российский учебник

Е. В. Буцко
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

АЛГЕБРА

9 класс

Методическое пособие

2-е издание, переработанное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Алгебра. 9 класс» авторов А. Г. Мерзляка, В. М. Полякова.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках алгебры в 9 классе с углублённым изучением математики.

В разделе **«Примерное поурочное планирование учебного материала»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам в двух вариантах (5 часов и 4 часа в неделю).

Раздел **«Организация учебной деятельности»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям.

Раздел **«Контрольные работы»** состоит из 8 контрольных работ в соответствии с календарным планированием. Каждая работа содержит 4 варианта. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** представлены методы контроля в учебном процессе.

В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.

В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации и проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование учебного материала

(I вариант 5 часов в неделю, всего 175 часов,
II вариант 4 часа в неделю, всего 140 часов)

Номер параграфа	Номер урока		Название параграфа	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
			Глава 1. Квадратичная функция	**45**	**36**
1	1—3	1—3	Функция	3	3
2	4—9	4—8	Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	6	5
3	10—12	9—10	Чётные и нечётные функции	3	2
4	13—16	11—12	Построение графиков функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$	4	2
5	17—21	13—16	Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$	5	4
6	22—25	17—19	Построение графиков функций $y = f(\|x\|)$ и $y = \|f(x)\|$	4	3
	26	20	Контрольная работа № 1	1	1
7	27—33	21—26	Квадратичная функция, её график и свойства	7	6
8	34—38	27—30	Решение квадратных неравенств	5	4

9	39—44	31—35	Решение неравенств методом интервалов	6	5
	45	36	Контрольная работа № 2	1	1
Глава 2. Уравнения с двумя переменными и их системы				**28**	**23**
10	46—51	37—41	Уравнение с двумя переменными и его график	6	5
11	52—56	42—44	Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными	4	3
12	57—60	45—48	Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения	5	4
13	61—66	49—53	Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными	6	5
14	67—72	54—58	Системы уравнений (неравенств) как математические модели реальных ситуаций	6	5
	73	59	Контрольная работа № 3	1	1
Глава 3. Неравенства с двумя переменными и их системы. Доказательство неравенств				**21**	**17**
15	74—77	60—62	Неравенства с двумя переменными	4	3
16	78—81	63—65	Системы неравенств с двумя переменными	4	3
17	82—87	66—70	Основные методы доказательства неравенств	6	5

Продолжение

Номер параграфа	Номер урока		Название параграфа	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
18	88—93	71—75	Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши—Буняковского	6	5
	94	76	Контрольная работа № 4	1	1
Глава 4. Степенная функция				**24**	**19**
19	95—98	77—79	Степенная функция с натуральным показателем	4	3
20	99—101	80—81	Обратная функция	3	2
21	102—105	82—84	Определение корня n-й степени	4	3
22	106—112	85—90	Свойства корня n-й степени	7	6
23	113—117	91—94	Степень с рациональным показателем и её свойства	5	4
	118	95	Контрольная работа № 5	1	1
Глава 5. Числовые последовательности				**24**	**18**
24	119—120	96—97	Числовые последовательности	2	2
25	121—125	98—101	Арифметическая прогрессия	5	4

26	126—129	102—104	Сумма n первых членов арифметической прогрессии	4	3
27	130—133	105—107	Геометрическая прогрессия	4	3
28	134—136	108—109	Сумма n первых членов геометрической прогрессии	3	2
29	137—139	110—111	Представление о пределе последовательности. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы	3	2
30	140—141	112	Суммирование	2	1
	142	113	Контрольная работа № 6	1	1
Глава 6. Элементы статистики и теории вероятностей				**22**	**18**
31	143	114	Начальные сведения о статистике	1	1
32	144—145	115—116	Статистические характеристики	2	2
33	146—149	117—119	Операции над событиями	4	3
34	150—153	120—122	Зависимые и независимые события	4	3
35	154—156	123—124	Геометрическая вероятность	3	2
36	157—159	125—126	Схема Бернулли	3	2
37	160—161	127—128	Случайные величины	2	2

Окончание

Номер параграфа	Номер урока		Название параграфа	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
38	162—163	129—130	Характеристики случайной величины. Представление о законе больших чисел	2	2
	164	131	Контрольная работа № 7	1	1
Повторение и систематизация учебного материала				**11**	**9**
	165—174	132—139	Повторение и систематизация учебного материала за курс алгебры 9 класса	10	8
	175	140	Итоговая контрольная работа	1	1

Организация учебной деятельности

Глава 1. Квадратичная функция

§ 1. Функция

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения задавать функцию; находить область определения функции, значение функции, значение функции в точке, область значения функции; строить график функции.

Личностные: формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности, о её значимости для развития цивилизации.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится задавать функцию; находить область определения функции, значение функции, значение функции в точке, область значения функции; строить график функции.

Основные понятия

Функция, независимая переменная, зависимая переменная, аргумент функции, область определения функции, значение функции, значение функции в точке, область значения функции, числовая, отображение множества X на множество Y, взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, способ задания функции, описательный способ задания функции, функция Дирихле, дробная часть числа, сигнум, кусочно заданная функция, аналитический способ задания функции, график числовой функции,

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.7, 1.8	1.49		1.4, 1.6, 1.9

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	1.10, 1.12, 1.14, 1.15, 1.17, 1.18, 1.20, 1.22, 1.24, 1.26, 1.27	1.50		1.11, 1.13, 1.16, 1.19, 1.21, 1.23, 1.25, 1.28,
Урок 3	1.29, 1.30, 1.32, 1.34, 1.36, 1.38, 1.40, 1.42, 1.43, 1.44, 1.46, 1.48		Самостоятельная работа № 1: № 1, 2 (1), 3, 5	1.31, 1.33, 1.35, 1.37, 1.39, 1.41, 1.45, 1.47

Методические комментарии

Сведения, приведённые в этом параграфе, не новы для учащихся. В классе с углублённым изучением математики следует сделать акцент на использовании теоретико-множественного подхода при определении функции. При повторении следует обратить особое внимание на понятия области определения и области значений функции, а также записи этих множеств с помощью числовых промежутков и их объединения.

Важным новым материалом в этом параграфе является определение взаимно однозначного отображения одного множества на другое. Поскольку далее это понятие будет широко использоваться, например, при введении понятия обратной функции и при доказательстве равномощности множеств, то учащиеся должны хорошо его усвоить.

В качестве примеров функций, заданных описательно, в параграфе приводится ряд функций, которые широко используются в математике и программировании: функция Дирихле, «целая часть числа», «дробная часть числа», «знак числа».

При введении нового понятия «сложная функция» следует обратить внимание учащихся на порядок выполнения действий при вычислении значений такой функции. Умение построить «дерево» алгоритма, по которому находится значение сложной функции, будет необходимо для решения задач, например, на построение графика сложной функции, на вычисление производной сложной функции и т. п.

При решении задач, в которых требуется найти область определения функции, используется материал § 10 «Неравенства с одной переменной. Числовые промежутки» и § 11 «Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной» из учебника «Алгебра. 8 класс» авторов А. Г. Мерзляка, В. М. Полякова. Если учащимся будет не очевидным ход решения этих задач, то следует обратить их внимание на то, что каждое из выражений, по отдельности входящих в правую часть формулы, которой задана функция, должно иметь смысл. Поэтому область определения функции находят на основании анализа областей определения всех выражений, которые находятся в правой части. Понятно, что имеет смысл анализировать только те выражения, у которых область определения не равна $(-\infty; +\infty)$. Из таких выражений учащимся пока что знакомы только алгебраические дроби (у которых знаменатель не является нуль-многочленом) и квадратные корни (у которых подкоренное выражение должно быть неотрицательным).

Комментарии к упражнениям

№ 1.30—1.32. Следует учесть, что областью значений функции Дирихле является двухэлементное множество $\{0, 1\}$.

№ 1.37. Воспользуйтесь тем, что если $x \in \mathbf{Z}$, то $x^2 \equiv r \pmod 3$ только при $r \in \{0, 1\}$.

№ 1.40. Подставьте в данное равенство вместо x выражение $\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. Получим $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$.

№ 1.41. Подставьте в данное равенство вместо x выражение $-x + 4$.

§ 2. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение находить нуль функции, промежуток знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией

Планируемые результаты	Учащийся научится находить нуль функции, промежуток знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически.
Основные понятия	Нуль функции, промежуток знакопостоянства функции, возрастающая функция, убывающая функция, промежуток возрастания функции, промежуток убывания функции, свойства возрастающей функции, свойства убывающей функции, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	2.1, 2.3, 2.5, 2.6			2.2, 2.4, 2.7
Урок 2	2.8, 2.10, 2.12, 2.14, 2.15, 2.17, 2.19, 2.20	2.49		2.9, 2.11, 2.13, 2.16, 2.18, 2.21
Урок 3	2.22, 2.23, 2.25, 2.26, 2.28, 2.29			2.24, 2.27, 2.30
Урок 4	2.31, 2.33, 2.35, 2.37, 2.39	2.50		2.32, 2.34, 2.36, 2.38, 2.40
Урок 5	2.41, 2.43, 2.44, 2.46, 2.48		Самостоятельная работа № 2: № 1, 2, 3, 4	2.42, 2.45, 2.47

Методические комментарии

Понятия «нуль функции», «промежуток знакопостоянства функции», «возрастающая и убывающая функции», «промежутки возрастания и убывания функции» вводятся с помощью апелляции к графику, но при этом даются строгие определения. Пока что учащиеся не имеют математического аппарата для поиска этих свойств у довольно широкого класса функций.

Поэтому в задачах к данному параграфу от учащихся требуется находить эти свойства на основании данного графика функции; уметь доказывать эти свойства для некоторых функций, известных им из предыдущих классов, на основании определения. Например, возрастание (убывание) функции определяется на основании нахождения знака разности между значениями функций для любых двух аргументов.

В учебнике прямо не указывается, что для нахождения нулей функции следует приравнять правую часть формулы, которой задана функция, к нулю и решить полученное уравнение. Учащиеся должны самостоятельно сделать этот вывод.

Учащиеся должны понимать, что задача о поиске промежутков знакопостоянства и промежутков монотонности функции подразумевает поиск промежутков максимальной длины, на которых функция обладает указанными свойствами.

Теоремы 2.5 и 2.6 и следствие из теоремы 2.5 предоставляют математический аппарат для решения ряда уравнений, позволяя, пользуясь характером монотонности функции, перейти от сложного уравнения к существенно более простому.

При рассмотрении примера 4 у учащихся может возникнуть естественный вопрос о том, как обнаружен корень $x = 1$. В этом случае надо разъяснить, что в первую очередь надо доказать, что данное уравнение имеет не более одного корня. Далее учащиеся должны понять, что попытки преобразования уравнения его не упрощают, а, наоборот, усложняют.

В задачах (в частности, в задачах на нахождение нулей функции) встречаются функции, область определения которых не равна $(-\infty; +\infty)$. Следует обратить внимание учащихся на то, что свойства функций можно искать только на области определения функции.

Вводя понятия наибольшего и наименьшего значений функции, важно подчеркнуть, что эти характеристики непременно надо связывать с некоторым множеством. Обозначения типа $\max f(x)$ или $\min f(x)$, в которых не указано соответствующее множество, являются некорректными.

Следует обратить внимание учащихся, что в определении наибольшего и наименьшего значений функции фигурируют нестрогие неравенства $f(x_0) \geqslant f(x)$ и $f(x_0) \leqslant f(x)$. Замена этих неравенств строгими привела бы к тому, что многие функции перестали бы достигать наибольших (наименьших) значений. Например, функция $f(x) = x^2$ на множестве $M = (-1; 1)$ не достигает наибольшего и наименьшего значений.

Для наглядности следует сопроводить изложение графиками функций. Также в качестве иллюстрации желательно привести примеры функций, являющиеся константами на некотором промежутке.

Комментарии к упражнениям

№ 2.32. Из теоремы 2.5 следует, что данная функция должна иметь не более одного нуля.

№ 2.33—2.34. Изобразите схематично график данной функции.

№ 2.36 (3). Левая часть уравнения на множестве $\left[\frac{1}{4}; \infty\right)$ задаёт возрастающую функцию.

№ 2.39. Воспользовавшись неравенством $|a| - |b| \leqslant |a - b|$, получаем, что $|x + 1| - |x| \leqslant 1$. Вместе с тем $\sqrt{x^4 + 1} \geqslant 1$.

№ 2.40. Имеем: $|x + 1| + |x + 2| \geqslant 3$, а $\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$.

§ 3. Чётные и нечётные функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение исследовать функцию на чётность и нечётность. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится исследовать функцию на чётность и нечётность.
Основные понятия	Чётная функция, нечётная функция, множество, симметричное относительно начала координат, свойства чётной функции, свойства нечётной функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	3.1, 3.2, 3.4, 3.6	3.25		3.3, 3.5
Урок 2	3.7, 3.9, 3.11, 3.13, 3.15, 3.17, 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24	3.26	Самостоятельная работа № 3: № 1, 2, 3	3.8, 3.10, 3.12, 3.14, 3.16, 3.18, 3.20

Методические комментарии

В учебнике приняты такие определения чётной и нечётной функций, в которых в явном виде не указано, что область определения функции должна быть симметричной относительно начала координат. Этот факт следует из того, что равенство $f(-x) = f(x)$ (либо $f(-x) = -f(x)$) выполняется для любого x из области определения функции. Пояснению этой особенности следует уделить отдельное внимание. Учащиеся должны сделать вывод, что при исследовании функции на чётность первым шагом должен быть анализ того, является ли область определения функции симметричной относительно начала координат.

Учащиеся должны уметь исследовать функцию на чётность как на основании определений, так и с использованием теорем 3.3 и 3.4.

Утверждение теоремы 3.5 совершенно неочевидно. Естественной реакцией учащихся будет попытка найти примеры функций, для которых осуществить описываемое представление невозможно.

Комментарии к упражнениям

№ 3.11. Пусть $f(0) = a$. Поскольку f — нечётная функция, то $f(-0) = -a$. Но $f(-0) = f(0)$. Получим, что $f(0) = a$ и $f(0) = -a$, т. е. $a = -a$. Отсюда $a = 0$.

№ 3.12. В задаче 3.11 было показано, что если $0 \in D(f)$, то $f(0) = 0$. Заметим, что если число $x_0 \neq 0$ является нулём нечётной функции, то число $-x_0$ также является её нулём. Следовательно, все нули нечётной функции можно разбить на пары. Значит, если $0 \in D(f)$, то нечётная функция имеет нечётное количество нулей.

§ 4. Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения строить графики функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных

	условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится строить графики функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$.
Основные понятия	Построение графика функции $y = kf(x)$, растяжение графика функции $y = f(x)$ в k раз от оси абсцисс, сжатие графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс, преобразование симметрии относительно оси абсцисс, парабола, вершина параболы, построение графика функции $y = f(kx)$, сжатие графика функции $y = f(x)$ в k раз к оси ординат, растяжение графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат, преобразование симметрии относительно оси ординат.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	4.1, 4.3, 4.10, 4.12	4.18, 4.19		4.2, 4.4, 4.11, 4.13
Урок 2	4.5, 4.7, 4.9, 4.14, 4.16	4.20, 4.21	Самостоятельная работа № 4: № 1, 2, 4 (1)	4.6, 4.8, 4.15, 4.17

Методические комментарии

Этот параграф впервые знакомит учащихся с преобразованиями графиков функций.

Правила построения графиков функций, сформулированные в параграфе, основаны на том, что между точками графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(kx)$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Для каждого из конкретных преобразований графиков функций, которые будут рассмотрены далее, общая идея такова: вначале составляется таблица значений некоторой функции, хорошо известной учащимся, и строятся точки графика, соответствующие этой таблице; затем выполняется преобразование каждой точки графика. Таким образом, учащиеся получают наглядное представление о сущности этого преобразования. Затем выполняется более формальное доказательство: исследуются координаты произвольной точки и её образа при данном преобразовании.

Вначале построение графика функции $y = kf(x)$ исследуется только для положительных k. Переход к отрицательным значениям k представлен в виде последовательного выполнения двух преобразований: $y = |k|f(x)$ и $y = -f(x)$ с использованием симметрии относительно оси абсцисс. Соответствующие этапы следует проиллюстрировать рисунками. Порядок выполнения этих двух преобразований не имеет значения.

В параграфе вводятся понятия «сжатие к оси» и «растяжение от оси» в какое-то количество раз. Следует обратить внимание на то, каким образом в зависимости от числа k, стоящего в формуле $y = kf(x)$, следует выбирать термин «растяжение» или «сжатие», и на то, что при выборе термина «сжатие» формулировать, во сколько раз происходит сжатие, надо с использованием коэффициента $\frac{1}{k}$. Это правило может быть неочевидным для учащихся, поэтому следует пояснить на простейшем примере: для получения графика функции $y = \frac{1}{2}f(x)$ надо график функции $y = f(x)$ сжать в 2 раза.

В правиле построения графика функции $y = kf(x)$ указывается, что $k \neq 0$. Следует задать учащимся вопрос, что собой представляет график функции $y = 0 \cdot f(x)$.

Рассмотрение свойств функции $y = ax^2$, которое проводится в параграфе, выполняет двойную роль. С одной стороны, учащиеся могут сравнить эти свойства с известными свойствами функции $y = x^2$ и сделать вывод о том, как свойства функции $y = kf(x)$ связаны со свойствами функции $y = f(x)$. С другой стороны, при дальнейшем изучении квадратичной функции эти свойства будут широко использоваться.

Построение графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, можно разделить на два этапа: построение графика функции $y = f(|k|x)$, а затем построение графика функции $y = f(-|k|x)$ с использованием симметрии относительно оси ординат. Соответствующие этапы следует проиллюстрировать рисунками.

Комментарии к упражнениям

№ 4.10—4.11. Следует воспользоваться определением функции, возрастающей (убывающей) на множестве.
№ 4.12—4.13. Постройте график функции на указанном промежутке.

§ 5. Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения строить график функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить график функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$.

Основные понятия

Параллельный перенос, построение графика функции $y = f(x) + b$, построение графика функции $y = f(x + a)$, график функции $y = k(x + a)^2 + b$ $(k \neq 0)$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.6, 5.7			5.8, 5.36
Урок 2	5.9, 5.11, 5.12, 5.14			5.10, 5.13, 5.15
Урок 3	5.16, 5.18, 5.20, 5.22, 5.24, 5.26	5.37		5.17, 5.19, 5.21, 5.23, 5.25, 5.27
Урок 4	5.28, 5.30, 5.32, 5.33, 5.34		Самостоятельная работа № 5: № 1, 2, 3	5.29, 5.31, 5.35

Методические комментарии

После усвоения материала предыдущего параграфа учащиеся достаточно логично воспримут переход к изучению нового преобразования графиков.

Построение графика функции $y = f(x) + b$ будет воспринято учащимися достаточно легко: порядок переноса графика вверх или вниз вдоль оси ординат совпадает со знаком слагаемого b. Однако для учащихся будет совсем не очевидным, почему при построении графика $y = f(x + a)$ при условии, что $a > 0$ график надо переносить в отрицательном направлении оси абсцисс. Этой тонкости надо уделить особое внимание.

Особую сложность для учащихся будет представлять построение графиков, требующих последовательного применения нескольких преобразований. В этом случае важно правильно определять последовательность преобразований, а она не всегда будет очевидной. Построение графика функции $y = f(kx + b)$ является для учащихся первым примером, требующим последовательного применения нескольких геометрических преобразований.

В этом плане полезным является пример 2 данного параграфа. Возможно, учащимся будет казаться естественной последовательность «двигать» график в том же порядке, в котором они бы выполняли арифметические действия при вычислении значения функции по заданному аргументу. Однако при построении графика вначале строится парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ и только затем она передвигается влево в связи с преобразованием аргумента $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$. Этот момент требует пояснения.

При построении графика функции $y = f(kx + b)$ учащиеся допускают наиболее распространённую ошибку: строят график функции $y = f(kx)$, а затем выполняют его параллельный перенос на $|b|$ единиц вдоль оси абсцисс. В параграфе рассмотрен пример 1, который помогает профилактике ошибок подобного рода.

Существуют две основные схемы построения графика функции $y = f(kx + b)$:

1) $y = f(x) \to y = f(x + b) \to y = f(kx + b)$;

2) $y = f(x) \to y = f(kx) \to y = f\left(b\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$.

В примере 3 приводится образец поиска вершины параболы с помощью выделения квадрата двучлена. Пока учащиеся не знакомы с квадратичными функциями, этот способ является для них единственным для определения координат вершины параболы.

Комментарии к упражнениям

№ 5.18, 5.19, 5.22—5.25. Целесообразно оформить решение этих задач так, как показано в примерах 1 и 2 параграфа. Наиболее трудным для учащихся является преобразование гиперболы. При необходимости класс таких задач можно расширить.
№ 5.32—5.35. Воспользуйтесь идеей решения примера 7 параграфа.

§ 6. Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать математический аппарат для построения графиков функций, в которых используется знак модуля.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умения соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить графики функций $y = f(|x|) + b$ и $y = |f(x)|$.

Основные понятия

Построение графика функции $y = f(|x|) + b$, построение графика функции $y = |f(x)|$

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	6.1, 6.3, 6.4, 6.6			6.2, 6.5, 6.7
Урок 2	6.8, 6.10, 6.12, 6.14	6.24		6.9, 6.11, 6.13, 6.15

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	6.16, 6.18, 6.20, 6.22	6.25	Самостоятельная работа № 6: № 1, 2, 3	6.17, 6.19, 6.21, 6.23

Методические комментарии

Описание построения графика функции $y = f(|x|)$ на основании определения модуля достаточно громоздко. Поэтому целесообразно, один раз подробно разобрав идею этого метода с учащимися, далее опираться на построение этого графика с помощью симметрии относительно оси ординат.

Аналогично, для графика функции $y = |f(x)|$ более рациональным является использование симметрии относительно оси абсцисс.

Учащиеся должны понимать и уметь обосновать, почему для преобразования симметрии выбирается именно данная полуплоскость и каким образом определяется характер преобразования. В частности, целесообразно рассмотреть и обосновать тот факт, что при построении графика $y = |f(x)|$ используется весь график функции $y = f(x)$, а при построении графика $y = f(|x|)$ часть графика функции $y = f(x)$, находящаяся в полуплоскости $x < 0$, игнорируется.

Очень важно обратить внимание на то, что алгоритмы построения графиков функций $y = f(k|x| + b)$ и $y = f(|kx + b|)$ совершенно разные. Это различие подчёркивают примеры 1 и 2 параграфа.

Приёмы построений графиков функций, изученные в этом параграфе, значительно расширяют класс функций, графики которых можно построить. Это в свою очередь позволяет более широко использовать графические приёмы при решении различных задач. Иллюстрацией к сказанному является пример 3 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 6.12. Обратить внимание учащихся, что алгоритмы построения графиков функций задач 1) и 2) различны.
№ 6.18—6.23. Следует воспользоваться графической интерпретацией. Также решению этих задач поможет разобранный в параграфе пример 3.

Контрольная работа № 1

§ 7. Квадратичная функция, её график и свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение распознавать квадратичную функцию, исследовать её свойства, выполнять построение квадратичной функции, использовать свойства квадратичной функции при решении задач.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать квадратичную функцию, исследовать её свойства, выполнять построение графика квадратичной функции, использовать свойства квадратичной функции при решении задач.

Основные понятия

Квадратичная функция, свойства квадратичной функции, схема построения квадратичной функции

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	7.1, 7.2, 7.4, 7.6			7.3, 7.5, 7.7
Урок 2	7.8, 7.10, 7.12, 7.14, 7.15, 7.17, 7.19			7.9, 7.11, 7.13, 7.16, 7.18
Урок 3	7.20, 7.22, 7.24, 7.25, 7.27, 7.28, 7.30	7.69		7.21, 7.23, 7.26, 7.29, 7.31
Урок 4	7.32, 7.34, 7.35, 7.37, 7.38, 7.39, 7.41, 7.52, 7.53			7.33, 7.36, 7.40, 7.42
Урок 5	7.43, 7.45, 7.47, 7.49, 7.50, 7.54, 7.58, 7.59	7.70		7.44, 7.46, 7.48, 7.51, 7.55

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 6	7.56, 7.60, 7.61, 7.63, 7.64, 7.65, 7.66, 7.68		Самостоятельная работа № 7: № 1, 3	7.57, 7.62, 7.67

Методические комментарии

Перед изучением параграфа следует повторить с учащимися график функции $y = ax^2$ и правила преобразования графиков. Построение графика квадратичной функции в этом параграфе основано преимущественно на выяснении того, каким образом преобразовывается график функции $y = ax^2$ для получения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Учащиеся уже умеют решать квадратные уравнения. Поэтому, определяя свойства квадратичной функции, они должны найти нули функции, решая соответствующее квадратное уравнение, или же отметить, что нули отсутствуют.

Свойства квадратичной функции в данном параграфе определяются на основании аналитического задания функции. Однако следует понимать, что в некоторых случаях более удобно рассматривать свойства функции, определив схематически ход графика функции и далее выяснять соответствующие свойства по полученному графическому изображению.

По мере того, как учащиеся освоят принцип построения графика функции и на его основе — исследования свойств квадратичной функции, стадию построения графика функции можно опускать. В задачах, не требующих построения графика, можно будет ограничиваться схематическим изображением, которое должно содержать: ось абсцисс, расположение нулей функции (два, один или ни одного) и направление ветвей параболы. Этот приём продемонстрирован на рисунках 7.3, 7.4.

Особое внимание следует обратить на пример 4 параграфа. В нём продемонстрирован новый графический приём решения задач с параметрами. Суть его заключается в том, что на координатной плоскости xa строится график уравнения (неравенства) с параметром a. Горизонтальные прямые, пересекающие полученный график, свойства переменной x, соответствующих определенному значению параметра a.

Комментарии к упражнениям

№ 7.30, 7.31. Следует обратить внимание учащихся на то, что схематического изображения графика квадратичной функции достаточно для получения информации о наличии нулей функции и о знаке коэффициента a. Далее, зная коэффициент a и знак абсциссы вершины параболы, можно определить знак коэффициента b по формуле абсциссы вершины параболы. Знак коэффициента c можно определить, выяснив значение функции в точке $x = 0$.

№ 7.34. Ответ $x = 3$ очевиден и тривиален, но при этом его нельзя упустить. Из данного в условии равенства следует, что прямая $x = 2$ является осью симметрии данного графика. Отсюда получаем ответ $x = 1$.

№ 7.49. Из условия следует, что данная функция и прямые $y = 2$ и $y = -2$ имеют ровно три общие точки. Следовательно, ордината вершины параболы равна 2 или -2. Следовательно, прямая $y = 1{,}1$ пересекает параболу, но при этом не проходит через её вершину.

№ 7.52. Покажите, что данные параболы проходят через точку $(-2; 0)$.

§ 8. Решение квадратных неравенств

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения решать квадратные неравенства графическим методом, решать задачи, используя квадратные неравенства. ***Личностные:*** формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием. ***Метапредметные:*** формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать квадратные неравенства графическим методом, решать задачи, используя квадратные неравенства.
Основные понятия	Графический метод решения неравенств, квадратное неравенство, расположение параболы относительно оси абсцисс в зависимости от знаков a и D.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	8.1, 8.3, 8.5			8.2, 8.4, 8.6
Урок 2	8.7, 8.9, 8.10, 8.12, 8.13, 8.15, 8.17	8.43		8.8, 8.11, 8.14, 8.16
Урок 3	8.18, 8.20, 8.22, 8.24, 8.26, 8.28	8.44		8.19, 8.21, 8.23, 8.25, 8.27
Урок 4	8.29, 8.31, 8.33, 8.35, 8.37, 8.39, 8.41		Самостоятельная работа № 8: № 1, 3, 4	8.30, 8.32, 8.34, 8.36, 8.38, 8.40, 8.42

Методические комментарии

В предыдущем параграфе учащиеся научились определять направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$, исходя из значения коэффициента a. В 8 классе учащиеся изучили связь между знаком дискриминанта квадратного уравнения и количеством корней квадратного уравнения. Исходя из этих двух параметров, можно определить схематическое расположение параболы, являющейся графиком квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, относительно абсцисс.

Учащиеся должны понять, почему эти несложные рассуждения лежат в основе решения квадратных неравенств графическим способом.

В первую очередь следует подчеркнуть, что для решения неравенства $f(x) > 0(f(x) < 0)$ надо определить, на каком из промежутков график функции $y = f(x)$ находится выше (ниже) оси абсцисс. Затем следует рассмотреть с учащимися таблицу, приведённую на с. 81 учебника, и обосновать каждый из показанных на ней способов расположения параболы. В итоге учащиеся должны прийти к выводу, что в каждом из случаев, рассмотренных в таблице, зная направление ветвей параболы и значения x_1 и x_2 (или x_0) корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, можно записать решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0(ax^2 + bx + c < 0)$, пользуясь наглядными соображениями.

Учащиеся не должны запоминать таблицу и номера ячеек в ней, эти номера приведены лишь для удобства ссылок на эту таблицу в данном учебнике. На самом деле, зная количество корней квадратного уравнения и направление ветвей параболы в зависимости от коэффициента a, учащиеся могут схематически изобразить расположение параболы относительно оси абсцисс, как показано на рисунках 8.2 и 8.3.

После того как учащиеся поймут эту общую идею, решение квадратных неравенств не составит для них сложности.

Следует обратить внимание на более сложные задачи к этому параграфу, в которых левая часть неравенства представлена в виде произведения нескольких множителей, а неравенство является нестрогим. Учащиеся должны понимать, что решение нестрогого неравенства $f(x) \geqslant 0$ — это объединение решений соответствующего строгого неравенства $f(x) > 0$ и уравнения $f(x) = 0$.

Комментарии к упражнениям

№ 8.33. Множество решений второго неравенства должно содержать множество решений первого неравенства.
№ 8.36. Из условия следует, что квадратичная функция не пересекает ось абсцисс и $f(-1) > 0$.

§ 9. Решение неравенств методом интервалов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение решать неравенства методом интервалов. ***Личностные:*** развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные:*** формировать умение развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать неравенства методом интервалов.
Основные понятия	Непрерывная кривая, непрерывная в каждой точке области определения функция, теорема о непрерывной функции на промежутке, метод интервалов, теорема о непрерывности функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	9.1, 9.3, 9.5			9.2, 9.4, 9.6
Урок 2	9.7, 9.9, 9.11 (1—3)			9.8, 9.10, 9.12 (1, 2)
Урок 3	9.11 (4—6), 9.13, 9.15	9.33		9.12 (3, 4), 9.14, 9.16
Урок 4	9.17 (1—6), 9.19, 9.21, 9.23	9.34		9.18 (1—6), 9.20, 9.22, 9.24
Урок 5	9.25, 9.27, 9.29, 9.31		Самостоятельная работа № 9: № 1, 2	9.26, 9.28, 9.30, 9.32

Методические комментарии

На этом этапе изучения математики учащиеся ещё не обладают достаточной теоретической базой для обоснования метода интервалов. Однако факты и понятия, лежащие в основе этого метода, интуитивно понятны и наглядно очевидны. Сказанное в первую очередь относится к понятию непрерывности функции и содержанию теоремы 9.1.

Обоснование метода интервалов с помощью следствия из первой теоремы Больцано—Коши позволяет решать достаточно широкий класс неравенств, не только сводящихся к исследованию знака выражения вида $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно разъяснить учащимся, что благодаря методу интервалов задача о решении неравенства перестаёт носить автономный характер. Вопрос лишь сводится к тому, можно ли найти корни соответствующего уравнения.

Особое внимание следует уделить решению нестрогих неравенств. Совет о том, что при решении неравенств вида $f(x) \geqslant 0$ следует переходить к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) = 0, \end{array}\right.$ может уберечь от потери решений.

При решении неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для определения знака функции $y = f(x)$ на каждом из промежутков знакопостоянства в учебнике предлагается использовать «пробные точки».

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно рассмотреть и другой метод, который целесообразно применять в случае, если неравенство представлено в виде $\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)}{(x-b_1)\ldots(x-b_n)} > (<)0$:

1) изобразить числа $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, n_n$ на координатной прямой. Обозначим эти точки через x_i;

2) руководствуясь тем, что при $x > x_i$ знак выражения $(x - x_i)$ положительный, а при $x < x_i$ — отрицательный, определить знак $f(x)$ левее наименьшей либо правее наибольшей из координат точек x_i;

3) далее, двигаясь «слева направо» или соответственно справа налево, при переходе на следующий промежуток знакопостоянства определять, какое количество множителей $(x - x_i)$ меняют знак, и делать вывод о знаке функции на этом промежутке;

4) при записи множества решений нестрогого неравенства следует учесть, что $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — корни уравнения $f(x) = 0$, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — числа, не входящие в область определения уравнения.

Учащимся, склонным к изучению информатики, можно в связи с использованием этого алгоритма порекомендовать ознакомиться с методом «выметающей прямой».

Комментарии к упражнениям

№ 9.13—9.18. При решении этих неравенств типичной ошибкой учащихся является потеря решений, являющихся корнями уравнения.

№ 9.19. Данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x}{x^2-9} \geqslant 0$.

№ 9.25. Следует воспользоваться тем, что равенство $|a| + |b| = |a + b|$ выполняется тогда и только тогда, когда $ab \geqslant 0$.

Контрольная работа № 2

Глава 2. Уравнения с двумя переменными и их системы

§ 10. Уравнение с двумя переменными и его график

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения строить график уравнения, решать уравнение с двумя переменными.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить график уравнения, решать уравнение с двумя переменными.

Основные понятия

Уравнение первой степени с переменными x и y, решение уравнения, график уравнения, построение графиков уравнений: $F(x + a;\ y) = 0$, $F(x;\ y + b) = 0$, $F(-x;\ y) = 0$, $F(x;\ -y) = 0$, $F(kx;\ y) = 0$, где $k > 0$, $F(x;\ ky) = 0$, где $k > 0$, $F(|x|;\ |y|) = 0$, используя график уравнения $F(x;\ y) = 0$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	10.1, 10.3			10.2, 10.4
Урок 2	10.5, 10.7, 10.9	10.30		10.6, 10.8, 10.10
Урок 3	10.11, 10.13, 10.15			10.12, 10.14, 10.16
Урок 4	10.17, 10.19, 10.21	10.31		10.18, 10.20, 10.22

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 5	10.23, 10.25, 10.26, 10.28		Самостоятельная работа № 10: № 1 (1, 3), 2	10.24, 10.27, 10.29

Методические комментарии

В параграфе вводятся основные понятия, связанные с уравнением с двумя переменными; актуализируются знания об уже изученных уравнениях с двумя переменными, графиками которых являются прямая, окружность, парабола.

Следует обратить внимание учащихся на правильную запись решения уравнения в виде упорядоченной пары $(x; y)$.

Необходимо обсудить с учащимися, чем график уравнения с двумя переменными x и y отличается от графика функции $y = f(x)$. Учащиеся должны самостоятельно прийти к выводу и подкрепить его примерами. График уравнения, в отличие от графика функции, может содержать несколько точек с одинаковой абсциссой и разными ординатами.

В примере 1 параграфа показан полезный приём работы с графиками уравнений: использовать для построения графика не привычную учащимся координатную плоскость xy, а плоскость с «удобным» расположением осей. Далее этот приём будет использоваться при решении уравнений с параметрами.

Методы построения графиков уравнений с двумя переменными с помощью геометрических преобразований знакомы учащимся на материале геометрических преобразований графиков функций. Следует обратить внимание учащихся на то, что преобразования графика возможны по отношению как к одной переменной, так и к другой.

Все правила преобразований графиков уравнений проиллюстрированы примерами. В данном случае использование в качестве графика окружности наиболее целесообразно.

Целесообразно сообщить учащимся о том, что уравнение с одной переменной можно рассматривать как уравнение с двумя переменными, в которое одна из переменных входит с нулевым коэффициентом. Удобно обсуждать это на примере уравнения $x = k$. В таком случае, если найдена точка с абсциссой, удовлетворяющей уравнению, то решениями уравнения является также вся прямая, перпендикулярная оси абсцисс, содержащая эту точку.

Комментарии к упражнениям

№ 10.8.(4). $y=\sqrt{x} \to y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to |y|=\sqrt{|x|+1} \to$
$\to |y+1|=\sqrt{|x|+1}.$

№ 10.8.(6). $y=\sqrt{x} \to y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to y+1=\sqrt{|x|+1} \to$
$\to |y|+1=\sqrt{|x|+1}.$

№ 10.20. В системе координат xa постройте график уравнения.

№ 10.24. Имеем: $x^2-2x+2=(x-1)^2+1 \geqslant 1$ и $y^2+4y+6=(y+2)^2+2 \geqslant 2.$ Тогда левая часть уравнения принимает значения не меньше, чем 2.

№ 10.27. Левая часть уравнения принимает неотрицательные значения, а правая — неположительные. Следовательно, обе части уравнения принимают только нулевые значения.

№ 10.29. Пусть $x^2+y^2=a$, где $a>0$. Надо найти наименьшее значение параметра a, при котором окружность $x^2+y^2=a$ и квадрат $|x+3|+|y|=1$ имеют общую точку.

§ 11. Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение решать системы уравнений с двумя переменными. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать системы уравнений с двумя переменными.
Основные понятия	Графический метод решения систем уравнений с двумя переменными.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	11.1, 11.3			11.2, 11.4
Урок 2	11.5, 11.7, 11.9, 11.11	11.19		11.6, 11.8, 11.10, 11.12
Урок 3	11.13, 11.15, 11.17, 11.18,		Самостоятельная работа № 11: № 1, 2, 3	11.14, 11.16, 11.20

Методические комментарии

Учащиеся уже знакомы с графическим методом решения систем линейных уравнений с двумя переменными. В данном параграфе знания учащихся расширяются и углубляются за счёт расширения классов уравнений, входящих в систему, и применения этого метода к новым типам задач.

Учащиеся должны помнить, что графический метод решения с использованием построения изображения даёт неточные результаты.

Во многих задачах, особенно в задачах с параметрами, применение графического метода вовсе не требует построения изображения. Используется только приём, который заключается в том, чтобы от анализа свойств объекта, заданного формулой, перейти к анализу свойств графика объекта, а затем на основании замеченных закономерностей записать более простые уравнения и решать их алгебраическим способом. Показательным примером является переход от исследования количества решений системы линейных уравнений к исследованию взаимного расположения прямых, являющихся графиками этих уравнений, на плоскости. Этот приём рассмотрен в примере 2 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 11.7. Вначале надо рассмотреть случаи, когда $a = 0$ и $a = -\frac{3}{2}$. Затем представить уравнения системы в виде $y = kx + b$.

№ 11.13. При $a > -1$ графиком первого уравнения системы является окружность. Графиком второго уравнения системы является пара параллельных прямых. Условие задачи будет выполняться, если обе прямые будут касательными у окружности.

№ 11.15, 11.16. Пример 3, разобранный в параграфе, поможет решить эти задачи.

§ 12. Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения решать системы уравнений с двумя переменными методом подстановки, методом сложения и методом умножения.

Личностные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.

Метапредметные: развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать системы уравнений с двумя переменными методом подстановки, методом сложения и методом умножения.

Основные понятия

Равносильные системы уравнений с двумя переменными, следствие системы уравнений, метод подстановки, метод почленного сложения левых и правых частей уравнений системы, метод почленного умножения и деления левых и правых частей уравнений системы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	12.1, 12.3			12.2, 12.4
Урок 2	12.5, 12.7, 12.9	12.23		12.6, 12.8, 12.10

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	12.11, 12.13, 12.15	12.24		12.12, 12.14, 12.16
Урок 4	12.17, 12.19, 12.21		Самостоятельная работа № 12: № 1	12.18, 12.20, 12.22

Методические комментарии

Методы, изучаемые в этом параграфе, уже знакомы учащимся, в 7 классе они пользовались этими методами для решения систем линейных уравнений с двумя переменными. Поэтому при изучении данного параграфа следует повторить суть каждого из этих методов и подчеркнуть, что для успешного решения системы нелинейных уравнений надо «увидеть» выгодную подстановку, множитель и т. п., которые либо сведут систему к уравнению с одной переменной, которое учащиеся умеют решать, либо существенно упростят систему, например приведя её к системе линейных уравнений.

В классе с углублённым изучением математики особое внимание уделяется доказательству законности методов решения систем уравнений: рассмотрены понятия равносильных систем уравнений, системы-следствия и теоремы, обосновывающие равносильность переходов при применении метода подстановки, метода сложения и метода умножения.

В примерах решения систем, приведённых в параграфе, подчёркивается необходимость отслеживания равносильных переходов. Приведён пример перехода к системе-следствию (пример 2), пояснены причины появления посторонних решений; внимание учащихся акцентировано на том, какие новые условия следует добавить к полученной системе, чтобы сохранить равносильность. В данном примере речь идёт о том, что это условие должно отобразить область определения исходной системы уравнений.

Комментарии к упражнениям

№ 12.10. Следует сложить уравнения системы.

№ 12.11(4). Сложив уравнения системы, получим уравнение вида $t^3 + t = 2$.

№ 12.13(6). Разложите на множители левые части уравнений.
№ 12.13(4). Вынесите за скобки в первом уравнении x, а во втором — y.
№ 12.15(2). Перемножив соответственно левые и правые части уравнений системы, получим квадратное уравнение относительно x^2y^3.
№ 12.18. Перемножив соответственно левые и правые части уравнений системы, получим уравнение, являющееся следствием данной системы.
№ 12.20(1). Имеем: $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$
$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$.

§ 13. Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать системы уравнений с двумя переменными метод замены переменной, а также используя другие приёмы и методы.

Личностные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Метапредметные: развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать системы уравнений с двумя переменными метод замены переменной, а также используя другие приёмы и методы.

Основные понятия

Метод замены переменных, однородный многочлен, симметрический многочлен, элементарные симметрические многочлены, свойство симметрического многочлена.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	13.1, 13.3	13.34		13.2, 13.4
Урок 2	13.5, 13.7, 13.9			13.6, 13.8, 13.10

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	13.11, 13.13, 13.15, 13.17			13.12, 13.14, 13.16, 13.18
Урок 4	13.19, 13.21, 13.23	13.35		13.20, 13.22, 13.24
Урок 5	13.25, 13.27, 13.29, 13.32		Самостоятельная работа № 13: № 1	13.26, 13.28, 13.30, 13.31, 13.33

Методические комментарии

Метод замены переменной уже знаком учащимся. Для решения систем нелинейных уравнений очень важно подобрать удачную замену. Можно сформулировать два условия для выбора замены: с одной стороны, замена должна существенно упрощать исходную систему; с другой стороны, после нахождения значений новых переменных полученная система уравнений, составленная из формул замены, также должна достаточно легко решаться. В примерах 1 и 2 параграфа приведены примеры таких замен.

Следует обратить внимание учащихся, что некоторые замены требуют обязательного учёта области определения выражений, содержащих новые переменные. Так, в примере 2 при замене $\sqrt{x+y} = v$ после решения системы относительно v следует отбросить значения, не удовлетворяющие условию $v \geqslant 0$.

Далее в параграфе рассматриваются отдельные виды систем и соответственно — методы их решения, основанные на выборе эффективной замены в зависимости от вида уравнений, входящих в систему. Удобно рассматривать эти методы решения на примерах, приведённых в параграфе. Отдельно следует обращать внимание учащихся на этапы, которые гарантируют «правомочность» такой замены. Так, если предлагается замена $\frac{x}{y} = t$, то для её осуществления следует отдельно рассмотреть случай, когда $y = 0$.

Небольшая часть теории параграфа посвящена симметричным многочленам. Эта информация поможет учащимся распознавать системы уравнений, для решения которых выгодно использовать замену с помощью элементарных симметрических многочленов.

В примерах 8 и 9 рассмотрены решения, в которых некоторые этапы основаны на особенностях и свойствах рассматриваемых уравнений. При решении уравнений такого вида общего алгоритма не существует, здесь учащиеся должны проявить математическое зрение и интуицию.

Комментарии к упражнениям

№ 13.21(1). Следует выполнить замену $x^2 + y^2 = u$ и $xy = v$.

№ 13.24(2). Перепишите данную систему так: $\begin{cases} y^2 - 4y + y + 4x = 4, \\ (y^2 - 4y)(y + 4x) = -21. \end{cases}$

№ 13.25(3). Рассмотрев первое уравнение системы как квадратное относительно x, можно показать, что $y \geqslant 2$. Перепишем второе уравнение так: $(x - 2)^2 = 2y - y^2$. Отсюда получаем, что $y \leqslant 2$.

№ 13.25(4). Рассмотрев первое уравнение системы как квадратное относительно y, можно показать, что $x^2 \geqslant 6$. Из второго уравнения системы следует, что $x^2 \leqslant 6$.

№ 13.28(1). Перепишем первое уравнение системы так: $x^2 - 4 = (y - 3)^2$. Отсюда $x^2 \geqslant 4$. Из второго уравнения системы следует, что $x^2 \leqslant 4$.

№ 13.30. Имеем: $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

№ 13.33. Вычтя из первого уравнения системы второе, получим $x^3 + 7x = y^3 + 7y$. Далее следует рассмотреть возрастающую функцию $f(t) = t^3 + 7t$.

§ 14. Системы уравнений (неравенств) как математические модели реальных ситуаций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать у учащихся представление о математическом моделировании, углубить и систематизировать знания учащихся о решении текстовых задач с помощью составления их математических моделей в виде систем уравнений и неравенств. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

	Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.
Планируемые результаты	Учащийся получит представление о математическом моделировании, углубит и систематизирует знания о решении текстовых задач с помощью составления их математических моделей в виде систем уравнений и неравенств.
Основные понятия	Метод замены переменных, однородный многочлен, симметрический многочлен, элементарные симметрические многочлены, свойство симметрического многочлена.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	14.1, 14.3, 14.5	14.30		14.2, 14.4, 14.6
Урок 2	14.7, 14.8, 14.9, 14.11, 14.13			14.10, 14.12
Урок 3	14.14, 14.15, 14.17			14.16, 14.18
Урок 4	14.19, 14.20, 14.22	14.31		14.21, 14.23
Урок 5	14.24, 14.26, 14.27		Самостоятельная работа № 14: № 1, 2	14.25, 14.28, 14.29

Методические комментарии

Учащиеся хорошо знакомы с решением текстовых задач. В предыдущих классах они решали такие задачи «в несколько вопросов», пошагово. В результате возникала математическая модель, представляющая числовое выражение. Позже математическая модель являлась уравнением или системой уравнений.

В данном параграфе учащиеся продолжают знакомиться с понятием математического моделирования. Учащиеся должны понять, что, несмотря на разнообразие окружающего мира, многие процессы могут быть описаны одними и теми же математическими моделями, а следовательно, можно решать соответствующие задачи с помощью формализованного математического аппарата, стандартных приёмов и методов.

Далее целесообразно напомнить учащимся классические сюжеты текстовых задач, которые они решали ранее: два транспортных средства движутся навстречу друг другу; двое рабочих выполняют совместную работу; две трубы наполняют бассейн. Обсуждение этих задач следует вести в таком русле, чтобы учащиеся самостоятельно пришли к выводу, что все эти процессы имеют одну и ту же математическую модель.

Следует напомнить учащимся о трёх этапах решения прикладной задачи. Часто учащиеся упускают из виду третий этап — анализ ответа на соответствие условию прикладной задачи. Здесь можно привести как чисто формальные критерии (например, в задаче о количестве человек ответ 1,5 невозможен, а в задаче о количестве человеко-дней, нужных на выполнение некоторой работы, — возможен; объём бака не может быть отрицательным числом и т. п.), так и знания об исследуемых процессах (например, скорость автомобиля не может быть 750 км/ч, а самолёта — 10 км/ч). Эмоциональное подкрепление важности этого этапа можно сформировать, напомнив эпизод из книги Л. Гераскиной «В стране невыученных уроков» с полутора землекопами.

В тексте параграфа подробно разбираются задачи, в которых математической моделью служат системы уравнений (неравенств) с двумя переменными. Можно предложить учащимся самостоятельно разобрать решение этих задач.

Комментарии к упражнениям

№ 14.15, 14.16. Задачи на совместную работу традиционно вызывают у учащихся определённые сложности. Здесь важно, чтобы учащиеся освоили следующий факт: если какую-то работу можно выполнить за x часов, то за один час выполняется $\frac{1}{x}$ часть всей работы. Другими словами, в задачах такого рода следует находить производительность труда.

Контрольная работа № 3

Глава 3. Неравенства с двумя переменными и их системы. Доказательство неравенств

§ 15. Неравенства с двумя переменными

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение строить графики неравенств с двумя переменными. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации.
Планируемые результаты	Учащийся научится строить графики неравенств с двумя переменными.
Основные понятия	Неравенство с двумя переменными, график неравенства с двумя переменными, множество решений неравенства с двумя переменными, открытая полуплоскость, линейное неравенство с двумя переменными, график линейного неравенства с двумя переменными.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	15.1, 15.3, 15.5			15.2, 15.4, 15.6
Урок 2	15.7, 15.9, 15.11 (1—5)	15.18		15.8, 15.10 (1, 2), 15.12 (1—3)
Урок 3	15.13, 15.15, 15.16, 15.17	15.19	Самостоятельная работа № 15: № 1	15.10 (3), 15.12 (4—6), 15.14

Методические комментарии

Основные понятия аппарата работы с неравенствами уже знакомы учащимся по решению неравенств с одной переменной. Поэтому определения неравенства с двумя переменными и его решения затруднений у учащихся не вызывают. Переход от неравенств с одной переменной к неравенствам с двумя переменными содержит два ключевых отличия: во-первых, одно решение неравенства записывается в виде упорядоченной пары $(x; y)$; во-вторых, для графического изображения множества решений неравенства требуется не одномерная координатная прямая, а двумерная координатная плоскость.

Целесообразно напомнить учащимся, что для изображения на координатной прямой графика неравенства с одной переменной $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) мы определяли точки, которые либо являются нулями функции $f(x)$, либо не входят в область определения функции, и эти точки разбивали координатную прямую на интервалы, на каждом из которых значение выражения $f(x)$ сохраняло знак. Аналогичные соображения применяются и для построения графика неравенства с двумя переменными: линии графика уравнения $f(x, y) = 0(f(x, y) = 0)$ и линии (точки), изображающие пары $(x; y)$, не входящие в область определения функции, разбивают координатную плоскость xy на области, в каждой из которых значение выражения $f(x; y)$ сохраняет знак. Можно на доступном учащимся уровне пояснить, что эти соображения применимы благодаря тому, что в школьном курсе математики изучаются «удобные» для такого исследования функции. Любознательным учащимся можно предложить сконструировать неравенство, для которого такой аппарат построения графика не подходит (в таком неравенстве можно, например, использовать функцию Дирихле).

Следующим этапом построения графика неравенства является определение знака функции $f(x, y)$ в каждой из полученных областей. Для этого наиболее целесообразен метод «пробных точек». Следует подчеркнуть, что для этого метода достаточно определить знак значения функции, а не само значение, поэтому можно упрощать и огрублять вычисления, а также использовать соображения, аналогичные приведённым в примере 1.

Полезными могут быть и такие соображения, основанные на методе «пробных точек». Если возможно представить уравнение с двумя переменными в виде $y = f(x)$ и соответственно график этого уравнения является графиком функции f, то решения неравенства $y < f(x)$ расположены ниже графика функции $f(x)$, а решения неравенства $y > f(x)$ — выше этого графика.

Когда идёт речь о построении графика нестрогого неравенства, учащиеся должны понимать, что график уравнения $f(x, y) = 0$ принадлежит графику неравенства. Графику строгого неравенства график уравнения $f(x, y) = 0$ не принадлежит.

В примере 8 параграфа демонстрируется полезный приём решения неравенства с одной переменной с параметром: представив его как неравенство с двумя переменными (в качестве одной из которых выступает параметр), построить график этого неравенства и далее исследовать выполнение условий задачи при изменении значения переменной-параметра.

Комментарии к упражнениям

№ 15.5. Открытая полуплоскость является графиком таких неравенств: 1, 2, 6, 7, 9.
№ 15.13(3). Искомый график — это объединение полуплоскости и луча.
№ 15.16. Постройте график первого неравенства на координатной плоскости xa. Следует найти все значения параметра a, при которых построенный график не содержит точки с абсциссами, удовлетворяющими неравенству $x^2 \leqslant 4$.

§ 16. Системы неравенств с двумя переменными

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение использовать графический способ решения системы неравенств с двумя переменными.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать системы неравенств с двумя переменными графическим способом.

Основные понятия

Решение системы неравенств, множество решений системы неравенств.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	16.1, 16.3, 16.4			16.2, 16.5, 16.26

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	16.6, 16.8, 16.10, 16.12, 16.14, 16.16			16.7, 16.9, 16.11, 16.13, 16.15, 16.17
Урок 3	16.18, 16.20, 16.22, 16.25	16.27	Самостоятельная работа № 16: № 1, 2, 3	16.19, 16.21, 16.23, 16.24

Методические комментарии

Понятие системы неравенств знакомо учащимся: они уже умеют решать системы неравенств с одной переменной. Поэтому общая идея решения системы неравенств с двумя переменными затруднений у учащихся не вызывает. Также учащиеся поняли общие принципы изображения множества решений неравенства с двумя переменными. Поэтому материал данного параграфа адаптирует уже известные учащимся методы решений на координатной плоскости.

В качестве дидактического материала использованы практически все известные учащимся уравнения с двумя переменными, графики которых они умеют строить.

На рисунках 17.1—17.3 показан довольно наглядный способ изображения искомой области — с помощью штриховки. Учащиеся могут воспользоваться этим способом оформления и других подобных задач.

Следует напомнить учащимся, что от того, является ли некоторое неравенство строгим или нестрогим, зависит, принадлежит ли график уравнения $f(x, y) = 0$ графику рассматриваемого неравенства.

Частым источником ошибок является то, что учащиеся не обращают внимания на различные (строгие и нестрогие) знаки неравенств, входящих в одну систему.

Следует обратить внимание учащихся на то, что упрощение неравенства с двумя переменными может привести к тому, что исходное неравенство «распадается» на несколько совокупностей, каждая из которых соответствует отдельной области координатной плоскости.

Умение строить множество точек, являющееся решением системы неравенств с двумя переменными, во многом расширяет умения учащихся в построение графиков неравенств. Это связано с тем, что есть немало неравенств, которые можно заменить на равносильные системы. Это в свою очередь расширяет класс задач с параметрами, решение которых основано на графическом приёме с использованием координатной плоскости xa.

Комментарии к упражнениям

№ 16.21. Представим данную систему в таком виде $\begin{cases} a \leqslant 4x - x^2, \\ a \geqslant \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x. \end{cases}$ Далее на координатной плоскости xa постройте множество точек, являющееся решением данного неравенства.

№ 16.23. Разложите на множители левую часть первого неравенства системы.

§ 17. Основные методы доказательства неравенств

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение доказывать неравенства.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать неравенства.

Основные понятия

Доказать неравенство, метод разности, метод упрощения неравенства, метод рассуждения от противного, метод применения очевидного неравенства, метод применения ранее доказанного неравенства.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	17.1, 17.3, 17.5, 17.7, 17.8	17.65		17.2, 17.4, 17.6, 17.9

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	17.10, 17.12, 17.13, 17.15, 17.16, 17.17, 17.18, 17.20	17.66		17.11, 17.14, 17.19, 17.21
Урок 3	17.22, 17.24, 17.26, 17.28, 17.30, 17.31, 17.33, 17.35, 17.37, 17.39			17.23, 17.25, 17.27, 17.29, 17.32, 17.34, 17.36, 17.8, 17.40
Урок 4	17.41, 17.43, 17.45, 17.46, 17.48, 17.49, 17.51, 17.52			17.42, 17.44, 17.47, 17.50, 17.53
Урок 5	17.54, 17.56, 17.57, 17.58, 17.59, 17.60, 17.61, 17.63		Самостоятельная работа № 17: № 1, 2	17.55, 17.62, 17.64

Методические комментарии

В параграфе рассмотрены различные приёмы доказательства неравенств. В первую очередь следует разъяснить, что подразумевается под доказательством неравенства.

Следует обратить внимание учащихся на то, что практически все они предусматривают преобразования неравенств. Перед изучением этой темы целесообразно повторить с учащимися свойства числовых неравенств, правила сложения и умножения числовых неравенств (§ 9 учебника «Алгебра» для 8 класса с углублённым изучением математики). Учащиеся должны прийти к выводу о том, что операция умножения обеих частей неравенства на переменную требует большего внимания. Поэтому возможность применения теорем об умножении неравенств необходимо обосновывать. Пример такого обоснования приведён в примере 6 параграфа.

Метод применения ранее доказанного неравенства основан на том, что у учащихся постепенно накапливается «библиотека» доказанных неравенств, которой они могут пользоваться. В параграфе приведён ряд красивых неравенств, с которых можно начать формирование этой «библиотеки», особенно тех, которые содержатся в ключевых задачах параграфа. Именно такие методы решения доказывают и подкрепляют целесообразность системы «ключевых задач», принятой в данной линейке учебников.

Ряд полезных неравенств будет приведён в следующей теме «Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши — Буняковского» и рассказе «Эффективные приёмы доказательства неравенств» после неё.

Комментарии к упражнениям

№ 17.18, 17.22. Воспользуйтесь методом разности.

№ 17.30. Имеем: $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}$. Отсюда $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$.

№ 17.33. Имеем: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$. Отсюда $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$.

№ 17.40. Имеем: $b^3 + b = b(b^2 + 1) \geqslant 2b^2$ при $b \geqslant 0$. Теперь можно записать $a^4 + b^3 + b + 1 \geqslant 2a^2 + 2b^2 \geqslant 4ab$.

№ 17.43—17.45. Воспользуйтесь неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$.

№ 17.46. Имеем: $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

№ 17.47. Воспользуйтесь тем, что $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2$.

№ 17.55. Докажите, что $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

§ 18. Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши — Буняковского

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказать и применять при решении задач неравенства между средними величинами, неравенство Коши—Буняковского.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты — Учащийся научится доказывать и применять при решении задач неравенства между средними величинами, неравенство Коши—Буняковского.

Основные понятия — Среднее квадратичное, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоничное, неравенство Коши—Буняковского.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	18.1, 18.3, 18.4, 18.6, 18.8			18.2, 18.5, 18.7, 18.9
Урок 2	18.10, 18.11, 18.12, 18.14, 18.16, 18.17, 18.19, 18.21			18.13, 18.15, 18.18, 18.20, 18.22
Урок 3	18.23, 18.25, 18.27, 18.29, 18.30, 18.32, 18.34, 18.36, 18.38, 18.39	18.67		18.24, 18.26, 18.28, 18.31, 18.33, 18.35, 18.37
Урок 4	18.40, 18.42, 18.44, 18.46, 18.47, 18.57, 18.58, 18.59, 18.60	18.68		18.41, 18.43, 18.45, 18.48
Урок 5	18.49, 18.50, 18.52, 18.54, 18.55, 18.61, 18.63, 18.64, 18.65, 18.66		Самостоятельная работа № 18: № 1, 2, 4	18.51, 18.53, 18.56, 18.62

Методические комментарии

Утверждение о том, что средние величины чисел a и b ($0 \leqslant a < b$) принадлежат промежутку $[a; b]$, предоставлено для самостоятельного доказательства. Учащиеся обязательно должны выполнить это задание.

Целесообразно обсудить с учащимися, какую роль играет ограничение $0 \leqslant a$.

Учащиеся должны запомнить определения средних величин и неравенства, их связывающие, а также обобщение неравенства, связывающего среднее квадратичное и среднее арифметическое для n чисел, так как далее они используются в задачах. Примеры их применения приведены в теоретической части параграфа.

Доказательство неравенства Коши—Буняковского примечательно тем, что предлагаемый метод нигде ранее не использовался при доказательстве неравенств. Идея доказательства красивая, неожиданная и вместе с тем достаточно искусственная. Следует обратить внимание на условие достижения равенства в неравенстве Коши—Буняковского.

Для применения изученных неравенств, особенно неравенства Коши—Буняковского, очень важно уметь увидеть представление данных выражений в форме, к которой эти неравенства применимы, а именно, определение наборов чисел a_i и b_i. Этот навык формируется с приобретением определённого опыта применения неравенства Коши—Буняковского. Примеры 6—8 параграфа этому способствуют.

Пример 8 параграфа демонстрирует неожиданное применение неравенства Коши—Буняковского. Здесь условие достижения равенства в неравенстве Коши—Буняковского является ключевым приёмом.

Комментарии к упражнениям

№ 18.12. Имеем: $x^2 + \frac{1}{x^2+1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} - 1$.

№ 18.14. Примените неравенство Коши—Буняковского к наборам чисел $(a; b)$ и $(c; d)$.

№ 18.16. Примените неравенство Коши—Буняковского к наборам чисел $(1; a)$ и $(1; b)$.

№ 18.17. Примените неравенство Коши—Буняковского к наборам чисел $(a; b; c)$ и $(x; y; z)$.

№ 18.24. Имеем: $\frac{3a+4b}{2} \geqslant \sqrt{12ab}$. С учётом условия получаем, что $ab \leqslant 12$. Равенство достигается при $a = 4$ и $b = 3$.

№ 18.27. Имеем: $\frac{x}{9x^2+1} \geqslant \frac{x}{2\sqrt{9x^2 \cdot 1}} = \frac{1}{6}$. Знак равенства достигается при $x = \frac{1}{3}$.

№ 18.30. Имеем: $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

№ 18.31. Имеем: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}}=2\sqrt{\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}} \geqslant 4.$

№ 18.32. Имеем: $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$

№ 18.33. Имеем: $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geqslant \frac{(2\sqrt{a})^2}{b}+\frac{(2\sqrt{b})^2}{a}=\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}.$

№ 18.35. Имеем: $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant ab+\frac{1-a^2+1-b^2}{2}=\frac{2-(a-b)^2}{2} \leqslant 1.$

№ 18.38. Имеем: $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \leqslant 2\sqrt{2(a^4+b^4)}=4.$

№ 18.43. Примените неравенство Коши—Буняковского к наборам чисел $(a;\ b;\ c)$ и $(1;\ 1;\ 1)$.

№ 18.53. Применив неравенство Коши—Буняковского к наборам чисел $\left(\sqrt{1-x};\ \sqrt{1+x}\right)$ и $(1;\ 1)$, получим, что $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \leqslant 2.$

Контрольная работа № 4

Глава 4. Степенная функция

§ 19. Степенная функция с натуральным показателем

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач.

Основные понятия

Степенная функция с натуральным показателем, свойства степенной функции с чётным показателем, свойства степенной функции с нечётным показателем.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	19.1, 19.3, 19.5			19.2, 19.4, 19.7
Урок 2	19.8, 19.10, 19.12, 19.14, 19.16	19.27		19.9, 19.11, 19.13, 19.15, 19.17
Урок 3	19.18, 19.20, 19.21, 19.23, 19.25	19.28	Самостоятельная работа № 19: № 1, 2	19.19, 19.22, 19.24, 19.26

Методические комментарии

Поскольку учащиеся знакомы с частными видами этой функции, то им хорошо понятно, почему при исследовании функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, надо отдельно рассматривать два случая: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

Следует разъяснить учащимся: на основании того, что выражение x^{2k}, $k \in \boldsymbol{Z}$, принимает только неотрицательные значения, ещё не следует делать вывод, что областью значений степенной функции $y = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, являются все неотрицательные числа. Соответствующее замечание можно сделать и при поиске области значений функции $y = x^{2k+1}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

При исследовании свойств функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, для случая, когда n — нечётное натуральное число, показатель степени представлен в виде $n = 2k + 1$. Это означает, что доказательство не рассматривает случая $n = 1$, т. е. функции $y = x$. В зависимости от возможностей класса следует либо сослаться на свойства этой функции, изученные в предыдущих классах, либо проверить самостоятельно, что свойства, которые далее доказываются для случая $n = 2k + 1$, выполняются для случая $n = 1$.

В зависимости от возможностей класса можно разъяснить, как по отношению друг к другу расположены графики функций $y = x^n$, $x > 0$, при различных натуральных значениях n. Однако иллюстративное сопровождение этого материала имеет определённые трудности.

Используя лишь тетрадный лист в клетку, сложно увидеть разницу, например, между графиками функций $y = x^3$ и $y = x^5$. Здесь может помочь традиционный метод — построение графика на миллиметровой бумаге — либо более современный — использование соответствующих компьютерных программ. В зависимости от возможностей класса на уроке информатики можно использовать построение графиков по точкам на основании таблицы, созданной в *Word* или редакторе таблиц; с использованием специализированных математических пакетов.

Учащимся со склонностью к изучению информатики можно предложить самостоятельно начать разработку программы для построения графиков на экране компьютера, которую по мере изучения аппарата исследования функций они смогут развивать и совершенствовать.

Комментарии к упражнениям

№ 19.1—19.3. При решении этих задач учащиеся должны апеллировать к чётности (нечётности) соответствующей функции, а также использовать её характер монотонности.

№ 19.21.(1). Рассмотрите функцию $f(x) = x^{11} + x^3$. Она является возрастающей. Знчит, данное уравнение имеет не более одого корня.

§ 20. Обратная функция

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной.
Основные понятия	Обратимая функция, взаимно обратные функции, свойство взаимно обратных функций, обратная функция.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	20.1, 20.3, 20.4	20.14		20.2, 20.5
Урок 2	20.6, 20.8, 20.10, 20.12	20.15	Самостоятельная работа № 20: № 1, 2, 3	20.7, 20.9, 20.11, 20.13

Методические комментарии

Эта тема является традиционно сложной для учащихся.

При отработке определения обратимой функции следует предложить учащимся привести примеры как обратимых функций, так и функций, не являющихся обратимыми.

В теореме 20.1 сформулировано достаточное условие обратимости. Заметим, что монотонность функции не является необходимым условием (пример, иллюстрирующий это, приведён на рисунке 20.4).

При формировании понятия взаимно обратных функций учащиеся должны в первую очередь понять, что если в упорядоченных парах вида $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, f — обратимая функция, поменять компоненты местами, т. е. получить упорядоченные пары вида $(y_0; x_0)$, то тем самым будет получена функция, обратная данной.

Определение, приведённое в тексте параграфа, формализует смену мест компонентов упорядоченных пар.

Замена (перестановка) компонентов упорядоченных пар также помогает разъяснить, почему при поиске функции, обратной данной, следует независимую переменную выражать через зависимую. Для того чтобы переход к традиционным обозначениям зависимой и независимой переменных воспринимался учащимися естественно, можно предложить учащимся выполнить следующие упражнения: задайте описательно функции, которые заданы следующими формулами: $a = \frac{b+1}{2}$, $m = \frac{n+1}{2}$.

Комментарии к упражнениям

№ 20.4, 20.5. Воспользуйтесь определение взаимно обратных функций.
№ 20.10, 20.11. Воспользуйтесь теоремой 20.2.

§ 21. Определение корня n-й степени

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции $y = \sqrt[3]{x}$. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.
Основные понятия	Корень n-й степени, знак корня n-й степени, радикал, подкоренное выражение, кубический корень, арифметический корень n-й степени.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	21.1, 21.3, 21.5			21.2, 21.4, 21.6
Урок 2	21.7, 21.9, 21.11, 21.13, 21.14	21.27		21.8, 21.10, 21.12, 21.15
Урок 3	21.16, 21.18, 21.20, 21.22, 21.24, 21.26	21.28	Самостоятельная работа № 21: № 1, 2, 3	21.17, 21.19, 21.21, 21.23, 21.25

Методические комментарии

Материал этого параграфа обобщает и расширяется понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить указанные понятия.

После введения определения корня n-й степени отрабатывается понятия корня нечётной степени. Это понятие воспринимается учащимися легче, чем понятие корня чётной степени, по двум причинам: 1) корень нечётной степени существует из любого числа и принимает только одно значение; 2) для корня нечётной степени существует обозначение.

При изучении понятия «квадратный корень» необходимость введения понятия арифметического квадратного корня мотивировалась тем, что квадратный корень из неотрицательного числа принимает два различных значения. Необходимость введения арифметического корня чётной степени также мотивируется существованием двух корней чётной степени, поэтому разница между «арифметическим корнем» и «корнем» для чётной степени является достаточно наглядной.

Однако учащиеся должны понимать, что арифметический корень рассматривается для любого натурального $n > 1$, независимо от чётности числа n.

Следует обратить внимание учащихся на то, что запись $\sqrt[2n]{a}$, $n \in N$, используется только для обозначения арифметического корня. Запись $\sqrt[2n+1]{a}$, $n \in N$, может быть использована как для обозначения арифметического корня, когда $a \geqslant 0$, так и для обозначения корня нечётной степени.

Исследование свойств и построение графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ основаны на том, что эта функции являются обратной к функции $y = x^3$. Поэтому при изучении этой темы целесообразно повторить свойства взаимно обратных функций и свойства степенной функции с натуральным показателем.

Комментарии к упражнениям

№ 21.16 (1). Для того чтобы избежать появления постороннего корня, следует записать систему, равносильную данному уравнению:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-4=0,\\ x+1=0,\end{array}\right.\\ x+1\geqslant 0.\end{array}\right.$$

В зависимости от возможностей класса решение этого примера можно обобщить, записав, что уравнение $f(x)\sqrt[2n]{g(x)}=0$ равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0,\end{array}\right.\\ g(x)\geqslant 0.\end{array}\right.$$

Здесь же целесообразно провести профилактику распространённой ошибки: обнаружив, что $f(x)=0$, учащиеся считают значение x корнем уравнения, не обращая внимание на знак подкоренного выражения при этом значении x.

№ 21.18 (1). Областью определения данной функции является одноэлементное множество $\{1\}$.

№ 21.18 (1). При решении этого примера можно воспользоваться графическим методом.

§ 22. Свойства корня n-й степени

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовать выражения, содержащие корни n-й степени.
	Личностные: развивать познавательный интерес к математике.
	Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовать выражения, содержащие корни n-й степени.
Основные понятия	Свойства корня n-й степени.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторе-ния**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	22.1, 22.3, 22.5, 22.7			22.2, 22.4, 22.6, 22.8
Урок 2	22.9, 22.11, 22.13, 22.15			22.10, 22.12, 22.14, 22.16, 22.17
Урок 3	22.17, 22.19, 22.21, 22.23, 22.24, 22.25	22.51		22.18, 22.20, 22.22, 22.26
Урок 4	22.27, 22.29, 22.31, 22.32, 22.33			22.28, 22.30, 22.34
Урок 5	22.35, 22.37, 22.39	22.52		22.36, 22.38, 22.40
Урок 6	22.41, 22.43, 22.45, 22.47, 22.49		Самостоятельная работа № 22: № 1, 2, 3	22.42, 22.44, 22.46, 22.48, 22.50

Методические комментарии

Теоремы 22.1—22.4 обобщают известные теоремы о свойствах арифметических квадратных корней. Поэтому перед изучением этого параграфа целесообразно повторить свойства арифметических квадратных корней.

При изучении теорем 22.2 и 22.3 следует обратить внимание учащихся на следующий факт. Если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{-a}\sqrt[2k]{-b}$, $k \in \boldsymbol{N}$; если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}$.

Наибольшее количество ошибок учащиеся допускают при вынесении множителя из-под знака корня и особенно при внесении множителя под знак корня. Этим видам задач следует уделить особое внимание.

Учащиеся не всегда понимают (по крайней мере, это не кажется им естественным), почему при вынесении множителя-переменной из-под знака корня перед этой переменной может появиться знак «минус». Это надо разъяснить отдельно.

Чаще всего учащиеся делают ошибки при упрощении выражений вида $\sqrt[2n]{-a^{2n+1}}$. Здесь важно подчеркнуть, что в таких случаях множеством допустимых значений переменной являются все неположительные числа.

Ещё одним сложным типом задач для учащихся является преобразование выражений вида $a^2\sqrt[n]{b}$ с внесением под корень переменной a. Учащиеся должны понять, что необходимо рассматривать два случая: $a < 0$ и $a \geqslant 0$.

Надо дать возможность учащимся самостоятельно выбрать способ оформления примеров на упрощение выражений: по действиям или цепочкой.

Комментарии к упражнениям

№ 22.27 (3). Учащиеся нередко задают вопрос, в чём смысл ограничения $x \neq 0$. Дело в том, что если $x = 0$, то переменная y может принимать любые значения. Если $x \neq 0$, то $y \geqslant 0$. Поэтому выражение $|xy|\sqrt[6]{y}$, записанное в ответе, существует.

№ 22.33 (4). Заметим, что теорема 22.6 сформулирована для случая, когда $a \geqslant 0$. Чтобы избежать ошибки в данном примере, можно решение оформить так: $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt[3]{\left|\sqrt{3}-2\right|} = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

№ 22.35 (1). $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{(\sqrt{10}-3)^2}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} =$

$= \sqrt[6]{19-6\sqrt{10}}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{19^2-360} = \sqrt[6]{1} = 1.$

№ 22.49. С приёмом решения этого примера учащиеся встречаются не так часто. Здесь гораздо удобнее решить более общую задачу, чем пытаться доказать равенство для конкретного количества радикалов.

§ 23. Степень с рациональным показателем и её свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свойства степени с рациональным показателем, преоб-

разовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свойства степени с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Основные понятия Степень с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	23.1, 23.3, 23.5, 23.7, 23.9			23.2, 23.4, 23.6, 23.8, 23.10
Урок 2	23.11, 23.13, 23.15, 23.17, 23.16	23.34		23.12, 23.14, 23.16, 23.18
Урок 3	23.19, 23.20, 23.21, 23.23, 23.25 (1, 2)	23.35		23.22, 23.24, 23.26 (1, 2)
Урок 4	23.25 (3, 4), 23.27, 23.29, 23.31, 23.32		Самостоятельная работа № 23: № 1, 2, 3	23.26 (3, 4), 23.28, 23.30, 23.33

Методические комментарии

Текст параграфа начинается с повторения основных сведений о степени числа с натуральным и целым показателями. Это сделано не только с целью повторения и закрепления соответствующего материала, но и для того, чтобы определённым образом мотивировать определение степени с рациональным показателем.

Абзац перед определением степени с рациональным показателем учащиеся не должны воспринимать как доказательство того, что $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Важно добиться от учащихся понимания того, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ при $a < 0$ не определено.

Немало ошибок возникает из-за того, что учащиеся отождествляют функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$. Однако эти функции разные, поскольку у них разная область определения. Профилактикой подобной ошибки служит пример, рассмотренный в параграфе.

Поскольку свойства степени с рациональным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем, то теоремы 23.1—23.4 не вызывают затруднений.

Комментарии к упражнениям

№ 23.9, 23.10. Учащиеся должны понимать, почему в условии указано, что переменная принимает только положительные значения.
№ 23.13, 23.14. Учащиеся должны понимать, почему в условии сказано, что переменные принимают неотрицательные значения.

Контрольная работа № 5

Глава 5. Числовые последовательности

§ 24. Числовые последовательности

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями: члены последовательности, числовая последовательность, конечная последовательность, бесконечная последовательность; задавать последовательность описательным и табличным способами, использовать формулу n-го члена последовательности и рекуррентную формулу.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями: члены последовательности, числовая последовательность, конечная последовательность, бесконечная последовательность; задавать последовательность описательным и табличным способами, использовать формулу n-го члена последовательности и рекуррентную формулу.

Основные понятия

Последовательность, члены последовательности, числовая последовательность, конечная последовательность, бесконечная последовательность, описательный способ задания последовательности, табличный способ задания последовательности, формула n-го члена последовательности, стационарная последовательность, рекуррентная формула, начальные условия, рекуррентный способ задания последовательности.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	24.1, 24.3, 24.5, 24.7	24.26		24.2, 24.4, 24.6, 24.8

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	24.9, 24.11, 24.12, 24.14, 24.15, 24.17, 24.18, 24.20, 24.22, 24.24, 24.25	24.27	Самостоятельная работа № 24: № 1, 2 (1), 3, 4	24.10, 24.13, 24.16, 24.19, 24.21, 24.23

Методические комментарии

В этом параграфе приводятся основные понятия, которые используются для описания последовательностей и работы с ними. Сам по себе материал этого параграфа несложен, учащиеся легко его усваивают.

В первую очередь учащиеся должны понять связь между понятием последовательности и упорядоченного множества. Это понимание в свою очередь позволит учащимся усвоить более формальный взгляд на последовательность как на функции, областью определения которой является промежуток натурального ряда.

Связь между последовательностью и функцией также можно проследить, проанализировав способы задания этих понятий.

Особое внимание следует уделить рекуррентному способу задания последовательности. Ведь подобный аналог задания функции учащимся не знаком. Учащиеся должны понять, что для рекуррентного задания последовательности нужны два условия: первое — описывающее первый член последовательности, второе — описывающее соотношение следующего и предыдущего ему членов последовательности. В этом можно усмотреть аналог между рассмотрением последовательности, заданной рекуррентным образом, и доказательством некоторого утверждения методом математической индукции. В примере 4 продемонстрировано, как с помощью метода математической индукции устанавливать связь между рекуррентным заданием последовательности и заданием её с помощью формулы n-го члена.

Учащиеся должны усвоить метод решения задач на нахождение члена последовательности, удовлетворяющего некоторым условиям, с помощью записи уравнения, которое связывает формулу n-го члена последовательности и это условие. Решив это уравнение относительно n, учащиеся получают номер искомого члена. В учебнике этому методу посвящены задачи 24.7—24.14.

Наиболее сложны задачи этого параграфа, в которых учащимся предлагается подобрать формулу n-го члена данной последовательности. В этих заданиях, опять же, можно усмотреть аналогию с выдвижением гипотезы при обосновании утверждений методом математической индукции.

Комментарии к упражнениям

№ 24.16. Надо найти закономерность повторения значений членов последовательности.
№ 24.19. Доказательство проведите методом математической индукции с шагом 1.
№ 24.20. Теорема база индукции должна проверяться для трёх первых членов последовательности.
№ 24.22 (2, 3). Выпишите несколько членов последовательности и сделайте индуктивное предположение.

§ 25. Арифметическая прогрессия

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием арифметическая прогрессия, задавать рекуррентно арифметическую прогрессию, использовать формулу n-го члена арифметической прогрессии, доказывать и применять необходимое и достаточное условие того, что данная последовательность, содержащая более двух членов, является арифметической прогрессией. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, строить логическое рассуждение.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием арифметическая прогрессия, задавать рекуррентно арифметическую прогрессию, использовать формулу n-го члена арифметической прогрессии доказывать и применять необходимое и достаточное условие того, что данная последовательность, содержащая более двух членов, является арифметической прогрессией.

Основные понятия	Арифметическая прогрессия, разность арифметической прогрессии, рекуррентная формула арифметической прогрессии, формула n-го члена арифметической прогрессии, необходимое и достаточное условие того, что данная последовательность, содержащая более двух членов, является арифметической прогрессией.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	25.1, 25.3, 25.4, 25.6, 25.8			25.2, 25.5, 25.7, 25.9
Урок 2	25.10, 25.12, 25.13, 25.14, 25.16, 25.18, 25.20, 25.21, 25.22	25.47		25.11, 25.15, 25.17, 25.19, 25.23
Урок 3	25.24, 25.25, 25.27, 25.28, 25.29, 25.31, 25.32, 25.34, 25.36	25.48		25.26, 25.30, 25.33, 25.35
Урок 4	25.37, 25.38, 25.40, 25.42, 25.44, 25.45, 25.46		Самостоятельная работа № 25: № 1, 2, 3	25.39, 25.41, 25.43

Методические комментарии

Материал данного параграфа достаточно прост и не содержит особых «подводных камней».

Определение арифметической прогрессии построено так, что первым из возможных способов задания этой последовательности естественно считать рекуррентный.

Следует обратить внимание учащихся на то, что стационарная последовательность — это арифметическая прогрессия с разностью, равной нулю.

Свойство арифметической прогрессии «каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов» непосредственно связано с названием арифметической прогрессии. Теорема 25.1, которая доказывает это свойство, является необходимым и достаточным условием.

Комментарии к упражнениям

Многие задачи к этому параграфу основаны на методе, рассмотренном в предыдущем параграфе: если требуется найти номер члена последовательности, удовлетворяющего некоторому условию, это можно сделать, записав формулу n-го члена этой последовательности и далее записав условие, накладываемое на искомый член, так, чтобы получить уравнение относительно n.

№ 25.16. Учащиеся должны понять, что данные числа представляют собой первый и седьмой члены искомой прогрессии, и далее записать формулы первого и седьмого члена этой прогрессии, приравняв их к данным числам. Далее они самостоятельно должны прийти к выводу, что теперь можно решить систему уравнений относительно a_0 и d.

№ 25.37. Рассмотрите разность левой и правой частей доказываемого равенства.

№ 25.38. Рассмотрите равенство $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$.

№ 25.40. Докажите, что ровно одно из данных простых чисел делится нацело на 3.

§ 26. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказывать и применять формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии. ***Личностные:*** формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.
Основные понятия	Сумма n первых членов арифметической прогрессии.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	26.1, 26.3, 26.5, 26.6, 26.8			26.2, 26.4, 26.7, 26.9
Урок 2	26.10, 26.12, 26.13, 26.14, 26.16, 26.17, 26.19, 26.21, 26.23, 26.25	26.44		26.11, 26.15, 26.18, 26.20, 26.22, 26.24, 26.26
Урок 3	26.27, 26.28, 26.29, 26.31, 26.33, 26.35, 26.37, 26.38, 26.39, 26.40, 26.42, 26.43	26.45	Самостоятельная работа № 26: № 1, 2, 3	26.30, 26.32, 26.34, 26.36, 26.41

Методические комментарии

Вывод формулы суммы арифметической прогрессии выполнен с помощью очень эффективного приёма, часто используемого при решении задач на суммирование. Надо, чтобы учащиеся поняли его суть и могли применять к решению аналогичных задач.

Учащиеся должны уметь использовать оба варианта формулы суммы арифметической прогрессии.

Задачи к этому параграфу несложны. В них основное затруднение может представлять правильная запись прогрессии, о которой говорится в условии.

В примере 2 показано, как можно использовать свойства арифметической прогрессии для решения задач. Следует обратить внимание, что решение этой задачи возможно потому, что задаётся вопрос о специально подобранном номере члена этой прогрессии. Для поиска произвольного члена прогрессии по заданному условию этот метод неприменим.

Комментарии к упражнениям

№ 26.16—26.20. Эти задачи во многом аналогичны примеру 1, решённому в параграфе.

№ 26.37. Имеем: $\frac{S_n}{n} = n$. Отсюда $S_n = n^2$. Далее решение аналогично решению задачи 31.10.

§ 27. Геометрическая прогрессия

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием: геометрическая прогрессия, задавать рекуррентно геометрическую прогрессию, использовать формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием: геометрическая прогрессия, задавать рекуррентно геометрическую прогрессию, использовать формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Основные понятия

Геометрическая прогрессия, знаменатель геометрической прогрессии, рекуррентная формула геометрической прогрессии, формула n-го члена геометрической прогрессии.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	27.1, 27.2, 27.4, 27.6, 27.8			27.3, 27.5, 27.7, 27.9
Урок 2	27.10, 27.12, 27.14, 27.16, 27.18, 27.20	27.35		27.11, 27.13, 27.15, 27.17, 27.19

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	27.21, 27.23, 27.25, 27.27, 27.28, 27.30, 27.32, 27.34	27.36	Самостоятельная работа № 27: № 1, 2, 3	27.22, 27.24, 27.26, 27.29, 27.31, 27.33

Методические комментарии

Материал данного параграфа достаточно прост. Его изложение идёт в порядке и по принципам, аналогичным использованным в теме «Арифметическая прогрессия». Поэтому учащиеся не должны испытывать особых затруднений при освоении этого материала.

Следует обратить внимание учащихся на то, что стационарная последовательность — это геометрическая прогрессия со знаменателем, равным единице. Однако стационарная последовательность, каждый член которой равен 0, не рассматривается как геометрическая последовательность. Хотя определение геометрической последовательности к ней и можно применить, однако свойствами членов геометрической прогрессии, для которых надо записывать частное предыдущего и последующего членов, она не обладает, поскольку частное $\frac{0}{0}$ не имеет смысла.

При рассмотрении свойств геометрической прогрессии целесообразно подчеркнуть, что название этой прогрессии непосредственно связано со свойством «каждый её член равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов». Теорема 27.1, которая доказывает это свойство, является необходимым и достаточным условием.

Комментарии к упражнениям

№ 27.30, 27.31. Надо ввести две переменные: первый член и знаменатель геометрической прогрессии. Далее на основании свойств арифметической и геометрической прогрессий составить два уравнения системы.

№ 27.32, 27.33. Обратить внимание учащихся, что из условия не видно наличие двухвариантного ответа.

§ 28. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение доказывать и применять формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Личностные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать и применять формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Основные понятия

Сумма n первых членов геометрической прогрессии.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	28.1, 28.3, 28.5, 28.7	28.20		28.2, 28.4, 28.6, 28.8
Урок 2	28.9, 28.11, 28.13, 28.15, 28.16, 28.18, 28.19	28.21	Самостоятельная работа № 28: № 1, 2, 3	28.10, 28.12, 28.14, 28.17

Методические комментарии

Вывод формулы суммы геометрической прогрессии выполнен с помощью очень эффективного приёма, часто используемого при решении задач на суммирование. Желательно, чтобы учащиеся поняли его суть и могли применять к решению аналогичных задач.

Учащиеся должны понимать, почему данная формула используется для геометрической прогрессии, знаменатель которой не равен 1. При этом следует заметить, что если знаменатель прогрессии равен 1, то мы имеем стационарную последовательность, сумму n первых членов которой легко найти.

Комментарии к упражнениям

№ 28.17. Надо воспользоваться такой формулой для суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$. Далее из этой формулы найти первый член прогрессии.

№ 28.18. Выразите каждый член прогрессии через первый член прогрессии и знаменатель.

§ 29. Представление о пределе последовательности. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать наглядно-интуитивное понятие о пределе последовательности, формировать умение доказывать и применять формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1. ***Личностные:*** формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1.
Основные понятия	Предел последовательности, сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1, гармонический ряд.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	29.1, 29.3, 29.5, 29.7, 29.9, 29.10	29.24		29.2, 29.4, 29.6, 29.8, 29.11
Урок 2	29.12, 29.14, 29.16, 29.17, 29.18, 29.20, 29.22	29.25	Самостоятельная работа № 29: № 1, 2, 3	29.13, 29.15, 29.19, 29.21, 29.23

Методические комментарии

Строгий вывод формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии не входит в учебную программу. В учебнике рассматривается основной подход к выводу таких формул, в котором учащиеся впервые знакомятся с поведением бесконечно малых величин; с тем, что бесконечная возрастающая последовательность может быть ограничена сверху; и на наглядном уровне — с понятием предела числовой последовательности. В данном фрагменте параграфа важным является не столько вывод самой формулы, сколько формирование у учащихся представлений о сумме, содержащей бесконечное число слагаемых. Учащиеся на интуитивном уровне должны понять, что они начинают знакомиться с суммами совсем иного рода, чем суммы с конечным числом слагаемых. Поэтому возникает необходимость договориться, что подразумевать под этим понятием.

Изложение материала построено на апелляции к наглядности, к естественным представлениям учащихся о поведении бесконечно больших и бесконечно малых величин. Например, высказывание «если значения знаменателя дроби при неизменном числителе становятся всё больше и больше, то значения дроби становятся всё меньше и меньше» не требует особых дополнительных пояснений.

Следует разъяснить учащимся, что полученная формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии возникла не в результате механического сложения членов прогрессии. Она выражает договорённость в том, что подразумевают под суммой с бесконечным числом слагаемых.

Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, даёт возможность записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби. Главное в этом алгоритме —

правильно записать первый член и знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, а также слагаемое, которое не относится к геометрической прогрессии (в примере 1 это слагаемое 0,2).

Комментарии к упражнениям

№ 29.22, 29.23. Перед тем как упростить правую часть с помощью формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии, необходимо доказать, что $|q| < 1$.

§ 30. Суммирование

Технологическая карта урока

Формируемые результаты — ***Предметные:*** формировать умение применять приёмы суммирования n первых членов последовательности.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты — Учащийся научится применять приёмы суммирования n первых членов последовательности.

Основные понятия — Суммирование n первых членов последовательности.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	30.1, 30.3, 30.5, 30.6, 30.7, 30.9, 30.10, 30.11	30.12, 30.13	Самостоятельная работа № 30: № 1, 2, 3	30.2, 30.4, 30.8

Методические комментарии

Некоторое понятие о суммировании n первых членов последовательности учащиеся уже получили при изучении темы «Метод математической индукции», в которой требовалось доказать формулу искомой суммы с помощью метода математической индукции. В данном параграфе демонстрируются и другие методы суммирования: использование ранее доказанных формул, использование свойств арифметической и геометрической прогрессий, алгебраические преобразования записанной формулы суммы и т. д. Использование этих методов требует хорошо развитой математической интуиции и умения применять для решения данной задачи ранее доказанные факты и формулы. Поэтому данная тема нетривиальна и сложна для учащихся.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что суммирование — это не процесс механического сложения. В начале параграфа даётся определение того, в чём состоит задача суммирования.

Комментарии к упражнениям

Упражнения к данному параграфу в своём большинстве аналогичны задачам, рассмотренным в тексте теоретической части параграфа.

Контрольная работа № 6

Глава 6. Элементы статистики и теории вероятностей

§ 31. Начальные сведения о статистике

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать представление о предмете науки статистики, формировать умения оперировать понятиями «выборка», «репрезентативная выборка», основными методами представления статистических данных. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов.
Планируемые результаты	Учащийся получит представление о предмете науки статистики, научится оперировать понятиями «выборка», «репрезентативная выборка», основными методами представления статистических данных.
Основные понятия	Статистика, сбор данных, выборка, репрезентативная выборка, генеральная совокупность, сбор представления данных, столбчатая диаграмма, гистограмма, диаграмма рассеивания.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	31.1, 31.3, 31.4, 31.6, 31.7, 31.8	31.10, 31.11	Самостоятельная работа № 31: № 1, 2, 3	31.2, 31.5, 31.9

Методические комментарии

Этот параграф очень удобен для установления межпредметных связей, поскольку предоставляет математический аппарат для проведения опытов и исследования результатов в науках естественно-научного цикла.

После введения первоначальных понятий и знакомства учащихся с тем, что собой представляет выборка и какая выборка является репрезентативной, следует рассмотреть различные способы представления информации для выборок из разных предметных областей, разного объёма и с разными статистическими характеристиками. Следует выбрать для демонстрации графики и диаграммы различных видов и различного оформления. Учащиеся должны убедиться в том, что это необычайно удобный и наглядный способ представления информации. Соответственно, учащиеся должны овладеть инструментарием предоставления информации в виде графиков и диаграмм, выбирая наиболее целесообразную форму представления информации в каждом конкретном случае.

Комментарии к упражнениям

№ 31.6. В параграфе не даётся формальное определение репрезентативной выборки. Поэтому каждый ответ учащегося должен обсуждаться. Ответы учащихся должны быть аргументированными.

§ 32. Статистические характеристики

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать статистическими характеристиками. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать статистическими характеристиками.
Основные понятия	Частота, мода, относительная частота, решающие правила, размах, случайные выбросы, меры центральной тенденции, отклонение, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	32.1, 32.2, 32.4, 32.6, 32.7	32.19		32.3, 32.5
Урок 2	32.8, 32.10, 32.12, 32.15, 32.16, 32.17, 32.18	32.20	Самостоятельная работа № 32: № 1, 2, 3	32.9, 32.11, 32.13, 32.14

Методические комментарии

Не все методы анализа статистических данных, рассмотренные в параграфе, будут очевидны для учащихся. Среднее значение, частота и относительная частота (в том числе составление частотной таблицы) обычно не вызывают затруднений, также довольно легко воспринимаются размах и медиана выборки. Понятие моды уже не настолько наглядно, поэтому ему надо уделить больше внимания.

Получив такой разнообразный инструментарий, учащиеся могут испытывать затруднения в выборе мер центральной тенденции совокупности данных, которые целесообразно использовать в том или ином случае. Универсальных рекомендаций нет, помочь может возвращение к примерам, рассмотренным в параграфе, и тем вопросам, которые были заданы в начале каждого примера: что мы хотели выяснить с помощью используемого метода?

Можно привести много примеров из повседневной жизни учащихся.

Например, учитель физкультуры хочет сделать выставление оценок за прыжки в высоту как можно более объективным. Он решил: пусть весь класс совершит прыжки, а затем по полученным результатам он разработает шкалу оценок. Какими мерами центральной тенденции ему надо пользоваться? Скорее всего, учащиеся придут к выводу, что хорошей оценке должна соответствовать мода (большинство учащихся справляются с этой высотой). Все результаты, которые выше моды, — отличные, ниже — средние. Однако учащиеся могут выдвинуть и другие точки зрения. Следует обязательно организовать обсуждение соответствующей аргументации.

Комментарии к упражнениям

№ 32.15. Также можно выяснить, какая ещё из мер центральной тенденции характеризует уровень доходов на данной фирме.

§ 33. Операции над событиями

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения представлять соотношения между событиями с помощью диаграмм Эйлера, оперировать понятиями несовместных событий, операций объединения, пересечения, дополнения событий, доказывать и применять правила нахождения вероятности результатов операций над событиями.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится представлять соотношения между событиями с помощью диаграмм Эйлера, оперировать понятиями несовместных событий, операций объединения, пересечения, дополнения событий, доказывать и применять правила нахождения вероятности результатов операций над событиями.

Основные понятия

Несовместные события, объединение событий, вероятность объединения событий, пересечение событий, вероятность пересечения событий, дополнение события.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	33.1, 33.3, 33.4, 33.5			33.2, 33.6
Урок 2	33.7, 33.8, 33.10, 33.12	33.22		33.9, 33.11, 33.13
Урок 3	33.14, 33.16, 33.17, 33.19, 33.20, 33.21	33.23	Самостоятельная работа № 33: № 1, 2, 3	33.15, 33.18

Методические комментарии

Параграф посвящён изучению соотношений между событиями. В начале параграфа вводится и рассматривается на примерах понятие несовместных событий. Учащиеся должны хорошо усвоить это понятие, потому что именно на основании того, являются ли события несовместными, определяются формулы, которые можно применять для вычисления вероятности нескольких событий в той или иной ситуации.

Следует сформировать у учащихся навыки трактовать соотношения между событиями, представленные с помощью диаграмм Эйлера, и самим составлять такие диаграммы.

Определения объединения, пересечения, дополнения событий проиллюстрированы в учебнике диаграммами Эйлера. Рекомендуется при рассмотрении примеров и решении первых задач этого параграфа также использовать диаграммы Эйлера — как для наглядности самой задачи, так и для закрепления навыков представления информации в виде диаграмм Эйлера. Удобство использования такого аппарата продемонстрировано в ходе доказательства теоремы 33.1.

Можно провести аналогию между операциями над событиями и операциями над множествами. Это сделает понятными для учащихся многие практические аспекты применения операций над событиями для вычисления вероятностей.

Важно подчеркнуть, что когда идёт речь об операциях над событиями, то эти события относят к одному и тому же опыту.

Комментарии к упражнениям

№ 33.16—33.18. Следует применить теорему 33.1.

№ 33.20 (1). Пусть A — это событие, что лампочка проработает не менее года, B — событие, что выключатель проработает не менее года. По условию $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}01$. Отсюда $p(A \cup B) = 0{,}99$. Тогда искомая вероятность равна $p(A \cup B) - p(A) = 0{,}03$. Решение этой задачи удобно проиллюстрировать с помощью рис. 1.

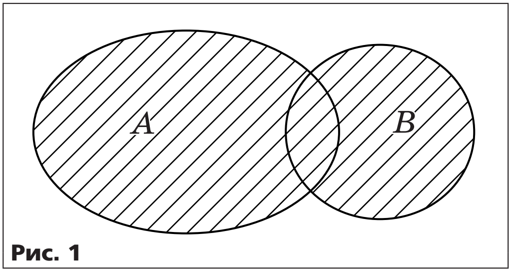

Рис. 1

§ 34. Зависимые и независимые события

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты — ***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями условной вероятности, зависимых и независимых собы-

	тий, применять метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм.
	Личностные: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории.
	Метапредметные: осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями условной вероятности, зависимых и независимых событий, применять метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм.
Основные понятия	Условная вероятность, дендрограмма, независимые события, вероятность независимых событий, зависимые события, вероятность зависимых событий.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	34.1, 34.3, 34.5			34.2, 34.4, 34.6
Урок 2	34.7, 34.9, 34.11, 34.13	34.24		34.8, 34.10, 34.12, 34.14
Урок 3	34.15, 34.17, 34.19, 34.21, 34.22	34.25	Самостоятельная работа № 34: № 1, 2, 3	34.16, 34.18, 34.20, 34.23

Методические комментарии

В учебнике не рассматривается строгое определение условной вероятности. Это понятие вводится с помощью интуитивно понятных примеров. В параграфе пример смоделирован с помощью игральных кубиков. Можно предложить учащимся составить аналогичный пример в опыте, в котором подбрасываются две монеты.

В параграфе рассматривается удобный и наглядный метод решения вероятностных задач с помощью построения дендрограмм (древовидных диаграмм). Обычно учащиеся легко воспринимают идею построения дендрограмм и с удовольствием их используют. Здесь надо следить за тем, чтобы учащиеся на каждом шагу построения дендрограммы учитывали все возможные ветвления, а при определении числовых значений вероятностей, которые следует подписать над ветвями дендрограммы, — правильно их подсчитывали. В частности, элементом контроля является то, что сумма вероятностей, подписанных на стрелках, выходящих из одного узла дендрограммы, должна быть равна единице. Следует разобрать с учащимися, почему это условие должно выполняться.

Теорема 34.1 позволяет на основании составленной дендрограммы вычислять вероятности событий, соответствующих листам дендрограммы. Далее, при формировании соответствующих навыков, учащиеся смогут использовать эту теорему и без изображения дендрограммы. Теорема 34.1 доказывается для частного случая. Но даже этот факт не делает доказательство простым. Это следует учесть, сопоставляя сложность доказательства с уровнем класса.

В параграфе вводятся понятия «зависимые и независимые события». Учащимся может показаться непонятным определение этих понятий с помощью формул, содержащих условные вероятности. Следует детально пояснить содержательный смысл, который несут эти формулы.

Теорема 34.2, позволяющая вычислять вероятность пересечения независимых событий, служит основой для решения большого количества вероятностных задач. Учащиеся должны усвоить, что эту теорему можно применять только в том случае, когда события являются независимыми.

Следует заметить, что теорема 34.1 позволяет найти вероятность пересечения любых событий, о которых неизвестно, являются они независимыми или нет. Учащиеся должны уметь различать, какую из теорем следует применять в каждой конкретной задаче.

Данный параграф представляет определённую сложность для учащихся, потому что в нём происходит переход от наглядно-интуитивных представлений о вероятностных задачах к достаточно формализованному подходу. Поэтому при изучении материала этого параграфа следует постоянно получать обратную связь от учащихся об усвоении ими материала, а в случае сомнений — подкреплять излагаемый материал большим количеством наглядных примеров.

Комментарии к упражнениям

№ 34.15 (1). Воспользовавшись теоремой 34.1, можно получить, что искомая вероятность равна $\frac{7}{10} : \frac{9}{10}$.

№ 34.21. Подсказкой к решению может служить пример 3, разобранный в параграфе.

§ 35. Геометрическая вероятность

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение применять геометрический способ определения вероятностей событий.

Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится применять геометрический способ определения вероятностей событий.

Основные понятия

Геометрическое определение вероятности.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	35.1, 35.2, 35.4, 35.5	35.15		35.3, 35.6
Урок 2	35.7, 35.9, 35.11, 35.13	35.16	Самостоятельная работа № 35: № 1, 2, 3	35.8, 35.10, 35.12, 35.14

Методические комментарии

Понятие геометрической вероятности наглядно и интуитивно понятно. Оно полностью согласуется с повседневным опытом. Главное, чему надо научить учащихся в этой теме, — это построение геометрической модели задачи.

В более простых ситуациях геометрическая модель описывается в условии задачи так, как в примере 1 параграфа. Такие задачи не вызывают у учащихся затруднений. В более сложной задаче надо построить геометрическую модель, описывающую вероятностный опыт. Пример построения такой модели описан во второй задаче параграфа.

Источником примеров на поиск геометрической вероятности могут служить геометрические задачи на комбинации тел, в которых надо находить площади фигур.

Комментарии к упражнениям

№ 35.4. Постройте геометрическое место точек, расстояния от которых до сторон квадрата не меньше единицы.
№ 35.5. Рассмотрите полуокружность, не содержащую точку B.
№ 35.9, 35.10. Постройте в данном квадрате указанные множества точек.

§ 36. Схема Бернулли

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятием «схема Бернулли», применять её для соответствующих вероятностных моделей.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием «схема Бернулли», применять её для соответствующих вероятностных моделей.

Основные понятия

Вероятностная модель, схема Бернулли.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	36.1, 36.3, 36.5, 36.7	36.17		36.2, 36.4, 36.6, 36.8
Урок 2	36.9, 36.10, 36.12, 36.14, 36.15	36.18	Самостоятельная работа № 36: № 1, 2, 3	36.11, 36.13, 36.16

Методические комментарии

Понятие о схеме Бернулли вводится на интуитивно понятном примере с попаданием мяча в баскетбольную корзину. При его рассмотрении следует подчеркнуть, что все испытания (т. е. броски, которые выполняет баскетболист) равновероятны (вероятность попадания в корзину от броска к броску не меняется). Исходов у каждого испытания может быть только два, поэтому один из них можно назвать «желаемым» (в данном примере — попадание мяча в корзину) и определить для него вероятность, которая для всех испытаний постоянна. Именно это даёт основания в качестве параметров, описывающих схему, брать только два параметра:

- параметр n — количество повторений испытаний (в данном примере — бросков),
- параметр p — вероятность желаемого результата в каждом испытании (в данном примере — попадания мяча в корзину).

Схему Бернулли можно использовать в том случае, когда опыт сформирован из равновероятных независимых испытаний таким образом, что его можно описать с помощью параметров n и p.

Когда мы ищем вероятность получения m удачных исходов с помощью схемы Бернулли, из n испытаний, то $n - m$ испытаний будут неуспешными. Тогда у учащихся возникнет соблазн просто перемножить вероятности этих испытаний, взяв соответственно m множителей, равных p, и $(n - m)$ множителей, равных $(1 - p)$. Следует уделить особое внимание тому, почему этот подход не даёт нужного результата, а для получения правильного результата при выводе формулы вычисления вероятности в схеме Бернулли используется множитель C_n^m.

Важно подчеркнуть, что схема Бернулли применима для многих задач, внешне не похожих друг на друга. Распознать нужную вероятностную модель поможет опыт, приобретаемый в ходе решения упражнений.

Комментарии к упражнениям

№ 36.5—36.16. Выражение, записанное в ответе, может служить подсказкой к решению.

§ 37. Случайные величины

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями случайной величины, распределения вероятностей случайной величины.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в окружающей жизни.

Планируемые результаты — Учащийся научится оперировать понятиями случайной величины, распределения вероятностей случайной величины.

Основные понятия — Случайная величина, множество значений случайной величины, дискретная случайная величина, распределение вероятностей случайной величины, равномерное распределение случайной величины, биноминальное распределение, распределение Бернулли, геометрическое распределение, случайная величина, независимая случайная величина.

	Задания для формирования предметных результатов	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	37.1, 37.2, 37.4, 37.5	37.14		37.3, 37.6
Урок 2	37.7, 37.9, 37.10, 37.12	37.15	Самостоятельная работа № 37: № 1, 2, 3	37.8, 37.11, 37.13

Методические комментарии

Учащиеся знакомы со многими переменными величинами. Изучили целый ряд закономерностей их изменений. Случайная величина — это объект иного рода. Её значение заранее предсказать нельзя. Учащиеся должны понимать, в чём заключается принципиальное отличие случайной величины от переменной величины, изменение которой подчиняется определённой закономерности.

Учащиеся должны понимать, каким образом формируется множество значений случайной величины и как записывается соответствующее распределение вероятностей случайной величины. Следует отдельно обратить внимание на то, что существуют случайные величины с бесконечным множеством значений (однако задачи с такими случайными величинами учащимся не предлагаются).

Основными навыками, которые должны приобрести учащиеся для работы со случайными величинами, является составление множества значений случайной величины, распределения вероятностей, а также умение предоставить эту информацию в графическом виде и произвести на основании этих данных оценку исследуемой ситуации.

Изложение теоретического материала сопровождается примерами, причём происходит переход от «игровых», с точки зрения учащихся, примеров с бросанием монеток к примерам, содержащим описание реальных событий и принятия экономических решений. Следует обязательно разобрать с учащимися эти примеры, а также добиться осознанного решения учащимися задач этого параграфа с сюжетами из реальной жизни. Учащиеся должны прийти к выводу, когда целесообразно применять аппарат анализа случайных величин для принятия тех или иных решений в производственной и хозяйственной деятельности.

Комментарии к упражнениям

№ 37.7, 37.8. Эти задачи аналогичны примеру 2, разобранному в параграфе.

§ 38. Характеристики случайной величины. Представления о законе больших чисел

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение использовать соответствующий математический аппарат для анализа и оценки случайных величин. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится использовать соответствующий математический аппарат для анализа и оценки случайных величин.
Основные понятия	Математическое ожидание случайной величины, дисперсия случайной величины, стандартное отклонение случайной величины, закон больших чисел.

	Задания для формирования предметных результатов	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	38.1, 38.3, 38.5	38.11		38.2, 38.4
Урок 2	38.6, 38.8, 38.10	38.12	Самостоятельная работа № 38: № 1, 2, 3	38.7, 38.9

Методические комментарии

В качестве одного из инструментов оценки случайной величины вводится понятие математического ожидания. Желательно, чтобы учащиеся поняли, что математическое ожидание играет роль среднего значения величины в опытах, где значение числового результата носит вероятностный характер.

В параграфе введение математического ожидания носит неформальный характер. Оно достаточно мотивировано соответствующими примерами реальных ситуаций: оценка возможной прибыли фирмы, стоимость страхового полиса. Здесь важно, чтобы работа со случайными величинами и их характеристиками не сводилась к формальному заполнению соответствующих таблиц.

Далее в параграфе рассматриваются основные свойства математического ожидания. Свойство математического ожидания суммы случайных величин вводится на примере, соответствующему жизненному опыту. Поэтому рассматриваемое свойство воспринимается естественно.

В параграфе на конкретных примерах даётся представление о законе больших чисел, разъясняется упрощённый смысл этого закона.

После этого в параграфе делается более содержательная с математической точки зрения попытка рассказать о теореме, входящей в цикл теорем о законе больших чисел. Наиболее подходящим для таких рассуждений является опыт, описываемый схемой Бернулли. В конце параграфа сформулирована соответствующая теорема. Она воспринимается непросто, хотя её формулировка подготовлена соответствующими примерами. Не следует требовать от всех учащихся глубокого понимания этой теоремы.

Комментарии к упражнениям

№ 38.8. Составьте с помощью схемы Бернулли таблицу распределения вероятностей случайной величины, для которой множество $\{0, 1, 2, 3\}$ является множеством её значений.

Контрольная работа № 7

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Функция

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{7}{x^2-16}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x-1}$ на промежутке $[2; 5]$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = 2x^3 - x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2}$;

3) $f(x) = |x-3| + |x+3|$.

4. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток убывания функции;

3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

5. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x-3}$;

2) $y = \sqrt{2x-3}$;

3) $y = \sqrt{2|x|-3}$.

6. Решите уравнение $x^3 + \sqrt{3x-2} = 2$.

7. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a + 8 = 0$ будет наименьшим?

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{2}{x^2-9}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x-3}$ на промежутке $[3; 4]$.

3. Исследуйте на чётность функцию:
   1) $f(x) = 3x^4 + 1$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$;
   3) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$.
4. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Используя график, найдите:
   1) область значений функции;
   2) промежуток возрастания функции;
   3) множество решений неравенства $f(x) < 0$.
5. Постройте график функции:
   1) $y = \sqrt{x - 5}$;
   2) $y = \sqrt{2x - 5}$;
   3) $y = \sqrt{2|x| - 5}$.
6. Решите уравнение $x^3 + 2\sqrt{x - 1} = 10$.
7. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + 2ax + a^2 - 2a + 10 = 0$ будет наименьшим?

Вариант 3

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x - 3} + \dfrac{4}{x^2 - 25}$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x - 2}$ на промежутке [3; 6].
3. Исследуйте на чётность функцию:
   1) $f(x) = 3x^5 + 4x$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 1}$;
   3) $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$.
4. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Используя график, найдите:
   1) область значений функции;
   2) промежуток убывания функции;
   3) множество решений неравенства $f(x) < 0$.
5. Постройте график функции:
   1) $y = \sqrt{x - 4}$;
   2) $y = \sqrt{3x - 4}$;
   3) $y = \sqrt{3|x| - 4}$.

6. Решите уравнение $x^3 + 3\sqrt{x+4} = 6$.

7. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 6ax + 9a^2 - 6a + 18 = 0$ будет наименьшим?

Вариант 4

1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{8}{x^2 - 36}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x-5}$ на промежутке $[5; 9]$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = 2x^6 - 3$;

2) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x+1}$;

3) $f(x) = |x+4| - |x-4|$.

4. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 8x + 7$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток возрастания функции;

3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

5. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x-2}$;

2) $y = \sqrt{5x-2}$;

3) $y = \sqrt{5|x| - 2}$.

6. Решите уравнение $x^3 + \sqrt{2x-3} = 9$.

7. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + 4ax + 4a^2 - 4a + 6 = 0$ будет наименьшим?

Контрольная работа № 2

Тема. Квадратная функция.
Решение квадратных неравенств.
Решение неравенств методом интервалов

Вариант 1

1. Решите неравенство:
1) $x^2 + 5x > 0$;
2) $6x^2 - 7x + 1 \leqslant 0$;
3) $4x^2 + 12x + 9 > 0$;
4) $3x^2 - x + 5 \geqslant 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{8 + 2x - x^2}}{x^2 - 9}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 20 \leqslant 0, \\ |x| > 1. \end{cases}$

4. Решите неравенство:
1) $(x - 2)(x + 6)(x - 4) > 0$;
2) $(3 - x)(x - 4)(x - 9)^2 \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{13}{x^2 - 2x} \leqslant 0$.

5. Решите неравенство:
1) $|x^2 - x - 1| < 2x - 1$;
2) $|x^2 + 4x - 7| > 1 - 3x$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 + (4 + 2a)x + 8a}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Решите неравенство:
1) $x^2 - 7x < 0$;
2) $3x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$;
3) $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$;
4) $2x^2 - x + 7 \geqslant 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{7 + 6x - x^2}}{x^2 - 36}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0, \\ |x| \geqslant 2. \end{cases}$

4. Решите неравенство:

1) $(x + 2)(x - 8)(x + 5) > 0$;

2) $(x + 2)^2(x - 3)(4 - x) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} \geqslant 0$.

5. Решите неравенство:

1) $|x^2 - 6x - 2| < 3x - 2$;

2) $|x^2 - 3x + 1| > 2x - 3$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 - (7 - 3a)x - 21a}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 3

1. Решите неравенство:

1) $x^2 + 9x > 0$;

2) $4x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$;

3) $16x^2 + 24x + 9 > 0$;

4) $3x^2 - x + 4 \geqslant 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{12 + 4x - x^2}}{x^2 - 25}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + x - 12 \leqslant 0, \\ |x| \geqslant 1. \end{cases}$

4. Решите неравенство:

1) $(x + 7)(x - 1)(x + 8) < 0$;

2) $(x - 1)^2(5 - x)(x - 6) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{22}{x^2 - 4x} \leqslant 0$.

5. Решите неравенство:

1) $|x^2 - 2x - 1| < 3x - 1$;

2) $|x^2 + x - 5| > 2x + 1$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 - (2a - 5)x - 10a}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 4

1. Решите неравенство:

1) $x^2 - 8x < 0$;

2) $5x^2 - 6x + 1 \geqslant 0$;

3) $9x^2 + 24x + 16 \leqslant 0$;

4) $3x^2 - x + 5 \geqslant 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{15 + 2x - x^2}}{x^2 - 16}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + x - 42 < 0, \\ |x| \geqslant 4. \end{cases}$

4. Решите неравенство:

1) $(x + 2)(x - 8)(x + 5) > 0$;

2) $(x + 5)^2(x - 6)(8 - x) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x + 5} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{11}{x^2 + 5x} \geqslant 0$.

5. Решите неравенство:

1) $|x^2 - 3x - 3| < 2x - 3$;

2) $|x^2 - 4x + 2| > 8 - 3x$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 - (4a - 3)x - 12a}{\sqrt{x^2 - x - 6}} = 0$ имеет единственное решение?

Контрольная работа № 3

Тема. Уравнения с двумя переменными и их системы

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^2 + 2 = \sqrt{4 - y^2}$.

2. Постройте график уравнения $|x - 2| = |y + 4|$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 5y = 3, \\ xy + 3y = 11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 1)(y + 3)^2 = -16, \\ (x + 1)^2(y + 3) = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 3xy = -2, \\ y^2 - 3xy = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 7, \\ x^2 + y^2 + x + y - 2xy = 8. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 4, \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Решите уравнение $y^2 + 3 = \sqrt{9 - x^2}$.

2. Постройте график уравнения $|x + 5| = |y - 1|$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 4y + xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 2)(y + 1)^2 = 25, \\ (x - 2)^2(y + 1) = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 3, \\ y^2 - 7xy = -6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 + y^2 + x + y - xy = 6. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4, \\ |x| + |y| = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант 3

1. Решите уравнение $2 - x^2 = \sqrt{4 + y^2}$.
2. Постройте график уравнения $|x - 1| = |y + 5|$.
3. Решите систему уравнений:

   1) $\begin{cases} y + 2x = 5, \\ 2x - xy = -1; \end{cases}$

   2) $\begin{cases} (x+4)(y-1)^2 = 9, \\ (x+4)^2(y-1) = 3; \end{cases}$

   3) $\begin{cases} x^2 + 4xy = -3, \\ y^2 - 5xy = 6; \end{cases}$

   4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - xy = 3, \\ x^2 + y^2 + x + y - 2xy = 12. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 1, \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант 4

1. Решите уравнение $3 - y^2 = \sqrt{9 + x^2}$.
2. Постройте график уравнения $|x + 2| = |y - 4|$.
3. Решите систему уравнений:

   1) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ xy + 3x = 2; \end{cases}$

   2) $\begin{cases} (x-3)(y+2)^2 = -100, \\ (x-3)^2(y+2) = 10; \end{cases}$

   3) $\begin{cases} x^2 - 9xy = -8, \\ 3xy + y^2 = 4; \end{cases}$

   4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 7. \end{cases}$

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 1, \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Контрольная работа № 4

Тема. Неравенства с двумя переменными и их системы. Доказательство неравенств

Вариант 1

1. Изобразите график неравенства:
1) $2x - 3y \leqslant 6$;
2) $y > x^2 - 2x + 1$.

2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:
1) $\begin{cases} x < 3, \\ y > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 2, \\ y^2 < x. \end{cases}$

3. Докажите неравенство
$x^2 - 6xy + 10y^2 + 4y + 4 \geqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 2.

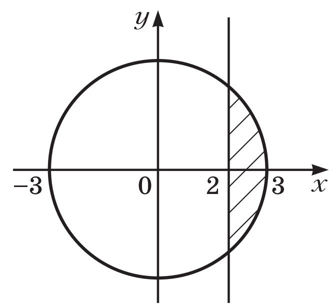

Рис. 2

5. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то
$\left(a^3 + \frac{2}{b}\right)\left(b^3 + \frac{2}{a}\right) \geqslant 8ab$.

6. Известно, что $x > 0$ и $xy = 20$. Найдите наименьшее значение выражения $x + 5y$.

7. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + a^2 \leqslant 1, \\ x - a \geqslant 1 \end{cases}$ имеет решение?

8. Числа a и b таковы, что $x + y = 1$. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - y}$.

Вариант 2

1. Изобразите график неравенства:
1) $2x + 5y \geqslant -10$;
2) $y < x^2 + 4x + 4$.

2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:
1) $\begin{cases} x > 3, \\ y < -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -2, \\ x < -y^2. \end{cases}$

3. Докажите неравенство
$x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4 \geqslant 0.$
4. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 3.
5. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\left(a^3 + \frac{3}{b}\right)\left(b^3 + \frac{3}{a}\right) \geqslant 12ab.$
6. Известно, что $x > 0$ и $xy = 28$. Найдите наименьшее значение выражения $x + 7y$.
7. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + a^2 \leqslant 4, \\ x - a \leqslant -2 \end{cases}$ имеет решение?

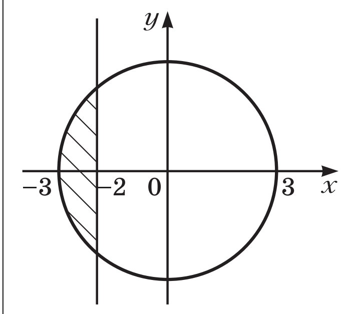

Рис. 3

8. Числа a и b таковы, что $x + y = 2$. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{3 - x} + \sqrt{7 - y}$.

Вариант 3

1. Изобразите график неравенства:
1) $3x + 2y \leqslant -6$; 2) $y > x^2 - 4x + 4$.
2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:
1) $\begin{cases} y > -1, \\ x < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 3, \\ y^2 < x. \end{cases}$
3. Докажите неравенство
$x^2 - 4xy + 5y^2 + 6y + 9 \geqslant 0.$
4. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 4.
5. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\left(2a^3 + \frac{1}{b}\right)\left(2b^3 + \frac{1}{a}\right) \geqslant 8ab.$
6. Известно, что $x > 0$ и $xy = 18$. Найдите наименьшее значение выражения $2x + y$.
7. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + a^2 \leqslant 1, \\ x + a \leqslant -1 \end{cases}$ имеет решение?

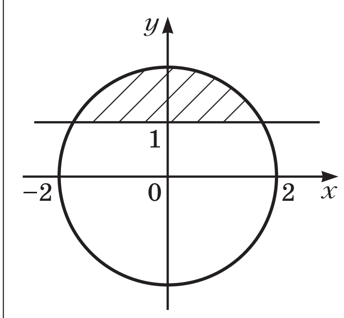

Рис. 4

8. Числа a и b таковы, что $x + y = 7$. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - y}$.

Вариант 4

1. Изобразите график неравенства:

1) $5x + 2y \geqslant 10$; 2) $y < x^2 + 2x + 1$.

2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} y > -3, \\ x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -3, \\ x < -y^2. \end{cases}$

3. Докажите неравенство

$x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 9 \geqslant 0$.

4. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 5.

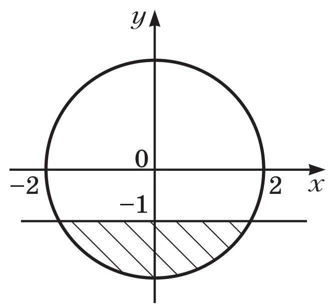

Рис. 5

5. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$\left(3a^3 + \frac{1}{b}\right)\left(3b^3 + \frac{1}{a}\right) \geqslant 12ab$.

6. Известно, что $x > 0$ и $xy = 45$. Найдите наименьшее значение выражения $5x + y$.

7. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + a^2 \leqslant 4, \\ x + a \geqslant 2 \end{cases}$ имеет решение?

8. Числа a и b таковы, что $x + y = 3$. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{2 - x} + \sqrt{9 - y}$.

Контрольная работа № 5

Тема. Степенная функция

Вариант 1

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{16}$. Сравните:

1) $f(5{,}6)$ и $f(2{,}4)$;
2) $f(-2{,}8)$ и $f(-7{,}3)$;
3) $f(4{,}5)$ и $f(-4{,}5)$;
4) $f(0{,}3)$ и $f(-0{,}8)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{625}$;
2) $\sqrt[3]{27 \cdot 0{,}008}$;
3) $\sqrt[4]{2^{12} \cdot 5^8}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^5 = 6$;
2) $x^4 = 16$;
3) $x^5 = -243$;
4) $x^4 = -81$;
5) $\sqrt[3]{x} = 2$;
6) $\sqrt[4]{x} = -1$.

4. Найдите функцию, обратную функции $y = \dfrac{2}{3x - 5}$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[18]{a^3}$;
2) $\sqrt[3]{m^2 \sqrt[4]{m}}$;
3) $\sqrt[8]{a^8}$, если $a \geqslant 0$;
4) $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, если $a \leqslant 1$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m - 3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} - 3}$;
2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}}$;
3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$.

7. Постройте график функции $y = \left((x+4)^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{8}{\sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[4]{x} - 1} - \dfrac{\sqrt[4]{x} + 3}{\sqrt[4]{x} + 1}\right) : \dfrac{3}{\sqrt{x} - 1}$.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{18}$. Сравните:

1) $f(3{,}6)$ и $f(1{,}8)$;
2) $f(-1{,}7)$ и $f(-2{,}5)$;
3) $f(-5{,}4)$ и $f(5{,}4)$;
4) $f(0{,}9)$ и $f(-0{,}2)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $5\sqrt[4]{16} - 2\sqrt[3]{-216} - \sqrt[6]{64}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 256}$;

3) $\sqrt[6]{3^{12} \cdot 2^{18}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^7 = 10$;
3) $x^3 = -216$;
5) $\sqrt[5]{x} = 1$;

2) $x^6 = 64$;
4) $x^4 = -16$;
6) $\sqrt[6]{x} = -3$.

4. Найдите функцию, обратную функции $y = \dfrac{3}{2x+7}$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[28]{a^7}$;

2) $\sqrt[5]{b^3\sqrt[4]{b^3}}$;

3) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m \leqslant 0$;

4) $\sqrt[10]{(x-2)^{10}}$, если $x \geqslant 2$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x + 7x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{5}} + 7}$;
2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}$;
3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}} + 3m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + 6m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}} + 9n^{\frac{1}{2}}}$.

7. Постройте график функции $y = \left((x+5)^{\frac{1}{6}}\right)^6$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+6}{\sqrt[6]{x}+2} - \dfrac{\sqrt[6]{x}+2}{\sqrt[6]{x}-2} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}-4}\right) : \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Вариант 3

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:

1) $f(2{,}4)$ и $f(3{,}6)$;

2) $f(-2{,}5)$ и $f(-3{,}1)$;

3) $f(-4{,}7)$ и $f(4{,}7)$;

4) $f(0{,}8)$ и $f(-0{,}6)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{256} - 3\sqrt[3]{-125}$;

2) $\sqrt[4]{625 \cdot 0{,}0016}$;

3) $\sqrt[8]{5^{24} \cdot 2^{16}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{729}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^9 = 11$;
3) $x^3 = -125$;
5) $\sqrt[3]{x} = 5$;

2) $x^4 = 81$;
4) $x^6 = -64$;
6) $\sqrt[4]{x} = -2$.

4. Найдите функцию, обратную функции $y = \dfrac{2}{3-5x}$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[35]{x^5}$;

2) $\sqrt[7]{a^4\sqrt[3]{a^2}}$;

3) $\sqrt[10]{c^{10}}$, если $c \geqslant 0$;

4) $\sqrt[12]{(y-7)^{12}}$, если $y \leqslant 7$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-11a^{\frac{4}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}-11}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{10}}+y^{\frac{1}{10}}}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}}$.

7. Постройте график функции $y=\left((x+3)^{\frac{1}{4}}\right)^4$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[8]{x}+12}{\sqrt[8]{x}+4}-\dfrac{\sqrt[8]{x}+4}{\sqrt[8]{x}-4}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}-16}\right):\dfrac{15}{\sqrt[4]{x}-16}$.

Вариант 4

1. Функция задана формулой $f(x)=x^{22}$. Сравните:

1) $f(7{,}7)$ и $f(2{,}9)$; 3) $f(-6{,}2)$ и $f(6{,}2)$;

2) $f(-1{,}9)$ и $f(-2{,}4)$; 4) $f(-0{,}1)$ и $f(0{,}6)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[6]{64}-\sqrt[4]{625}-5\sqrt[3]{-27}$; 3) $\sqrt[10]{5^{20}\cdot 2^{30}}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}216\cdot 8}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$.

3. Решите уравнение:

1) $x^{11}=5$; 3) $x^7=-128$; 5) $\sqrt[9]{x}=-1$;

2) $x^4=625$; 4) $x^6=-64$; 6) $\sqrt[4]{x}=-4$.

4. Найдите функцию, обратную функции $y=\dfrac{3}{4-3x}$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[36]{b^9}$; 3) $\sqrt[12]{z^{12}}$, если $z\leqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a}}$; 4) $\sqrt[8]{(x+3)^8}$, если $x\geqslant -3$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{b+10b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{5}{9}}+11}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}}$; 3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{12}}+4x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}+8x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{12}}+16y^{\frac{1}{6}}}$.

7. Постройте график функции $y=\left((x+1)^{\frac{1}{5}}\right)^5$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[10]{x}+3}{\sqrt[10]{x}-3}-\dfrac{\sqrt[10]{x}+9}{\sqrt[10]{x}+3}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}-9}\right):\dfrac{8}{\sqrt[5]{x}-9}$.

Контрольная работа № 6

Тема. Числовые последовательности

Вариант 1

1. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 6n + 3$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 159; 2) 247? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
2. Первый и четвёртый члены геометрической прогрессии соответственно равны 2 и –54. Найдите сумму семи членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 7, которые больше 100 и меньше 200.
4. При каком значении x значения выражений $2x - 1$, $x + 3$ и $x + 15$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 3, а сумма трёх её первых членов равна $\frac{8}{9}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.
6. Найдите сумму двадцати трёх первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_{11} + a_{14} + a_{17} = 10$.
7. Найдите сумму $8 + 88 + 888 + \ldots + \underbrace{888\ldots8}_{n}$.

Вариант 2

1. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 8n - 5$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 167; 2) 251? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
2. Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 4 и –128. Найдите сумму восьми членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5, которые больше 150 и меньше 250.
4. При каком значении x значения выражений $3x - 2$, $x + 2$ и $x + 8$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма пяти её первых членов равна $3\frac{7}{8}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.
6. Найдите сумму двадцати восьми первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_8 + a_{12} + a_{17} + a_{21} = 6$.
7. Найдите сумму $6 + 66 + 666 + \ldots + \underbrace{666\ldots6}_{n}$.

Вариант 3

1. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 9n + 4$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 157; 2) 271? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
2. Первый и четвёртый члены геометрической прогрессии соответственно равны 4 и -108. Найдите сумму семи членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9, которые больше 120 и меньше 210.
4. При каком значении x значения выражений $x - 3$, $x + 4$ и $2x - 40$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна -6, а сумма трёх её первых членов равна $-6\frac{2}{9}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.
6. Найдите сумму девятнадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 + a_9 + a_{11} + a_{15} = 8$.
7. Найдите сумму $4 + 44 + 444 + \ldots + \underbrace{444\ldots4}_{n}$.

Вариант 4

1. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 7n - 6$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 177; 2) 218? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
2. Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 3 и -729. Найдите сумму восьми членов этой прогрессии.
3. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 11, которые больше 100 и меньше 180.
4. При каком значении x значения выражений $x - 7$, $x + 5$ и $3x + 1$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна -4, а сумма пяти её первых членов равна $-4\frac{1}{8}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.
6. Найдите сумму шестнадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 + a_7 + a_{10} + a_{12} = 12$.
7. Найдите сумму $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{n}$.

Контрольная работа № 7

Тема. Элементы статистики и теории вероятностей

Вариант 1

1. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных: 7, 6, 3, 8, 3, 2.
2. Каждый из 60 учащихся спортивной школы посещает или секцию плавания, или секцию спортивной гимнастики, или занятия обеих этих секций. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся посещает только занятия секции плавания, если обе секции посещают 25 учащихся, а только секцию спортивной гимнастики — 40 учащихся.
3. Пусть A и B — события некоторого испытания. Известно, что $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ и $p(A \cup B) = 0{,}5$. Найдите: 1) $p(A \cap B)$; 2) $p_B(A)$.
4. Игральный кубик подбрасывают четыре раза. Какова вероятность того, что двойка выпадет: 1) только при первом, втором и четвёртом подбрасываниях; 2) ровно три раза?
5. Около прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см описана окружность. В круге, ограниченном этой окружностью, наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит данному треугольнику?
6. Распределение вероятностей случайной величины x задано таблицей, в которой пропущено одно значение.

Значение x	6	8	12
Вероятность	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	

Найдите: 1) $p(x = 12)$; 2) математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Вариант 2

1. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных: 4, 10, 15, 5, 10, 7.
2. Каждый из 50 учащихся спортивной школы посещает или секцию биатлона, или секцию лёгкой атлетики, или занятия обеих этих секций. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся по-

сещает только занятия секции биатлона, если обе секции посещают 15 учащихся, а только секцию лёгкой атлетики — 35 учащихся.

3. Пусть A и B — события некоторого испытания. Известно, что $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}36$ и $p(A \cup B) = 0{,}7$. Найдите: 1) $p(A \cap B)$; 2) $p_A(B)$.
4. Игральный кубик подбрасывают пять раз. Какова вероятность того, что четвёрка выпадет: 1) только при третьем и пятом подбрасываниях; 2) ровно два раза?
5. Около прямоугольного треугольника с катетами 8 см и 15 см описана окружность. В круге, ограниченном этой окружностью, наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит данному треугольнику?
6. Распределение вероятностей случайной величины x задано таблицей, в которой пропущено одно значение.

Значение x	10	16	40
Вероятность	$\frac{2}{5}$		$\frac{7}{20}$

Найдите: 1) $p(x = 16)$; 2) математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Вариант 3

1. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных: 1, 8, 11, 12, 16, 8.
2. Каждый из 70 учащихся спортивной школы посещает или секцию биатлона, или секцию конькобежного спорта, или занятия обеих этих секций. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся посещает только занятия секции биатлона, если обе секции посещают 20 учащихся, а только секцию конькобежного спорта — 50 учащихся.
3. Пусть A и B — события некоторого испытания. Известно, что $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}7$ и $p(A \cup B) = 0{,}6$. Найдите: 1) $p(A \cap B)$; 2) $p_B(A)$.
4. Игральный кубик подбрасывают четыре раза. Какова вероятность того, что единица выпадет: 1) только при втором и четвёртом подбрасываниях; 2) ровно два раза?
5. В прямоугольном треугольнике с катетами 5 см и 12 см наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит кругу, ограниченному вписанной окружностью данного треугольника?

6. Распределение вероятностей случайной величины x задано таблицей, в которой пропущено одно значение.

Значение x	15	20	24
Вероятность		$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

Найдите: 1) $p(x = 15)$; 2) математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Вариант 4

1. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных: 10, 5, 13, 5, 21, 17.

2. Каждый из 80 учащихся спортивной школы посещает или секцию тенниса, или секцию лёгкой атлетики, или занятия обеих этих секций. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся посещает только занятия секции тенниса, если обе секции посещают 10 учащихся, а только лёгкой атлетики спорта — 45 учащихся.

3. Пусть A и B — события некоторого испытания. Известно, что $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$ и $p(A \cup B) = 0,8$. Найдите: 1) $p(A \cap B)$; 2) $p_A(B)$.

4. Игральный кубик подбрасывают пять раз. Какова вероятность того, что шестёрка выпадет: 1) только при первом, втором и четвёртом подбрасываниях; 2) ровно три раза?

5. В прямоугольном треугольнике с катетами 6 см и 8 см наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит кругу, ограниченному вписанной окружностью данного треугольника?

6. Распределение вероятностей случайной величины x задано таблицей, в которой пропущено одно значение.

Значение x	12	18	24
Вероятность	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$

Найдите: 1) $p(x = 18)$; 2) математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

Итоговая контрольная работа

Тема. Повторение и систематизация учебного материала

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Пользуясь графиком, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток убывания функции;
3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 1{,}5. \end{cases}$

4. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, если её третий член равен –5, а шестой равен 2,5.

5. На четырёх карточках записаны числа 3, 4, 5 и 6. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, будет кратным числу 10?

6. Две бригады, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 6 ч. Если первая бригада проработает самостоятельно 2 ч, а потом вторая бригада проработает 3 ч, то будет выполнено $\dfrac{2}{5}$ задания. За сколько часов каждая бригада может выполнить данное производственное задание самостоятельно?

7. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 3)x^2 + (2a + 6)x + 1 = 0$ не имеет корней?

8. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $(a + 2)(b + 8)\left(4{,}5 + \dfrac{8}{ab}\right) \geqslant 192$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Пользуясь графиком, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции;
3) множество решений неравенства $f(x) < 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 7x - 8}{x^2 + 6x - 7}}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 3\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4. Найдите сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии, если её четвёртый член равен 2,6, а шестой равен 1,2.

5. На четырёх карточках записаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, будет чётным числом?

6. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 14 ч. Если первый тракторист проработает самостоятельно 7 ч, а потом второй тракторист проработает 14 ч, то будет вспахано $\dfrac{2}{3}$ поля. За сколько часов каждый тракторист может вспахать это поле самостоятельно?

7. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2 + (2a-4)x + 1 = 0$ имеет корни?

8. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $(a+18)(b+2)\left(2{,}25 + \dfrac{4}{ab}\right) \geqslant 144$.

Вариант 3

1. Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Пользуясь графиком, найдите:
   1) область значений функции;
   2) промежуток убывания функции;
   3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 10}}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

4. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если её третий член равен 9, а восьмой равен 24.

5. На четырёх карточках записаны числа 2, 5, 6 и 10. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, будет кратным числу 4?

6. Двое маляров, работая вместе, могут покрасить фасад школы за 12 ч. Если первый маляр проработает самостоятельно 5 ч, а потом второй маляр проработает 4 ч, то будет покрашено $\dfrac{11}{30}$ фасада. За сколько часов каждый маляр может покрасить фасад школы самостоятельно?

7. При каких значениях параметра a уравнение $(a+5)x^2+(2a+10)x+1=$ $=0$ не имеет корней?

8. Докажите, что если $a>0$ и $b>0$, то $(a+3)(b+27)\left(3{,}2+\dfrac{5}{ab}\right)\geqslant 288$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $f(x)=-x^2-4x+5$. Пользуясь графиком, найдите:
   1) область значений функции;
   2) промежуток возрастания функции;
   3) множество решений неравенства $f(x)<0$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}}$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5. \end{cases}$
4. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, если её третий член равен 54, а пятый равен 6.
5. На четырёх карточках записаны числа 3, 6, 9 и 14. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, не будет кратным числу 9?
6. Если открыть одновременно две трубы, то бассейн будет наполнен водой за 8 ч. Если сначала наполнять бассейн только через одну трубу в течение 12 ч, а потом только через другую в течение 3 ч, то водой будет наполнено $\dfrac{3}{4}$ бассейна. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба самостоятельно?
7. При каких значениях параметра a уравнение $(a-4)x^2+(2a-8)x+1=$ $=0$ имеет корни?
8. Докажите, что если $a>0$ и $b>0$, то $(a+2)(b+32)\left(12{,}5+\dfrac{2}{ab}\right)\geqslant 320$.

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Стандарта является оценка образовательных достижений учащихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по алгебре направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным объектом оценки **личностных результатов** служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность основ *гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации*, в том числе готовность к *выбору направления профильного образования*;

3) сформированность *социальных компетенций*, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным объектом оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по алгебре, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и вне учебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным объектом оценки **предметных результатов** по алгебре в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по алгебре являются: *стартовое, текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить: уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности учащихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля.

Методы контроля в учебном процессе по алгебре

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест • Зачёт	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения учащимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по алгебре, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по алгебре;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Одним из современных методов оценивания, рекомендуемых для использования в классах с углублённым изучением математики, является рейтинговая система.

При использовании рейтинговой системы оценки учителю необходимо определить виды учебной деятельности, которые подлежат проверке по каждой теме курса, и максимальное количество баллов по каждому виду деятельности. Общее количество баллов определяется по каждому разделу курса в зависимости от количества часов, отведённых на её изучение, а также от объёма выполняемых задач. Данная система оценивания позволяет применять обязательные и дополнительные баллы. Обязательными баллами оцениваются результаты текущего и итогового контроля. Результаты выполнения творческих работ, учебных проектов и исследований, участие в олимпиадах можно оценивать дополнительными баллами.

Например, можно использовать рейтинговую 50-балльную шкалу.

Вид учебной деятельности	**Максимальное количество баллов**
Ответы на уроке	5
Индивидуальная работа	10
Проверочная работа	15
Домашняя работа	10
Зачётная работа	15
Контрольная работа	20
Творческая работа	25
Участие в олимпиадах	30
Проектная работа	50
Исследовательская работа	50

Шкала перевода рейтинговых баллов в 5-балльную систему оценивания.

Рейтинговый балл, % от общей суммы баллов	**Оценка**
85—100	5
70—84	4
55—69	3
< 55	2

Рейтинговая система позволяет:

- определить уровень подготовки учащихся по алгебре на любом этапе учебного процесса;
- контролировать индивидуальную работу учащихся на уроке и во внеурочной деятельности;
- наиболее объективно оценивать знания учащихся;
- стимулировать развитие познавательного интереса к предмету;
- развивать математическую компетенцию;
- создать условия, учитывающие индивидуальные способности учащихся, для успешной реализации целей обучения.

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность учащихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении алгебре использовать средства ИКТ можно:

- на уроках алгебры;
- во внеурочной деятельности;
- в учебно-исследовательской и проектной деятельности;
- при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока алгебры, учитель может использовать следующие средства ИКТ: мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур, готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.). В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока (приложение), на котором используются ИКТ.

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.

Использование средств ИКТ при обучении алгебре способствует:

- повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса;
- расширению возможностей использования источников информации;
- созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения;
- повышению эффективности анализа результатов обучения.

Применение средств ИКТ в обучении алгебре формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

- использовать калькулятор для вычислений;

• осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;

• создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;

• создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;

• создавать графические объекты;

• осуществлять поиск информации в Интернете;

• соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Технологическая карта урока № ___

Тема урока ______________________________

Тип урока ______________________________

Формируемые результаты
Предметные: ______________________________
Личностные: ______________________________
Метапредметные: ______________________________

Планируемые результаты ______________________________
____

Основные понятия ______________________________
____

Средства ИКТ, используемые на уроке ______________________________
____
____

Программное обеспечение ______________________________
____

Образовательные интернет-ресурсы ______________________________
____
____

Организационная структура урока

Этапы проведения урока	Форма организации УД	Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов			Средства ИКТ
		Учебник	Рабочая тетрадь	Дидактические материалы	
1. Организационный этап					
2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся					
3. Актуализация знаний					
4. Изучение нового материала					
5. Первичное закрепление нового материала					
6. Итоги урока					
7. Информация о домашнем задании					

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную, творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, учащиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках алгебры направлена:

- на повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;
- развитие коммуникативных умений;
- формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;
- формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по алгебре учащийся научится:

- анализировать фрагменты работ учёных-математиков;
- описывать историю математических открытий;
- оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;
- представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;
- рассматривать практические приложения математических знаний;
- применять математические знания в быту и в технике;
- анализировать связь алгебры с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует определять, прежде всего, качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектировать учебную деятельность. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации и проведения
учебно-исследовательской и проектной деятельности

Название проекта ______________________

Цели проекта ______________________

Планируемые результаты

Предметные: ______________________

Личностные: ______________________

Метапредметные: ______________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта ______________________

Виды деятельности учащихся ______________________

____

Форма организации ______________________

Продолжительность выполнения ______________________

____

Результат (продукт) деятельности ______________________

____

Технологическая карта проекта

Этап	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: метод опроса, наблюдение,	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует.

Окончание

Этап	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
	изучение документации и т. д.		Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельности детей

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа ______________________________

Параметры	**Само-оценка**[1]	**Взаимо-оценка**[1]	**Оценка учителя**[1]	**Средний балл**
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
Итоговый балл				

[1] Оценивается по 5-балльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцениваете взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание