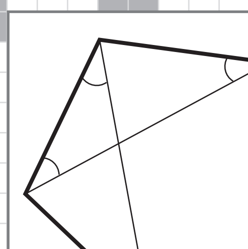
российский учебник

Е. В. Буцко
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ

Углублённый уровень



9 класс

Методическое пособие

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21
Б94

Буцко, Е. В.
Б94 Геометрия : 9 класс : методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский и др. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 96 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11600-4

Пособие содержит примерное планирование учебного материала, методические рекомендации к каждой главе, методические рекомендации по оценке образовательных достижений обучающихся, организации учебно-исследовательской и проектной деятельности, контрольные работы.

Пособие используется в комплекте с учебником «Геометрия. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков).

Пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-360-11600-4

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Геометрия. 9 класс» авторов А. Г. Мерзляка, В. М. Полякова.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках геометрии в 9 классе.

В разделе **«Примерное поурочное планирование учебного материала»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы.

Раздел **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока данной темы, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для домашней работы указаны из учебника «Геометрия. 9 класс» авторов А. Г. Мерзляка, В. М. Полякова; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия. 9 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др. Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности.

Технологические карты являются эффективной помощью учителю при организации учебной деятельности, при этом нужно учитывать, что объём заданий для выполнения на уроке и дома должен корректироваться учителем в зависимости уровня математической подготовки учащихся.

Раздел **«Контрольные работы»** состоит из семи контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа дана в четырёх вариантах. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** представлены методы контроля в учебном процессе.

В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.

В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование учебного материала

3 часа в неделю, всего 105 часов

Номер параграфа	Номер урока	Название параграфа	Количество часов
		Глава 1. Решение треугольников	**21**
1	1—3	Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°	3
2	4—9	Теорема косинусов	6
3	10—13	Теорема синусов	4
4	14—15	Решение треугольников	2
5	16—20	Формулы для нахождения площади треугольника	5
	21	Контрольная работа № 1	1
		Глава 2. Правильные многоугольники	**10**
6	22—26	Правильные многоугольники и их свойства	5
7	27—30	Длина окружности. Площадь круга	4
	31	Контрольная работа № 2	1
		Глава 3. Декартовы координаты на плоскости	**17**
8	32—35	Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Деление отрезка в данном отношении.	4

9	36—38	Уравнение фигуры	3
10	39—40	Общее уравнение прямой	2
11	41—45	Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки	5
12	46—47	Метод координат	2
	48	Контрольная работа № 3	1
		Глава 4. Векторы	**21**
13	49—50	Понятие вектора	2
14	51—52	Координаты вектора	2
15	53—57	Сложение и вычитание векторов	5
16	58—63	Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	6
17	64—68	Скалярное произведение векторов	5
	69	Контрольная работа № 4	1
		Глава 5. Преобразование фигур	**26**
18	70—72	Преобразование (отображение) фигур	3
19	73—75	Движение. Параллельный перенос	3
20	76—80	Осевая симметрия	5

Окончание

Номер параграфа	Номер урока	Название параграфа	Количество часов
21	81—84	Центральная симметрия	4
22	85—88	Поворот	4
23	89—94	Гомотетия. Подобие фигур	6
	95	Контрольная работа № 5	1
		Глава 6. Начальные сведения по стереометрии	**5**
24	96—97	Прямая призма. Пирамида	2
25	98—99	Цилиндр. Конус. Шар	2
	100	Контрольная работа № 6	1
		Повторение и систематизация учебного материала	**5**
	101—104	Повторение и систематизация учебного материала за курс геометрии 9 класса	4
	105	Итоговая контрольная работа	1

Методические рекомендации по организации учебной деятельности

Глава 1. Решение треугольников

§ 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла от 0° до 180°, выводить и применять основные соотношения между значениями этих функций для одного угла

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла от 0° до 180°, выводить и применять основные соотношения между значениями этих функций для одного угла

Основные понятия

Единичная окружность, косинус угла от 0° до 180°, синус угла от 0° до 180°, основное тригонометрическое тождество, тангенс угла от 0° до 180°, котангенс угла от 0° до 180°, тригонометрические функции.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	1.1, 1.3, 1.5, 1.7			1.2, 1.4, 1.6, 1.8
Урок 2	1.9, 1.11, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.18			1.10, 1.13, 1.17, 1.19

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	1.20, 1.22, 1.24, 1.26, 1.28, 1.29	1.31	Самостоятельная работа № 1: № 1, 2, 3	1.21, 1.23, 1.25, 1.27, 1.30

Методические комментарии

В курсе геометрии 8 класса понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса вводились как функции острого угла прямоугольного треугольника. Там же были рассмотрены основные соотношения между этими функциями одного и того же угла, основное тригонометрическое тождество, вычислены значения этих функций для некоторых «удобных» углов: 30°, 45°, 60°. Рекомендуем повторить этот материал перед изучением данного параграфа.

В курсе геометрии 9 класса понятие этих же функций угла от 0° до 180° вводится с помощью единичной полуокружности. В дальнейшем для изложения сведений о тригонометрических функциях и их свойствах понятие единичной окружности будет ключевым. Поэтому следует уделить особое внимание пониманию всеми учащимися этой наглядной интерпретации.

Для систематизации и установления связи с ранее изученным материалом можно после объяснения общей концепции соответствия углов и точек на единичной окружности рассматривать сущность тригонометрических функций по такому плану.

Начать следует с рассмотрения синуса и косинуса углов первой четверти. Учащиеся должны понять, что, поставив в соответствие каждой точке единичной окружности для угла $0° < \alpha < 90°$ некоторый треугольник со сторонами, равными координатам этой точки, мы фактически отождествляем определения синуса и косинуса, данные в 8 классе и изучаемые сейчас. Можно предложить учащимся, используя уже известные им метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, изобразить на полуокружности точки, соответствующие углам 30°, 45°, 60°, отметить на координатных осях значения синуса и косинуса для этих углов и самостоятельно найти эти значения.

Далее следует перейти к значениям синуса и косинуса углов 0°, 90°, 180°. Особо отметить, что с нулевыми значениями синуса и косинуса в 8 классе учащиеся ещё не встречались.

Значения синуса и косинуса углов второй четверти с помощью графической интерпретации на единичной полуокружности легко выражаются через значения углов первой четверти. Желательно подвести учащихся к самостоятельному выводу формул $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ с помощью единичной полуокружности.

Функции тангенс и котангенс вводятся через функции синус и косинус как их частное. Следует обратить внимание учащихся на то, что в изучаемом промежутке $[0°; 180°]$ синус и косинус принимают нулевые значения, значит, в этих точках ни тангенс, ни котангенс не существуют.

Основное тригонометрическое тождество для острых углов рассматривается опять-таки с помощью единичной полуокружности и теоремы Пифагора. Единица в его правой части — это гипотенуза треугольника, равная радиусу полуокружности. Для углов 0°, 90°, 180° в справедливости этого тождества учащиеся должны убедиться, подставив значения величин углов в формулу. Далее в учебнике продемонстрировано, как свести значение выражения $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ для тупого угла α к значению выражения $\cos^2\beta + \sin^2\beta$, где β — острый угол, $\beta = 180° - \alpha$. Обязательно следует разобрать с учащимися эти преобразования, поскольку далее этот инструментарий будет часто использоваться для преобразования тригонометрических выражений.

Комментарии к упражнениям

№ 1.11, 1.14. Удобно иллюстрировать эти упражнения с помощью единичной полуокружности.

№ 1.15. Учащихся может смутить незнание значений тригонометрических функций указанных в упражнении углов. Надо обратить внимание, что для выполнения упражнения достаточно знать только знаки значений функций.

№ 1.18—1.21. Эти упражнения используют формулы $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ и известные учащимся значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.

№ 1.31. Сгруппировать данное произведение в произведение пар множителей, равноудалённых от концов.

§ 2. Теорема косинусов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказывать и применять теорему косинусов.
	Личностные: развивать познавательный интерес к математике.

	Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять теорему косинусов.
Основные понятия	Теорема косинусов.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	2.1, 2.3, 2.5, 2.7			2.4, 2.4, 2.6, 2.8
Урок 2	2.9, 2.11, 2.13, 2.14, 2.16, 2.18			2.10, 2.12, 2.15, 2.17, 2.19
Урок 3	2.20, 2.22, 2.24, 2.27, 2.29, 2.31	2.25		2.21, 2.23, 2.26, 2.28, 2.30, 2.32
Урок 4	2.33, 2.36, 2.37, 2.39, 2.42	2.34, 2.40, 2.41		2.35, 2.38
Урок 5	2.43, 2.45, 2.47, 2.48, 2.51	2.46, 2.50		2.44, 2.49, 2.52
Урок 6	2.53, 2.54, 2.55, 2.57, 2.58, 2.60, 2.61	2.59, 2.63, 2.64	Самостоятельная работа № 2: № 1, 2, 3	2.56, 2.62

Методические комментарии

Теорема косинусов обычно не вызывает затруднений у учащихся. Следует обратить внимание учащихся на то, почему при её доказательстве требуется рассмотреть три случая в зависимости от вида угла A.

С помощью теоремы косинусов по сторонам треугольника можно найти его углы.

Целесообразно перед тем, как говорить о формуле нахождения косинуса угла треугольника с помощью теоремы косинусов, напомнить (возможно, с помощью единичной полуокружности), что на промежутке $[0°; 180°]$ функция косинус принимает каждое своё значение только один раз. Поэтому по известному косинусу угла значение самого угла определяется однозначно.

Главной идеей решения задач этого параграфа является нахождение в исследуемой геометрической фигуре треугольника, к которому можно применить теорему косинусов. В этом плане характерной является ключевая задача 1 параграфа, позволяющая по трём сторонам треугольника найти его медианы.

При решении задач этого параграфа не требуется находить величины углов. Поэтому вопрос «каким образом найти угол, если известен его косинус» у учащихся пока что не возникает.

Комментарии к упражнениям

№ 2.33. В ходе решения этой задачи следует напомнить учащимся (возможно, с помощью единичной окружности), что на промежутке $[0°; 180°]$ функция косинус принимает каждое своё значение только один раз, а функция синус — два раза (кроме $\sin 90°$). Поэтому косинус угла однозначно определяет сам угол, а синус — нет.

№ 2.31, 2.32, 2.36. При решении этих задач используется часто применяемое дополнительное построение: продление медианы на отрезок, длина которого равна данной медиане. Такое дополнительное построение позволяет применять свойство сторон и диагоналей параллелограмма, данное в ключевой задаче параграфа.

№ 2.45. Воспользуйтесь ключевой задачей 1 параграфа.

№ 2.48. Воспользуйтесь тем, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

№ 2.52. Через вершину D трапеции проведите прямую, параллельную стороне AB.

№ 2.62. Рассмотрите треугольник AOB, у которого $\angle O = 120°$, $OA = OB = 1$. Постройте луч OC так, что $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 30°$. Пусть M — произвольная точка луча OC, отличная от точки O. Обозначим $OM = x$. Воспользуйтесь тем, что $MA + MB \geqslant AB$.

§ 3. Теорема синусов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказывать теорему синусов и формулу радиуса окружности, описанной около треугольника, применять теорему синусов.

	Личностные: развивать познавательный интерес к математике.
	Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать теорему синусов и формулу радиуса окружности, описанной около треугольника, применять теорему синусов.
Основные понятия	Лемма о хорде окружности, теорема синусов, формула радиуса окружности, описанной около треугольника.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	3.1, 3.2, 3.5, 3.7			3.3, 3.4, 3.6
Урок 2	3.8, 3.9, 3.11, 3.13, 3.15	3.16, 3.18		3.10, 3.12, 3.14, 3.17
Урок 3	3.19, 3.21, 3.24, 3.25, 3.28	3.22, 3.27, 3.29		3.20, 3.23, 3.26
Урок 4	3.30, 3.32, 3.33, 3.37	3.34, 3.39, 3.40, 3.41, 3.42	Самостоятельная работа № 3: № 1, 2, 3	3.31, 3.35, 3.36, 3.38

Методические комментарии

Теоретический материал этого параграфа предоставляет инструментарий для нахождения синусов углов треугольника.

Здесь важно обратить внимание учащихся на то, что угол из промежутка $[0°; 180°]$ по значению его синуса находится неоднозначно. Поэтому, получив синус некоторого угла, для определения величины самого угла следует дополнительно проанализировать другие условия задачи. Возможно, задача имеет два решения.

Следует подчеркнуть, что лемма параграфа имеет также самостоятельное значение и будет неоднократно применяться при решении целого ряда задач.

В этом параграфе впервые появляются задачи, в которых для вычислений требуется знать конкретное значение тригонометрических функций для «неудобных» углов. Учащиеся находят их с помощью калькулятора. Следует посвятить некоторое время тому, чтобы обучить учащихся выполнять эти действия. Нахождение с помощью калькулятора значений тригонометрических функций данного угла учащиеся воспринимают как естественную задачу, так как они уже знакомы с этими функциями. Обратная же задача — по значению тригонометрической функции найти величину угла — пока что не имеет для них соответствующей теоретической базы, так как в 9 классе они ещё не знакомы с обратными тригонометрическими функциями. Поэтому учащиеся должны запомнить, какие инструменты калькулятора надо применять в этом случае. Для лучшего осознания учащимися сущности этих действий можно ознакомить их с историей создания инструментария вычисления значений тригонометрических функций (здесь поможет рассказ «Тригонометрия — наука об измерении треугольников» после данного параграфа). В частности, можно ознакомить учащихся с таблицами Брадиса. С их помощью можно наглядно продемонстрировать то, что связь между величиной угла и значением тригонометрических функций «работает» в обе стороны. Для повышения интереса к предмету можно рассказать о значении вычислительной математики для решения прикладных задач (например, в авиации, космонавтике) и о том, как организовывалось выполнение больших объёмов вычислений до создания компьютерной техники.

Теорема синусов подтверждает уже известный учащимся из материала 7 класса факт: в треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Однако при желании с помощью теоремы синусов обосновать, что против большей стороны лежит больший угол, надо обратить внимание на то, что одному и тому же значению синуса может соответствовать как «маленький» (острый), так и «большой» (тупой) угол.

Комментарии к упражнениям

№ 3.17. Решив эту задачу, учащиеся познакомятся с ещё одним доказательством свойства биссектрисы треугольника, которое далее будет использоваться при решении многих задач.

№ 3.28. В этой задаче учащиеся знакомятся с красивым и неожиданным фактом из геометрии треугольника. Также эта задача подчёркивает значение леммы параграфа как самостоятельного геометрического свойства.

№ 3.30. Выразите радиусы описанных окружностей через стороны четырёхугольника и синусы углов между диагоналями четырёхугольника. Также следует воспользоваться свойством описанного четырёхугольника.

№ 3.34. Найдите четырёхугольник, вокруг которого можно описать окружность.

§ 4. Решение треугольников

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать треугольники.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать треугольники.

Основные понятия

Решить треугольник.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	4.1, 4.3, 4.5, 4.6			4.2, 4.4, 4.6
Урок 2	4.7, 4.8, 4.10, 4.12		Самостоятельная работа № 4: № 1 (1), 2, 3	4.9, 4.11

Методические комментарии

С теоретической точки зрения материал данного параграфа несложен. Главная его задача — продемонстрировать учащимся практическое значение теоремы косинусов и теоремы синусов.

Для выполнения упражнений параграфа требуется большое количество вычислительной работы, поэтому они требуют от учащихся внимательности и аккуратности.

Следует обратить внимание на то, чтобы учащиеся не забывали исследовать количество решений задачи в тех случаях, когда по значению синуса надо найти величину угла.

В параграфе рассмотрено четыре примера, соответствующие основным типам задач на решение треугольников. Во всех трёх задачах примера 4 важно понимать, почему в том или ином месте цепочки выписываемых равенств появляется знак приближённого равенства. Также учащиеся должны понимать, почему в задаче три примера 4 возникает необходимость рассматривать два случая.

Комментарии к упражнениям

№ 4.1.—4.9. Важно, чтобы учащиеся классифицировали эти задачи в соответствии с типами примеров, разобранных в параграфе.
№ 4.12. В зависимости от уровня класса можно предложить учащимся найти углы трапеции по заданным основаниям и диагоналям. Здесь работает аналогичная идея: провести через вершину C трапеции $ABCD$ прямую, параллельную диагонали BD. Далее рассмотреть треугольник ACM, где M — точка пересечения проведённой прямой с прямой AD.

§ 5. Формулы для нахождения площади треугольника

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения доказывать и применять формулу для нахождения площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, формулу Герона, формулу $S = \frac{abc}{4R}$, площадь выпуклого четырёхугольника. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять формулу для нахождения площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, формулу Герона, формулу $S = \frac{abc}{4R}$, площадь выпуклого четырёхугольника.

Основные понятия

Формула для нахождения площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, формула Герона, формула $S = \frac{abc}{4R}$, площадь выпуклого четырёхугольника.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	5.1, 5.2, 5.4, 5.6			5.3, 5.5, 5.7
Урок 2	5.8, 5.10, 5.11, 5.13, 5.14	5.16		5.9, 5.12, 5.15
Урок 3	5.18, 5.19, 5.20, 5.22, 5.23, 5.24			5.17, 5.21
Урок 4	5.25, 5.26, 5.28, 5.29, 5.30, 5.32			5.27, 5.31, 5.33
Урок 5	5.34, 5.36, 5.37, 5.38, 5.40		Самостоятельная работа № 5: № 1, 2, 3	5.35, 5.39

Методические комментарии

Теоретический материал данного параграфа предоставляет ряд формул для нахождения площади треугольника по разным исходным данным. Эти формулы вместе с изученными в предыдущих параграфах теоремами косинусов и синусов существенно расширяют математический аппарат, которым учащиеся могут пользоваться для нахождения элементов и характеристик треугольника (стороны, углы, периметр, радиус вписанной и описанной окружности, площадь). Поэтому задачи этого параграфа требуют от учащихся в первую очередь анализа набора исходных данных и выбора того аппарата, с помощью которого по имеющимся исходным данным можно за один или несколько шагов найти требуемые неизвестные величины.

Следует обратить внимание учащихся, что формулы $R = \frac{abc}{4S}$ и $r = \frac{S}{p}$ и формула Герона позволяют находить соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника по его сторонам. Это иллюстрирует пример, разобранный в параграфе.

Авторами предложено другое, менее традиционное, решение ключевой задачи 2 параграфа. Через каждую вершину четырёхугольника, проводится прямая, параллельная соответствующей диагонали. Далее следует показать, что площадь образовавшегося параллелограмма в два раза больше площади данного многоугольника, а затем воспользоваться ключевой задачей 1.

Комментарии к упражнениям

№ 5.22. Докажите, что центр данной окружности является основанием биссектрисы треугольника, проведённой к большей стороне треугольника.

№ 5.23. Радиусы, проведённые в точки касания, являются высотами треугольников, площади которых известны.

Контрольная работа № 1

Глава 2. Правильные многоугольники

§ 6. Правильные многоугольники и их свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием «правильный многоугольник», применять свойства правильного многоугольника.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием «правильный многоугольник», применять свойства правильного многоугольника.

Основные понятия

Правильный многоугольник, свойства правильного многоугольника.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	6.1, 6.3, 6.4			6.2, 6.5
Урок 2	6.6, 6.8, 6.10, 6.11, 6.13			6.7, 6.9, 6.12, 6.14
Урок 3	6.15, 6.17, 6.19, 6.20, 6.22			6.16, 6.18, 6.21, 6.23
Урок 4	6.24, 6.26, 6.27, 6.29, 6.30	6.42, 6.43		6.25, 6.28, 6.31
Урок 5	6.32, 6.34, 6.35, 6.36, 6.39	6.37, 6.38, 6.41, 6.44, 6.45, 6.46, 6.47, 6.48	Самостоятельная работа № 6: № 1, 2, 3	6.33, 6.40

Методические комментарии

Некоторое затруднение может вызвать условное изображение n-угольника. Понятно, что изобразить n-угольник для общего случая невозможно, поэтому можно обратить внимание учащихся на условность такого изображения (так, на рисунке 6.4 «форма» треугольника, очевидно, зависит от значения n: чем больше n, тем острее угол при вершине равнобедренного треугольника) и подчеркнуть, что для доказываемой теоремы 6.2 точный вид изображения не важен.

Формулы для радиуса вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника для $n = 3, 4, 6$, приведённые в таблице, можно использовать при решении задач, однако не следует требовать от учащихся запоминания этих формул. Важно подчеркнуть, что их всегда можно вывести, зная формулы радиуса вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника для произвольного n. Таким образом, следует формировать у учащихся, особенно с математическим складом мышления, склонность к осознанию логической структуры курса математики, а не простому механическому запоминанию.

Теорема 6.1 является наглядно очевидной. Однако её доказательство непростое. В основу доказательства положен принцип крайнего: в любом конечном множестве есть наибольший и наименьший элементы.

Учащиеся должны понимать, что свойства правильных многоугольников определяют их алгоритм построения с помощью циркуля и линейки. В параграфе приводится интересная информация о построении правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.

Комментарии к упражнениям

№ 6.24. Полученный восьмиугольник можно разбить на равнобедренные треугольники так, как показано на рисунке 6.4. Сторона такого треугольника равна диагонали исходного квадрата, а угол при вершине — $\frac{360°}{8} = 45°$. Задача сводится к решению треугольника по двум сторонам и углу между ними.

№ 6.26.—6.28. Для решения этих задач следует данный многоугольник разбить на треугольники удобным образом.

№ 6.40. Докажите, что данный пятиугольник можно разбить на равные равнобедренные треугольники.

§ 7. Длина окружности. Площадь круга

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение выводить и применять формулу длины окружности, формулу длины дуги окружности. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулу длины окружности, формулу длины дуги окружности.
Основные понятия	Длина окружности, число π, длина дуги окружности.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	7.1, 7.2, 7.3, 7.5, 7.6			7.4, 7.7
Урок 2	7.8, 7.10, 7.11, 7.12, 7.14, 7.16, 7.17			7.9, 7.13, 7.15, 7.18
Урок 3	7.19, 7.21, 7.22, 7.23, 7.25, 7.26	7.27, 7.28		7.20, 7.24, 7.29
Урок 4	7.30, 7.31, 7.32, 7.34, 7.35	7.37, 7.38, 7.39	Самостоятельная работа № 7: № 1, 2, 3	7.33, 7.36

Методические комментарии

Формальное понятие длины линии в школьном курсе математики не вводится. Учащиеся должны осознавать его интуитивно, пользуясь наглядными представлениями, которые они получили в предыдущих классах.

В 8 классе было формально введено понятие площади многоугольника. Понятие площади круга построено на свойствах площади, сформулированных в 8 классе для многоугольников.

Данный параграф построен на инструментарии, совершенно новом для учащихся: переходе от конечных (хотя и больших) величин к бесконечным и изучении поведения этих величин. Фактически это пропедевтический подход к понятию предела последовательности. Поэтому очень важно не просто предоставить учащимся готовые формулы, а добиться осознанного подхода к их получению.

В данном параграфе продемонстрирован переход от длины ломаной к длине линии, от площади многоугольника — к площади криволинейной фигуры. Несмотря на отсутствие формального определения, учащиеся должны понимать, что свойства площади, сформулированные для многоугольников, выполняются и для площадей криволинейных фигур, и использовать эти свойства при решении задач (в частности, на этом надо акцентировать внимание при решении задачи 7.2).

Формулы длины окружности и площади круга знакомы учащимся из курса математики 6 класса. Цель же настоящего параграфа — показать, как с помощью свойств правильных многоугольников можно разъяснить происхождение этих формул.

Учащихся может заинтересовать рассказ о практическом применении этого свойства для вычисления площади криволинейных графических изображений (например, территории на карте) с помощью «палетки» — листа прозрачного материала, разграфлённого в клетку с известной площадью одной клетки. Для определения приближённого значения площади криволинейной фигуры достаточно наложить палетку на её изображение. Общая площадь полностью занятых клеток будет искомым значением «с недостачей», площадь клеток, занятых хотя бы частично, — «с избытком». Такие методы используются в географии, естественных науках, вычислительной математике.

Комментарии к упражнениям

№ 7.26. Аналогичную задачу учащиеся решали в 6 классе при изучении темы «Длина окружности».

Контрольная работа № 2

Глава 3. Декартовы координаты на плоскости

§ 8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Деление отрезка в данном отношении

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение выводить и применять формулу расстояния между двумя точками с заданными координатами, формулу нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять формулу расстояния между двумя точками с заданными координатами, формулу нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

Основные понятия

Декартовы координаты, расстояние между двумя точками с заданными координатами, координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, координаты середины отрезка.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	8.1, 8.2, 8.4, 8.6			8.3, 8.5, 8.7
Урок 2	8.8, 8.10, 8.12, 8.14, 8.15			8.9, 8.11, 8.13, 8.16
Урок 3	8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.23, 8.25, 8.26			8.19, 8.22, 8.24, 8.27

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 4	8.28, 8.29, 8.31, 8.33, 8.34, 8.36	8.37, 8.38, 8.39	Самостоятельная работа № 8: № 1, 2, 3	8.30, 8.32, 8.35

Методические комментарии

Вывод формулы расстояния между двумя точками на координатной плоскости основан на теореме Пифагора. Следует обратить внимание учащихся на то, почему треугольник ABC (рис. 8.3) является прямоугольным, а именно: поскольку система координат является прямоугольной, то любые две прямые, параллельные координатным осям, перпендикулярны между собой; а прямая, перпендикулярная одной из осей, параллельна другой. Для того чтобы закрепить у учащихся понимание этого факта, надо при решении первых нескольких задач с соответствующими сюжетами отдельно акцентировать наличие прямых углов в рассматриваемых фигурах на плоскости.

Следует напомнить учащимся, что две точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс, имеют одинаковую ординату, а две точки, лежащие на прямой, параллельной оси ординат, — одинаковую абсциссу.

В задачах этого параграфа требуется по координатам вершин треугольника и четырёхугольника определить (доказать) некоторые его свойства. Для этого можно использовать такие средства.

1) Учащиеся умеют находить расстояние между точками, искать координаты середины отрезка и делать вывод о совпадении двух точек на основании равенства их координат. Поэтому для доказательства свойств фигур с использованием метода координат удобно в первую очередь пользоваться теми признаками фигур, которые можно получить из равенства некоторых их элементов-отрезков и совпадения некоторых точек. Например, для прямоугольника можно ориентироваться не на то, что у него углы прямые, а на то, что диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Можно при рассмотрении задачи 1 теоретической части обсудить такой подход с учащимися, повторить с ними признаки, по которым классифицируются различные треугольники и четырёхугольники, и определить, какие из них целесообразно использовать для определения вида треугольника и четырёхугольника, заданных координатами вершин.

2) Для поиска величин углов между прямыми на координатной плоскости можно использовать теорему косинусов.

3) Для определения вида треугольника по данным длинам его сторон можно использовать теорему 2.2.

Выбор удобного инструментария в каждом конкретном случае зависит от набора исходных данных и от прогнозируемого количества промежуточных шагов, которые надо сделать.

Для решения задач на нахождение на координатной плоскости точек с заданными свойствами широко используется метод ГМТ. Надо повторить с учащимися его идею, а самое главное, напомнить необходимость в доказательстве двух взаимно обратных теорем.

Комментарии к упражнениям

№ 8.2. Центр описанной окружности треугольника (а также любого другого многоугольника) равноудалён от всех его вершин.

№ 8.3. Задача хорошо демонстрирует переход от доказательства равенства углов к доказательству равенства отрезков: надо доказать, что искомые углы равны, так как треугольник ABC равнобедренный, а для доказательства этого факта достаточно найти два равных отрезка среди отрезков AB, BC, AC.

№ 8.8, 8.9. Первым шагом при решении этих задач является нахождение координат середины отрезка.

№ 8.10. Решить эту задачу можно двумя способами.

Первый способ. Изобразить этот треугольник на плоскости и показать, что отрезки AB и BC составляют углы $45°$ с осями координат, а следовательно, угол между ними равен $45° + 45° = 90°$. В сильном классе надо потребовать от учащихся формального доказательства того, что отрезки AB и BC составляют углы $45°$ с осями координат. Для доказательства можно отметить точки D (2; 4) и E (1; 4) и показать, что треугольники ADB и BEC — равнобедренные прямоугольные.

Второй способ. Найти длины отрезков AB, AC, DC и далее — с помощью теоремы косинусов найти косинус угла между сторонами BA и BC либо использовать теорему 2.2 и доказать, что $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Также можно отметить, что здесь мы фактически воспользовались теоремой, обратной теореме Пифагора.

№ 8.12, 8.13. Используйте то, что если $AB + BC = AC$, то точки A, B, C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.

№ 8.14—8.16. Для решения задач требуется записать формулы, определяющие расстояния между данными точками и соотношение между этими расстояниями, обозначив неизвестную координату через x, а затем решить полученное уравнение относительно x.

№ 8.18, 8.19. Используйте то, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
№ 8.21. Достаточно показать, что все стороны четырёхугольника равны.
№ 8.22. Показав, что все стороны четырёхугольника равны (т. е. он является ромбом), далее надо показать либо то, что равны его диагонали, либо то, что углы между сторонами составляют $90°$.
№ 8.26, 8.27. Найдите длину известной стороны треугольника, обозначьте координаты неизвестной вершины через $(x; y)$ и составьте систему уравнений, в каждом из которых указав, что расстояние от неизвестной точки до одной из данных вершин треугольника равно стороне треугольника.
№ 8.28. Условие «модули координат точки B равны» означает, что точка B имеет координаты $(x; x)$ либо $(x; -x)$.
№ 8.34—8.36. Воспользуйтесь теоремой о биссектрисе треугольника.

§ 9. Уравнение фигуры

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием уравнение фигуры на координатной плоскости, выводить и использовать уравнение окружности.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием уравнение фигуры на координатной плоскости, выводить и использовать уравнение окружности.

Основные понятия

Уравнение фигуры на координатной плоскости, уравнение окружности, эллипс, гипербола, асимптоты гиперболы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	9.1, 9.2, 9.4, 9.6, 9.8			9.3, 9.5, 9.7, 9.9

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	9.10, 9.12, 9.14, 9.15, 9.17, 9.19, 9.20, 9.21			9.11, 9.13, 9.16, 9.18, 9.22
Урок 3	9.23, 9.24, 9.26, 9.28, 9.29, 9.30, 9.34	9.32, 9.33, 9.36, 9.37	Самостоятельная работа № 9: № 1, 2, 3	9.25, 9.27, 9.31, 9.35

Методические комментарии

Следует провести аналогию между уравнением фигуры на координатной плоскости и графиком функции, в то же время подчеркнув разницу между ними: для графика каждому значению координаты x может соответствовать не более одного значения координаты y, для уравнения фигуры может существовать любое количество различных точек с одной и той же координатой x. Здесь также уместно напомнить геометрический признак того, что фигура может служить графиком функции: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает данную фигуру не более, чем в одной точке.

Очень важно то, что фигуру можно рассматривать как ГМТ, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Благодаря этому:

- пересечение фигур рассматривается как множество решений системы уравнений, составленной из уравнений этих фигур;
- объединение фигур рассматривается как множество решений совокупности уравнений, составленной из уравнений этих фигур.

Этот подход позволяет использовать метод ГМТ, подробно рассмотренный в 7 классе, в совокупности с методом координат. Поэтому желательно повторить с учащимися, какие ГМТ им известны на описательном уровне, и попробовать описать их с помощью метода координат. Например, серединный перпендикуляр отрезка — это ГМТ, равноудалённых от его концов. В данном параграфе при выводе уравнения окружности использован тот факт, что окружность — ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние.

Комментарии к упражнениям

№ 9.6. Для составления уравнения окружности не хватает информации о длине её радиуса. Воспользуйтесь тем, что если окружность с центром M проходит через точку K, то MK — радиус этой окружности.

№ 9.7. Для составления уравнения окружности нужна информация о координатах её центра и длине её радиуса. Воспользуйтесь тем, что центр окружности — середина её диаметра, а длина радиуса равна половине длины диаметра.

№ 9.8. Достаточно доказать, что точки A и B принадлежат окружности, а середина отрезка AB совпадает с центром окружности.

№ 9.9. Достаточно показать, что точки C и D принадлежат окружности. Формулировка задачи не предусматривает доказательства того, что данная хорда не является диаметром, однако это можно выяснить, сравнив координаты середины отрезка CD с координатами центра окружности.

№ 9.12. Центр окружности равноудалён от двух принадлежащих ей точек. Поэтому задача сводится к поиску пересечения ГМТ, равноудалённых от точек A и B, с осью абсцисс.

№ 9.14. Взаимное расположение окружности и прямой определяется соотношением радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой. Учащиеся ещё не владеют инструментарием нахождения расстояния от точки до произвольной прямой на координатной плоскости. Однако в этой задаче речь идёт о координатных осях и о прямой, параллельной координатной оси. Отметим, что расстояние от точки до координатных осей равно соответствующим координатам этой точки, а до прямой, параллельной оси абсцисс, — разности ординат любой точки этой прямой и данной точки.

№ 9.24, 9.25. Расстояние от искомого центра окружности до каждой из данных точек равно данному радиусу окружности.

№ 9.26. Если окружность касается двух параллельных прямых, то её диаметр равен расстоянию между этими прямыми, а центр находится на прямой, лежащей между данными прямыми и на одинаковом расстоянии от них. Следовательно, радиус данной окружности равен 2, а центр принадлежит прямой $y = -2$. Далее, из условия, что эта окружность касается оси ординат, приходим к выводу, что центр окружности находится на расстоянии 2 от оси ординат, следовательно, имеет координаты $(-2; -2)$ либо $(2; 2)$.

№ 9.28. 1) Обозначьте координаты центра окружности через $(x; y)$ и запишите систему двух уравнений, которые описывают условия равноудалённости: первое уравнение — центра окружности от точек A и B, второе — центра окружности от точек B и C.

После решения этой задачи желательно предложить учащимся сделать вывод: о чём для такой задачи будет говорить ситуация, когда записанная система не будет иметь решений?

№ 9.32. Следует учесть, что окружности могут касаться как внешним, так и внутренним образом.
№ 9.34. Вершины квадрата симметричны относительно начала координат.

§ 10. Общее уравнение прямой

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение выводить уравнение прямой, использовать уравнение прямой для решения задач. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить уравнение прямой, использовать уравнение прямой для решения задач.
Основные понятия	Уравнение прямой, вертикальная прямая, невертикальная прямая, общее уравнение прямой.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	10.1, 10.3, 10.4, 10.6, 10.8			10.2, 10.5, 10.7, 10.9
Урок 2	10.10, 10.11, 10.13, 10.14, 10.16, 10.17	10.19, 10.20, 10.22, 10.23	Самостоятельная работа № 10: № 1 (1), 2, 3	10.12, 10.15, 10.18

Методические комментарии

Для понимания теоретического обоснования уравнения прямой учащиеся должны понимать, что любую прямую можно представить как ГМТ, равноудалённых от двух точек.

Важным является исследование расположения прямой на координатной плоскости в зависимости от значений параметров a, b, c. При решении многих задач тот факт, что некоторая прямая является горизонтальной или вертикальной, принципиально влияет на дальнейшие рассуждения.

Учащиеся должны осознать разницу между уравнением прямой $ax + by = c$, которое описывает любую прямую на координатной плоскости, и графиком линейной функции $y = kx + b$, который описывает только невертикальные прямые.

В зависимости от уровня класса можно подчеркнуть, что не всякое уравнение вида $ax + by = c$ задаёт прямую. Здесь особую роль начинает играть ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$. При этом уравнение любой прямой имеет вид $ax + by = c$.

Учащиеся должны овладеть инструментарием составления уравнения прямой, проходящей через две точки, продемонстрированным в задаче 1 этого параграфа. Следует обратить внимание на то, что записывать систему уравнений, подставляя координаты данных точек в уравнение $y = kx + b$, можно только убедившись в том, что данная прямая не является вертикальной (т. е. в том, что уравнение данной прямой действительно имеет вид $y = kx + b$).

Следует обратить внимание учащихся на то, что, имея уравнение прямой, мы можем искать пересечение этой прямой с другими фигурами, заданными своими уравнениями. Показательной является задача 2 этого параграфа, где находятся точки пересечения заданной прямой с осями координат.

Комментарии к упражнениям

№ 10.13. Для вычисления площади этого треугольника в качестве стороны удобно взять отрезок оси ординат, находящийся между точками пересечения данных прямых с осью ординат. При этом длина высоты, проведённой к этой стороне, будет равна модулю абсциссы точки пересечения данных прямых.

№ 10.14, 10.15. Прямая и окружность пересекаются, если они имеют две различные общие точки, и касаются, если они имеют только одну общую точку. Найдите количество решений системы уравнений, составленной из уравнений данной окружности и данной прямой.

№ 10.17, 10.18. Учащиеся ещё не владеют инструментарием для нахождения расстояния от точки до данной прямой на координатной плоскости. Поэтому можно воспользоваться тем, что расстояние от точки до прямой, не проходящей через начало координат, — это длина перпендикуляра, опущенного на эту прямую, а значит, опущенная на гипотенузу высота треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

Площадь треугольника равна произведению любой стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Исходя из этого, можно решать задачу по такому плану:
1) найти точки пересечения прямой с осями координат, найдя таким образом катеты образовавшегося прямоугольного треугольника;
2) вычислить площадь треугольника как полупроизведение катетов;
3) вычислить длину гипотенузы треугольника по теореме Пифагора либо с помощью метода координат;
4) вычислить длину высоты, проведённой к гипотенузе, как частное от деления площади треугольника на длину гипотенузы.
№ 10.22. Поскольку отрезок AB принадлежит оси ординат, то его серединный перпендикуляр имеет уравнение $y = 3$. Точка пересечения этой прямой с прямой $2x + 3y = 18$ — центр искомой окружности.
№ 10.23. Учащиеся достаточно легко придут к выводу, что это ГМТ представляет собой две прямые. Сложность этой задачи в том, чтобы задать эти две прямые одним уравнением.

§ 11. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение устанавливать соответствие между уравнением невертикальной прямой и углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится устанавливать соответствие между уравнением невертикальной прямой и углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс.
Основные понятия	Угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс, угловой коэффициент прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие параллельности прямых.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	11.1, 11.2, 11.3, 11.5, 11.7			11.4, 11.6, 11.8
Урок 2	11.9, 11.11, 11.13, 11.15, 11.16, 11.17, 11.19			11.10, 11.12, 11.14, 11.18
Урок 3	11.20, 11.22, 11.23, 11.25			11.21, 11.24, 11.26
Урок 4	11.27, 11.28, 11.29, 11.31, 11.32			11.30, 11.33
Урок 5	11.34, 11.35, 11.36, 11.37, 11.39, 11.41		Самостоятельная работа № 11: № 1, 2, 3	11.38, 11.40

Методические комментарии

Теоретический материал данной главы содержит два важных факта, позволяющих по уравнению прямой устанавливать её расположение на координатной плоскости:

1) угол наклона координатной прямой к положительному направлению оси абсцисс зависит от коэффициента k в уравнении прямой, записанном в виде $y = kx + b$;

2) все прямые с одинаковым значением коэффициента k параллельны и наоборот, если невертикальные прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

Желательно, чтобы учащиеся предложение о самостоятельном доказательстве факта из второго абзаца параграфа выполнили в качестве несложного упражнения.

В формулировке (1) параграфа учащиеся должны понимать необходимость в ограничении $b_1 \neq b_2$.

В формулировке теоремы 11.1 следует ещё раз подчеркнуть, какую роль играет словосочетание «тогда и только тогда».

Этот теоретический материал широко используется в решении задач.

То, что искомая прямая параллельна некоторой данной прямой, угловой коэффициент которой известен, позволяет сразу определить и угловой коэффициент искомой прямой. Поэтому типовые задачи «найти уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой», достаточно просты.

Доказательство того, что прямые $y = kx$ и $y = kx + b$ параллельны, формирует у учащихся представление о том, что график $y = f(x) + \text{const}$ получен из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (хотя не является доказательством этого тезиса для общего случая).

Вывод уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, является естественным продолжением вывода уравнения прямой по параметрам, которые её задают однозначно.

Следует обратить внимание учащихся, что при выводе формулы расстояния от точки до прямой полученная система уравнений не решается прямым поиском значений переменных. Такой путь мог бы привести к значительной вычислительной работе. Уравнение системы позволяет выразить часть доказываемой формулы через заданные параметры, что значительно облегчает доказательство формулы.

Комментарии к упражнениям

№ 11.23, 11.24. Вначале надо найти точку пересечения второй из данных прямых с указанной координатной осью. Тем самым задача сводится к типовой: «найти уравнение прямой, проходящей через найденную точку параллельно первой из данных прямых».

№ 11.39. Следует воспользоваться тем, что расстояние от центра окружности до искомой прямой равно радиусу окружности.

№ 11.40. Следует воспользоваться тем, что данные окружности имеют равные радиусы.

§ 12. Метод координат

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение применять метод координат при решении задач. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится применять метод координат при решении задач.

Основные понятия Метод координат.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	12.1, 12.2, 12.4, 12.5, 12.7, 12.9, 12.10			12.3, 12.6, 12.8
Урок 2	12.11, 12.12, 12.13, 12.15, 12.16, 12.17, 12.18	12.21, 12.22, 12.24, 12.25	Самостоятельная работа № 12: № 1, 2, 3	12.14, 12.19, 12.20, 12.23

Методические комментарии

В первую очередь следует разъяснить учащимся, что суть метода координат фактически заключается в переводе задачи на другой язык — язык формул. Понятно, что далеко не каждую геометрическую задачу можно и следует решать методом координат. Метод координат особо эффективен тогда, когда в задаче идёт речь о точках пересечения фигур. Эту задачу можно свести к поиску общих решений уравнений, задающих геометрические фигуры.

Метод координат особенно эффективен тогда, когда речь идёт о поиске ГМТ. Это объясняется тем, что уравнение фигуры показывает, каким свойством обладает каждая точка данной фигуры — её координаты являются решением уравнения фигуры и наоборот.

Также следует обратить внимание учащихся на необходимость удачного выбора системы координат. От такого выбора зависит возможность сокращения вычислительной части решения задачи.

Комментарии к упражнениям

№ 12.5. Выберите систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AB, а начало координат — с серединой отрезка AB.
№ 12.7. Учащиеся должны понимать, почему точки прямой AB не могут принадлежать искомому ГМТ. Это понимание позволит не совершить распространённую ошибку.
№ 12.18. Рассмотрите систему координат с центром в точке пересечения диагоналей ромба и осями, содержащими диагонали ромба.

Контрольная работа № 3

Глава 4. Векторы

§ 13. Понятие вектора

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием вектора в геометрии, а также основными понятиями, связанными с определением вектора. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать первоначальные представления об идеях и методах математики как об универсальном языке науки и техники, средстве моделирования явлений и процессов.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием вектора в геометрии, а также основными понятиями, связанными с определением вектора.
Основные понятия	Скалярная величина, вектор, начало вектора, конец вектора, направленный отрезок, нулевой вектор, модуль вектора, сонаправленные векторы, противоположно направленные векторы, равные векторы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	13.1, 13.3, 13.5, 13.6, 13.8			13.2, 13.4, 13.7
Урок 2	13.9, 13.10, 13.12, 13.13, 13.14, 13.16, 13.17, 13.19, 13.21, 13.23, 13.24	13.26, 13.27, 13.28	Самостоятельная работа № 13: № 1, 2, 3	13.11, 13.15, 13.18, 13.20, 13.22, 13.25

Методические комментарии

Понятие вектора является основополагающим для многих тем, которые будут изучаться далее как в курсах геометрии и стереометрии, так и во многих естественнонаучных дисциплинах. Поэтому следует уделить особое внимание формированию у учащихся представления о векторах и математического аппарата работы с ними.

В данном параграфе приводятся первоначальные сведения о векторах, вводится достаточно большой набор определений. На интуитивном уровне они достаточно понятны учащимся.

Затруднение может вызвать определение нулевого вектора. Здесь надо обратить внимание на такие две его особенности.

Вектор определяется как направленный отрезок. Однако, формируя понятие отрезка в начале изучения курса геометрии, мы обращали внимание на то, что начало и конец отрезка — разные точки. Для нулевого же вектора получаем, что его начало и конец — совпадающие точки, следовательно, нулевой вектор в этом смысле не соответствует традиционному понятию отрезка в геометрии. Вообще, направленный отрезок — это объект совсем иного рода, чем просто отрезок.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Поэтому, хотя в общем случае коллинеарность является транзитивным отношением, в том случае, когда в цепочке коллинеарных векторов появляется нулевой, транзитивность исчезает.

Учащиеся должны понимать, почему для нулевых векторов не вводится понятие сонаправленности. Также следует обратить внимание на определение равных векторов, а именно на то место, где отдельно оговаривается случай для нулевых векторов.

Эти особенности нулевого вектора следует объяснить учащимся на доступном им уровне.

В решении задач очень широко используется тот факт, что два равных вектора, не лежащие на одной прямой, представляют собой противолежащие стороны параллелограмма. Поэтому при решении задач на векторы часто используются свойства параллелограмма и его отдельных видов — прямоугольника, ромба, квадрата. Целесообразно обратить на это внимание учащихся.

Также параллелограмм и его отдельные виды очень удобны для демонстрации методов работы с векторами, потому что эти четырёхугольники и их диагонали предоставляют широкий набор равных, сонаправленных, противоположно направленных векторов.

Комментарии к упражнениям

№ 13.13. Важно подчеркнуть, что обратное утверждение не верно, т. е. из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ не следует, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

№ 13.19. Нет, точки A, B, C, D могут лежать на одной прямой.

№ 13.21. Ромб.
№ 13.23. Нулевой вектор.
№ 13.24. Покажите, что треугольник AMC — равносторонний.
№ 13.28. Важно, чтобы учащиеся хорошо освоили решение этой задачи, поскольку её результат будет использован при доказательстве теоремы 14.1.

§ 14. Координаты вектора

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение определять координаты вектора, заданного координатами его начала и конца; сравнивать векторы, заданные координатами; находить модуль вектора, заданного координатами.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится определять координаты вектора, заданного координатами его начала и конца; сравнивать векторы, заданные координатами; находить модуль вектора, заданного координатами.

Основные понятия

Координаты вектора, формула модуля вектора.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.6, 14.7, 14.9			14.3, 14.8, 14.10
Урок 2	14.11, 14.13, 14.15, 14.17, 14.19, 14.21		Самостоятельная работа № 14: № 1, 2, 3	14.12, 14.14, 14.16, 14.18, 14.20, 14.22

Методические комментарии

При усвоении материала этой главы у учащихся может возникнуть сложность, связанная с ранее сформировавшимся стереотипом: зная координату точки, её можно построить на координатной плоскости однозначно. Координаты вектора подобным свойством не обладают. Здесь важно, чтобы учащиеся понимали, что координаты вектора задают множество равных между собой векторов. Все эти векторы, отложенные от начала координат, совпадают.

Введение координат вектора в какой-то степени смещает акцент для изучаемой темы в сторону алгебры: появляется возможность целый ряд фактов изложить на языке формул. Это в свою очередь облегчает доказательство многих фактов, связанных геометрией векторов. Это иллюстрирует пример, разобранный в параграфе.

Материал этого параграфа во многом основан на ранее изученном инструментарии работы с точками и отрезками на координатной плоскости: нахождение длины отрезка, координат его середины и т. п. Желательно по мере изучения материала данного параграфа указывать на используемые сведения и одновременно повторять их.

Для учащихся, которые хорошо усвоили материал предыдущей главы, данный параграф не составляет затруднений. Большинство задач данного параграфа достаточно просты.

Комментарии к упражнениям

№ 14.19. Важно, чтобы учащиеся воспринимали два ответа не как результат формальных вычислений. Этот факт должен быть подкреплён наглядной интерпретацией.

№ 14.21. Решение удобно сопровождать графической иллюстрацией. Следует заметить, что вторые координаты точек A и B равны, следовательно, стороны прямоугольника параллельны осям координат. По координатам точек A и B можно определить длину стороны AB прямоугольника. Данный модуль вектора равен длине диагонали прямоугольника, следовательно, по диагонали и данной стороне можно определить неизвестную сторону прямоугольника. Задача имеет два решения, так как вектор $\overrightarrow{BC}$ можно отложить от точки B как в положительном, так и в отрицательном направлении оси ординат.

§ 15. Сложение и вычитание векторов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием суммы векторов, применять правила треугольника и парал-

	лелограмма для сложения векторов, применять свойства сложения векторов, доказывать и применять правило сложения векторов, заданных координатами. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием суммы векторов, применять правила треугольника и параллелограмма для сложения векторов, применять свойства сложения векторов, доказывать и применять правило сложения векторов, заданных координатами.
Основные понятия	Сумма векторов, правило треугольника, правило сложения векторов, заданных координатами, свойства сложения векторов.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	15.1, 15.3, 15.4, 15.5, 15.7			15.2, 15.6, 15.8
Урок 2	15.9, 15.10, 15.11, 15.13, 15.15, 15.16, 15.17, 15.19	15.14		15.12, 15.18, 15.20
Урок 3	15.21, 15.22, 15.23, 15.25, 15.27, 15.29, 15.30, 15.32, 15.33	15.34, 15.35		15.24, 15.26, 15.28, 15.31
Урок 4	15.37, 15.39, 15.41, 15.42, 15.44, 15.46			15.38, 15.40, 15.43, 15.45
Урок 5	15.47, 15.48, 15.50, 15.51, 15.52, 15.54	15.55, 15.56	Самостоятельная работа № 15: № 1, 2, 3	15.49, 15.53

Методические комментарии

Понятие сложения векторов воспринимается учащимися достаточно естественно, особенно если сделать акцент на графической и механической интерпретации сложения векторов.

Важно, чтобы учащиеся усвоили, в каких геометрических конфигурациях эффективнее работает одно из двух правил сложения векторов.

Не следует формализовать эту тему, сводя операцию сложения векторов к операции сложения их координат. В этой теме должно быть больше геометрии, чем алгебры.

Следует учесть, что замечание к теореме 15.1 воспринимается учащимися непросто. Здесь уместно учитывать уровень математической подготовки учащихся. Сама же теорема 15.1 воспринимается учащимися легко, как естественный факт. В некоторых ситуациях можно лишь ограничиться изучением этой теоремы, а замечание сделать необязательным для усвоения.

Понятие разности векторов воспринимается более сложно. Здесь надо аргументировать тем, что, как и для чисел, операция вычитания вводится через операцию сложения. Учащимся будет легче находить разность векторов, если, пользуясь теоремой 15.3, интерпретировать вычитание вектора как сложение с противоположным вектором.

Сложение векторов используется практически во всех задачах, где используется математический аппарат векторов. Поэтому надо уделить особое внимание тому, чтобы учащиеся усвоили материал данного параграфа и сознательно его применяли.

Нахождение суммы (разности) векторов, заданных своими координатами, алгоритмизировано, а поэтому учащиеся выполняют его довольно легко. Также благодаря этому облегчается доказательство целого ряда фактов, изложенных в параграфе.

Комментарии к упражнениям

Решение большого количества задач этого параграфа требует построения «цепочки» из заданных векторов и нахождения их суммы как вектора, соединяющего начало первого и конец последнего векторов этой цепочки. В частности, так решаются задачи, в которых требуется доказать, что сумма некоторого количества векторов равна нулю. Учащиеся должны научиться выбирать удобные для построения такой цепочки векторы и строить нужную последовательность. Одним из инструментов такого построения является «перенос» вектора с того места, где он изображён на рисунке, в «удобное» место цепочки. Для этого учащиеся должны видеть на изображении равные и параллельные отрезки. Следует обратить внимание учащихся на нужное направление, в частности, выбор для использования данного вектора либо вектора, противоположного данному.

№ 15.33. Следует разъяснить учащимся, какую роль играет доказанная формула. Здесь же уместно сообщить учащимся, что эта формула выражает правило многоугольника для сложения векторов.

№ 15.46. Если сумма трёх неколлинеарных векторов равна нулю, то эти векторы задают некоторый треугольник. В случае 1) векторы коллинеарны, в случае 2) векторы задают треугольник, в случае 3) векторы не коллинеарны и треугольника не задают.

№ 15.56. Важно разъяснить учащимся, какую роль в задаче играет условие «прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно не параллельны».

§ 16. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение умножать вектор на число; доказывать и применять свойство коллинеарных векторов, правило умножения вектора, заданного координатами, на число; применять свойства умножения вектора на число, применять основные приёмы решения задач с помощью векторов. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится умножать вектор на число; доказывать и применять свойство коллинеарных векторов, правило умножения вектора, заданного координатами, на число; применять свойства умножения вектора на число, применять основные приёмы решения задач с помощью векторов.
Основные понятия	Умножение вектора на число, свойство коллинеарных векторов, умножение вектора, заданного координатами, на число, свойства умножения вектора на число.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	16.1, 16.3, 16.4, 16.6, 16.7, 16.8			16.2, 16.5, 16.9
Урок 2	16.10, 16.11, 16.13, 16.15, 16.16, 16.18, 16.19			16.12, 16.14, 16.17, 16.20
Урок 3	16.21, 16.23, 16.25, 16.26, 16.28, 16.30, 16.31			16.22, 16.24, 16.27, 16.29, 16.32
Урок 4	16.33, 16.34, 16.35, 16.36, 16.38, 16.40			16.37, 16.39, 16.41
Урок 5	16.42, 16.43, 16.45, 16.46, 16.47, 16.49, 16.50			16.44, 16.48, 16.51
Урок 6	16.52, 16.55, 16.56, 16.57, 16.59, 16.61	16.53, 16.54, 16.62, 16.63, 16.65	Самостоятельная работа № 16: № 1, 2, 3	16.58, 16.60

Методические комментарии

Умножение вектора на число достаточно легко воспринимается учащимися, если формальному определению предшествует ряд подготовительных упражнений. Следует обратить внимание учащихся на то, что в примерах в начале параграфа понятие произведения вектора на число k вводится как сумма k одинаковых векторов, причём примеры приводятся для натуральных k, однако в определении число k является уже действительным числом.

Очень важно, чтобы учащиеся понимали, почему в теореме 16.1 вектор $\vec{a}$ не является нулевым. Доказательство самой же теоремы непростое. Здесь следует учитывать индивидуальные возможности учащихся класса.

Теорема 16.2 позволяет доказывать целый ряд фактов, связанных с умножением вектора на число, алгебраическим методом. Такие доказательства легко воспринимаются учащимися.

Теорема 16.1 и следствие 2 из теоремы 16.2 важны не только сами по себе, но и как пропедевтический подход к разложению вектора по базису. Примеры, разобранные в параграфе, демонстрируют, какую роль в геометрии векторов играют ключевые задачи 1 и 2.

Ключевые задачи, рассмотренные в параграфе, фактически являются основой для векторного метода решения задач. В задаче 3 параграфа показано, как использовать теорему 16.3, в частности единственность разложения вектора по базису, для векторного метода.

В результате изучения предыдущего и данного параграфов учащиеся получают достаточно полный инструментарий работы с векторами, заданными координатами. Желательно обратить внимание учащихся на удобство применения этого инструментария в физике, технических и компьютерных науках.

Комментарии к упражнениям

№ 16.28.—16.30. Учащиеся должны вспомнить, что коллинеарные векторы могут быть сонаправлены и противоположно направлены. Поэтому в задачах, в которых требуется найти вектор, коллинеарный данному и имеющий заданную длину, надо искать два решения — для сонаправленного и для противоположно направленного вектора.

№ 16.43, 16.50, 16.53, 16.54. Решая эти задачи, важно подчеркнуть, что их условие не содержит каких либо понятий, связанных с геометрией векторов. Вместе с тем эти задачи решаются с помощью применения свойств векторов. Также можно отметить, что такой метод решения задач называют векторным. Более подробно с векторным методом учащиеся могут познакомиться в дополнительном рассказе «Применение векторов».

№ 16.55. Выберите в пространстве произвольную точку O. Рассмотрите разности векторов с началом в точке O, концы которых находятся в соответствующих точках.

§ 17. Скалярное произведение векторов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями угла между векторами и скалярным произведением двух векторов; доказывать и применять условие перпендикулярности двух ненулевых векторов и формулу скалярного произведения двух векторов, заданных координатами; применять формулу косинуса угла между векторами, свойства скалярного произведения векторов.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятиями угла между векторами и скалярным произведением двух векторов; доказывать и применять условие перпендикулярности двух ненулевых векторов и формулу скалярного произведения двух векторов, заданных координатами; применять формулу косинуса угла между векторами, свойства скалярного произведения векторов.

Основные понятия Угол между векторами, перпендикулярные векторы, скалярное произведение двух векторов, скалярный квадрат, условие перпендикулярности двух ненулевых векторов, формула скалярного произведения двух векторов, заданных координатами, формула косинуса угла между векторами, свойства скалярного произведения векторов.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	17.1, 17.3, 17.4, 17.6, 17.8			17.2, 17.5, 17.7, 17.9
Урок 2	17.10, 17.12, 17.13, 17.14, 17.15, 17.16, 17.17, 17.19, 17.21			17.11, 17.18, 17.20, 17.22
Урок 3	17.23, 17.25, 17.27, 17.28, 17.30			17.24, 17.26, 17.29, 17.31,
Урок 4	17.32, 17.34, 17.36, 17.38, 17.39, 17.40, 17.41			17.33, 17.35, 17.37, 17.42
Урок 5	17.43, 17.44, 17.45, 17.46, 17.48, 17.50	17.51	Самостоятельная работа № 17: № 1 (3), 2, 3	17.47, 17.49

Методические комментарии

Ранее изложенные сведения о векторах были достаточно наглядными, для них легко было найти понятную интерпретацию в окружающем мире, поэтому предыдущий материал темы «Векторы» достаточно легко воспринимался учащимися. Понятие скалярного произведения не является таким же естественным, поэтому его объяснению следует уделить гораздо больше времени и внимания.

Учащимся вначале сложно будет увидеть непосредственную пользу от введения этого понятия, поэтому надо акцентировать внимание на таких аспектах:

1) с помощью скалярного произведения можно находить величину угла между векторами;

2) легко доказать перпендикулярность векторов, доказав, что их скалярное произведение равно нулю. Этот инструментарий будет удобно использовать для доказательства перпендикулярности прямых, лучей, отрезков, в том числе и на координатной плоскости;

3) операции сложения, вычитания и скалярного произведения векторов и операция умножения вектора на число в совокупности со свойствами этих операций, а также определение модуля вектора позволяют записывать выражения с векторами и проводить их преобразования так же, как преобразования алгебраических выражений. Практическое применение демонстрирует задача 2 этого параграфа: считая вектор $\overrightarrow{BM}$ неизвестной величиной и записав равенство, связывающее этот вектор с некоторым набором известных векторов и заданных углов между ними, можно считать это равенство уравнением относительно переменной $\overrightarrow{BM}$. Решив это уравнение, в результате получаем искомую величину.

Ключевая задача 5 показывает ещё один приём вывода формулы уравнения прямой, а также геометрический смысл коэффициентов a и b.

Комментарии к упражнениям

№ 17.4, 17.5. Эти задачи являются подготовительными для решения ряда задач этого параграфа, в них учащиеся учатся «видеть» величины наиболее употребительных углов между элементами равностороннего треугольника и квадрата. Задачи можно усложнить, попросив учащихся указать косинусы найденных углов.

№ 17.41, 17.50. Для доказательства перпендикулярности прямых надо показать, что скалярное произведение каких-либо векторов, принадлежащих этим прямым, равно нулю.

№ 17.47. Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

Контрольная работа № 4

Глава 5. Геометрические преобразования

§ 18. Преобразование (отображение) фигур

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение строить образ точки, задавать преобразование фигуры, определять обратимое преобразование.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать причинно-следственные связи, делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить образ точки, задавать преобразование фигуры, определять обратимое преобразование.

Основные понятия

Отображение фигуры, образ фигуры, прообраз фигуры, преобразование фигуры, образ точки, обратимое преобразование, обратное преобразование, взаимно-обратные преобразования, преобразование фигуры на себя, композиция.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	18.1, 18.3, 18.4, 18.5			18.2, 18.4, 18.6
Урок 2	18.7, 18.9, 18.11, 18.13			18.8, 18.10, 18.12, 18.14
Урок 3	18.15, 18.17, 18.18, 18.19, 18.21, 18.22	18.24, 18.25, 18.26	Самостоятельная работа № 18: № 1, 2, 3	18.16, 18.20, 18.23

Методические комментарии

Все преобразования фигур, предусмотренные в программе 9 класса, представляют собой взаимно-однозначные соответствия, а большинство из них (параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия и поворот) являются движениями. Поэтому надо провести работу по профилактике формирования у учащихся представления о том, что любое преобразование фигур будет обладать такими свойствами.

В начале параграфа понятие преобразования фигур объясняется на примерах. Оба этих примера также демонстрируют взаимно-однозначное соответствие между фигурой и её образом. Поэтому после рассмотрения этих двух примеров желательно предложить учащимся назвать как можно больше разнообразных преобразований фигуры. Если будет предложено хотя бы одно преобразование, при котором двум точкам исходной фигуры будет соответствовать одна точка образа — следует остановиться и подробно рассмотреть это преобразование, если же такого преобразования предложено не будет, то учитель должен сам предложить такое преобразование (например, на рисунке 18.2 вместо отрезка AB взять прямоугольник и спроецировать его на прямую a). Следует подчеркнуть, что в курсе геометрии 9 класса будут изучаться только преобразования, которые разным точкам исходной фигуры ставят в соответствие разные точки образа, но множество преобразований такими преобразованиями не ограничивается.

В зависимости от возможностей класса можно предложить учащимся рассматривать преобразование фигуры как функцию областью определения и областью значения которой являются множества точек, т. е. геометрическая фигура.

При функциональном подходе достаточно просто ввести такие понятия, как обратимое преобразование, преобразование, обратное данному, композиция преобразований.

Геометрические преобразования предоставляют учащимся принципиально новый и мощный математический аппарат для решения задач.

Комментарии к упражнениям

№ 18.21. 1) Каждой точке плоскости поставим в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. 2) Проведём через начало луча прямую, перпендикулярную лучу. Каждой точке полуплоскости, не содержащей луч, поставим в соответствие начало луча. Каждой точке другой полуплоскости поставим в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки полуплоскости на луч.

№ 18.26. Каждому лучу, лежащему на данной прямой, поставим в соответствие его начало. Получим отображение данной прямой на себя. Очевидно, что это преобразование не является обратимым.

§ 19. Движение. Параллельный перенос

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями движение и параллельный перенос, доказывать свойство параллельного переноса, строить образы и прообразы фигур при параллельном переносе. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями движение и параллельный перенос, доказывать свойство параллельного переноса, строить образы и прообразы фигур при параллельном переносе.
Основные понятия	Параллельный перенос, преобразование фигуры, образ фигуры, прообраз фигуры, движение (перемещение) фигуры, свойства движения, равные фигуры, взаимно обратные движения, свойства параллельного переноса.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	19.1, 19.3, 19.4, 19.5			19.2, 19.6
Урок 2	19.7, 19.8, 19.9, 19.11, 19.13, 19.14, 19.15	19.77		19.10, 19.12, 19.16
Урок 3	19.18, 19.19, 19.21, 19.23, 19.24, 19.28, 19.31	19.26, 19.29, 19.30	Самостоятельная работа № 19: № 1, 2, 3	19.20, 19.22, 19.25, 19.27, 19.32

Методические комментарии

Понятия параллельного переноса и движения достаточно естественны и легко воспринимаются учащимися.

Утверждение о том, что если некоторое преобразование сохраняет расстояние между точками, то образ и прообраз являются равными фигурами, воспринимается не так легко. Учащиеся могут доказать частные случаи: об отрезке, треугольнике, угле. Можно предложить учащимся доказать это утверждение и для других фигур (например, окружности, различных видов четырёхугольников и т. п.). Важно подчеркнуть, что введение движения позволило дать строгое определение равным фигурам и разъяснить ранее часто используемый наглядно понятный термин «наложение фигуры на фигуру».

В зависимости от уровня класса можно показать, что, зная образы трёх точек при движении, можно построить образ любой другой точки плоскости.

Параллельный перенос очень удобен для того, чтобы демонстрировать это преобразование на координатной плоскости: поскольку каждая точка образа является результатом параллельного переноса точки исходной фигуры на вектор $\vec{a}$, то координаты точек образа фигуры вычисляются очень легко с помощью сложения координат исходной точки и координат вектора $\vec{a}$. Легко решается и обратная задача: зная координаты образа и прообраза, легко вычислить координаты вектора, на который происходит параллельный перенос.

Следствие из теоремы 19.6 является важным свойством, на котором основано решение многих задач.

Комментарии к упражнениям

№ 19.10, 19.13, 19.17. Решение этих задач должно основываться на том, что при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ все точки исходной фигуры переносятся на один и тот же вектор $\vec{a}$. Следовательно, для получения образа каждой точки фигуры к первой координате точки прибавляется одно и то же число — первая координата вектора $\vec{a}$, ко второй координате точки — вторая координата вектора $\vec{a}$.

№ 19.24. Постройте треугольник по трём сторонам: боковым сторонам трапеции и разности оснований. Затем выполните параллельный перенос одной из боковых сторон в направлении, совпадающем со стороной треугольника, являющейся разностью оснований, на расстояние, равное меньшему основанию трапеции.

№ 19.25. Построить треугольник, две стороны которого равны боковым сторонам трапеции, а третья — разности оснований.

№ 19.27. Постройте диаметр этой окружности, параллельный данному отрезку AB. Отложите на диаметре отрезок A_1B_1 так, чтобы его середина совпадала с центром окружности. Далее с помощью параллельного переноса в направлении, перпендикулярном диаметру, следует найти положение этого отрезка, при котором его концы будут принадлежать окружности. Для этого проведите перпендикуляры к данному диаметру через концы отрезка A_1B_1, точки пересечения перпендикуляров с окружностью и будут концами искомой хорды. Если длина отрезка AB меньше диаметра окружности, то задача имеет два решения; если равна — одно решение (сам проведённый диаметр), если больше — задача решений не имеет.

§ 20. Осевая симметрия

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием осевая симметрия, доказывать свойство осевой симметрии, выполнять построения с помощью осевой симметрии. ***Личностные:*** формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности, о её значимости для развития цивилизации. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием осевая симметрия, доказывать свойство осевой симметрии, выполнять построения с помощью осевой симметрии.
Основные понятия	Точки, симметричные относительно прямой, осевая симметрия относительно прямой, ось симметрии, свойство осевой симметрии, фигура, симметричная относительно прямой, ось симметрии фигуры.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	20.1, 20.3, 20.4, 20.6	20.8		20.2, 20.5, 20.7
Урок 2	20.9, 20.10, 20.12, 20.13, 20.14, 20.16, 20.17, 20.18			20.11, 20.15, 20.19
Урок 3	20.20, 20.21, 20.23, 20.25, 20.26, 20.28, 20.30			20.22, 20.24, 20.27, 20.29
Урок 4	20.31, 20.32, 20.34, 20.36, 20.37, 20.50, 20.51	20.41, 20.42		20.33, 20.35
Урок 5	20.38, 20.43, 20.45, 20.46, 20.47, 20.48, 20.49	20.52, 20.53	Самостоятельная работа № 20: № 1, 2, 3	20.39, 20.40, 20.44

Методические комментарии

Отметим, что в учебнике преобразование осевой симметрии фигуры даётся описательно после формального определения точек, симметричных относительно прямой.

С фигурами, имеющими ось симметрии, учащиеся ознакомились в 5 классе, с понятием осевой симметрии — в 6 классе. В 9 классе сведения об этом преобразовании обобщаются и систематизируются, в частности, доказывается тот важный факт, что данные преобразования являются движениями.

Следствие из теоремы 20.1 является важным свойством, на котором основано решение многих задач.

Теоремы 20.2 и 20.3 в параграфе не доказываются. Это объясняется тем, что содержание параграфа достаточно насыщенное, а также важно сосредоточить внимание на формирование у учащихся навыков применения осевой симметрии при решении задач.

В зависимости от возможностей класса теорему 20.4 можно доказать, воспользовавшись планом доказательства, приведённым в параграфе.

Примеры, разобранные в параграфе, демонстрируют, что изучаемые преобразования являются мощным инструментом для решения задач на построение.

Ключевая задача 4 параграфа выражает основное свойство ортоцентрического треугольника.

Задачи этого параграфа достаточно наглядны. При их решении важно проанализировать, все ли возможные варианты рассмотрены.

Комментарии к упражнениям

№ 20.4. Прямые a и a_1 при пересечении образовали две пары вертикальных углов. Объединение биссектрис вертикальных углов одной пары — искомая прямая. Задача имеет два решения (каждое решение соответствует одной паре вертикальных углов).

№ 20.5. Искомая прямая параллельна данным прямым и находится между ними на одинаковом расстоянии от них.

№ 20.6. Вершина A симметрична вершине C относительно прямой l, а вершина D симметрична вершине B относительно прямой AC.

№ 20.8. Проведите окружности радиуса AO_1 с центрами в точках A и B. Одна из точек пересечения этих окружностей — это точка O_1, а вторая — центр искомой окружности, симметричной окружности с центром O_1 относительно прямой AB. Аналогичным образом строится вторая искомая окружность.

№ 20.33. Воспользуйтесь задачей 2 параграфа.

№ 20.44. Постройте треугольник по разности двух данных углов и двум сторонам, равным боковым сторонам трапеции.

§ 21. Центральная симметрия

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием центральная симметрия, доказывать свойство центральной симметрии, выполнять построения с помощью центральной симметрии. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием центральная симметрия, доказывать свойство центральной симметрии, выполнять построения с помощью центральной симметрии.
Основные понятия	Точки, симметричные относительно данной точки, центральная симметрия относительно точки, центр симметрии, свойство центральной симметрии, фигура, симметричная относительно точки, центр симметрии фигуры

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	21.1, 21.4, 21.5, 21.6, 21.7			21.2, 21.3, 21.8, 21.9
Урок 2	21.10, 21.11, 21.13, 21.15, 21.16	21.17		21.12, 21.14
Урок 3	21.18, 21.19, 21.20, 21.22, 21.24	21.31, 21.32		21.21, 21.23
Урок 4	21.25, 21.26, 21.27, 21.28, 21.33	21.35, 21.36	Самостоятельная работа № 21: № 1, 2, 3	21.29, 21.34

Методические комментарии

Отметим, что в учебнике преобразование центральной симметрии фигуры даётся описательно после формального определения точек, симметричных относительно данной точки.

С понятием центральной симметрии учащиеся ознакомились в 6 классе. В 9 классе сведения об этом преобразовании обобщаются и систематизируются, в частности, доказывается тот важный факт, что данные преобразования являются движениями.

Следствия из теоремы 21.1 являются основой для решения большинства задач на применение центральной симметрии.

Ключевая задача 3 параграфа показывает, как композиция центральных симметрий связана с параллельным переносом.

Идея решения задачи 3 очень красивая. Она в первую очередь полезна с педагогической точки зрения. Поэтому эту задачу следует подробно разобрать с учащимися.

Комментарии к упражнениям

№ 21.4. Решение задачи основывается на таком факте: точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

№ 21.5. Все точки прямой, которая параллельна данным прямым и находится между ними на одинаковом расстоянии от них.

№ 21.27. Следует воспользоваться тем, что точка, симметричная точке, лежащей на стороне квадрата, принадлежит противоположной стороне квадрата.

№ 21.27. Постройте окружность, симметричную одной из данных, относительно заданной точки. Найдите точку пересечения построенной окружности с одной из данных. Прообраз этой точки при указанной центральной симметрии является одной из вершин искомого ромба.

№ 21.33. Проведённые прямые можно разбить на пары прямых, симметричных относительно центра данной окружности.

§ 22. Поворот

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием поворота, доказывать и применять свойство поворота, выполнять построения с помощью поворота. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием поворота, доказывать и применять свойство поворота, выполнять построения с помощью поворота.
Основные понятия	Поворот вокруг центра против часовой стрелки на данный угол, поворот вокруг центра по часовой стрелке на данный угол, центр поворота, угол поворота, свойство поворота.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	23.1, 23.3, 23.5			23.2, 23.4
Урок 2	23.6, 23.7, 23.8, 23.10, 23.11, 23.13			23.9, 23.12, 23.14, 23.15
Урок 3	23.16, 23.18, 23.20, 23.22, 23.23			23.17, 23.19, 23.21, 23.24
Урок 4	23.25, 23.26, 23.28, 23.29, 23.31, 23.33	23.34, 23.35	Самостоятельная работа № 22: № 1, 2, 3	23.27, 23.30, 23.32

Методические комментарии

Преобразование поворота является новым для учащихся, хотя на интуитивном уровне оно достаточно понятно.

Определение поворота даётся описательно. Понятия направления поворота (против часовой стрелки, по часовой стрелке) вводится нестрого, апеллируя к наглядным соображениям.

Теорема 22.2 показывает связь между преобразованием поворота.

Теорема 22.3 показывает, какую роль играет осевая симметрия в системе движений плоскости. В зависимости от уровня класса учащихся можно познакомить с содержанием теоремы Шаля.

Задачи 1 и 2 параграфа иллюстрируют применение преобразования поворота для решения задач. Эти задачи алгоритмичны. Их содержание можно использовать для решения других задач на применение поворота.

Комментарии к упражнениям

№ 22.5. 1) Возьмите квадрат и «вытрите» на каждой стороне по одинаковому фрагменту (например, по половине каждой стороны, начиная от вершины и двигаясь по часовой стрелке) так, чтобы квадрат перестал иметь оси симметрии.
2) Проделайте то же самое с равносторонним треугольником.
№ 22.14. Рассмотрим вершину A квадрата в качестве центра поворота. Постройте образ стороны CD вокруг точки A против часовой стрелки на угол 60°. Найдём пересечение этого образа со стороной AB.

№ 22.21. Докажите, что точка K — образ точки M при повороте вокруг точки C на 60° по часовой стрелке.

§ 23. Гомотетия. Подобие фигур

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями гомотетия и подобие фигур, строить фигуру, гомотетичную данной, с заданным коэффициентом гомотетии.

Личностные: формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности, о её значимости для развития цивилизации.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями гомотетия и подобие фигур, строить фигуру, гомотетичную данной, с заданным коэффициентом гомотетии.

Основные понятия

Гомотетия, центр гомотетии, коэффициент гомотетии, свойства гомотетии, композиция двух преобразований, преобразование подобия, подобные фигуры, отношение площадей подобных многоугольников.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	23.1, 23.3, 23.4, 23.6, 23.8			23.2, 23.5, 23.7
Урок 2	23.9, 23.11, 23.13, 23.15, 23.17, 23.18			23.10, 23.12, 23.14, 23.16, 23.19
Урок 3	23.20, 23.22, 23.23, 23.25, 23.27, 23.29, 23.31, 23.32			23.21, 23.24, 23.26, 23.28, 23.30, 23.33

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 4	23.34, 23.36, 23.38, 23.40, 23.43, 23.46	23.45		23.35, 23.37, 23.39, 23.41, 23.44
Урок 5	23.47, 23.49, 23.51, 23.52, 23.54, 23.55, 23.56	23.58		23.48, 23.50, 23.53, 23.57
Урок 6	23.59, 23.61, 23.62, 23.63, 23.64, 23.66, 23.68	23.69, 23.70, 23.72	Самостоятельная работа № 23: № 1, 2, 3	23.60, 23.63, 23.65, 23.67

Методические комментарии

Гомотетия — преобразование, новое для учащихся и более сложное, чем движение. Ситуация осложняется тем, что этот материал изучается в конце учебного года. Поэтому в зависимости от возможностей класса надо распределить время на изучение геометрических преобразований так, чтобы уделить достаточно учебного времени гомотетии и подобию.

В учебнике выбран наиболее оптимальный приём введения гомотетии — с помощью векторов. Также на коэффициент гомотетии вводится лишь одно ограничение $k \neq 0$. Подход, когда рассматривается гомотетия лишь с положительным коэффициентом, существенно ограничивает использование этого преобразования как метода решения целого ряда задач. В зависимости от возможностей класса можно подчеркнуть, что гомотетия является взаимно однозначным отображением.

В параграфе вводится важное понятие: композиция преобразований. Детально это понятие не рассматривается, но можно пояснить учащимся, что композиция — это последовательное выполнение нескольких преобразований, и провести аналогию со сложением векторов. Рисунок 23.8 иллюстрирует наглядную схему, облегчающую восприятие преобразования подобия как композицию двух преобразований.

В зависимости от возможностей класса можно рассмотреть с учащимися определение подобных фигур в общем виде, тем самым обобщив понятие подобия треугольников.

Данный параграф содержит много нового материала и внешне выглядит сложным. Однако он достаточно логичен и структурирован, поэтому, если вводить новый материал пошагово и добиваться от учащихся понимания на каждом этапе, то он хорошо усваивается.

Комментарии к упражнениям

№ 23.18, 23.19. Чтобы показать, что фигура не является своим образом при гомотетии с коэффициентом, не равным 1, найдите хотя бы одну точку, образ которой не может принадлежать этой же фигуре.
№ 23.47—23.50. Эти задачи иллюстрируют возможности гомотетии как эффективного метода решения задач.
№ 23.53. Эта задача аналогична задаче 23.51.

Контрольная работа № 5

Глава 6. Начальные сведения по стереометрии

§ 24. Прямая призма. Пирамида

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: познакомить учащихся с геометрическим телами, многогранниками; формировать умение доказывать и использовать формулу для нахождения площади боковой поверхности прямой призмы, вычислять объём прямой призмы.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки. Метапредметные: формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности — чертежи, развивать пространственное воображение учащихся.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать и использовать формулу для нахождения площади боковой поверхности прямой призмы, вычислять объём прямой призмы.

Основные понятия

Пространство, стереометрия, плоскость, геометрическое тело, многогранник, прямая призма, площадь боковой поверхности прямой призмы, площадь поверхности прямой призмы, единичный куб, объём прямой призмы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	24.1, 24.3, 24.5, 24.7			24.2, 24.4, 24.6, 24.8
Урок 2	24.9, 24.10, 24.12, 24.13, 24.14, 24.16	24.18	Самостоятельная работа № 24: № 1, 2, 3	24.11, 24.15, 24.17, 24.19

Методические комментарии

В начале изучения темы нужно привести как можно больше примеров объектов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, пирамиды. Желательно использовать два вида моделей призмы и пирамиды: сплошную и каркасную. Первый вид модели удобно демонстрировать при изучении формы граней. Второй вид модели позволяет увидеть все рёбра многогранника.

Надо обратить внимание учащихся на построение изображения пространственной фигуры. Поэтому перед тем, как учить изображать указанные многогранники, можно дать возможность учащимся подержать модели многогранников в руках. При этом учащиеся могут самостоятельно подсчитать количество вершин, рёбер, граней параллелепипеда, а также количество рёбер, выходящих из одной вершины, и т. п. Также можно предложить учащимся самостоятельно изготавливать модели изучаемых многогранников, пользуясь различными материалами.

Сопоставление сплошной и каркасной моделей одной и той же фигуры позволяет учащимся понять принцип изображения на рисунке видимых и невидимых рёбер.

Полезным будет следующее упражнение: показать учащимся каркасную модель изучаемой фигуры, изобразить эту фигуру на доске и установить соответствие между гранями и рёбрами фигуры и их изображением.

Необходимо учесть, что выполнять построение изображения прямоугольного параллелепипеда легче, если использовать клетчатую бумагу.

При изучении материала важно подчеркнуть, что призма и пирамида являются частными видами многогранников. Также полезно привести примеры геометрических тел, не являющихся многогранниками.

Комментарии к упражнениям

№ 24.1—24.5. Можно предложить учащимся решить устно эти задачи.
№ 24.13. Возможно, придётся объяснить учащимся, что такое погонный метр.
№ 24.14. Задача демонстрирует, что основания призмы не обязательно расположены горизонтально.

§ 25. Цилиндр. Конус. Шар

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** сформировать у учащихся представление о геометрических фигурах: цилиндр, конус, шар, сформировать умение применять формулы площади боковой поверхности цилиндра, объёма цилиндра, объёма конуса, объёма шара.

	Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки. ***Метапредметные:*** формировать первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать геометрические фигуры: цилиндр, конус, шар и сферу, указывать их элементы, вычислять площади боковой поверхности цилиндра, объёма цилиндра, объёма конуса, объёма шара.
Основные понятия	Цилиндр, ось цилиндра, основания цилиндра, боковая поверхность цилиндра, образующая цилиндра, площадь боковой поверхности цилиндра, конус, основание конуса, боковая поверхность конуса, образующая конуса, ось конуса, высота конуса, развёртка боковой поверхности конуса, сфера, центр сферы, радиус сферы, шар, поверхность шара, центр шара, радиус шара.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	25.1, 25.2, 25.4, 25.5, 25.7, 25.8, 25.9			25.3, 25.6
Урок 2	25.10, 25.12, 25.14, 25.15, 25.17, 25.19		Самостоятельная работа № 25: № 1, 2, 3	25.11, 25.13, 25.16, 25.18

Методические комментарии

Учащимся следует предложить после примеров, приведённых в параграфе, назвать реальные объекты, имеющие форму цилиндра. Целесообразно использовать на уроке модели тел вращения, изготовленные из различных материалов.

Желательно заранее изготовить развёртки цилиндра и конуса и на уроке показать, как из этих развёрток можно склеить соответствующие фигуры. Это полезно в первую очередь при изучении конуса, поскольку для учащихся элементы развёртки конуса не совсем очевидны.

Учащиеся часто называют сферу шаром. Для профилактики этой ошибки желательно привести как можно больше примеров реальных объектов, имеющих форму шара или сферы (мяч для настольного тенниса, мыльный пузырь и т. п.).

Рассматривая свойство сечений шара плоскостью, целесообразно использовать соответствующую модель или же провести реальный эксперимент с разрезанием различных овощей и фруктов.

Комментарии к упражнениям

№ 25.1—25.8. Можно предложить учащимся решить устно эти задачи.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Решение треугольников

Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см, а угол между ними — $60°$. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.
2. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle A = 120°$. Найдите сторону BC треугольника.
3. Одна сторона треугольника на 8 см больше другой, а угол между ними равен $120°$. Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 28 см.
4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13 см, 20 см и 21 см.
5. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — $\sqrt{14}$ см. Найдите неизвестную сторону треугольника.
6. Величина угла с вершиной в точке S равна $30°$. Из точки M, принадлежащей данному углу, к его сторонам проведены перпендикуляры MN и MK. Известно, что $MN = 4$ см, $MK = 2\sqrt{3}$ см. Найдите SM.

Вариант 2

1. Две стороны треугольника равны 10 см и 12 см, а угол между ними — $120°$. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.
2. В треугольнике ABC известно, что $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите сторону AB треугольника.
3. Одна сторона треугольника на 3 см меньше другой, а угол между ними равен $60°$. Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 7 см.
4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 4 см, 13 см и 15 см.
5. Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 7 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его меньшей стороне.
6. Величина угла с вершиной в точке O равна $60°$. Из точки K, принадлежащей данному углу, к его сторонам проведены перпендикуляры KM и KF. Известно, что $KM = 6$ см, $KF = 2$ см. Найдите OK.

Вариант 3

1. Две стороны треугольника равны 8 см и $4\sqrt{3}$ см, а угол между ними — 30°. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.
2. В треугольнике ABC известно, что $BC = 7\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$, $\angle B = 30°$. Найдите сторону AC треугольника.
3. Одна сторона треугольника на 6 см больше другой, а угол между ними равен 120°. Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 21 см.
4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 18 см, 20 см и 34 см.
5. Две стороны треугольника равны 7 см и 9 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — $\sqrt{29}$ см. Найдите неизвестную сторону треугольника.
6. Величина угла с вершиной в точке F равна 45°. Из точки A, принадлежащей данному углу, к его сторонам проведены перпендикуляры AK и AN. Известно, что $AK = 4$ см, $AN = 2\sqrt{2}$ см. Найдите AF.

Вариант 4

1. Две стороны треугольника равны 6 см и $4\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 135°. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.
2. В треугольнике ABC известно, что $AC = 9\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$. Найдите сторону AB треугольника.
3. Одна сторона треугольника на 10 см меньше другой, а угол между ними равен 60°. Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 14 см.
4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 5 см, 12 см и 15 см.
5. Стороны треугольника равны 5 см, 7 см и 10 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его большей стороне.
6. Величина угла с вершиной в точке B равна 120°. Из точки N, принадлежащей данному углу, к его сторонам проведены перпендикуляры NA и NC. Известно, что $NA = 5$ см, $NC = 8$ см. Найдите BN.

Контрольная работа № 2

Тема. Правильные многоугольники

Вариант 1

1. Найдите длину окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 12 см.
2. В окружность вписан квадрат со стороной 8 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.
3. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 4 см, а сторона многоугольника — $4\sqrt{3}$ см. Найдите: 1) радиус окружности, вписанной в многоугольник; 2) количество сторон многоугольника.
4. Сторона треугольника равна $6\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 40° и 80°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.
5. Углы правильного треугольника со стороной 6 см срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону образовавшегося шестиугольника.
6. Из точки, принадлежащей правильному восьмиугольнику, на его стороны проведены перпендикуляры. Найдите сумму длин этих перпендикуляров, если известно, что радиус описанной окружности восьмиугольника равен 2 см.

Вариант 2

1. Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной 10 см.
2. Около окружности описан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.
3. Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, равен 5 см, а сторона многоугольника — 10 см. Найдите: 1) радиус окружности, описанной около многоугольника; 2) количество сторон многоугольника.
4. Сторона треугольника равна $8\sqrt{2}$ см, а прилежащие к ней углы равны 35° и 100°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.
5. Углы квадрата со стороной 8 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите сторону образовавшегося восьмиугольника.
6. Из точки, принадлежащей правильному шестиугольнику, на его стороны проведены перпендикуляры. Найдите сумму длин этих перпен-

дикуляров, если известно, что радиус описанной окружности шестиугольника равен 4 см.

Вариант 3

1. Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 9 см.
2. В окружность вписан правильный шестиугольник со стороной 9 см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.
3. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $8\sqrt{2}$ см, а радиус вписанной в него окружности — 8 см. Найдите: 1) сторону многоугольника; 2) количество сторон многоугольника.
4. Сторона треугольника равна 5 см, а прилежащие к ней углы равны 45° и 105°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.
5. Углы правильного треугольника срезали так, что получили правильный шестиугольник со стороной 8 см. Найдите сторону данного треугольника.
6. Из точки, принадлежащей правильному шестиугольнику, на его стороны проведены перпендикуляры. Найдите сумму длин этих перпендикуляров, если известно, что радиус вписанной окружности шестиугольника равен 6 см.

Вариант 4

1. Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной 16 см.
2. Около окружности описан квадрат со стороной 36 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.
3. Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, равен 12 см, а сторона многоугольника — $8\sqrt{3}$ см. Найдите: 1) радиус окружности, описанной около многоугольника; 2) количество сторон многоугольника.
4. Сторона треугольника равна $10\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 10° и 50°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.
5. Углы квадрата срезали так, что получили правильный восьмиугольник со стороной 4 см. Найдите сторону данного квадрата.
6. Из точки, принадлежащей правильному двенадцатиугольнику, на его стороны проведены перпендикуляры. Найдите сумму длин этих перпендикуляров, если известно, что радиус описанной окружности двенадцатиугольника равен 8 см.

Контрольная работа № 3

Тема. Декартовы координаты на плоскости

Вариант 1

1. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $A\ (-1;\ 2)$ и которая проходит через точку $M\ (1;\ 7)$.
2. Найдите координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если $A\ (3;\ -2)$, $C\ (9;\ 8)$, $D\ (-4;\ -5)$.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (1;\ 1)$ и $B\ (-2;\ 13)$.
4. Найдите координаты точки, принадлежащей оси абсцисс и равноудалённой от точек $A\ (-1;\ 4)$ и $B\ (5;\ 2)$.
5. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -2x + 7$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$.
6. На сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $CM : MD = 1 : 2$, $AN : ND = 2 : 3$. Найдите расстояние от точки M до прямой BN, если известно, что $AB = 6$ см, $AD = 5$ см.

Вариант 2

1. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $M\ (1;\ -3)$ и которая проходит через точку $B\ (-2;\ 5)$.
2. Найдите координаты вершины M параллелограмма $MNKF$, если $N\ (5;\ 5)$, $K\ (8;\ -1)$, $F\ (6;\ -2)$.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (2;\ -1)$ и $C\ (-3;\ 15)$.
4. Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудалённой от точек $M\ (-1;\ 2)$ и $N\ (5;\ 4)$.
5. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 7x - 2$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 20 = 0$.
6. На сторонах CD и BC прямоугольника $ABCD$ отметили соответственно точки F и K так, что $CF : FD = 4 : 1$, $BK : KC = 2 : 5$. Найдите расстояние от точки K до прямой AF, если известно, что $AB = 10$ см, $BC = 7$ см.

Вариант 3

1. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $F\ (3;\ -2)$ и которая проходит через точку $N\ (5;\ -9)$.

2. Найдите координаты вершины C параллелограмма $ABCD$, если A (–3; 3), B (–1; 4), D (8; 1).
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки D (3; –4) и B (5; 8).
4. Найдите координаты точки, принадлежащей оси абсцисс и равноудалённой от точек D (1; 10) и K (7; 8).
5. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -6x - 1$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$.
6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ отметили соответственно точки P и E так, что $AP : PB = 4 : 3$, $BE : EC = 3 : 1$. Найдите расстояние от точки P до прямой DE, если известно, что $AB = 7$ см, $AD = 4$ см.

Вариант 4

1. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке C (5; –3) и которая проходит через точку N (2; –4).
2. Найдите координаты вершины K параллелограмма $EFPK$, если E (3; –1), F (–3; 3), P (2; –2).
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки D (–3; 9) и K (5; –7).
4. Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудалённой от точек A (–5; 2) и B (–3; 6).
5. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 9$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 + 12x + 8y + 50 = 0$.
6. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 1$, $AK : KD = 5 : 3$. Найдите расстояние от точки K до прямой CM, если известно, что $AB = 2$ см, $AD = 8$ см.

Контрольная работа № 4

Тема. Векторы

Вариант 1

1. Даны точки A (–3; 1), B (1; –2) и C (–1; 0). Найдите:
   1) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
   2) модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
   3) координаты вектора $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$;
   4) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
   5) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. Даны векторы $\vec{m}(4; 14)$ и $\vec{n}(-7; k)$. При каком значении k векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки M и P так, что $BM : MC = 2 : 5$, $CP : PD = 3 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{MP}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
4. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{p}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{p}$, если $\vec{m} \perp \vec{p}$ и $|\vec{m}| = |\vec{p}| = 1$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 3 : 1$. На стороне BC отметили точку P так, что $AP \perp CM$. Найдите отношение $CP : CB$.

Вариант 2

1. Даны точки $A(2; -1)$, $C(3; 2)$ и $D(-3; 1)$. Найдите:
   1) координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
   2) модули векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
   3) координаты вектора $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$;
   4) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
   5) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.
2. Даны векторы $\vec{a}(3; -4)$ и $\vec{b}(m; 9)$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
3. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 3 : 4$, $BK : KC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$.
4. Найдите косинус угла между векторами $\vec{m} = 5\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точку D так, что $AD : DB = 1 : 5$. На стороне AC отметили точку K так, что $BK \perp CD$. Найдите отношение $CK : CA$.

Вариант 3

1. Даны точки $A(3; -2)$, $B(1; -1)$ и $C(-1; 1)$. Найдите:
   1) координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$;
   2) модули векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$;
   3) координаты вектора $\overrightarrow{MP} = 4\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$;
   4) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$;
   5) косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2. Даны векторы $\vec{m}(2; p)$ и $\vec{n}(9; -3)$. При каком значении p векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
3. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 7 : 2$, $AF : FD = 5 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.
4. Найдите косинус угла между векторами $\vec{b} = 6\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{c} = \vec{m} + 3\vec{n}$, если $\vec{m} \perp \vec{n}$ и $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точку F так, что $AF : FB = 6 : 1$. На стороне BC отметили точку K так, что $AK \perp CF$. Найдите отношение $CK : CB$.

Вариант 4

1. Даны точки A (1; 5), B (–3; 2) и C (2; 3). Найдите:
   1) координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$;
   2) модули векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$;
   3) координаты вектора $\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB}$;
   4) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$;
   5) косинус угла между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.
2. Даны векторы $\vec{a}(x; 10)$ и $\vec{b}(-5; 4)$. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки S и T так, что $AS : SD = 5 : 3$, $CT : TD = 2 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{ST}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
4. Найдите косинус угла между векторами $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точку N так, что $AN : NB = 8 : 1$. На стороне BC отметили точку E так, что $AE \perp CN$. Найдите отношение $CE : CB$.

Контрольная работа № 5

Тема. Геометрические преобразования

Вариант 1

1. Найдите координаты точек, симметричных точкам M (–6; 8) и K (0; –2) относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

2. Начертите треугольник ABC. Постройте образ треугольника ABC: 1) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; 2) при симметрии относительно точки B; 3) при симметрии относительно прямой AC.
3. Точка A_1 $(x; -4)$ является образом точки A $(2; y)$ при гомотетии с центром H $(1; -2)$ и коэффициентом $k = -3$. Найдите x и y.
4. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Найдите площадь трапеции $AMKC$, если $BM = 4$ см, $AM = 8$ см, а площадь треугольника MBK равна 5 см^2.
5. Точка C является образом точки K $(1; -1)$ при повороте с центром в точке A $(4; 3)$ на угол $90°$. Найдите координаты точки C.
6. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на эту прямую. Известно, что $AA_1 = 4$ см, $BB_1 = 2$ см, $A_1B_1 = 3$ см. Какое наименьшее значение может принимать сумма $AX + XB$, где X — точка, принадлежащая прямой a?

Вариант 2

1. Найдите координаты точек, симметричных точкам C $(4; -3)$ и D $(8; 0)$ относительно: 1) оси ординат; 2) оси абсцисс; 3) начала координат.
2. Начертите треугольник DEF. Постройте образ треугольника DEF: 1) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{DF}$; 2) при симметрии относительно точки D; 3) при симметрии относительно прямой EF.
3. Точка M_1 $(3; y)$ является образом точки M $(x; -5)$ при гомотетии с центром H $(2; 3)$ и коэффициентом $k = 2$. Найдите x и y.
4. Прямая, параллельная стороне MF треугольника MNF, пересекает его сторону MN в точке D, а сторону NF — в точке K. Найдите площадь трапеции $MDKF$, если $DK = 9$ см, $MF = 27$ см, а площадь треугольника MNF равна 72 см^2.
5. Точка A является образом точки B $(-2; 1)$ при повороте с центром в точке C $(2; 4)$ на угол $90°$. Найдите координаты точки A.
6. Из точек M и K, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой b, опущены перпендикуляры MM_1 и KK_1 на эту прямую. Известно, что $MM_1 = 5$ см, $KK_1 = 3$ см, $M_1K_1 = 4$ см. Какое наименьшее значение может принимать сумма $MX + XK$, где X — точка, принадлежащая прямой b?

Вариант 3

1. Найдите координаты точек, симметричных точкам A $(7; -9)$ и B $(0; 6)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

2. Начертите треугольник BCD. Постройте образ треугольника BCD: 1) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CD}$; 2) при симметрии относительно точки B; 3) при симметрии относительно прямой BC.

3. Точка C_1 $(x; -8)$ является образом точки C $(5; y)$ при гомотетии с центром H $(-3; 1)$ и коэффициентом $k = -\frac{1}{4}$. Найдите x и y.

4. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке F, а сторону BC — в точке D. Найдите площадь трапеции $AFDB$, если $CD = 6$ см, $DB = 9$ см, а площадь треугольника FCD равна 20 см^2.

5. Точка M является образом точки N $(3; -1)$ при повороте с центром в точке F $(7; 2)$ на угол $90°$. Найдите координаты точки M.

6. Из точек C и D, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой c, опущены перпендикуляры CC_1 и DD_1 на эту прямую. Известно, что $CC_1 = 3$ см, $DD_1 = 6$ см, $C_1D_1 = 2$ см. Какое наименьшее значение может принимать сумма $CX + XD$, где X — точка, принадлежащая прямой c?

Вариант 4

1. Найдите координаты точек, симметричных точкам E $(9; -5)$ и F $(-4; 0)$ относительно: 1) оси ординат; 2) оси абсцисс; 3) начала координат.

2. Начертите треугольник MNK. Постройте образ треугольника MNK: 1) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MK}$; 2) при симметрии относительно точки K; 3) при симметрии относительно прямой NK.

3. Точка B_1 $(-8; y)$ является образом точки B $(x; 6)$ при гомотетии с центром H $(-2; 1)$ и коэффициентом $k = \frac{1}{3}$. Найдите x и y.

4. Прямая, параллельная стороне DM треугольника DKM, пересекает его сторону DK в точке P, а сторону MK — в точке N. Найдите площадь трапеции $DPNM$, если $KP = 8$ см, $PD = 20$ см, а площадь треугольника DKM равна 98 см^2.

5. Точка D является образом точки C $(-2; 4)$ при повороте с центром в точке B $(2; 1)$ на угол $90°$. Найдите координаты точки D.

6. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой m, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на эту прямую. Известно, что $AAC_1 = 2$ см, $BB_1 = 8$ см, $A_1B_1 = 5$ см. Какое наименьшее значение может принимать сумма $AX + XB$, где X — точка, принадлежащая прямой m?

Контрольная работа № 6

Тема. Начальные сведения по стереометрии

Вариант 1

1. Сколько плоскостей можно провести через две точки?
2. Прямая m параллельна прямой n, которая параллельна плоскости α. Верно ли, что прямая m обязательно параллельна плоскости α?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1). Каково взаимное расположение прямых: 1) AB и C_1D_1; 2) BB_1 и CD?

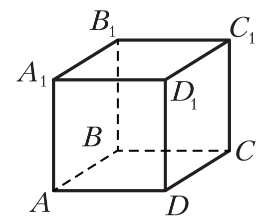


Рис. 1

4. Вычислите объём конуса, высота которого равна 6 см, а радиус основания — 4 см.
5. Чему равен объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, а боковое ребро равно 6 см?
6. Радиусы двух шаров относятся, как 1 : 2. Найдите отношение объёмов этих шаров.
7. Найдите площадь поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC = a$, $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 90°$.
8. Из точки M опущен перпендикуляр MO на плоскость α, точки A и B принадлежат плоскости α, $\angle MAO = 30°$, $\angle MBO = 60°$, $\angle AOB = 120°$, $AO = 3$ см. Найдите расстояние между точками A и B.

Вариант 2

1. Сколько плоскостей можно провести через три точки?
2. Прямая a не параллельна прямой b, принадлежащей плоскости α. Верно ли, что прямая a обязательно не параллельна плоскости α?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2). Каково взаимное расположение прямых: 1) A_1B_1 и CD; 2) AA_1 и BC?

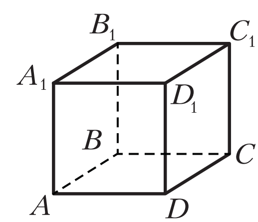


Рис. 2

4. Вычислите объём цилиндра, образующая которого равна 5 см, а радиус основания — 2 см.

5. Чему равен объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 6 см, а высота которой равна 5 см?
6. Радиусы двух шаров относятся, как 1 : 3. Найдите отношение площадей поверхностей данных шаров.
7. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Найдите площадь поверхности пирамиды, если $SA = SB = SC = SD = a$, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 60°$.
8. Из точки D опущен перпендикуляр DK на плоскость α, точки E и F принадлежат плоскости α, $\angle DEK = 45°$, $\angle DFK = 30°$, $\angle EDF = 135°$, $DF = 2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние между точками E и F.

Вариант 3

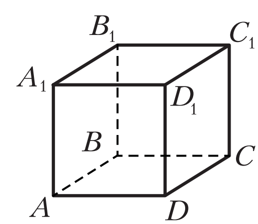


Рис. 3

1. Сколько плоскостей можно провести через две прямые и точку?
2. Прямые a и b параллельны плоскости α. Верно ли, что прямые a и b обязательно параллельны?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3). Каково взаимное расположение прямых: 1) A_1D_1 и BC; 2) A_1B_1 и CC_1?
4. Вычислите объём конуса, высота которого равна 5 см, а радиус основания — 6 см.
5. Чему равен объём прямой призмы, основанием которой является равносторонний треугольник со стороной 4 см и боковым ребром, равным 3 см?
6. Отношение объёмов двух шаров равно 27 : 125. Найдите отношение радиусов этих шаров.
7. Найдите площадь поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC$, $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 90°$ и $AB = a$.
8. Из точки K опущен перпендикуляр KF на плоскость α, точки M и N принадлежат плоскости α, $\angle KMF = 30°$, $\angle MFN = 60°$, $MF = 6\sqrt{3}$ см, $KN = 10$ см. Найдите расстояние между точками M и F.

Вариант 4

1. Сколько плоскостей можно провести через две прямые?
2. Прямая n параллельна плоскости α. Прямая m не параллельна прямой n. Верно ли, что прямая m обязательно не параллельна плоскости α?

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4). Каково взаимное расположение прямых: 1) B_1C_1 и AD; 2) A_1D_1 и BB_1?

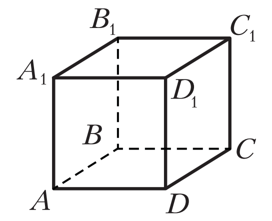


Рис. 4

4. Вычислите объём цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания — 3 см.
5. Чему равен объём пирамиды, высота которой равна 10 см, а основанием является равносторонний треугольник со стороной 2 см?
6. Отношение площадей поверхностей двух шаров равно 25 : 81. Найдите отношение радиусов этих шаров.
7. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$, сторона которого равна a. Известно, что $SA = SB = SC = SD$, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 60°$. Найдите площадь поверхности пирамиды.
8. Из точки D опущен перпендикуляр DP на плоскость α, точки F и K принадлежат плоскости α, $\angle DKP = 45°$, $FDK = 135°$, $MF = 6\sqrt{3}$ см, $KP = 4$ см, $FP = 3$ см. Найдите расстояние между точками K и F.

Контрольная работа № 7

Тема. Обобщение и систематизация знаний учащихся

Вариант 1

1. Две стороны параллелограмма равны 3 см и $2\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 135°. Найдите:
   1) бóльшую диагональ параллелограмма;
   2) площадь параллелограмма.
2. В треугольнике ABC известно, что $BC = \sqrt{3}$ см, $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Найдите угол A.
3. Около правильного треугольника ABC со стороной 12 см описана окружность с центром O. 1) Найдите площадь сектора, содержащего дугу AC. 2) Какой отрезок является образом стороны BC при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 120°?
4. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(-1; -1)$, $B\,(-3; 1)$, $C\,(1; 5)$ и $D\,(3; 3)$ является прямоугольником.
5. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(-2; 6)$.

6. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 6\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.
7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны соответственно 25 см и 17 см. Средняя линия трапеции равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант 2

1. Две стороны параллелограмма равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см, а угол между ними — 30°. Найдите:
   1) бóльшую диагональ параллелограмма;
   2) площадь параллелограмма.
2. В треугольнике ABC известно, что $AC = 3\sqrt{2}$ см, $BC = 3$ см, $\angle A = 30°$. Найдите угол B.
3. Около квадрата $ABCD$ со стороной 8 см описана окружность с центром O. 1) Найдите площадь сектора, содержащего дугу BC. 2) Какой отрезок является образом стороны AD при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 90°?
4. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(-3;\ 3)$, $B\,(2;\ 4)$, $C\,(1;\ -1)$ и $D\,(-4;\ -2)$ является ромбом.
5. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 64$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(-1;\ 7)$.
6. Найдите косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$ перпендикулярны, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 1$.
7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 см и 17 см. Средняя линия трапеции равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант 3

1. Две стороны параллелограмма равны 8 см и 3 см, а угол между ними — 120°. Найдите:
   1) бóльшую диагональ параллелограмма;
   2) площадь параллелограмма.
2. В треугольнике DEF известно, что $DF = 8\sqrt{2}$ см, $EF = 8\sqrt{3}$ см, $\angle E = 45°$. Найдите угол D.
3. Около правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 6 см описана окружность с центром O. 1) Найдите площадь сектора, содержащего дугу CD. 2) Какой отрезок является образом стороны AB при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 120°?

4. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (-2;\ 2)$, $B\ (-5;\ -1)$, $C\ (-1;\ -5)$ и $D\ (2;\ -2)$ является прямоугольником.

5. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x+7)^2+(y-1)^2=81$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(3;\ -8)$.

6. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{m}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{n}=5\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$.

7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны соответственно 15 см и 7 см. Средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант 4

1. Две стороны параллелограмма равны 3 см и $4\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 135°. Найдите:
1) бо́льшую диагональ параллелограмма;
2) площадь параллелограмма.

2. В треугольнике DEF известно, что $EF=10\sqrt{3}$ см, $DE=10$ см, $\angle F=30°$. Найдите угол D.

3. Около правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3 см описана окружность с центром O. 1) Найдите площадь сектора, содержащего дугу ABC. 2) Какой отрезок является образом стороны BC при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 60°?

4. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (3;\ 3)$, $B\ (5;\ -1)$, $C\ (1;\ 1)$ и $D\ (-1;\ 5)$ является ромбом.

5. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x-6)^2+(y+8)^2=25$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(2;\ -4)$.

6. Найдите косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{a}=4\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+5\vec{n}$ перпендикулярны, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$.

7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны соответственно 15 см и 13 см. Средняя линия трапеции равна 7 см. Найдите площадь трапеции.

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного Стандарта является оценка образовательных достижений обучающихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по геометрии направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным **объектом** оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность основ гражданской идентичности личности;

2) готовность к переходу к самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации, в том числе готовность к выбору направления профильного образования;

3) сформированность социальных компетенций, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным **объектом** оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и вне учебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным **объектом** оценки **предметных результатов** по математике в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по математике являются: *стартовое, текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Методы контроля в учебном процессе по математике

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест • Зачёт	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Текущее оценивание позволяет определить: уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности обучающихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля.

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения обучающимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по математике, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по математике;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность обучающихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении геометрии использовать средства ИКТ можно:

- на уроках геометрии;
- во внеурочной деятельности;
- в учебно-исследовательской и проектной деятельности;
- при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики учитель может использовать следующие средства ИКТ: мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур, готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.). В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока (приложение 1), на котором используются ИКТ.

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.

Использование средств ИКТ при обучении математике способствуют:

- повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса;
- расширению возможностей использования источников информации;
- созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно ориентированного обучения;
- повышению эффективности анализов результатов обучения.

Применение средств ИКТ в обучении геометрии формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

- использовать калькулятор для вычислений;
- осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;
- создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;
- создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;
- создавать графические объекты;
- осуществлять поиск информации в Интернете;
- соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Приложение 1

Технологическая карта урока № ____

Тема урока	________________
Тип урока	________________
Формируемые результаты	Предметные: ________________ Личностные: ________________ Метапредметные: ________________
Планируемые результаты	________________ ________________
Основные понятия	________________ ________________
Средства ИКТ, используемые на уроке	________________ ________________ ________________
Программное обеспечение	________________ ________________
Образовательные интернет-ресурсы	________________ ________________ ________________

Организационная структура урока

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы проведения урока</th><th rowspan="2">Форма организации УД</th><th colspan="3">Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов</th><th rowspan="2">Средства ИКТ</th></tr>
<tr><th>Учебник</th><th>Рабочая тетрадь</th><th>Дидактические материалы</th></tr>
<tr><td colspan="6">1. Организационный этап</td></tr>
<tr><td colspan="6">2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td>3. Актуализация знаний</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Изучение нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Первичное закрепление нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Итоги урока</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Информация о домашнем задании</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности обучающихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, обучающиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках геометрии направлены на:

- повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;
- развитие коммуникативных умений;
- формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;
- формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по математике обучающийся научится:

- анализировать фрагменты работ учёных-математиков;
- описывать историю математических открытий;
- оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;
- представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;
- рассматривать практические приложения математических знаний;
- применять математические знания в быту и в технике;
- анализировать связь математики с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать, прежде всего, качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектирования учебной деятельности. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности на уроках геометрии

(Рекомендации для учителя)

Название проекта ______________________________

Цели проекта ______________________________

Планируемые результаты

Предметные: ______________________________

Личностные: ______________________________

Метапредметные: ______________________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта ______________________________

Виды деятельности учащихся ______________________________

____

Форма организации ______________________________

Продолжительность выполнения ______________________________

____

Результат (продукт) деятельности ______________________________

____

План реализации проекта

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: метод опроса, наблюдение,	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует.

Окончание

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
	изучение документации и т. д.		Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью учащихся

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа ______________________________

Параметры	Само-оценка[1]	Взаимо-оценка[1]	Оценка учителя[1]	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
			Итоговый балл	

[1] Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание