^2 x=0$. Тогда $x=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

2) $\cos 4x=1$. Тогда $\begin{cases}(\operatorname{tg}x+a)^2=0,\\ \cos 4x=1.\end{cases}$ Решения второго уравнения доставляются серией $x=\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$, но, с учётом области определения, $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$ остаётся только

$x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. А тогда $\operatorname{tg} x = 0$ и $a = 0$, т. е. мы получили то же, что в предыдущем пункте.

3) Пусть теперь $\cos 4x = -1$, тогда

$$\begin{cases}(\operatorname{tg} x - a)^2 = 0, \\ \cos 4x = -1;\end{cases} \begin{cases}\operatorname{tg} x = a, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\end{cases} \begin{cases}a = \pm 1, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}.\end{cases}$$

XIII.188. Если $a < -1$, то нет корней; если $-1 \leqslant a < 1$, то два корня; если $a = 1$, то один корень; если $a > 1$, то нет корней. *Указание.* Ввести замену $t = \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Заметить, что при этом $t \in [-1; 0]$, а уравнение $\cos x = t$ имеет одно решение при $t = -1$ и два решения при каждом t из полуинтервала $(-1; 0]$.

XIII.189. Если $a < -\frac{1}{4}$, то корней нет; если $a = -\frac{1}{4}$, то два корня; если $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$, то четыре корня; если $0 < a < 1$, то два корня; если $a = 1$, то один корень; если $a > 1$, то корней нет.

XIII.190. Если $a < -1$, то корней нет; если $a = -1$, то один корень; если $-1 < a \leqslant 0$, то два корня; если $0 \leqslant a < \frac{1}{4}$, то три корня; если $a = \frac{1}{4}$, то два корня; если $a > \frac{1}{4}$, то корней нет.

XIII.191. Если $0 < a < 1$, то два корня; если $a = 1$, то три корня; если $1 < a < \sqrt{2}$, то четыре корня; если $a = \sqrt{2}$, то три корня; если $a > \sqrt{2}$, то четыре корня.

XIII.192. $a \in [-8\pi; -6\pi] \cup [6\pi; 8\pi]$. *Указание.* Из уравнения следует, что $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Последнее уравнение удобно решать графически в плоскости $(x; y)$. Рассмотреть семейства функций $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Первое представляется семейством полуокружностей с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$. Второе задаёт семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

XIII.193. $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

XIII.194. $a \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Ввести замену $t = \operatorname{tg} x$, $t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Исследовать неравенство $\left|\left|t - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right| \leqslant a$ на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ с помощью координатной плоскости $(t;\ a)$.

XIII.195. $a \geqslant \frac{1}{3}$.

XIII.196. Если $a = \frac{4n}{4k+1}$, где $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; если $a \neq \frac{4n}{4k+1}$, то решений нет. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos ax = 1. \end{cases}$

XIII.197. $a > \frac{5}{13}$.

XIII.198. а) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \pm\arccos\sqrt{\frac{7}{8}} + 2\pi n : n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $a \in \left[\frac{1}{4};\ \frac{57}{32}\right]$.

XIII.199. а) $\left\{\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi n : n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. *Указание.* Ввести замену $t = \sin x + \cos x$.

б) $a \in \left[-\sqrt{2} - \frac{1}{2};\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{2} - \frac{1}{2};\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. *Указание.* При замене $t = \sin x + \cos x$ уравнение приобретает вид

$$\sqrt{t-a} = \sqrt{t^2 - \frac{3}{2}},\ -\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}.$$

XIII.200. $a \in [-\sqrt{2} - 1;\ 0] \cup \{1\}$. *Указание.* Замена $t = \sin x + \cos x$ приводит уравнение к виду

$$\sqrt{2\left(a^2 - at + \frac{t^2-1}{2}\right)} = 1 - t,\ |t| \leqslant \sqrt{2}.$$

XIII.201. Если $a = 1$, то $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $a = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $a < -1$, то $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $a > -1$, $a \neq 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

XIII.202. *Указание.* Системы решаются подстановкой. Имеет смысл обратить внимание учащихся на употребление разных и одинаковых целочисленных параметров k, n (выяснить ещё раз, когда это необходимо, а когда не принципиально). В пунктах а) и б) переменные x и y не связаны непосредственно алгебраическими соотношениями, например в пункте а) система принимает вид $\begin{cases}\sin x = \frac{1}{2},\\ \sin y = \frac{1}{2},\end{cases}$ поэтому буквы используются разные. А вот в пунктах в) и г) второе уравнение системы даёт линейную зависимость между x и y (например, в пункте в) $y = \frac{x+1}{2}$), поэтому букву можно использовать только одну: если $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, то $y = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а не $y = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi k$.

а) $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right);\ \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right):\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right);\ \left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n\right):\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup$

$\cup \left\{\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup$

$\cup \left\{\left(\arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n;\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\} \cup$

$\cup \left\{\left(\pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

г) $\left\{\left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right);\ \left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi n}{2}\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. д) $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{\pi}{3} + \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

е) $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} - \pi n\right);\ \left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} - \pi n\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

ж) $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right);\ \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right):\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

з) $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{6} + \pi k\right):\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. и) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\frac{\pi}{2} + \pi n\right);\right.$
$\left.\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(n+k)}{2};\ \frac{\pi(n-k)}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi n\right):\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

к) $\left\{\left(\dfrac{n + \frac{1}{4} + \pi k}{2};\ \dfrac{n + \frac{1}{4} - \pi k}{2}\right):\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.203. а) $\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+n);\ \frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right);\ \left(\frac{\pi}{6} + \pi(k+n);\right.\right.$

$-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\Big): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\Big\}$. б) $\Big\{\Big(\frac{\pi}{6}+\pi n+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{\pi k}{2}\Big);$ $\Big(\frac{\pi}{3}+\pi n+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{3}+\pi n-\frac{\pi k}{2}\Big): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\Big\}$, или, что то же самое, $\Big\{\Big((-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n+k);\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n-k)\Big): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\Big\}$.

в) $\Big\{\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-n)\Big);\ \ \Big(\frac{\pi}{3}+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)\Big):$ $: k,\ n\in \boldsymbol{Z}\Big\}$.

г) $\Big\{\Big(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\Big);\ \ \Big(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\Big):$ $: k,\ n\in \boldsymbol{Z}\Big\}$.

XIII.204. а) $\{(a+2\pi n;\ \pm b+2\pi k);\ (\pi-a+2\pi n;\ \pm b+$ $+2\pi k): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$, где $a=\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b=\arccos(2-\sqrt{2})$.

б) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

в) $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup\left\{\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right):\right.$ $\left.: k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$. г) $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(2n+k);\ \frac{\pi}{2}(2n-k)\right): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

д) $\left\{\left(4\pi k;\ \pm\frac{\pi}{2}+4\pi n\right): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup\left\{\left(\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k;\ 4\pi n\right): k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

XIII.205. а) $\left\{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi m\right);\ \left(2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi m\right): n,\ m\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

б) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi(2n-k)}{3};\ \frac{\pi}{6}-\frac{2\pi(n+k)}{3}\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi(2n+k);\ \frac{\pi}{2}+2\pi(n+k)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi(2n-k)}{3};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi(n+k)}{3}\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi(2n+k);\ -\frac{\pi}{2}-2\pi(n+k)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$ в) $\varnothing$.

г) $\left\{\left(a+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-a+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\pi-a+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(a-\pi+2\pi n;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\},\ a=\arccos\sqrt{\frac{5}{8}}.$

д) $\left\{\left(\pi n;\ \frac{\pi k}{2}\right);\ \left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right);\ \left(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

е) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi(n+k);\ \pi(n-k)\right);\ \left(\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{4}+\pi(n-k)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

ж) $\left\{\left(\frac{\pi n}{2};\ \pi(n-k)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

з) $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-k);\ \frac{\pi k}{2}\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-2k);\ \pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n-2k);\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{7\pi}{6}+\pi(n-2k);\ -\frac{\pi}{3}+\pi k\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

и) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\operatorname{arcctg}\frac{2}{5}+\pi(k-2n)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+\operatorname{arcctg}\frac{2}{5}+\pi(k-2n)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

к) $\left\{\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{4};\ \frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}(4n-k)\right);\right.$

$\left.\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{2}(4n-k)\right):n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

л) $\left\{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(k+2n)\right):k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi(2n-k)\right):k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

м) $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\pm\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}+\frac{\pi}{2}+\pi(n+k);\ \pm\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}-\frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right): n,\right.$

$\left.k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n+k);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\pm\arccos\sqrt{\frac{7}{8}}+\pi(n+k);\ \pm\arccos\sqrt{\frac{7}{8}}+\pi(k-n)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

н) $\left\{\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)\right\}.$

о) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \mathrm{arctg}2+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}2-\pi(n+k)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\mathrm{arctg}2+\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+\mathrm{arctg}2-\pi(n+k)\right): n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$

XIII.206. $a=\pi$ или $a\in[2\pi;+\infty)$. **Решение.** Уравнение $|x|+|y|=a$ представляется на плоскости $(x;\ y)$ семейством «раздувающихся» квадратов с вершинами на осях координат, а образ уравнения $\sin(x+y)=0$ — это семейство параллельных прямых вида $y=-x+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$ (рис. 13.20).

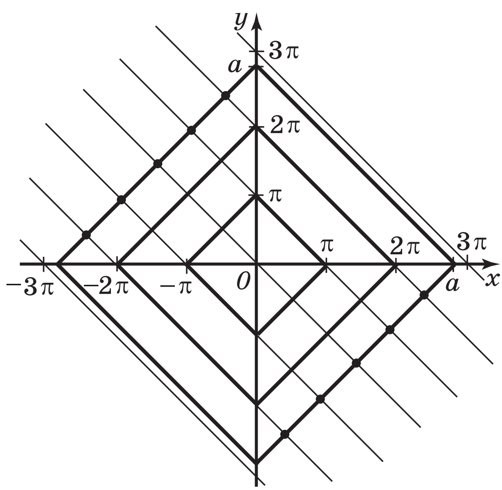


Рис. 13.20

Оглавление

Предисловие 3

Глава VIII. Предел и непрерывность функции 5
§ 44. Понятие предела функции 6
§ 45. Некоторые свойства пределов функции 8
§ 46. Вычисление предела функции в точке 11
§ 47. Классификация бесконечно малых функций 19
§ 48. Непрерывность функций в точке 21
§ 49. Непрерывность функций на промежутке. 29
§ 50. Асимптоты графика функции 37

Глава IX. Производная и её применения 45
§ 51. Определение производной 46
§ 52. Производные некоторых элементарных функций 51
§ 53. Задача о касательной. Уравнение касательной . . 52
§ 54. Приближение функции линейной функцией. Дифференциал 60
§ 55. Производная произведения, частного, композиции функций 61
§ 56. Таблица производных. Первообразная 62
§ 57. Неопределённый интеграл 63
§ 58. «Французские» теоремы 66
§ 59. Исследование функции с помощью производной 69
§ 60. Вторая производная. Выпуклые функции 79
§ 61. Построение эскизов графиков с помощью производной. Решение задач с помощью производной 83

Глава X. Определённый интеграл 92
§ 62. Площадь криволинейной трапеции 93
§ 63. Определённый интеграл 97
§ 64. Свойства определённого интеграла 109
§ 65. Применения определённого интеграла 121

Глава XI. Комплексные числа 141
§ 66. Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма записи и арифметические действия над комплексными числами 142
§ 67. Комплексные числа и многочлены. Основная теорема алгебры 146
§ 68. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел 149
§ 69. Корень n-й степени из комплексного числа 166
§ 70. Применения комплексных чисел 169

Глава XII. Элементы теории вероятностей 188
§ 71. Случайные события. Классическое определение вероятности 189
§ 72. Условная вероятность. Независимые события . . . 198
§ 73. Формула полной вероятности 205
§ 74. Геометрическая вероятность 216

Глава XIII. Уравнения и неравенства 221
§ 75. Некоторые способы решения уравнений. 222
§ 76. Целые рациональные и дробно-рациональные уравнения . . . . —
§ 78. Уравнения и неравенства с параметром. Аналитическое исследование 225
§ 79. Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами 228
§ 80, § 81. Графические методы решения уравнений и неравенств с параметрами 232
§ 77. Системы алгебраических уравнений и неравенств 234
§ 82. Иррациональные уравнения и системы 237
§ 83. Иррациональные неравенства 240
§ 84. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами 242
§ 85. Показательные уравнения и неравенства 245
§ 86. Логарифмические уравнения и неравенства 249
§ 87. Тригонометрические уравнения и неравенства . . . 259