

**Ответы к учебному пособию И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко
«Математика. Универсальный многоуровневый сборник задач.
7—9 классы. В трёх частях. Часть 3. Статистика.
Вероятность. Комбинаторика. Практические задачи»**

Глава 1. Логика

1.1. Высказывания

Уровень А

- A1.** а) Нет, например 0; б) да, например 6. **A2.** а) Да, например 8,7; б) нет.
A3. а) 3, 4; б) 1, 2, 3, 4. **A4.** а) 4, 5, 6; б) –2, –1, 0, 1, 2.
A5. а) Неравносторонний равнобедренный треугольник и высота, проведённая к его боковой стороне; б) например, два соседних угла в квадрате. **A6.** а) Равнобедренный треугольник и медиана, проведённая к его боковой стороне; б) подобные неравные треугольники. **A7.** а) А, В, F; б) А, С, D, E. **A8.** а) А истинно; б) А и С истинны. **A9.** а) 1 и 3; б) 2 и 3. **A10.** а) 2 и 3; б) 1 и 3. **A11.** а) 1 и 3; б) 1 и 3. **A12.** а) 2 и 4; б) 1 и 3. **A13.** б) 1 и 3; б) 2 и 4.
A14. а) «Данное число меньше либо равно числу 10»; б) «Данное число больше либо равно числу 18». **A15.** а) «Хотя бы один голландец не живет в Голландии»; б) «Хотя бы в одном городе нет железнодорожного вокзала». **A16.** а) «При бросании игрального кубика выпало не менее 3 очков»; б) «У всех квадратов соседние стороны равны». **A17.** а) «Хотя бы один раз выпало 4 очка»; б) «Хотя бы один раз выпало не 5 очков». **A18.** а) «Орёл выпал хоть раз»; б) «Решка выпала хоть раз». **A19.** а) Да; б) нет. **A20.** а) Нет; б) нет.
A21. а) «Данный треугольник прямоугольный и равнобедренный», да; б) «Данный треугольник либо прямоугольный, либо равнобедренный», да.
A22. а) «Данный треугольник прямоугольный», да; б) «Данный треугольник — любой», нет. **A23.** а) «Данное число простое и чётное», да; б) «Данное число либо простое, либо чётное», да. **A24.** а) «У всякого треугольника найдётся хотя бы одна пара неравных сторон», неверно;

б) «Существует хотя бы один треугольник, у которого никакие два угла не дают в сумме 90° », верно. **A25.** а) 6, «Существует хотя бы одно чётное число, которое не кратно 4», да; б) 15, «Существует хотя бы одно нечётное число, кратное 5», да. **A26.** а) 1, «Существует хотя бы одно число, которое не является ни простым, ни составным», да; б) прямоугольный треугольник с равными катетами, «Существует прямоугольный треугольник, у которого две стороны равны», да. **A27.** а) «Если число делится на 3, то оно делится на 6», нет; б) «Если число не делится на 3, то оно не делится на 6», да. **A28.** а) «Если треугольник равнобедренный, то он равносторонний», нет; б) «Если треугольник не является равнобедренным, то он не равносторонний», да. **A29.** а) «Если треугольник прямоугольный, значит в нём есть прямой угол», да; б) «Если треугольник не прямоугольный, то в нём нет прямого угла», да.

Уровень В

B1. а) 6; б) 23. **B2.** а) В случае, если угол не лежит между двумя сторонами, это утверждение неверно; б) в случае, если сторона не лежит между двумя углами, это утверждение неверно. **B3.** а) 10; б) нет. **B4.** а) «У гриба на шляпке чешуйки, и он ядовитый»; б) «У гриба на шляпке чешуйки, или он ядовитый». **B5.** а) «Нужно менять свечи или бензонасос»; б) «Нужно менять свечи и бензонасос». **B6.** а) «Этот фильм нестрашный или весёлый»; б) «Этот фильм страшный и невесёлый». **B7.** а) Нет; б) да. **B8.** а) Да; б) нет. **B9.** а) «Данное число не делится либо на 3, либо на 5»; б) «Погода сегодня либо не тёплая, либо сухая». **B10.** а) «Сегодня не четверг и не праздничный день»; б) «Данный треугольник не равнобедренный и не прямоугольный». **B11.** а) «Данное число простое или не делится на 3»; б) «Данное число составное и делится на 3». **B12.** а) «Данный треугольник не равнобедренный и не тупоугольный»; б) «Данный треугольник не равнобедренный или не тупоугольный». **B13.** а) Истинно; б) ложно. **B14.** а) 1; б) 1 и 4. **B15.** а) 3; б) 2 и 3.

Уровень С

С1. а) «Данное число не делится на 2 либо на 10, или данное число делится на 20»; б) «Данное число не делится на 20, или данное число делится на 2 и на 10». **С2.** а) «Данный треугольник не является равносторонним, или данный треугольник имеет три острых угла»; б) «Данный треугольник имеет хотя бы один не острый угол или является равносторонним». **С3.** а) «Если два треугольника равны, то их площади равны», истинно; б) «Если два треугольника не равны, то их площади не равны», ложно. **С4.** а) «Если две геометрические фигуры равны, то их площади равны», истинно; б) «Если две геометрические фигуры не равны, то их площади не равны», ложно. **С5.** а) 2 и 3; б) 1 и 4. **С6.** а) 2; б) 3. **С7.** а) $\bar{A} \wedge C \wedge D$: «Число x не делится на 6, чётное и является квадратом натурального числа», например, 4; $\bar{B} \wedge \bar{A}$: «Число x делится на 12 и не делится на 6», ложно при любых x ; б) $A \wedge \bar{B} \wedge D$: «Число x делится на 5, не делится на 25 и является квадратом натурального числа», ложно при любых x ; $B \wedge \bar{C}$: «Число x делится на 25 и является чётным», например, 50. **С8.** а) $\bar{B} \wedge \bar{C}$: «Число x делится на 4 и имеет остаток 1 или 0 при делении на 3», например, 4; $A \wedge C \wedge \bar{D}$: «Число x является квадратом натурального числа, имеет остаток 2 при делении на 3 и нечётное», ложно при любых x ; б) $\bar{A} \wedge C$: «Число x является квадратом натурального числа и имеет остаток 2 при делении на 4», ложно при любых x ; $A \wedge \bar{B} \wedge D$: «Число x не является квадратом натурального числа, делится на 4 и двузначное», например, 32. **С9.** а) Тетрадь — под диваном, учебник — на столе, телефон — под подушкой, кроссовки — под столом; б) сумочка — под диваном, гребешок — под подушкой, телефон — на лоджии, кроссовки — под столом. **С10.** а) Соня; б) Билл. **С11.** а) 2; б) 9.

С12. а)	1	2	3	4	б)	1	2	3	4
	Наташа	Люда	Рита	Маша		Дима	Нина	Катя	Миша

С13. а) Сын Анны — Денис, сын Ирины — Максим, сын Ольги — Кирилл; б) Артём — в №105, Кирилл — в №76, Максим — в № 534. **С14.** а) Владимир

самый слабый и самый добрый; б) Мурзик самый слабый и самый добрый.
C15. а) «Двое»; б) «Трое». **C16.** а) «Да»; б) «В». **C17.** а) 15 мальчиков, 12 девочек; б) 16 мальчиков, 14 девочек. **C18.** а) Муж — юрист, жена — экономист, сын — слесарь, сестра мужа — инженер, отец жены — учитель; б) Белкин — археолог из Брянска, Беляев — бухгалтер из Белгорода, Алёшин — архитектор из Астрахани.¹ **C19.** а) 5; б) 8. **C20.** а) 2, 17, 23 (в любом порядке); б) 2, 13, 19 (в любом порядке). **C21.** а) 20; б) 22. **C22.** а) 8; б) 9. **C23.** а) 7; б) 6. **C24.** а) В квартале А, на 3; б) в квартале Г, на 4. **C25.** а) 15; б) 10.

1.2. Логические выражения и тождества

Уровень В

V1. а) Ложь; б) истина. **V2.** а) Ложь; б) истина. **V3.** а) Истина; б) истина.
V4. а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$. **V5.** а) Ложь; б) истина. **V6.** а) Истина; б) ложь. **V7.** а) 6; б) 6, 7, 8.

V8. а)

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \wedge B$
0	1	1	1
0	0	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

б)

A	B	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$
0	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1

V9. а)

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

б)

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	1	1	0
0	0	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Да, они равносильны.

¹ Задание следует читать с дополнительным условием: «Белкин никогда не любил считать».

В10. а)

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \vee \bar{B}$
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

б)

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

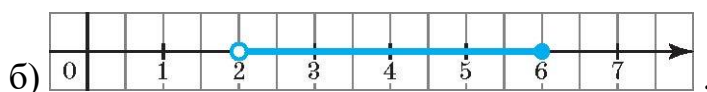
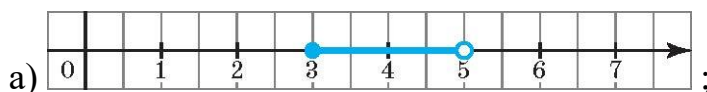
Да, они равносильны.

Уровень С

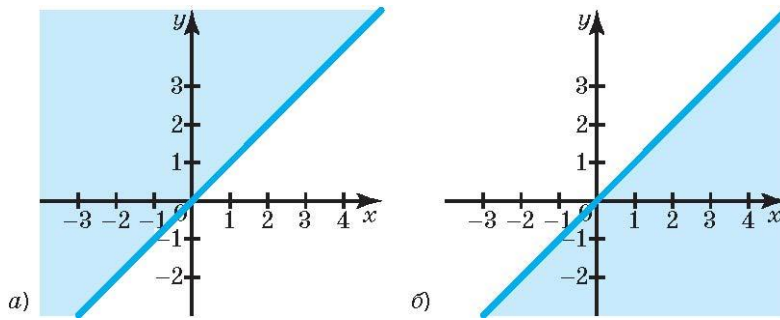
С1. а) Истина; б) ложь. С2. а) Ложь; б) истина.

Глава 2. Множества**2.1. Множества и подмножества****Уровень А**

А1. а) 5; б) 28. **А2.** а) Да; б) да. **А3.** а) Например, «Множество всех натуральных чисел, кратных 4»; б) например, «множество всех натуральных чисел, кратных 5». **А4.** а) 1, 3; б) 2, 3. **А5.** а) {17; 34; 51; 68; 85}; б) {19; 38; 57; 76; 95}. **А6.** а) {2}; б) {3}. **А7.** а) $\{-1; 0; 1\}$, $\{-1; 0\}$, $\{-1; 1\}$, $\{0; 1\}$, $\{1\}$, $\{0\}$, $\{-1\}$, \emptyset ; б) $\{0; 1; 2\}$, $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, \emptyset . **А8.** а) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$; $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$; б) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$; $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. **А9.** а) C, D ; б) B, D .

А10.

A11.

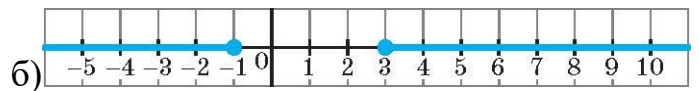
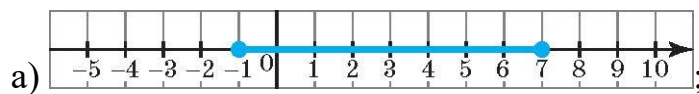


A12. а) $3n$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $2n + 1$, где $n \in \mathbf{Z}$.

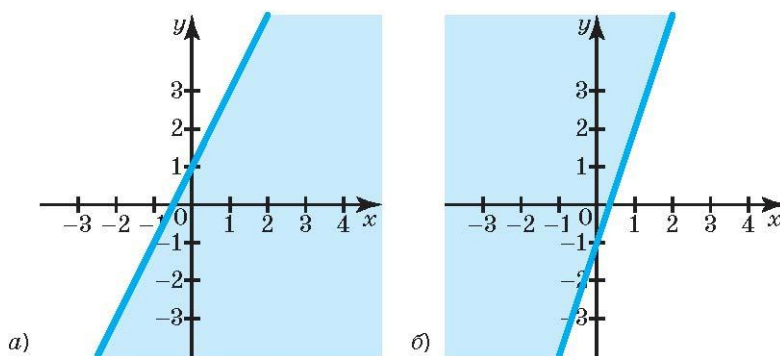
Уровень В

B1. а) Например, «Множество всех чисел, которые обратны натуральным нечётным числам»; б) например, «Множество всех чисел, которые обратны степеням двойки с натуральными показателями». **B2.** а) 1; б) 3.

B3.



B4.



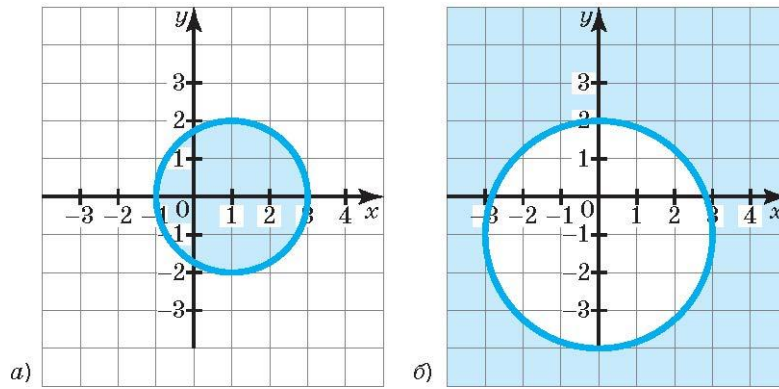
B5. а) 1, 4; б) 2, 3. **B6.** а) 25; б) 16. **B7.** а) (1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2); б) \emptyset .

B8. а) B и D; б) A и C.

Уровень С

C1. а) 4; б) 3.

C2.

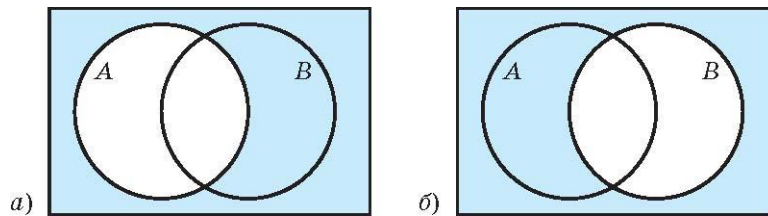


2.2. Операции с множествами. Диаграммы Эйлера

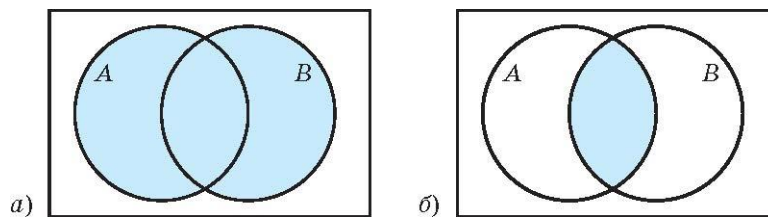
Уровень А

A1. а) 1, 2; б) 1, 2.

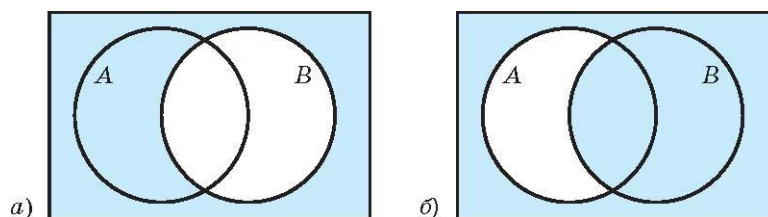
A2.



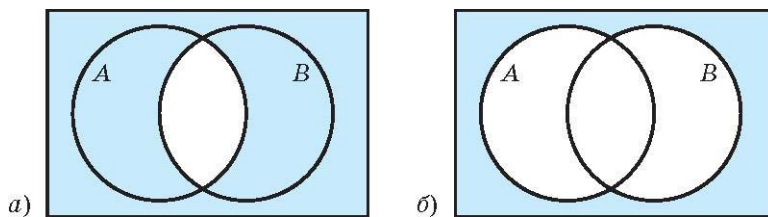
A3.



A4.



A5.



A6. а) Из квадратов; б) из равносторонних треугольников.

A7. а) $C = [-2; 6)$; б) $C = (-3; 7]$. **A8.** а) $C = [1; +\infty)$; б) $C = (-\infty; 3)$.

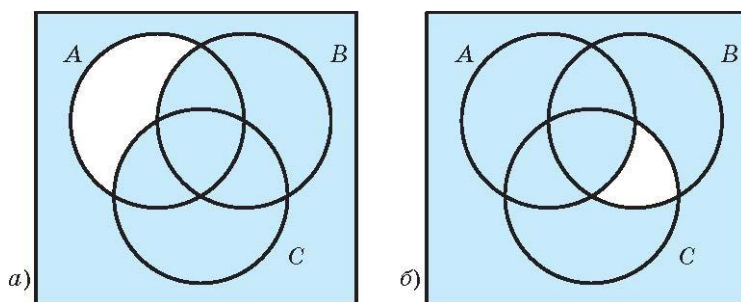
A9. а) $C = [1; 6)$; б) $C = (-2; 2]$. **A10.** а) $C = B = [-2; 5]$; б) $C = B = (-3; 2)$.

A11. а) B; б) C.

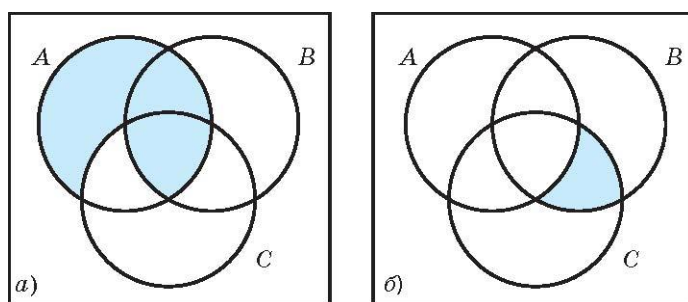
Уровень B

B1. а) Да; б) нет. **B3.** а) Да; б) да.

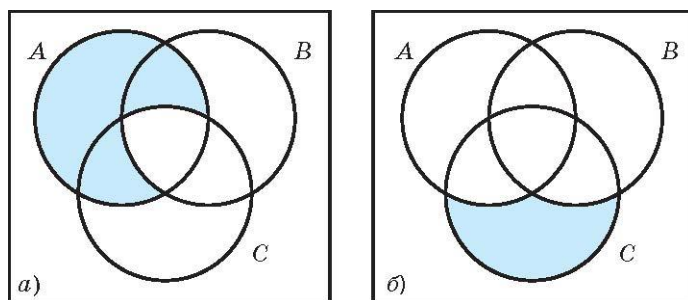
B5.



B6.



B7.

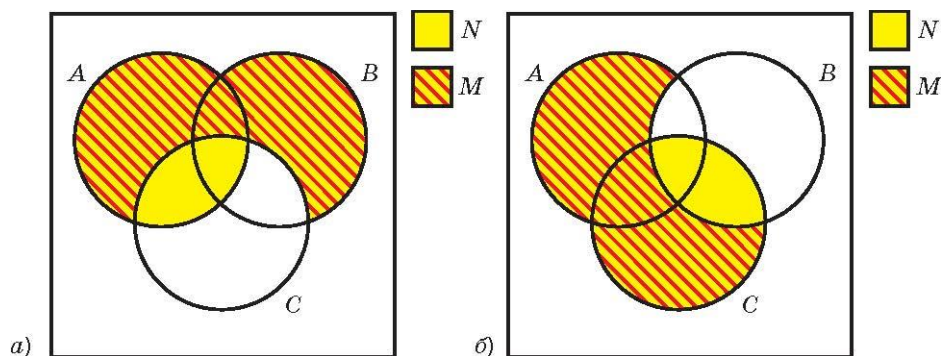


B8. а) Из равнобедренных трапеций; б) из параллелограммов.

B9. а) 350; б) 330. **B10.** а) 28; б) 27. **B11.** а) 12; б) 11. **B12.** а) 42; б) 48.
B13. а) 5; б) 5.

Уровень С

C3.



C4. а) 1,3; б) 2,4. **C5.** а) 2; б) 4. **C6.** а) 14; б) 80. **C7.** а) 23; б) 5.

Глава 3. Комбинаторика

3.1. Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал

Уровень А

A1. а) 24; б) 99. **A2.** а) 16; б) 18. **A3.** а) 648; б) 448. **A4.** а) 25; б) 20. **A5.** а) 15; б) 24. **A6.** а) 952; б) 5712. **A7.** а) 504; б) 3024. **A8.** а) 90; б) 900. **A9.** а) 2^{10} ; б) 3^{10} . **A10.** а) 36; б) 216. **A11.** а) 6; б) 120. **A12.** а) $6!$; б) $8!$. **A13.** а) $12!$; б) $24!$. **A14.** а) 49; б) 240.

Уровень В

B1. а) 455; б) 286. **B2.** а) 1170; б) 1365. **B3.** а) 7; б) 21. **B4.** а) 56; б) 132. **B5.** а) 4032; б) 1024. **B6.** а) 597870; б) 4782969. **B7.** а) $(n+2)(n+1)$; б) $n(n+1)$. **B8.** а) 205; б) 497. **B9.** а) $1+2/n$; б) $1+3/n$. **B10.** а) $\frac{n^2-3}{n!}$; б) $\frac{n^2-5}{(n-1)!}$.

Уровень С

C1. а) 495; б) 714. **C2.** а) Тех, которые не содержат единицу; б) тех, которые не содержат единицу. **C3.** а) 192 нуля, 301 единица и все остальные цифры по 300; б) 38894 нуля, 50001 единица и всех остальных цифр по 50000.

C4. а) 12; б) 77^4 . **C5.** а) $23!$ то есть $23 \cdot 21 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = 316\,234\,143\,225$;
 б) $\frac{24!}{6^8 \cdot 8!} = 9\,161\,680\,528\,000$.

3.2. Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля

Уровень А

A1. а) 15; б) 20. **A2.** а) 66; б) 220. **A3.** а) 10; б) 21. **A4.** а) 21; б) 35. **A5.** а) 20; б) 35. **A6.** а) 10; б) 20. **A7.** а) 126; б) 252. **A8.** а) 462; б) 330. **A9.** а) 5 586 853 480; б) 118 030 185. **A10.** а) 28; б) 252.

Уровень В

B1. а) 792; б) 924. **B3.** а) 15; б) 36. **B4.** а) 1365; б) 3060. **B5.** а) 35; б) 210. **B6.** а) 10; б) 20. **B7.** а) 420; б) 660. **B8.** а) 1045; б) 2475.

Уровень С

C1. а) 141570; б) 84942. **C2.** а) 150; б) 100. **C3.** а) $C_9^3 \cdot 540 + C_9^2 \cdot 360 = 58\,320$;
 б) $C_9^{34} \cdot 1560 + C_9^3 \cdot 1170 = 294\,840$. **C4.** а) 36; б) 120. **C5.** а) 36; б) 120. **C7.** а) 64. **C9.** а) 128.

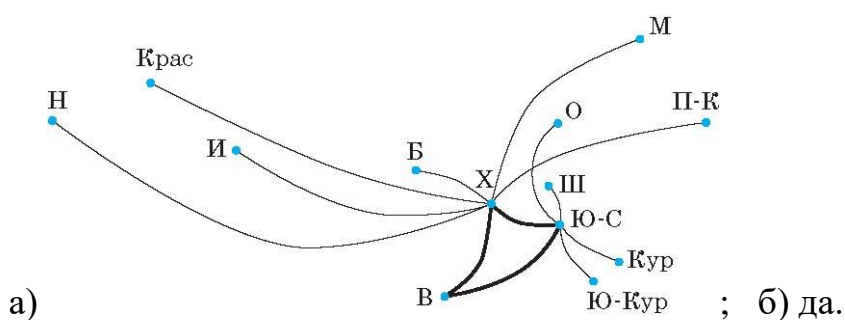
Глава 4. Графы

4.1. Свойства графов. Пути в графах

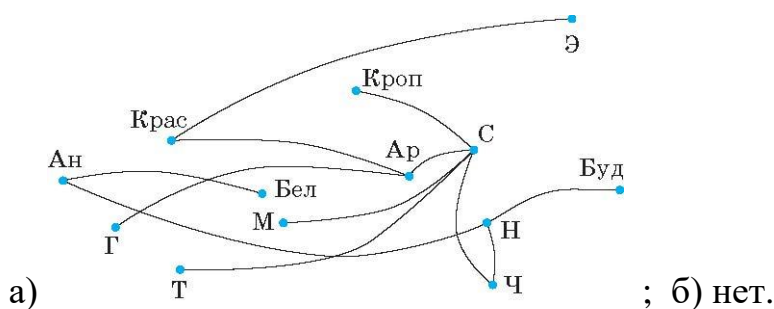
Уровень А

A1. а) 8; б) 9. **A2.** а) 4; б) 3. **A3.** а) 7; б) 9. **A4.** а) 5; б) 7. **A5.** а) 2; б) 2, 2, 2. **A6.** а) 3; б) 2, 3, 2. **A7.** а) 1; б) 4. **A8.** а) 3; б) 4. **A9.** а) 5; б) 1. **A10.** а) 2; б) 3. **A11.** а) 3; б) *B, C, D* и *G*. **A12.** а) 2; б) *B* и *C*. **A13.** а) Нет; б) да. **A14.** а) Например, *AHEDB*; б) например, *AHDCB*. **A15.** а) *AFB*, 2; б) 3. **A16.** а) Нет; б) да. **A17.** а) Нет; б) да. **A18.** а) 1; б) 2.

A19.



A20.



A21. а) 3; б) 6. A22. а) 2, 3 и 4; б) 1, 3 и 4. A24. а) 6; б) 3. A25. а) 3; б) 4.

Уровень В

B1. а) 9; б) 14. B6. а) 5; б) 7. B9. а) 30; б) 30. B10. а) Нет. B11. а) Нет; б) 84.
B15. а) 10; б) 6. B16. а) 15; б) 9.

Уровень С

C2. а) $\frac{n(n-1)}{2}$; б) да, это может быть K_{12} . C3. а) Нет; б) да. C4. а) n^2 .

4.2. Деревья

Уровень А

A1. а) Нет; б) да. A2. а) Нет; б) да. A3. а) Да; б) нет. A4. а) 12 рёбер, 13 вершин; б) 5 рёбер, 6 вершин. A5. а) A, B, E, F; б) A, B, C, D. A6. а) 4; б) 3.
A7. а) 14; б) 2. A8. а) Нет; б) да. A11. а) 2; б) 49. A12. а) 6; б) 11. A13. а) 15; б) 535. A14. а) Нет; б) да.

Уровень В

В1. а) 3; б) 3. **В2.** а) 5; б) 3. **В3.** а) 7; б) 6. **В6.** а) Ребро MK удалить, ребро CP добавить.² б) Удалить ребро между вершинами 11 и 14, добавить ребро между вершинами 7 и 18.³ **В7.** б) 99. **В8.** а) Нет; б) да с корневой вершиной D . **В9.** а) Да, с корневой вершиной F ; б) нет.

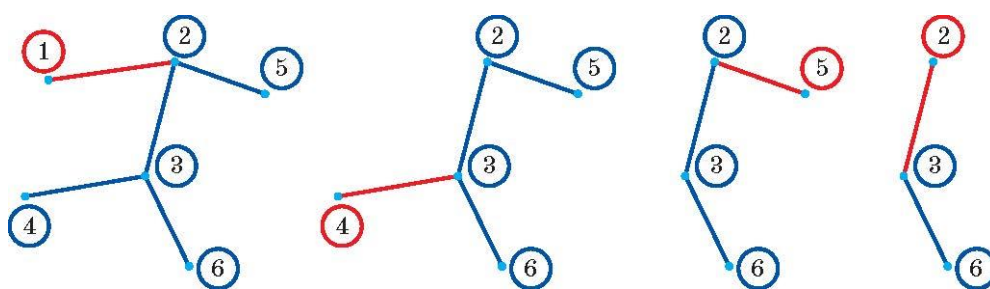
Уровень С

С2. а) **Решение.** Найдём концевую вершину с наименьшим номером и выпишем номер соседней с ней вершины. После этого удалим концевую вершину вместе с ребром, ведущим к ней.

Наименьшая концевая вершина имеет номер 1, и она соединена с вершиной 2. Выпишем число 2 и удалим вершину 1 вместе с её ребром. Повторим процедуру с получившимся деревом. Среди концевых вершин наименьший номер 4, соседняя вершина 3. Выпишем 3 и удалим вершину 4 вместе с ребром.

Повторяем алгоритм до тех пор, пока не останется две вершины (см. рис.). Выписанные номера вершин образуют искомый код.

Ответ: 2 3 2 3.



Построение кода Прюфера

б) 2 2 4 4 6.

² Задание следует читать с правкой: «Дерево диаметром 5 сделать невозможно, но можно сделать дерево диаметром 6».

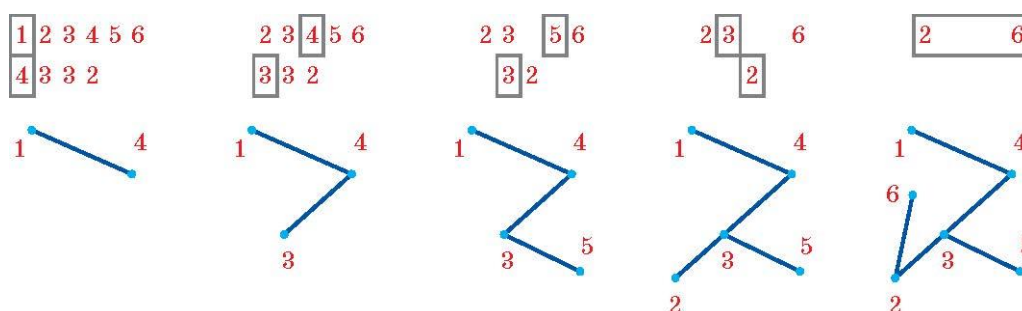
³ Задание следует читать с правкой: «Дерево диаметром 8 сделать невозможно, но можно сделать дерево диаметром 9».

С3. а) Решение. В коде Прюфера 4 числа, значит, в искомом дереве 6 вершин. Выпишем числа от 1 до 6, а под ними — данный код.

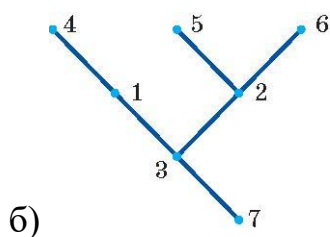
Наименьшее число в первой строке, которое не встречается во второй, равно 1. Первое число во второй строке равно 4. Построим вершины 1 и 4 и соединим их ребром. Удалим число 1 из первой строки, а число 4 — из второй.

Теперь наименьшее число в первой строке, которого нет во второй, равно 4. Первое число во второй строке равно 3. Построим вершину 3 и соединим с ней ребром вершину 4. Удалим числа из соответствующих строк.

Будем повторять алгоритм, пока во второй строке не закончатся числа, а в первой не останется два числа — это будут числа 2 и 6. Добавим недостающую вершину 6 и соединим её ребром с вершиной 2. Дерево восстановлено (см. рис.).



Восстановление дерева по коду Прюфера



С6. а) Нет; б) да. **С7.** а) 63; б) 57.

4.3. Разные задачи

Уровень А

A1. а) Нет; б) да. **A2.** а) Нет; б) да. **A3.** а) Да; б) да. **A4.** а) Нет; б) нет.
A5. а) Например, *ABCADECDB*; б) например, *ABNKPCMDEFLEMOGKHA*.

A6. а) 3; б) 3. **A7.** а) 3; б) 4. **A8.** а) 2; б) 2. **A9.** а) 2; б) 2. **A10.** а) 30; б) 72. **A11.** а) 10; б) 28.

Уровень В

B1. а) Да; б) да. **B3.** а) 2; б) 2. **B4.** а) 2; б) 2. **B5.** а) 2; б) 2. **B7.** а) Нет; б) нет. **B8.** а) Да; б) нет. **B10.** а) Нет, 2 росчерка; б) нет, 3 росчерка. **B11.** а) Нет, 3 участка; б) нет, 2 участка. **B12.** а) Нет, 3 участка; б) нет, 2 участка. **B13.** а) 60; б) 60. **B14.** а) 40; б) 100. **B15.** а) Нет; б) да. **B16.** а) 14; б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **B17.** а) 56; б) 120. **B18.** а) Да; б) нет. **B19.** а) Да; б) да. **B20.** а) 11; б) 16.

Уровень С

C1. б) $\frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{2}$. **C3.** а) 6; б) 6.

C4. Доказательство. а) Докажем от противного, что граф K_5 не является планарным. Всего в этом графе $C_5^2 = 10$ рёбер. Если граф K_5 удастся расположить на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются, то он разобьёт плоскость на целое число k трёхвершинных областей (включая внешнюю). Значит, число рёбер в графе K_5 равно $\frac{3 \cdot k}{2} = 10$. Тогда $k = \frac{20}{3}$ — не целое число. Противоречие.

Ответ: нет.

б) Докажем от противного, что граф $K_{3,3}$ не является планарным. Всего в этом графе 9 рёбер. Если граф $K_{3,3}$ удастся расположить на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются, то он разобьёт плоскость на области (включая внешнюю), причём каждая область ограничена циклом длины 4 или 6. Значит, общее число рёбер в $K_{3,3}$ равно:

$$\frac{4k + 6n}{2} = 2k + 3n,$$

где k — количество четырёхвершинных, а n — количество шестивершинных областей, k и n — целые неотрицательные числа. Получаем, что $2k + 3n = 9$.

Эйлерова характеристика плоского графа равна 2, поэтому должно выполняться равенство $6 - 9 + k + n = 2$. Получаем систему уравнений:

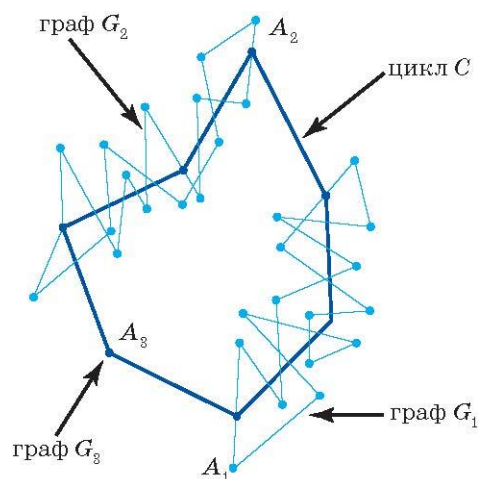
$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ x + y = 5, \end{cases}$$

которая имеет решение $x = 6, y = -1$. Противоречие.

Ответ: нет.

С5. а) Доказательство. Проведём рассуждение по индукции. Очевидно, теорема верна для одноточечного графа, в котором вовсе нет рёбер, и для графа, в котором одна вершина и одно ребро (петля). Предположим, что теорема верна для всех графов, где меньше, чем n рёбер. Пусть теперь дан граф G , в котором ровно n рёбер. Покажем, что теорема верна и для этого графа тоже.

Граф G не является деревом (нет вершин степени 1), поэтому в графе G есть некоторый цикл C . Удалим все рёбра этого цикла из графа G . От графа G останется один или несколько связанных графов G_1, G_2, \dots, G_k . Возможно, некоторые из этих графов состоят только из одной точки (на рисунке ниже показан случай, когда остались два графа G_1, G_2 с рёбрами и один одноточечный граф G_3).



Устройство графа G и схема его обхода

Каждый из оставшихся графов удовлетворяет условию теоремы: все его вершины имеют чётную степень, при этом количество рёбер в каждом графе

меньше n , поэтому в каждом из этих графов есть замкнутый эйлеров путь. Если граф состоит из одной точки, то замкнутый эйлеров путь в этом графе тоже есть, хотя он не содержит ни одного ребра. Кроме того, каждый из графов G_1, G_2, \dots, G_k имеет хотя бы одну общую вершину с циклом C , поскольку граф G связан. Получается, что граф G является объединением графов G_1, G_2, \dots, G_k и цикла C :

$$G = C \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$$

Вернём на место рёбра цикла C , выберем в этом цикле вершину A_1 , которая принадлежит графу G_1 , и начнем строить путь из вершины A_1 по следующему алгоритму:

1. Проходим замкнутым эйлеровым путём в графе G_1 из вершины A_1 в вершину A_1 .
2. Выберем направление обхода цикла C .
3. Из вершины A_1 двигаемся по циклу C в выбранном направлении до тех пор, пока не попадём в вершину A_2 , принадлежащую графу G_2 . Из этой вершины обходим граф G_2 замкнутым эйлеровым путём, тем самым возвращаясь в точку A_2 .
4. И так далее: двигаемся к следующему графу G_m и обходим его, возвращаемся на цикл C и повторяем действия, описанные в п. 3, до тех пор, пока не вернёмся в точку A_1 .

Построенный путь проходит по разу по всем рёбрам графов G_1, G_2, \dots, G_k и по одному разу по всем рёбрам цикла C . Этот путь выходит из точки A_1 и возвращается в точку A_1 . Таким образом, построенный путь является замкнутым эйлеровым путём в графе G . Теорема доказана.

С6. б) Нет. Пример — 10 треугольников. **С7.** б) Нет, так как количество способов 2^n , где n — количество циклов.

С8. Доказательство. Изобразим граф правильного многогранника на плоскости. Каждая грань изображается областью (одна из граней — внешней областью). Все вершины имеют одинаковую степень 3 или больше, и все

области ограничены одинаковым числом рёбер — 3 рёбрами или больше. Покажем, что существует ровно пять таких графов.

Предположим, что все V вершин имеют степень $x + 2$ и каждая из F областей ограничена $y + 2$ рёбрами, где x и y — целые положительные числа. Количество рёбер E можно выразить двумя способами:

$$E = \frac{V(x+2)}{2} = \frac{F(y+2)}{2}.$$

Значит, $V = \frac{2E}{x+2}$, и $F = \frac{2E}{y+2}$. Эйлерова характеристика графа равна 2,

откуда получаем:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{E}, \text{ откуда } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} > \frac{1}{2}.$$

Преобразуем это неравенство:

$$\frac{x+y+4}{(x+2)(y+2)} > \frac{1}{2}; \quad 2(x+y+4) > (x+2)(y+2), \text{ откуда } xy < 4.$$

Переберём возможные варианты.

Вариант 1: $x = 1, y = 1$. Каждая вершина имеет степень 3 и каждая грань многогранника — правильный треугольник. Число граней — четыре.

Вариант 2: $x = 1, y = 2$. Каждая вершина имеет степень 3 и каждая грань многогранника — квадрат. Граней должно быть 6.

Вариант 3: $x = 1, y = 3$. Каждая вершина имеет степень 3 и каждая грань многогранника — правильный пятиугольник. Граней 12.

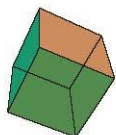
Вариант 4: $x = 2, y = 1$. Каждая вершина имеет степень 4 и каждая грань многогранника — правильный треугольник. Граней 8.

Вариант 5: $x = 3, y = 1$. Вершины имеют степень 5 и каждая грань многогранника — правильный треугольник. Число граней 20.

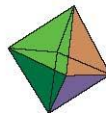
Мы доказали, что больше пяти видов правильных многогранников быть не может. Осталось показать, что эти пять существуют. Проще всего их показать воочию.



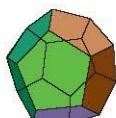
Тетраэдр. 4 треугольные грани.
В каждой вершине сходится 3 ребра.



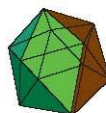
Куб (гексаэдр). 6 квадратных граней.
В каждой вершине сходится 3 ребра.



Октаэдр. 8 треугольных граней.
В каждой вершине сходится 4 ребра.



Додекаэдр. 12 пятиугольных граней.
В каждой вершине сходится 3 ребра.



Икосаэдр. 20 треугольных граней.
В каждой вершине сходится 5 ребер.

Теорема доказана.

Глава 5. Статистика

5.1. Таблицы

Уровень А

A1. а) 12; б) 16. **A2.** а) Мальчики растут быстрее всего на втором месяце жизни; б) девочки растут быстрее всего на втором месяце жизни.
A3. а) Девочки меньше всего набирают в весе на двенадцатом месяце жизни.
б) Мальчики меньше всего набирают в весе на двенадцатом месяце жизни.
A4. а) 067Ы; б) 059Е, 101Й. **A5.** а) 4 б) 3. **A6.** а) 30 мин; б) 31 мин.
A7. а) Тверь; б) Тверь. **A8.** а) Факультет 5; б) факультет 3. **A9.** а) 5; б) 5.
A10. а) Сумка № 3 отвечает правилам; а) Сумка № 2 отвечает правилам.
A11. а) 6; б) 6. **A12.** а) 42,5 %; б) 30,2 %. **A13.** а) Громов, второго тура не было; б) Крючков, он набрал в первом туре больше всех голосов, но меньше 50%, поэтому второй тур был. **A14.** а) Хватит; б) не хватит. **A15.** а) 3 года; б) 4 года.

Уровень В

В1. а) 7290 р.; б) 6960 р. **В2.** а) 3,74; б) 3,86. **В3.** а) 1581; б) 1349.
В4. а) 10 865; б) 13 505. **В5.** а) 311 р.; б) 200 р. **В6.** а) 479 700 р.; б) 496 100 р.
В7. а) 3060 р.; б) 2660 р. **В8.** а) Сидоров; б) Петров. **В9.** а) Ford Focus; б) KIA
 Rio. **В10.** а) Два месяца; в) три месяца. **В11.** а) 2, 3, 4 или 3, 4, 6; б) 1, 2, 4 или
 2, 4, 6. **В12.** а) Владивосток; б) Якутск. **В13.** а) Мехико; б) Иркутск.

5.2. Диаграммы

Уровень А

А1. а) 20 °С, в июле; б) 18 °С, в августе. **А2.** а) –8 °С, в феврале; б) –12 °С, в
 январе. **А3.** а) 28 °С; б) 30 °С. **А4.** а) 6; б) 7. **А5.** а) 7; б) 10. **А6.** а) 21 °С;
 б) 20,5 °С. **А7.** а) 11 ноября; б) 22 ноября. **А8.** а) На 50,5 см; б) на 53 см.
А9. а) с 11 до 12 лет; б) с 9 до 10 лет. **А10.** а) 4-е место; б) 7-е место.
А11. а) Приблизительно на 400 тыс. т; б) приблизительно на 400 тыс. т.
А12. а) Около 600; б) около 700. **А13.** а) 1 — страны СНГ, 2 — Африка, 3 —
 зарубежная Азия;
 б) 1 — Латинская Америка, 2 — Австралия и Океания, 3 — зарубежная
 Европа. **А14.** а) Дагестан; б) Свердловская область. **А15.** а) Ингушетия;
 б) Ставропольский край.

Уровень В

В1. а) 2009, 2013; б) 2011, 2014, 2018. **В2.** а) 1070 млрд кВт · ч; б) 655 млрд
 кВт · ч. **В3.** а) 1996, 2000; б) 2000. **В4.** а) 2000; б) 2016. **В5.** а) 1 — Лиссабон,
 2 — Исламабад, 3 — Токио; б) 1 — Владивосток, 2 — Петропавловск, 3 —
 Алма-Ата. **В6.** а) На 2 см; б) на 5 см. **В7.** а) На 3 см; б) на 4 см. **В8.** а) 9; б) 22.
В9. а) Около 13 градусов; б) около 15 градусов. **В10.** а) 10; б) 1. **В11.** а) 9 р.;
 б) 6 р. **В12.** а) Примерно 30; б) примерно 35. **В13.** а) Грибы; б) творог и
 творожные сырки. **В14.** а) 1 и 3; б) 2. **В15.** а) 2; б) 1 и 3.

Уровень С

С1. а) 1 — Италия, 2 — Бразилия, 3 — Индия, 4 — Россия; б) 1 — Великобритания, 2 — Индия, 3 — Россия, 4 — Мексика. **С2.** а) Около 1220 млрд USD; б) около 2220 млрд USD. **С3.** а) Примерно на 26 %; б) примерно на 33 %. **С4.**⁴ а) В 2012 г.; б) в 2011 г. **С5.** а) –7; б) –7,6. **С6.** 1 — прогрессивный, 2 — регрессивный, 3 — стационарный. **С7.** а) Немцы, которым было 20–25 лет в 1939 г., родились в 1914–1919 гг. В это время в Германии рождаемость резко упала из-за Первой мировой войны. б) Малочисленность детей, рождённых в 1924–1933 гг., объясняется затяжным экономическим кризисом в послевоенной Германии и начавшимся «эхом» Первой мировой. **С8.** а) 1 — Япония; 2 — Китай. б) 1 — Германия; 2 — СССР. **С9.** 1 — газовые гиганты, 2 — планеты Земной группы. **С10.** а) 1 — Индия, 2 — Россия, 3 — Япония. б) 1 — Италия, 2 — Россия, 3 — Бразилия. **С12.** а) 1 — Бангкок, 2 — Берген, 3 — Ташкент; 4 — Москва. б) 1 — апрель, 2 — август, 3 — январь.

5.3. Среднее арифметическое и медиана

Уровень А

А1. а) 2; б) 1. **А2.** а) 2,6; б) 1,9. **А3.** а) 52,18; б) 66,5. **А4.** а) 1; б) 0. **А5.** а) 3,5 (или любое число из промежутка [3; 4]); б) 0,5 (любое число из промежутка [0; 1]). **А6.** а) 1,7 и 0; б) 0,4; 2. **А7.** а) 7; б) 6. **А8.** а) Увеличится на 5; б) уменьшится на 3. **А9.** а) Не изменится; б) не изменится. **А10.** а) 13; б) 26. **А11.** а) 3; б) 4. **А12.** а) 16,25; б) 17,65. **А13.** а) 58 тыс. чел., Балашиха; б) 255 тыс. чел., Химки. **А14.** а) 74 тыс. чел.; б) 296,2 тыс. чел. **А15.** а) Медиана; б) медиана. **А16.** а) Наименьшее значение (3,8 м); б) наибольшее значение (28 м/с).

⁴ Задание следует читать так: «На диаграммах синяя линия показывает коэффициент рождаемости, а чёрная — коэффициент смертности».

Уровень В

- В1.** а) 5,8; б) 4,2. **В2.** а) 0,1; б) 0,09. **В3.** а)⁵ 2,73; б)⁶ 0,469. **В4.** а) 3,7; б) 4.
- В5.** а) 38,3; б) 38,44. **В6.** а) 0,18; б) $\approx 0,063$. **В7.** а) $\frac{244\ 200}{40} = 6105$ р.; б) $\frac{248\ 800}{40} = 6220$ р. **В8.** а) Любое значение от 4070 до 5070 р. или весь интервал; б) любое значение от 5240 до 6240 р. или весь интервал.
- В9.** а) 0,19; б) 0,07. **В10.** а) 0,09; б) 0,13. **В11.**⁷ а) 5,7; б) 4,3. **В12.** а) 59; б) 52.
- В13.** а), б) Среднее арифметическое объединения двух числовых наборов не может быть больше обоих средних изначальных наборов. **В14.** а) 52 тыс. р.; б) 50,6 тыс. р. **В15.** а) 51312,5 р; б) 48687,5 р. **В16.** а) $\approx 45,8$ тыс. р.; б) $\approx 46,2$ тыс. р. **В17.** а) 70 см; б) 80 см. **В18.** а) $\approx 5,6$ °С; б) $\approx 6,7$ °С.

Уровень С

- С1.** а) 3; б) 0,5. **С2.** а) 80,5 тыс. р.; б) 76,6 тыс. р.
- С3.** а) $\frac{50 \cdot 72 + 20 - 70 \cdot 2}{48} = 72,5$ тыс. р.; б) $\frac{50 \cdot 84 + 26 - 85 \cdot 2}{48} = 84,5$ тыс. р.
- С4.** а) [45,8 ; 54,9]; да, можно; б) [43,1; 52,2]; нет, нельзя. **С5.** а) 3,46 и 4; б) 3,33 и 3; **С6.** а) Выросла на 980 р.; б) выросла на 1080 р. **С7.** а) 2, 3, 4, 5, 5; б) 2, 3, 4, 4, 5 **С8.** а) Да, можно. Следует перевести человека с баллом, который ниже среднего в первой группе и выше среднего во второй. Это Боровкова с баллом 58. б) Нет, поскольку в первой группе нет никого, у кого балл ниже среднего первой группы, но выше среднего второй группы.
- С9.** а) $\frac{78 + 66}{2} = 72$; б) $\frac{72 + 64}{2} = 68$. **С10.** а) 2,2; б) 1,8. **С11.** а) 1 — Берген, 2 — Якутск, 3 — Ашхабад, 4 — Лиссабон. б) 1 — Токио, 2 — Ашхабад, 3 —

⁵ Задание следует читать так: «Для значения б частота должна быть 0,01».

⁶ Задание следует читать так: «В последнем столбце должно быть значение 0,9 и частота 0,05».

⁷ Указание: Оценки каждого судьи складываются с базовой стоимостью элемента, из полученных значений отбрасываются самое большое и самое маленькое (или самые большие и маленькие, если есть несколько одинаковых значений), а из оставшихся находится среднее арифметическое. Это и будет итоговая оценка за элемент.

Петропавловск-Камчатский, 4 — Иркутск. **C12.** а) В Прибрежном районе — 28 октября, в Заречном — 27 октября; б) в Прибрежном районе — 28 октября, в Заречном — 27 октября. **C13.** а) 900; б)⁸ 800. **C14.** б) Да, например 3; 3; 13. **C15.** а) $\approx 1,8$; б) 2. **C16.** а) $\approx 8,2\%$; б) $\approx 35,6$ км/ч. **C17.** а) 10,8 км/ч; б) $\approx 2,4$ ч. **C18.** а) 1,5125 ч, 1815 р; б) 0,366 ч, 549 р. **C19.** а) 27,62 км/ч; б) $\approx 4,6$ км/ч. **C20.** а) $\approx 21,6\%$; б) $\approx 5,3\%$.

5.4. Рассеивание данных

Уровень А

A1. а) 2; 0; 1; -6; 3; б) 0,5; 1,7; 2,4; -4,9; 0,3. **A2.** а) 1; -7; 5; 0; 6; -5; б) 8,8; 2,4; 0,2; -10,2; 3,9; -5,1. **A3.** а) -47; б) 5,37. **A4.** а) 20; б) -5,27. **A5.** а) Нет; б) да, например, для набора 5; 5; 5; 5. **A6.** а) 12; б) 32. **A7.** а) 28; б) 256. **A8.** а) 2; 1; 0; 1; 2; б) 1,4; 0,5; 1,3; 0,6. **A9.** а) 4; 4; 3; 5; 2; б) 1,4; 1,7; 0,3; 0,6. **A10.** а) 3 и 5; б) 2 и 2. **A11.** а) 2 и 8; б) 5 и 9. **A12.** а) 14; б) $\frac{2}{3}$. **A13.** а) 14; б) $\frac{8}{3}$. **A14.** а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3}$, одинаковы; б) $\frac{3}{2}$ и 5, второго. **A15.** а) 8 и $\frac{8}{3}$, первого; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{19}{2}$, второго. **A16.** а) Одинаковы; б) второго. **A17.** а) Первого; б) второго. **A18.** Среднее значение — у второго, дисперсия — у первого. **A19.** Среднее значение — у первого, дисперсия — у второго. **A20.** а) У второго; б) у второго. **A21.** а) Одинаковы; б) у второго. **A22.** а) 4; б) 12. **A23.** а) 0,6; б) 0,13. **A24.** а) 2,14; б) 0,53. **A25.** а) 2,14; б) 0,49. **A26.** а) 1; 1; б) 9; 8; 7. **A27.** а) 3; 7; 2; б) 5; 4; б) все.

Уровень В

B1. а) 75; б) 0,27. **B2.** а) Среднее значение -1, дисперсия 2,5; б) Среднее значение 10, дисперсия 2,5. **B3.** а) Среднее значение 2, дисперсия 3,5; б) Среднее значение 6, дисперсия 3,5. **B4.** а) Среднее значение -12, дисперсия

⁸ Задание следует читать так: «Численность населения в посёлке Знойное превышает среднюю численность населения посёлков долины на 90 человек».

27,04; б) Среднее значение 6, дисперсия 6,76. **В5.** а) $-\frac{5}{3}$, $\frac{121}{900}$, $\frac{11}{30}$; б) $\frac{15}{4}$, $\frac{1089}{1600}$, $\frac{33}{40}$. **В6.** а) 31,36 и 5,6; б) 400 и 20. **В7.** а) 64 и 8; б) 400 и 20. **В9.** а) $23\frac{1}{3}$ и 0,5; б) 101,1 и 1,4. **В10.** а) Среднее значение 0, дисперсия 1; б) Среднее значение 0, дисперсия $\frac{1}{9}$.

5.5. Диаграммы рассеивания

Уровень В

В1. а) А — 4, Б — 2, В — 3, Г — 1; б) А — 2, Б — 3, В — 1, Г — 4.
В2. а) Вероятно, 3; б) вероятно, 2. **В3.** а) Вероятно, (5;1); б) вероятно, (3; 6).
В15. а) Средняя температура $-5,3$, отклонения

янв	фев	март	апр	май	июнь	июль	авг	сен	окт	ноя	дек
-14,1	-14,4	-8,5	-4,7	+3,4	+12,9	+18,4	+15	+9,7	+2,1	-7,7	-12,1

б) дисперсия 128,65. **В16.** а) Средняя ошибка $-2,6$, размах 4,7, дисперсия 2,8; б) часы получают сертификат, но нуждаются в регулировке.
В17. а) Среднее 110, дисперсия 1000; б) есть, это значение 50. **В18.** а) 125.
В19. а) 286 фунтов; б) 116,16. **В20.** а) Размах 3 мм, дисперсия 1,25; б) да, это низкосортная доска, поскольку максимальное отклонение по ширине 4 мм.

Уровень С

С1. а) $y = 0,94x + 1,44$; б) $y = 0,08x + 2,54$. **С2.** а) $y = -27,9x + 1279,117$; б) $y = -50,09x + 782,74$.

5.6. Частоты и гистограммы

Уровень А

А1. а) 0,2; б) 0,72. **А2.** а) 0,56; б) 0,32. **А3.**⁹ а) ≈ 5 ; б) $\approx 0,12$. **А4.** а) ≈ 219 ; б) $\approx 0,035$. **А5.** а) $\approx 0,263$; б) 5%. **А6.** а) $\approx 0,0225$; б) ≈ 5120 . **А7.** а) $\approx 0,49$; б) $\approx 0,365$. **А8.** а) $\approx 0,194$; б) $\approx 0,64$.

⁹ Задание следует читать так: «По вертикальной оси откладываются частоты, по горизонтальной — время службы чайника в годах».

Уровень В

В1. а) $\approx 0,6$; б) ≈ 600 . Нет, нельзя. Частота события «Устранение сбоя заняло от 1500 до 3600 минут» равна приблизительно $0,125 = 12,5\%$, значит приблизительно $87,5\%$ сбоев устраняется менее чем за 1500 минут. А поскольку в сутках 1440 минут, менее чем за сутки устраняется менее $87,5\%$ сбоев. **В2.** а) $0,175$; б) $0,18$; в) от 60 до 80. **В3.** а) 1) 29; 2) 748—751 мм рт. ст.; б) 144 м.

Глава 6. Теория вероятностей

6.1. Элементарные события

Уровень А

А1. а) {PP, PO, OP, OO}; б) {PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP, OOO}.
А2. а) {PO, PP}; б) {OP, PO}. **А3.** а) {OOP, OPO, POO, OOO}; б) {OOP, OPO, POO, OPP, POP, PPO}. **А4.** а) Например, «во второй раз выпал орёл»; б) Например, «орёл выпал хотя бы один раз». **А5.** а) {4, 5, 6}; б) {1, 2, 3, 6}.

А6.

а)

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

б)

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

А7. а) Например, «выпало нечётное число очков»; б) например, «выпало больше, чем 2 очка». **А8.** а) Например, «в первый раз выпало чётное число очков, а во второй — нечётное»; б) например, «произведение числа

выпавших очков равно 12». **A9.** а) 0,43; б) $\frac{1}{12}$. **A10.** {АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА}; а) 2; б) 4. **A11.**{(МВ; ОВ), (МЛ; ОЛ), (МК; ОК), (МВ; ОЛ), (МВ; ОК), (МЛ; ОК), (МЛ; ОВ), (МК; ОВ), (МК; ОЛ)}; а) 3; б) 4. **A12.** а){СИНГ, СГНИ}; б){СГНИ, СИГН, СНГИ, СИНГ}. **A13.** а) НННУ; б) ННННН. **A14.** а) 0,25; б) 0,5. **A15.** а) Вероятность $d = 0,3$, вероятность $c = 0,2$; б) вероятность $d = 0,15$, вероятность $c = 0,35$.

Уровень В

B1. а) {РРР, РРО, РОР, ОРР, ОРО}; б) {РОР, ОРО}.

B2.

а)

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

б)

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

B3. а) Например, «числа, выпавшие при двух бросках, отличаются больше, чем на 2»; б) например, «сумма выпавших очков равна 7 или 8».

B4. а) {ОРРР, РОРР, РРОР, РРОО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО}; б) {РРРР, РРОО, РРОР, РОРР, РРОО, РОРО, РООР, ОРОР, ОРРР, ОРРО, ООРР}.

B5. а) Вероятность $d = 0,15$, вероятность $e = 0,25$; б) Вероятность $d = 0,3$, вероятность $e = 0,1$.

B6. а) {К, ЖК, ЗК, ЖЗК, ЗЖК}; б) {СЖЗК, СЗЖК, ЗСЖК, ЗЖСК, ЖСЗК, ЖЗСК}. **B7.** а) {У, НУ, ННУ}; б) {ННУ, НННУ,

ННННУ, ННННН}. **В8.** а) $\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,1,5\}, \{1,1,6\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$; б) $\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,1,5\}, \{1,1,6\}$. **В9.** а) 6; б) 10. **В10.** а) 5; б) 5. **В11.** а) $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$; б) $\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$. **В12.** а) {УУ, УН, НУ, НН}; б) нет, нельзя. **В13.** а) {СС, СЧ, ЧС, ЧЧ}; б) нет, нельзя. **В14.** а) $\{5,3\}, \{3,5\}$; б) $\{6,2\}, \{4,4\}, \{2,6\}$. **В15.** а) 2; б) 1.

Уровень С

С1. а) 8; б) 38. **С2.** а) Например, $Y \leq X \leq 2Y$; б) например, $12 \leq XY \leq 25$. **С3.** а) {ЗК, КЗ, СЗК, СКЗ, КСЗ, ЗСК}; б) {КЗ, СКЗ, ЖКЗ, КСЗ, КЖЗ, СЖКЗ, ЖСКЗ, СКЖЗ, ЖКСЗ, КСЖЗ, КЖСЗ}. **С4.** а) 7; б) 6. **С5.** а) $\{1,1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,2,1\}, \{2,1,1\}, \{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\}, \{4\}$; б) $\{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\}$. **С6.** а) 17; б) 5.

6.2. Опыты с равновозможными элементарными событиями.

Случайный выбор

Уровень А

А1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$. **А2.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{7}{8}$. **А3.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{6}$. **А4.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{7}{12}$. **А5.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{18}$. **А6.** а) 0,7; б) 0,56. **А7.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **А8.** а) $\frac{4}{17}$; б) $\frac{7}{17}$. **А9.** а) 0,4; б) 0,35. **А10.** а) 0,05; б) $\frac{1}{12}$. **А11.** а) 0,125; б) 0,375. **А12.** а) 0,4375; б) 0,8. **А13.** а) 0,75; б) 0,5. **А14.** а) 0,64; б) 0,56.

Уровень В

В1. а) $\frac{11}{36}$; б) $\frac{25}{36}$. **В2.** а) В; б) С. **В3.** а) 0,25; б) 0,16. **В4.** а) 0,7; б) 0,5. **В5.** а) 0,0024; б) 0,021. **В6.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$. **В7.** а) 0,48; б) 0,32. **В8.** а) $\frac{9}{19}$; б) $\frac{11}{23}$. **В9.** а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{276}$. **В10.** а) $\frac{1}{780} \approx 0,0013$; б) $\frac{1}{300} \approx 0,0033$.

Уровень С

С1. а) $\frac{8}{27}$; б) $\frac{37}{216}$. **С2.** а) 0,504; б) 0,432. **С3.** а) 0,037; б) 0,701. **С4.** а) 0,25;

б) 0,091. **С5.** а) 0,0012; б) 0,0036. **С6.** а) А; б) А. **С7.** а) $\frac{19}{33}$; б) $\frac{7}{9}$. **С8.** а) $\frac{11}{119}$;

б) $\frac{25}{714}$. **С9.** а) А более вероятно: $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_6^2 \cdot C_{43}^4}{C_{49}^6} : \frac{C_5^2 \cdot C_{31}^3}{C_{36}^5} \approx 1,11$. б) А более

вероятно \approx в 2,36 раза. **С10.** а) $\frac{C_{198}^{98}}{C_{200}^{100}} \approx 0,249$; б) $\frac{C_{297}^{97}}{C_{300}^{100}} \approx 0,036$. **С11.** а) $\frac{1}{n!}$;

б) $\frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}$. **Замечание:** $\frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{1}{(2n-1)!!} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$. **С12.** а) 0;

б) $\frac{12!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 23} \approx 0,0015147$.

6.3. Действия с событиями. Сложение вероятностей

Уровень А

А1. а) 10; б) 12. **А2.** а) 0,64; б) 0,89. **А3.** а) Нет; б) нет. **А4.** а) {1, 2, 3, 4, 6},

например, «5 очков не выпало», вероятность $\frac{5}{6}$; б) {2, 4, 6}, например,

«выпало чётное число очков», вероятность 0,5. **А5.** а) {2, 4, 6}, 0,5;

б) {2, 4, 5, 6}, $\frac{2}{3}$. **А6.** а) {4, 6}, $\frac{1}{3}$; б) {2}, $\frac{1}{6}$.

А7.

а)

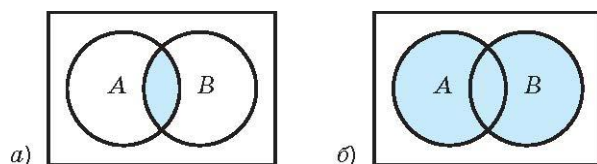
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

б)

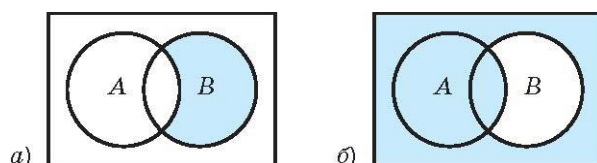
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

A8. а) B ; б) C . **A9.** а) $DBAC$; б) $CBAD$. **A10.** а) 0,57; б) 0,39. **A11.** а) 0,962; б) 0,14. **A12.** а) 0,96; б) 0,97. **A13.** а) 0,96; б) 0,98.

A14.



A15.



A16. а) 0,9; б) 0,52. **A17.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0. **A18.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. **A19.** а) 0,74; б) 0,89.

A20. а) 1; б) 0,9.

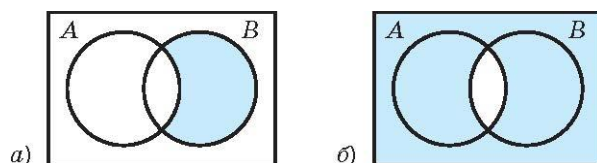
Уровень В

B1. а) Например, «в сумме выпало не больше 4 очков», $\frac{1}{6}$; б) например,

«в сумме выпало не меньше 10 очков», $\frac{1}{6}$. **B2.** а) Например, «в течение года

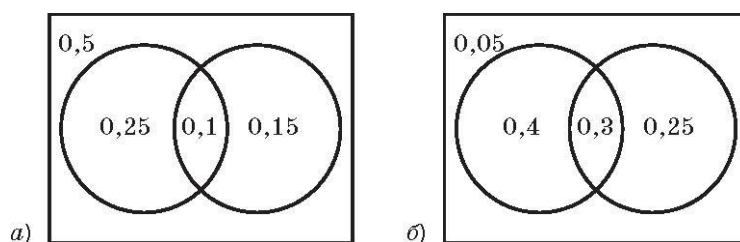
ни одна лампочка не перегорит»; б) например, «в течение года перегорят 1, 2, 4 или 5 лампочек, либо ни одной».

B3.



B4. а) 0,35; б) 0,76. **B5.** а) 0,53; б) 0,57.

B6.

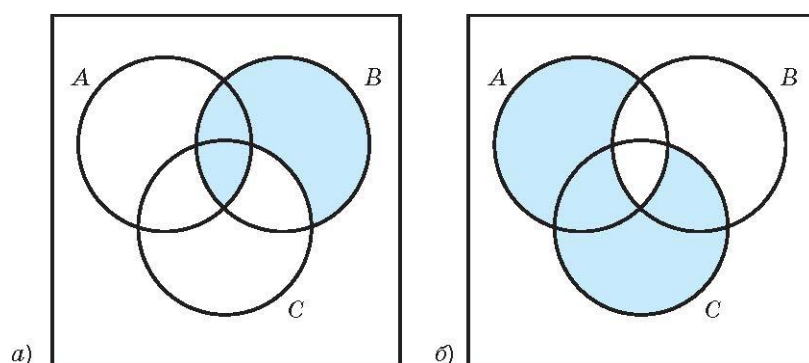


- B7.** а) Например, $A \cap \bar{B}$; б) например, $\bar{A} \cap B$. **B8.** а) 0,2; б) 0,11. **B9.** а) 0,2; б) 0,62. **B10.** а) 0,44; б) 0,38. **B11.** а) $DBAC$; б) $DACB$. **B12.** а) $\{HY, HHY\}$; б) $\{Y, HY, HHY\}$. **B14.** а) 0,8; б) 0,5. **B15.** а) 0,4; б) 0,2. **B16.** а) $\frac{31}{38}$; б) $\frac{6}{19}$. **B17.** а) $\frac{26}{31}$; б) $\frac{7}{31}$. **B18.** а) 0,9; б) 0,6. **B19.** а) 0,7; б) 0,4.

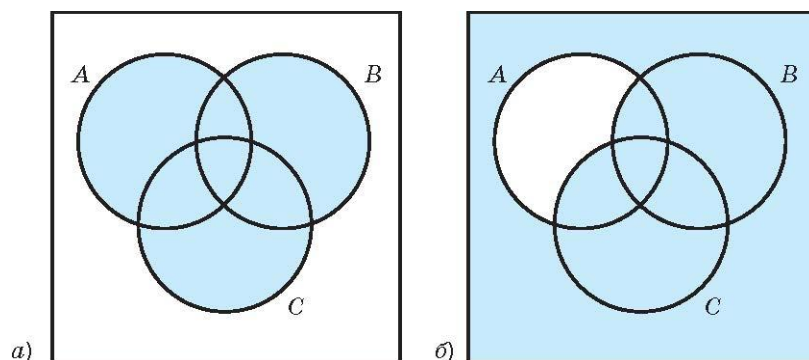
Уровень С

C2. а) Например, $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$; б) например, $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$.

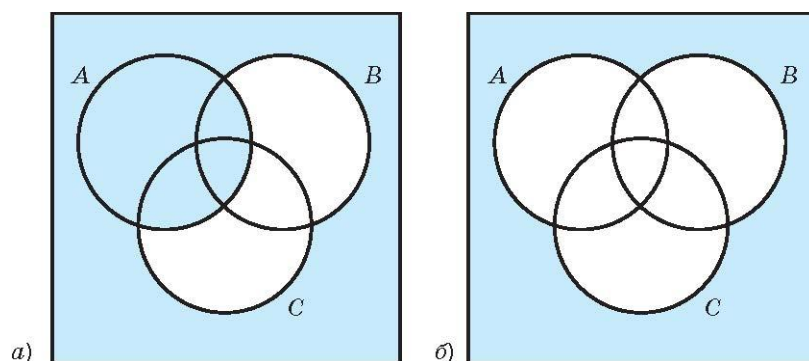
C3.



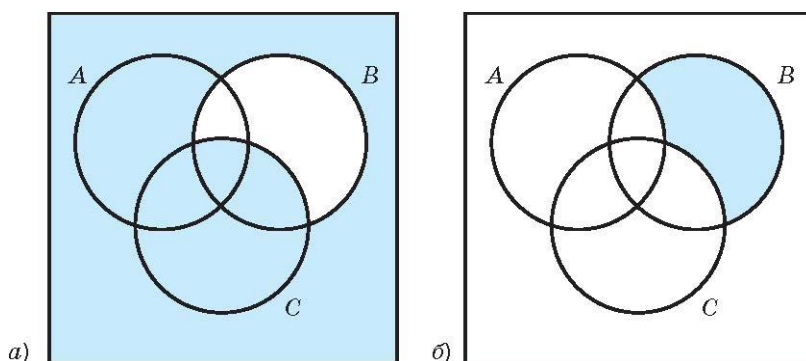
C4.



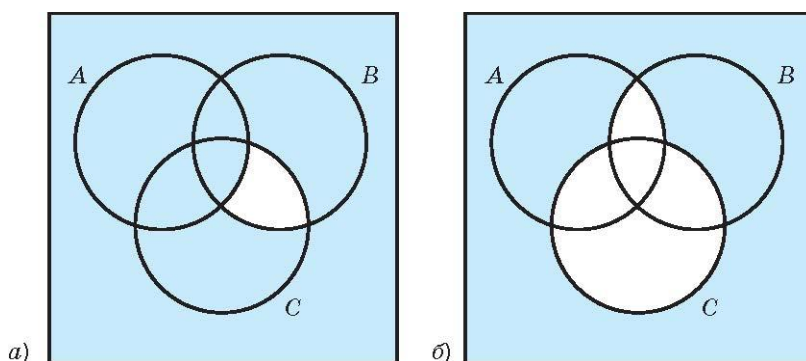
C5.



С6.



С7.



С9. а) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$. б) $\frac{2}{9}$. С10. а) 0,615; б) 0,904. С11. а) Пусть бабушка

надломит случайный пирожок. Если он с капустой, то нужно дать внуку любой пирожок из любого другого пакетика. Если надломленный пирожок с вишней, то дать внуку второй пирожок из этого же пакетика. б) Существует: пусть бабушка надламывает по одному случайному пирожку из каждого пакетика по очереди. Как только будет надломлен пирожок с вишней из какого-то пакетика, нужно дать внуку второй пирожок из этого же пакетика.

6.4. Условная вероятность. Умножение вероятностей.

Независимые события

Уровень А

А1. а) 0,4; б) 0,6. А2. а) 0,6; б) 0,2. А3. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{7}$. А4. а) 0,12; б) 0,48.

А5. а) 0,92; б) 0,4. А6. а) 0,9; б) $\frac{3}{4}$. А7. а) $\frac{15}{31}$; б) $\frac{16}{31}$. А8. а) $\frac{17}{33}$; б) $\frac{16}{33}$.

A9. а) $\frac{4}{17}$; б) $\frac{7}{17}$. **A10.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **A11.** а) 0,8; б) 0,2. **A12.** а) 0,21; б) 0,036.
A13. а) 0,09; б) 0,3. **A14.** а) Да; б) нет. **A15.** а) Да; б) нет. **A16.** а) Да; б) да.
A17. а) Да; б) нет. **A18.** а) 0,04; б) 0,008. **A19.** а) 0,16; б) 0,128.

Уровень В

B1. а) $\frac{14 \cdot 13}{26 \cdot 25} = 0,28$; б) $\frac{12 \cdot 11}{26 \cdot 25} = \frac{66}{325} \approx 0,203$. **B2.** а) 0,625; б) $\frac{2}{3}$. **B3.** а) 0,09;
 б) 0,14. **B4.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **B5.** а) и б). Оба варианта возможны. *Пример.* При
 бросании игральной кости вероятность чётного числа очков равна 0,5. Если
 известно, что выпало больше 1, то вероятность чётного числа очков растёт до
 $\frac{3}{5}$, а если известно, что выпало меньше 6 очков, то вероятность чётного
 числа очков падает до $\frac{2}{5}$. **B6.** а) 0,45; б) 0,9. **B7.** а) Первое событие вероятнее;
 б) первое событие вероятнее. **B8.** а) 0,3; б) 0,1. **B9.** а) 0,9216; б) 0,9984.
B10. а) 0,7; б) 0,82. **B12.** а) 0,8649; б) 0,9951. **B13.** а) 0,1128; б) 0,1164.
B14. а) 0,42; б) 0,96. **B15.** а) 0,504; б) 0,902. **B16.** а) 0,748; б) 0,182.
B17. а) $\approx 0,028$; б) $\approx 0,029$. **B18.** а) 0,3108; б) 0,408. **B19.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0,3.
B21. а) 93,5 %; б) 75,6 %. **B22.** а) 0,8; б) 0,72.

Уровень С

C1. а) $\frac{25}{36}$; б) $\frac{35}{36}$. **C2.** а) Более вероятно, что число ворон стало прежним;
 б) если вероятности попадания в белую и чёрную зоны различны, то более
 вероятно, что второй стрелок попал в ту же зону, что и первый (а если
 попадание в обе зоны равновероятно, то и рассматриваемые события
 равновероятны). **C3.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **C4.** а) Одинаково; б) 0,5. **C5.** а) $\frac{18}{343}$; б) $\frac{342}{343}$.

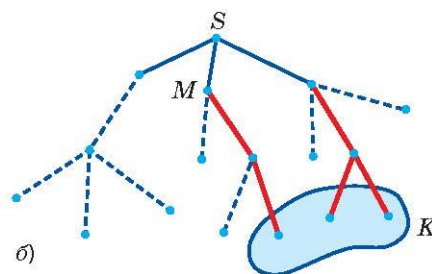
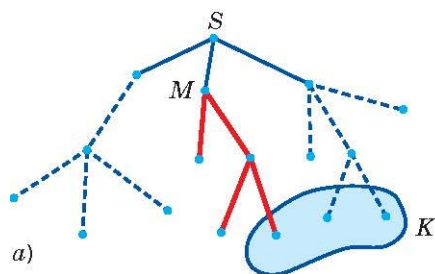
С6. а) $\frac{36}{325}$; б) $\frac{2}{19}$. **С8.** а) 0,71; б) 0,766. **С9.** а) Менять: при этом вероятность получить приз вырастает до $\frac{2}{3}$. б) А волнуется зря: вероятность не изменилась, она по-прежнему равна $\frac{2}{3}$. **С10.** а) Осталась прежней; б) на $pq(p - q) = 3p^2 - 2p^3 - p$, где $q = 1 - p$ (если $p < 0,5$, то вероятность снизилась, если $p > 0,5$, то выросла). **С11.** а) $\frac{32}{59}$; б) $\frac{16}{43}$. **С12.** а) Не являются независимыми, $P(K|A) = \frac{4}{29}$; б) события независимы. **С13.** Жребий несправедливый, поскольку вероятности у всех различны. а) $\approx 0,138$; б) $\approx 0,027$. **С14.** а) Событие А вероятнее в $\frac{2^{2n}}{2^{2n} - 2}$ раз; б) событие В вероятнее: если обозначить $C = \langle \text{у Мити и Вани поровну орлов} \rangle$, то $P(A) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$, $P(B|C) = \frac{(C_{2n}^n)^2}{C_{4n}^{2n}}$, и тогда $\frac{P(B|C)}{P(A)} = \frac{2^{2n} C_{2n}^n}{C_{4n}^{2n}} > 1$. **С15.** а) $\frac{20}{29}$; б) $\frac{380}{381}$.

6.5. Дерево случайного опыта

Уровень А

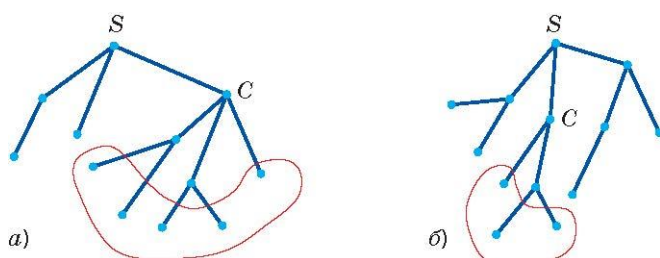
A1. а) 7; б) 8. **A2.** а) 3; б) 4. **A3.** а) 3; б) 4.

A4.



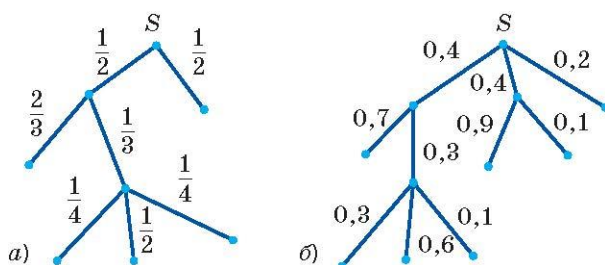
A5. а) Да; б) нет.

A6.

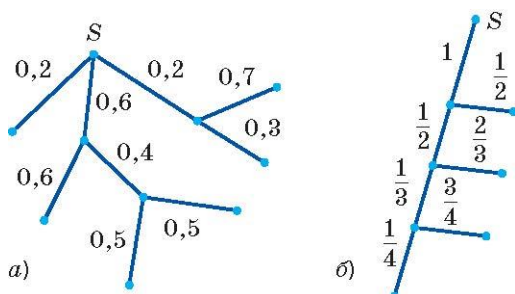


A7. а) Да; б) нет.

A8.



A9.



A10. а) 0,05; б) 0,3. **A11.** а) 0,435; б) 0,515. **A12¹⁰.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{5}{9}$. **A14.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{6}$.

A15. а) 0,2; б) 0,3. **A17.** а) 0,42; б) 0,51. **A18.** а) 0,64; б) 0,96. **A19.** а) $\frac{2}{11}$; б) $\frac{6}{11}$.

A20. а) 0,375; б) 0,875.

Уровень В

B1¹¹. а) e, f, g ; б) a, b, c, d, e, f . **B2.** а) a, b ; б) a, b, c, d, g . **B4.** а) b, c ; б) все

события: a, b, c, d, e, f, g, h . **B5.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{1}{3}$. **B6.** а) 0,036; б) 0,972. **B7.** а) 0,45;

¹⁰ Задание следует читать так: «Все рёбра, выходящие из одной вершины, равновероятны».

¹¹ Рисунок к заданию следует читать так: «Событие A изображено областью, закрашенной голубым, событие B — областью, закрашенной серым. b и d — элементарные события».

б) $\frac{41}{60}$. **B8.** а) 0,91; б) 0,069. **B9.** а) 0,724; б) 0,587. **B11.** а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$.

B12. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

Уровень С

C1. а) $\frac{3}{8}$; б) 0,5. **C2.** а) $\frac{3}{11}$; б) $\frac{5}{11}$. **C3.** а) 0,8; б) 0,6. **C4.** а) 0,4; б) 0,083.

C5. а) $\frac{108}{343} \approx 0,315$; б) $\frac{18}{343} \approx 0,052$.

6.6. Независимые испытания

Уровень А

A1. а) 0,7; б) $\frac{14}{37}$. **A2.** а) $\frac{4}{7}$; б) 0,68. **A3.** а) 1, 2, 3, 6; б) 1, 2, 3.

A4. а) Вероятность успеха $\frac{1}{6}$, вероятность неудачи $\frac{5}{6}$; б) вероятность успеха

$\frac{15}{29}$, вероятность неудачи $\frac{14}{29}$. **A5.** а) Ничья или победа команды «Химик»;

б) ничья. **A6.** а) Да; б) нет. **A7.** а) {О, РО, РРО; б) РРРО, РРРРО, РРРРРО}.

A8. а) {−++++, +++++, ++---, +++--}; б) {−++++, −++++, −++++, −++++, +---+, +---+, +---+, +---+, +---+, +---+, +---+, +---+}.

A9. а)

б)

1	3	3	1
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1	4	6	4	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

A10. а) 0,25; б) 0,125. **A11.** а) $\frac{25}{216}$; б) $\frac{25}{36}$. **A12.** а) Нет; б) да. **A13.** а) Да;

б) нет. **A14.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{8}$. **A15.** а) 0,128; б) 0,1024. **A16.** а) 0,096; б) 0,0384.

A17. а) 0,16; б) 0,04. **A18.** а) 0,0729; б) 0,059049. **A19.** а) 21; б) 252.

A20. а) $\frac{21}{2^7}$; б) $\frac{9}{2^7}$. **A21.** а) 0,1323; б) 0,02835. **A22.** а) $\frac{21}{128}$; б) $\frac{63}{256}$.
A23. а) 0,023; б) 0,046. **A24.** а) 0,737; б) 0,228.

Уровень В

B1. а) 0,488; б) 0,249856. **B2.** а) 0,14976; б) 0,995904. **B3.** а) 0,998; б) 0,944.
B4. а) 0,35; б) 0,47. **B5.** а) 0,68359375; б) 0,68359375. **B6.** а) $\frac{163}{2^8}$; б) $\frac{91}{2^7}$.
B7. а) 0,274; б) 0,998. **B8.** а) Практически невозможное; б) вполне вероятное.
B9. а) 0,66; б) 0,55. **B10.** а) 0,245; б) 0,744. **B11.** а) 5; б) 10. **B12.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{21}{10}$.
B13. а) B; б) A. **B14.** а) $P(A) : P(B) = 0,75$; б) $P(A) : P(B) = 1,5^8 \approx 25,6$.
B15. а) $\frac{160}{729}$; б) $\frac{21}{32}$. **B16.** а) 0,66; б) 0,76. **B17.** а) 0,324; б) 0,079.
B18. а) $\approx 0,132$; б) $\approx 0,000003$.

Уровень С

C1. а) $\approx 0,67$; б) $\approx 0,62$. **C2.** а) 0,045; б) 0,272. **C3.** а) q^k ; б) $q^{k-1} - q^n$. **C4.** а) Да;
 б) нет. **C5.** а) $\frac{C_{2n}^n}{4^n}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$. **C6.** а) $p \leq \frac{1}{n+1}$; б) $\frac{1}{n+1} \leq p \leq \frac{2}{n+1}$.
C7. а) 191; б) 383. **C8.** а) 8; б) 10. **C9.** а) Нет; б) да. **C10.** а) 10; б) 12. **C11.** а) 5;
 б) 8. **C12.** а) 0,5; б) $\frac{1+(1-2p)^n}{2}$. **C13.** а) $\frac{(n-1) \cdot 9^{n-2}}{10^{n-1}}$; б) $C_{n-1}^k \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{n-k-1}$.
C14. а) 11 : 5; б) 3 : 13. **C15.** а) 1; б) $\frac{C_{2n}^{n-1}}{2^{2n-1}}$.

6.7. Геометрическая вероятность

Уровень А

A1. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{9}$. **A2.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{8}$. **A3.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$. **A4.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **A5.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{9}$.
A6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **A7.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **A8.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{2}{\pi}$. **A9.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **A10.** а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{2}$. **A11.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **A12.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **A13.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **A14.** а) $\frac{57}{180}$; б) $\frac{28}{45}$.
A15. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$. **A16.** а) 0,75; б) 0,4. **A17.** а) 0,625; б) 0,2. **A18.** а) 0,25; б) 0,35.
A19. а) 0,3; б) 0,4. **A20.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$.

Уровень В

B1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{6}$. **B2.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$. **B3.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{7}{8}$. **B4.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{8}$. **B5.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{3}{8}$.
B6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{m}{m+n}$. **B7.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{n}{2(m+n)}$. **B8.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{m+2n}{2m+2n}$. **B9.** а) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$;
б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **B10.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **B11.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. **B12.** а) $\frac{\pi}{30}$; б) $1 - \frac{\pi}{15}$.
B13. а) $\frac{207-2\pi}{207}$; б) $\frac{36\pi}{133}$. **B14.** а) 0,2; б) 0,95. **B15.** а) 0,95; б) 0,4. **B16.** а) 0,4;
б) 0,1. **B17.** а) 0,18; б) 0,14. **B18.** а) 0; б) 0,2. **B19.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{8}$. **B20.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{12}$.
B21. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. **B22.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$.

Уровень С

C1. а) 0,9; б) 0,45. **C2.** а) $\frac{1}{3}$; б) 0. **C3.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{9}$. **C4.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **C5.** а) $\frac{25}{36}$;
б) $\frac{11}{36}$. **C6.** а) $\frac{3}{4}$; б) 0,32. **C7.** а) $\frac{1}{4}$. **C8.** Даны не три решения одной задачи, а
решения трёх разных задач, которые отличаются друг от друга. Во всех трёх
задачах по-разному определяется выбор случайной хорды.

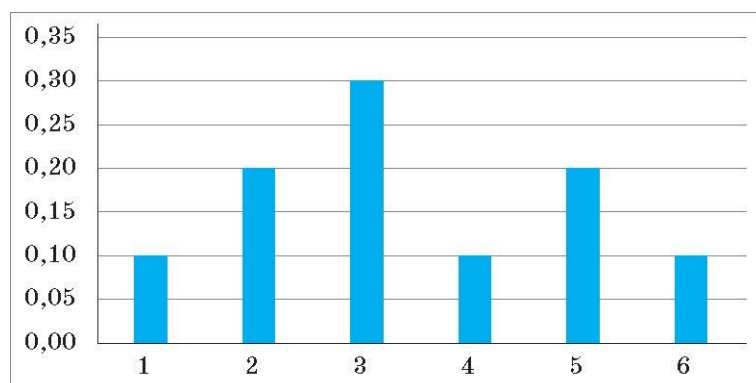
6.8. Случайные величины и распределения

Уровень В

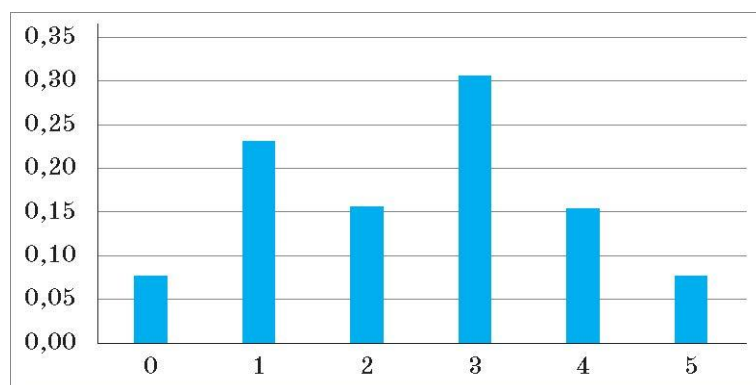
B1. а) 0,1; б) 0,15. **B2.** а) 0,2; б) 0,05. **B3.** а) 0,6; б) 0,9. **B4.** а) 0,75; б) 0,6.

B5.

а)



б)



B6. а) $H = 6 - R$; б)¹² $S = M + K$. **B7.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{36}$. **B8.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{36}$. **B9.** а) $\frac{1}{12}$;

б) $\frac{1}{9}$. **B10.** а) $S = Y + X$; б) $\frac{1}{6}$. **B11.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. **B11.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **B13.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,875 & 0,125 \end{pmatrix}$. **B14.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 11 \\ 36 & 36 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

B15. а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$. **B16.** а) $\begin{pmatrix} -7 & -5 & -3 & -1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -7 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$. **B17.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{1024}$. **B18.** а) $\frac{729}{1000000}$; б) $\frac{729}{15625}$.

B19. а) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ 0,3 & 0,21 & 0,147 & \dots & 0,3 \cdot 0,7^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$ или $P(X = k) = 0,3 \cdot 0,7^{k-1}$;

¹² Задание следует читать так: «игральную кость бросают дважды».

$$\text{б) } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ 0,8 & 0,16 & 0,032 & \dots & 0,8 \cdot 0,2^{k-1} & \dots \end{pmatrix} \text{ или } P(X = k) = 0,8 \cdot 0,2^{k-1}.$$

$$\mathbf{B20.} \text{ а) } \frac{35}{128}; \text{ б) } \frac{1}{128}. \mathbf{B21.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1/128 & 7/128 & 21/128 & 35/128 & 35/128 & 21/128 & 7/128 & 1/128 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1/256 & 1/32 & 7/64 & 7/32 & 35/128 & 7/32 & 7/64 & 1/32 & 1/256 \end{pmatrix}. \mathbf{B22.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/6^5 & 5/6^5 & 10/6^5 & 10/6^5 & 5/6^5 & 1/6^5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6^6 & 1/6^5 & 15/6^6 & 20/6^6 & 15/6^6 & 1/6^5 & 1/6^6 \end{pmatrix}.$$

Уровень С

$$\mathbf{C1.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 1/18 & 1/12 & 1/9 & 5/36 & 1/6 & 5/36 & 1/9 & 1/12 & 1/18 & 1/36 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 15 & 16 & 18 & 20 & 24 & 25 & 30 & 36 \\ 1/36 & 1/18 & 1/18 & 1/12 & 1/18 & 1/9 & 1/18 & 1/36 & 1/18 & 1/9 & 1/18 & 1/36 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/36 & 1/18 & 1/36 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C2.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 1/12 & 5/36 & 7/36 & 1/4 & 11/36 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11/36 & 1/4 & 7/36 & 5/36 & 1/12 & 1/36 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C3.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^2 & q^2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^3 & q^3 \end{pmatrix}. \mathbf{C4.} \text{ а) } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k; \text{ б) } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

$$\mathbf{C5.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 & 10 & 11 & \dots & 17 & 18 \\ \frac{1}{90} & \frac{2}{90} & \frac{3}{90} & \dots & \frac{9}{90} & \frac{9}{90} & \frac{8}{90} & \dots & \frac{2}{90} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}; \text{ б) } \frac{11}{45}.$$

$$\mathbf{C6.} \text{ а) } X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \text{ б) } X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C7.} \text{ а) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 16 & 4 & 0 \\ \hline 0,23 & 0,34 & 0,43 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 25 & 9 & 1 \\ \hline 0,14 & 0,45 & 0,41 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{C8. а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{5}{28} & \frac{15}{28} & \frac{15}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}.$$

$$\text{C9. а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{15} & \frac{7}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{120} & \frac{7}{40} & \frac{21}{40} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}.$$

C10. В обоих случаях найти распределение невозможно, поскольку неизвестно, связаны ли между собой эти величины.

$$\text{C11. а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,08 & 0,04 & 0,4 & 0,06 & 0,42 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0,4 & 0,12 & 0,06 & 0,42 \end{pmatrix}.$$

$$\text{C12. а) } \begin{pmatrix} -1795000 & -115000 & 5000 \\ 0,0001 & 0,01 & 0,9899 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -618000 & -38000 & 12000 \\ 0,03 & 0,12 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

$$\text{C13. а) } \begin{pmatrix} 1999950 & 4950 & 0 & -50 \\ 0,000003 & 0,000411 & 0,012334 & 0,987252 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 199999950 & 499950 & 0 & -50 \\ 0,00000007 & 0,00001845 & 0,00096862 & 0,99901286 \end{pmatrix}.$$

6.9. Математические характеристики случайных величин.

Закон больших чисел

Уровень В

B1. а) 2,7; б) 3. **B2.** а)¹³ 1,6; б) 6,5. **B3.** а) 7; б) 3. **B4.** а) 4; б) 8. **B5.** а) 4; б) 6.

B6. а) 23; б) -3. **B7.** а) $\frac{35}{3}$; б) 5,8. **B8.** а) 9,5; б) 6,6. **B9.** а) $I_1, I_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$,

$EI_1 = EI_2 = 0,5$; б) $S = I_1 + I_2$ и $ES = 1$. **B10** а) 2; б) 6; в) 3; г) 9. **B11.** а) 12,5;

б) $\frac{1}{p}$ при всех $0 < p < 1$. **B12.** а) 2; б) 3,5. **B13.** а) 1; б) $\frac{4}{3}$. **B14.** а) 14; б) 17,5.

B15. а) 7; б) 24. **B16.** а) $10p$; б) np . **B17.** а) $\begin{pmatrix} 0,49 & 1,69 & 13,69 & 18,49 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$; б) 5,41,

$\approx 2,326$. **B18.** а) 4,1; б) 3,5. **B19.** а) 5,1875; б) 5,1875. **B20.** а) 21,2; б) 12,25.

B21. а) 6; б) 24. **B22.** а) 12; б) 83. **B23.** а) Дисперсия $35/12 \approx 2,917$, станд. откл.

¹³ Задание следует читать так: «Для значения 4 вероятность должна быть 0,3».

$\approx 1,708$; б) дисперсия $35/6 \approx 5,833$, станд. откл. $\approx 2,415$. **В24.** а) 0,21; б) $p(1-p)$. **В25.** а) У второго, равны; б) нет. **В26.** а) 10,45; б) 25,48.

Уровень С

С1 а) Нет; б) да, 2. **С2** а) 0,63; б) 0,8. **С3** а) $\frac{161}{36}$; б) $\frac{91}{36}$. **С4.** а) У Васи больше;

б) в $\frac{26}{21}$ раза. **С5.** а) и б) математическое ожидание и дисперсия равны 1.

С6. а) $\frac{3}{p}$; б) $\frac{3(1-p)}{p^2}$. **С7** а) $\frac{8}{13}$; б) 20. **С8.** а) и б) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. **С9.** а) 6;

б) H_{25} , т. е. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} \approx 3,816$. **С10.** а) $6H_6 = 14,7$; б) $10H_{10} \approx 29,29$.

С11. а) 3720; б) -12 900. **С12.** а) $\approx -41,3283$; б) $\approx -26,726569$. **С13** а) Не важно, что делать; б) стоит купить билет. **С14.** а) Для первого вопроса, на 150; б) для первого. **С15.** а) Для второго, так как дисперсия меньше; б) для первого, так как дисперсия меньше.

Глава 7. Практико-ориентированные задачи

Уровень А

A1. а) 3214; б) 2431. **A2.** а) 8; б) 4. **A3.** а) 148; б) 297. **A4.** а) 12; б) 21. **A5.** а) 1,4; б) 0,7. **A6.** 24617. **A7.** 1,2 м. **A8.** 58. **A9.** 15,84 м². **A10.** 42,9%. **A11.** 225. **A12.** На 1,5 мм. **A13.** 65,39 см. **A14.** На 5,8 мм. **A15.** 0,9. **A16.** а) 1653; б) 4731. **A17.** а) 9; б) 8. **A18.** а) 88 м²; б) 32 м². **A19.** а) 20%; б) 14,7%. **A20.** а) 450; б) 650. **A21.** 4. **A22.** 0,95. **A23.** 1,04. **A24.** 14 425 р. **A25.** Да, на 11,4 км/ч.