АЛГЕБРА

Поурочное тематическое планирование

9 класс

Пособие
для учителей
общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21І

Серия «Сферы 1–11» основана в 2017 году

Линия учебно-методических комплектов «Сферы» по алгебре

Авторы: канд. пед. наук ***Е.А. Бунимович,*** канд.физ.-мат.наук ***В.А.Булычев***,
канд. пед. наук ***Л. В. Кузнецова***, канд. пед. наук ***С. С. Минаева***,
канд. пед. наук ***Л. О. Рослова***, канд. пед. наук ***С. Б. Суворова***

Алгебра. Поурочное тематическое планирование. 9 класс : пособие для учителей общеобразоват. организаций / [Е.А. Бунимович, В.А. Булычев, Л.В. Кузнецова и др.]; – М.: Просвещение, 2017. –ил.– (Сферы 1-11). – ISBN 978-5-09-045336-3.

Данное пособие сопровождает учебно-методический комплекс «Алгебра. 9 класс» линии «Сферы». В нём содержится поурочное тематическое планирование, разработанное группой авторов на основе образовательного стандарта, а также методические материалы, освещающие основные концептуальные подходы к разработке и использованию в учебном процессе УМК, создаваемых на основе современных тенденций в развитии новых технологий обучения.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-045336-3

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1. Содержание и методические особенности курса алгебры 7–9 классов

1.1. Состав учебно-методических комплектов для 7–9 классов

Учебно-методический комплект для каждого класса включает:

- учебник, функция которого – предъявление содержания и идеологии курса;
- задачник, основное назначение которого – создание возможностей для формирования навыков, организации дифференцированного обучения;
- тетрадь-тренажёр, предназначенную для целенаправленного формирования познавательной учебной деятельности;
- тетрадь-экзаменатор, содержащую материал для тематического и итогового контроля знаний учащихся;
- электронное приложение к учебнику, выполняющее целый ряд важных функций, включающее различные типы учебных цифровых объектов;
- методическое пособие для учителя, раскрывающее содержание и основные методические идеи курса и содержащее рекомендации по планированию и организации учебного процесса.

Учебник – центральное пособие комплекта. Все содержание учебника разбито на главы. Каждая глава открывается фрагментом рубрики «Интересно», создающей общий культурологический фон курса. Завершается каждая глава рубрикой «Подведём итоги», которая содержит вопросы и задания, позволяющие обозреть основное содержание темы.

Главы подразделяются на пункты. Информационное пространство каждого пункта организовано в рамках одного (иногда – двух) теоретического и теоретического и практического разворотов и включает фиксированный набор структурных элементов, каждый из которых выполняет определенную функцию.

Каждый теоретический разворот начинается с краткого введения, которая создает мотивационные предпосылки для изучения содержания пункта. Вводная рубрика на полях «Вы узнаете» задаёт основную учебную цель. Завершается разворот рубрикой «Вопросы и задания», направленной на работу с текстом пункта, проверку понимания основных теоретических фактов.

Основной текст на теоретическом развороте разбит на небольшие содержательные блоки, каждый из которых в комплексе с иллюстрациями и сопровождающим его дополнительным материалом является в определенной мере завершенным информационным фрагментом.

Каждый практический разворот содержит представительный набор заданий и упражнений (от базовых до задач исследований), которые задают основу работы, направленной на овладение теоретическим содержанием, формирование умений и навыков. Задания структурированы в соответствии с содержательным принципом и представлены на двух уровнях.

Набор структурных элементов пункта включает рубрики, стимулирующие активную работу с учебным текстом, интерес к изучаемому материалу, расставляющие в нём смысловые акценты.

Набор структурных элементов пункта включает рубрики , стимулирующие активную работу с учебным текстом, расставляющие в нём смысловые акценты, пробуждающие интерес, создающие историко-культурный фон.

Символ	***Расшифровка***	***Назначение***
см. рисунки на с. 6 учебника	«Внимание!» («восклицательный знак») «В фокусе» («лупа») «Математический блокнот» («скрепка») «Записываем решение» («ручка») «Справка» («кнопка»)	Утверждение, которое ученики должны запомнить Важная деталь, на которую ученикам следует обратить внимание Некоторая дополнительная информация, например исторические сведения Образцы записей решений Справочный материал: правила, свойства, формулы, таблицы

Последний содержательный пункт каждой главы носит название «*Узнайте больше*». В целом эта «сквозная» рубрика включает большой объём дополнительного материала, не относящегося к обязательному, но тесно примыкающего к изучаемым темам. Его назначение – углубить и расширить знания учащихся, познакомить их с новыми математическими идеями, сюжетами, с новыми видами задач и приёмами их решения. Многие вопросы из этой рубрики предусмотрены примерной программой.

Все перечисленные выше структурные элементы в целом характеризуют аппарат организации усвоения, который обеспечивает мотивационную сторону учебного процесса, целевые установки, создает предпосылки для последовательной, осмысленной работы с текстом. Структура системы упражнений в совокупности с завершающими разделами главы помогает ученику выработать индивидуальную траекторию усвоения материала, а учителю – обеспечить дифференцированное обучение.

Задачник В этом пособии содержится система упражнений по всем главам курса, которая дополняет и расширяет содержание практических разворотов учебника. Учебник и задачник вместе обеспечивают полноценную систему упражнений, позволяющую формировать умения и навыки, организовывать дифференцированную работу, согласуя уровень обучения с возможностями учащихся данного класса.

Система упражнений задачника представлена на трех уровнях. Упражнения первого уровня направлены в основном на отработку базовых знаний и умений, второго – на обеспечение более высоких уровней усвоения материала. Упражнения третьего уровня содержат трудные задачи, нацеленные на овладение новыми приемами решения, знакомство с новыми типами задач. Они предназначены для обеспечения работы с сильными учащимися, проявляющими значительный интерес к математике. Диапазон сложности в рамках этих трех уровней, как правило, весьма значителен.

Тетрадь-тренажёр – пособие на печатной основе. Его основное назначение – создание предпосылок для активизации познавательной деятельности школьников, для целенаправленного формирования познавательных учебных действий.

В соответствии с назначением этого пособия в нем принят иной, нежели в учебнике принцип структурирования учебного материала. Задания, как и в учебнике, представлены по главам, но сгруппированы они не в логике развертывания содержания, а по видам учебной деятельности. Эти виды деятельности таковы:

- работаем с текстом;
- осваиваем новое;
- анализируем и рассуждаем;
- выполняем тест

В рубрику «Работаем с текстом» входят задания разных типов. Одни из них направлены на отработку введённых в учебнике понятий. В других заданиях предлагается прочитать некоторый новый текст и ответить на вопросы, требующие осознанного восприятия, позволяющие проверить, как понят этот текст. Их можно использовать на разных этапах изучения материала, необязательно вначале.

В рубрике «Осваиваем новое» в основном содержатся задания, которые целесообразно выполнять на этапе введения нового материала; это тренировочные задания базового уровня, текст которых представлен на печатной основе.

Рубрика «Анализируем и рассуждаем» включает задания различных типов, в том числе задания на нахождение закономерностей, задачи-исследования и др. Их также можно использовать на разных этапах изучения математики, например в ходе обзорных уроков по главе. Отмечая большой потенциал этих задач в интеллектуальном развитии учащихся, хотелось бы подчеркнуть, что при их использовании от учителя требуется чувство меры. Иными словами, выбирая ту или иную задачу, нужно, прежде всего, ориентироваться на возможности учащихся.

Завершает каждую главу тест, который описывает «нижнюю планку» усвоения материала, т.е. обязательный уровень, которого должен достичь ученик, чтобы претендовать на положительную оценку. Этот тест ученики могут использовать, например, для самопроверки.

Тетрадь-тренажер – это пособие индивидуального пользования и задания выполняются непосредственно в нем. В тех случаях, когда требуется занести только ответ, для промежуточных вычислений, преобразований и т. д. учащиеся должны пользоваться своей рабочей тетрадью или черновиком.

Тетрадь-экзаменатор – пособие на печатной основе, содержащее материалы для тематического и итогового контроля. Вся предложенная система контроля в целом отвечает идеям уровневой дифференциации, принятой в данном УМК. И в соответствии с этим проверочные работы, включенные в пособие, предусматривают проверку достижения всеми учащимися обязательных результатов обучения, а также дают возможность каждому ученику проявить свои знания на более высоком уровне.

Электронная форма учебника, созданная АО «Издательство «Просвещение», представляет собой электронное издание, которое соответствует по структуре и содержанию печатному учебнику, а также содержит мультимедийные элементы, расширяющие и дополняющие содержание учебника.

Электронная форма учебника (ЭФУ) представлена в общедоступных форматах, не имеющих лицензионных ограничений для участников образовательного процесса. ЭФУ воспроизводится в том числе при подключении устройства к интерактивной доске любого производителя.

Для начала работы с ЭФУ на планшет или стационарный компьютер необходимо установить приложение «Учебник цифрового века». Скачать приложение можно из магазинов мобильных приложений или с сайта издательства.

Электронная форма учебника включает в себя не только изложение учебного материала (текст и зрительный ряд), но и тестовые задания (тренажёр, контроль) к каждой теме учебника, обширную базу мультимедиа контента. ЭФУ имеет удобную навигацию, инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

Данная форма учебника может быть использована как *на уроке в классе* (при изучении новой темы или в процессе повторения материала, при выполнении как самостоятельной, так и парной или групповой работы), так и *во время самостоятельной работы дома, при подготовке к уроку*, для проведения внеурочных мероприятий.

1.2. Особенности содержания курса алгебры 7–9 классов и методики его изучения

К общим идеям, составляющим основу концепции курса, относятся:

- интеллектуальное развитие учащихся средствами математики;
- акцент на общекультурную составляющую школьного курса математики при изложении содержания курса;
- формирование умения применять полученные знания в реальных ситуациях;
- внимание к мотивационной стороне обучения;
- развитие интереса к математике;
- создание условий для дифференцированного обучения.

В учебниках представлены следующие блоки раздела «Содержание курса» Примерных программ основного общего образования по математике[1]: *числа, тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции, статистика и теория вероятностей, элементы теории множеств и логика*. Кроме того, согласно программам при изложении основного содержания в учебниках там, где это возможно, органично присутствует историко-

[1] Примерная основная общеобразовательная программа основного общего образования (далее: Примерная программа)

культурологический фон, что способствует формированию у школьников представлений о роли математики в развитии цивилизации.

Числа. В отличие от традиционного подхода изучение арифметического материала не ограничивается рамками 5—6-х классов. Практика показывает, что базовые вычислительные навыки учащихся формируются недостаточно, поэтому учебник для 7-го класса начинается с арифметического блока. Здесь ещё раз, на новом уровне, уделяется внимание взаимосвязи обыкновенных и десятичных дробей, обучению различным приёмам сравнения дробей, совершенствованию навыков действий с рациональными числами, приёмам решения задач на проценты. Особого внимания заслуживает рассмотрение зависимостей между величинами, работа с формулами, с размерностями. В курс 7-го класса включено изучение прямой и обратной пропорциональностей – вопроса, имеющего большое общеобразовательное значение и межпредметный характер.

В 8-м и 9-м классах числовая линия получает дальнейшее развитие как в теоретическом, так и в практическом отношении. Сложная в идейном отношении тема о действительных числах распределена между материалом 8-го и 9-го классов. В 8-м классе в теме «Квадратные корни» учащиеся узнают о существовании чисел, не являющихся рациональными, об историческом значении этого факта для развития математики. В 9-м классе знания учащихся о числах обобщаются и систематизируются: обсуждаются этапы развития представлений о числе, вводится понятие действительного числа, рассматриваются соотношения между различными числовыми множествами.

На протяжении всего курса через систему упражнений поддерживаются и развиваются вычислительные навыки. При этом значительная роль отводится выполнению заданий с помощью калькулятора, что позволяет проводить математические исследования на основе числовых экспериментов, решать задачи с реальными данными, выполнять сложные расчеты, доводя результат до числа.

Тождественные преобразования. Введение вопросов, связанных с буквенным исчислением, базируется на знаниях, полученных учащимися в 5—6-х классах, где они познакомились с понятием буквенного выражения,

приобрели опыт составления буквенных выражений, вычисления их значений. Появление буквенных равенств в 7-м классе мотивируется опытом работы с числами, осознанием и обобщением приёмов вычислений. Свойства арифметических действий становятся для учащихся законами преобразований буквенных выражений, при этом список постулируемых законов определяется не принципами независимости и полноты, а методической целесообразностью.

В 7-м классе центральным вопросом является изучение действий с многочленами, разложения многочленов на множители, в 8-м классе — изучение действий с алгебраическими дробями. В 9-м классе изучение рациональных выражений получает логическое завершение и поднимается на более высокий теоретический уровень. Здесь вводятся понятия целого, дробного и рационального выражения, области определения рационального выражения. С целью противопоставления приводятся примеры иррациональных выражений. Вводится также понятие тождества. При этом представлены и функциональный, и алгебраический подходы к этому понятию. Рассматриваются разные способы доказательства тождеств.

Уравнения и неравенства. Развитие формально-оперативных навыков делает естественным переход к алгебраическому методу решения задач, что одновременно служит мотивом для обучения способам решения уравнений. В 7-м классе основное внимание уделяется линейным уравнениям. В 8-м классе объектом изучения становятся квадратные уравнения. В связи с введением понятий квадратного и кубического корня, рассматриваются уравнения $x^n = a$ для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

В 9-м классе линия уравнений получает развитие и в теоретическом, и в практическом отношении. Систематизируются и обобщаются сведения о целых уравнениях, затрагивается исторический аспект вопроса о формулах корней целых уравнений, внимание уделяется уже встречавшимся в 7-м и 8-м классах таким приёмам решения целых уравнений, как разложение на множители и замена переменной. Рассматриваются дробные уравнения; учащиеся знакомятся с общим приемом решения дробных уравнений, а также с приёмами решения некоторых частных видов таких уравнений.

Начало изучения вопроса об уравнениях с двумя переменными и их системах относится к 8-му классу. Особенностью изложения этого вопроса является то, что алгебраический аспект темы предваряется формированием широкого круга графических представлений. Вводится понятие уравнения с двумя переменными и его графика. Основное внимание здесь уделяется линейному уравнению и его графической интерпретации, рассматривается условие параллельности прямых. В учебнике представлены и графики некоторых нелинейных уравнений, в частности, окружность – график уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$.

Алгебраическая часть темы в основном посвящена решению и исследованию систем линейных уравнений.

В силу того что к этому времени учащиеся уже умеют решать квадратные уравнения, в учебнике рассматриваются и примеры решения простейших систем, содержащих одно уравнение второй степени (это первый проход в решении таких систем).

В 9-м классе решение систем уравнений, в которых одно уравнение первой степени, а другое второй, занимают центральное место и являются основной учебной целью данной темы. Кроме того, в систему упражнений включены разнообразные примеры нелинейных систем. При этом ставятся две дидактические цели: включение в учебную деятельность школьников всего арсенала приемов решения уравнений; развитие умения анализировать предложенную систему и найти целесообразный способ ее решения. Геометрическая составляющая здесь представлена знакомством с приемами графического решения систем уравнений с двумя переменными и уравнения с одной переменной.

Особое место в линии уравнений занимает решение текстовых задач. Начиная с 7-го класса основным становится алгебраический способ их решения, владение которым развивается по мере развития линии уравнений. Задачи распределены по всей линии, связанной с изучением уравнений и их систем. При этом в учебнике представлен весьма широкий круг задач, в том числе все виды задач, предусмотренные программой.

Неравенства изучаются в курсе 9-го класса. Первоначальное изложение вопроса о свойствах неравенств базируется на геометрической трактовке отношений «больше», «меньше», после чего учащиеся переходят к решению линейных неравенств и их систем. Сформированный аппарат применяется для решения различных математических задач (например, исследования функций, решения сюжетных задач), что вносит свой вклад в установление внутрипредметных связей.

Дается алгебраическая трактовка отношений «больше» и «меньше», рассматриваются различные способы доказательства неравенств. В связи с изучением квадратичной функции рассматривается алгоритм решения квадратных неравенств, учащиеся знакомятся также с методом интервалов.

Функции. В 7-м классе продолжается начатое годом ранее формирование умения работать с координатной плоскостью. Учащиеся строят прямые, заданные соотношениями $x = a$ и $y = в$, изображают на координатной плоскости различные области, заданные алгебраически (полосы, прямоугольники, полуплоскости и др.), решают обратную задачу – переходят от геометрического образа к его алгебраическому описанию.

После этого рассматриваются графики некоторых простейших зависимостей: $y = x$, $y = –x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$. Они используются для построения графиков различных кусочно-заданных зависимостей. Существенное место отводится анализу и интерпретации графиков реальных зависимостей.

Введение понятия функции, достаточно трудного для учащихся, а также изучение свойств функций относятся к материалу 8-го класса. Учащиеся опираются на полученные ранее знания о зависимостях между величинами, а также на имеющиеся к этому времени достаточно обширные графические представления. Изложение всего материала базируется на геометрических образах. Учащиеся получают представление об общих свойствах функций, таких как возрастание, убывание и др. Методическая цель состоит в том, чтобы сформировать понимание соответствующих терминов в контексте постановки различных задач, а также связи алгебраического, функционального и графического языков.

В 8-м классе рассматриваются функции $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ и их свойства, в 9-м классе — квадратичная функция. В ходе изучения квадратичной функции формируются некоторые общие представления о преобразованиях графиков. При этом в системе упражнений предусмотрен их перенос на другие ситуации.

Большое место при изучении конкретных функций занимают практические работы, вопросы и задачи прикладного и практического характера, анализ и интерпретация графиков реальных зависимостей.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Тема изучается в 9-м классе. Рассмотрению прогрессий предшествует формирование минимально необходимых представлений о числовых последовательностях: вводятся соответствующие термины и символы, рассматриваются способы задания последовательностей, различные примеры последовательностей. В учебнике рассматриваются интересные исторические факты и некоторые классические задачи, что позволяет расширить математический кругозор учащихся. Заметим, что формальное определение числовой последовательности как функции натурального аргумента здесь не предусматривается; на этом этапе оно не является дидактически значимым и не отвечает возрастным возможностям учащихся.

При изучении арифметической и геометрической прогрессий широко привлекаются примеры из окружающего мира. Завершается тема решением задач на простые и сложные проценты, что позволяет ещё раз продемонстрировать применение математики в жизни.

Элементы комбинаторики, вероятности и статистики. Изложение вероятностно-статистической линии начато в 5—6-х классах. Учащиеся решают комбинаторные задачи доступным им способом перебора всех возможных вариантов, получают некоторые представления о сборе и анализе информации, работают с таблицами и диаграммами. В 7—8-х классах вводятся некоторые статистические характеристики ряда распределений: среднее арифметическое, мода, медиана, размах. В этих классах формируется представление о вероятности случайного события, при этом исходным является статистический подход к понятию вероятности — через эксперимент со случайными исходами. В дальнейшем вводится классическое определение вероятности.

При решении комбинаторных задач усиливается роль логических рассуждений, базу для которых составляет опыт, приобретённый в процессе многократного использования метода полного перебора. Разъясняется комбинаторное правило умножения и на его основе выводится простейшая комбинаторная формула — формула для подсчёта числа перестановок.

В курсе 9-го класса представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии. В ней рассматриваются доступные учащимся примеры статистических исследований, в которых используются полученные ранее знания о способах представления данных и статистических характеристиках. В ходе описания исследований расширяется словарь статистических терминов. Включение данного материала направлено, прежде всего, на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые, например, в средствах массовой информации. Это предполагает не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первое знакомство с понятийным аппаратом этой необходимой каждому человеку области знаний.

При изучении этого материала привлекаются знания из других разделов курса, в частности, вычисляются отношения, проценты, сравниваются дроби и т. д. При решении задач применяется калькулятор, что позволяет активно работать с реальными, практическими данными.

Также в качестве приложения представлены темы, предполагаемые в перспективе для изучения в основной школе, в том числе: Независимые события. Случайные величины. Испытания Бернулли. Закон больших чисел. Знакомство с этими материалами поможет учителю углубить и расширить свои знания по этой новой для российской школы линии, выбрать то, что можно предложить для работы на кружках, занятиях по предпрофильной подготовке.

Элементы теории множеств и логика. Сквозная линия «Множества и логика» получила свое начало уже в предыдущем звене. Предусмотренные программой теоретико-множественные понятия были введены в 6 классе. В

7–9 классах теоретико-множественный язык и символика обогащаются и активно используются во всех разделах курса (алгебраические выражения, функции, уравнения, неравенства, элементы теории вероятностей и статистики).

В этом звене уделяется внимание совершенствованию логической культуры и языка, основы которых были заложены на предыдущем этапе. Формулируются определения, теоремы, проводятся доказательства, активно используются логические связки «если …, то …», «в том и только том случае», «или», «и». Учащиеся учатся распознавать верные и неверные утверждения, приводить примеры, иллюстрирующие те или иные свойства, работают с контрпримерами.

Кроме того, в методическое пособие для 9 класса включено специальное приложение «Язык и логика», в котором раскрывается логическое содержание таких понятий, как высказывание и предложение с переменными, суть логических связок «и», «или», «не», равносильность и следование. Учитель может использовать этот материал для индивидуальной работы с сильными учащимися, на внеклассных занятиях, а также в зависимости от уровня подготовки класса и на общих уроках (выборочно или целиком).

К *методическим особенностям* учебников относятся:

- мотивированное и доступное изложение теоретических сведений, широкое использование наглядности, опора на здравый смысл и интуицию;
- структурирование содержания курса по спирали, что позволяет возвращаться к изученному ранее материалу на новом уровне, включать знания в новые связи, формировать их в системе;
- акцент на практическое применение математики в реальной жизни, в смежных дисциплинах;
- создание условий для организации учебной исследовательской деятельности, формирования условий для самостоятельности и критичности мышления;
- обеспечение широких возможностей для дифференциации и индивидуализации обучения;
- привлечение современных сюжетов, близких жизненному опыту учащихся, в теоретическом и задачном материале; наличие интересных для учащихся форм подачи материала.

1.3. Программа курса алгебры 7-9 классов

7 класс (102 ч)

1. Дроби и проценты (14 ч)

Дроби обыкновенные и десятичные, переход от одной формы записи дробей к другой. Сравнение дробей. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями. Степень с натуральным показателем: определение, запись больших и малых чисел.

Понятие процента, запись процентов в виде дроби и дроби в виде процентов. Основные задачи на проценты, решение задач из реальной практики.

Статистические характеристики: среднее арифметическое, мода, размах. Случайные события, достоверные и невозможные события, равновозможные (равновероятные) события, противоположные события, иллюстрация отношений события с помощью кругов Эйлера. Частота случайного события. Случайные опыты (эксперименты).

2. Прямая и обратная пропорциональность (10 ч)

Реальные зависимости, переменная, описание зависимостей с помощью формул, вычисления по формулам. Прямая пропорциональность, свойство прямой пропорциональности. Обратная пропорциональность, свойство обратной пропорциональности.

Решение текстовых задач.

Пропорция, основное свойство пропорции, решение задач с помощью пропорций. Пропорциональное деление.

3. Введение в алгебру (11 ч)

Буквенные выражения, числовое значение буквенного выражения. Противоположные выражения. Допустимые значения букв в выражении. Буквенная запись свойств действий над числами.

Преобразование буквенных выражений, тождественно равные выражения, правила преобразование сумм и произведений, правила раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

4. Уравнения (9 ч)

Уравнение, корень уравнения, правила преобразования уравнений. Линейное уравнение, число корней линейного уравнения. Решение линейных уравнений. Составление уравнений по условию задачи. Решение задач алгебраическим методом.

5. Координаты и графики (9 ч)

Координата точки на прямой. Числовые промежутки. Расстояние между точками координатной прямой.

Множества точек на координатной плоскости: вертикальные и горизонтальные прямые, полосы, полуплоскости, прямоугольники. Графики зависимостей: $y = x; y = -x;$ $|y| = |x|;$ $y = x^2;$ $y = x^3;$ $y = |x|$. Чтение и построение графиков реальных зависимостей.

6. Многочлены (18 ч)

Свойства степени с натуральным показателем. Преобразование выражений, содержащих степени с натуральным показателем: умножение и деление степеней, возведение степени в степень, возведение в степень произведения и частного.

Одночлен, стандартный вид одночлена. Многочлен, стандартный вид многочлена. Многочлены с одной переменной. Сложение и вычитание многочленов. Противоположные многочлены. Умножение одночлена на многочлен, умножение многочлена на многочлен.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности. Преобразование трехчлена в квадрат двучлена. Выделение из трехчлена квадрата двучлена.

Решение текстовых задач с помощью уравнений.

7. Разложение многочленов на множители (15 ч)

Вынесение общего множителя за скобки. Способ группировки. Применение разложения на множители для решения различных задач.

Формула разности квадратов. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения. Формулы разности и суммы кубов.

Применение нескольких способов разложения на множители.

Решение уравнений с помощью разложения на множители.

8. Комбинаторика (9 ч)

Решение комбинаторных задач с помощью перебора всех возможных вариантов.

Комбинаторное правило умножения. Правило сложения. Перестановки. Факториал. Формула числа перестановок.

9. Математика в историческом развитии[2]

История возникновения десятичных дробей, десятичная система счисления. С. Стевин. Зарождение процентов в денежных расчетах, происхождение термина и символа.

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Риторическая алгебра. Геометрическая алгебра в древнем мире. Зарождение и совершенствование буквенной символики роль Ф. Виета, Р. Декарта, И. Ньютона. История возникновения знаков действий и скобок. Возникновение и эволюция обозначение степени, поиск новых способов записи показателя степени в связи с появлением компьютеров.

Становление теории уравнений. Диофант Александрийский, применение буквы для обозначения неизвестной величины. Мухаммед аль-Хорезми, трактат «Книга о восстановлении и противопоставлении», приемы решения уравнений.

Изобретение метода координат, перевод с геометрического языка на язык алгебры. Р. Декарт.

Зарождение комбинаторных идей в древности. Развитие комбинаторики. Я.Бернулли, книга «Искусство предположений». Происхождение терминов «перестановка», «факториал».

Резерв (7 ч)

8 класс (102 ч)

1. Алгебраические дроби (20 ч)

Алгебраическая (рациональная) дробь, допустимые значения переменных в алгебраической дроби. Основное свойство дроби, приведение дроби к новому знаменателю, сокращение дробей.

Сложение и вычитание алгебраических дробей. Умножение и деление алгебраических дробей. Примеры на все действия с алгебраическими дробями.

Степень с целым показателем. Стандартный вид числа, запись больших и малых чисел. Свойства степени с целым показателем. Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями.

Решение уравнений. Решение текстовых задач.

Выделение целой части из алгебраической дроби.

---

[2] Исторические сведения представлены в виде сквозной линии, распределенной по соответствующим вопросам курса.

2. Квадратные корни (17 ч)

Задача о нахождении длины стороны квадрата по его площади, знак квадратного корня (радикал). Примеры извлечения «точных» квадратных корней.

Доказательство утверждения: не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Начальные представления об иррациональных числах. Нахождение десятичных приближений квадратных корней путем оценки. Изображение иррациональных чисел точками на координатной прямой.

Теорема Пифагора. Построение отрезков с иррациональными длинами.

Квадратный корень: алгебраический подход. Исследование вопроса о существовании и количестве квадратных корней из числа a. Арифметический квадратный корень. Формула $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, где $a \geq 0$. Уравнений вида $x^2 = a$. График зависимости $y = \sqrt{x}$.

Свойства квадратных корней: корень из произведения и частного, корень из степени. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни.

Кубический корень. Уравнение вида $x^3 = a$.График зависимости $y = \sqrt[3]{x}$.

Двойные радикалы.

3. Квадратные уравнения (17 ч)

Квадратное уравнение, приведенное квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом. Исследование квадратного уравнения по его дискриминанту.

Решение текстовых задач.

Неполные квадратные уравнения, их виды. Приемы решения неполных квадратных уравнений.

Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета. Применение формул Виета для решения различных задач.

Квадратный трехчлен, корни квадратного трехчлена. Разложение на множители квадратного трехчлена.

Целые корни уравнения с целыми коэффициентами.

4. Системы уравнений (20 ч)

Уравнение с двумя переменными, решение уравнения с двумя переменными. Правила преобразований уравнения с двумя переменными.

Решение уравнений с двумя переменными в целых числах. График уравнения с двумя переменными.

Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Уравнение прямой вида $y = kx + l$. Угловой коэффициент прямой. Критерий параллельности прямых.

Система уравнений. Решение систем способом сложения. Решение систем способом подстановки. Графическая интерпретация решения систем двух линейных уравнений. Примеры решения систем, в которых одно из уравнений не является линейным.

Решение текстовых задач с помощью систем уравнений.

Применение алгебраических методов для решения задач на координатной плоскости.

Геометрическая интерпретация уравнений с двумя переменными.

5. Функции (13 ч)

Чтение графиков реальных процессов.

Функция, способы задания функции, функциональная символика, область определения функции.

Числовые промежутки, их обозначение.

График функции. Свойства функции: возрастание и убывание на промежутке; сохранение знака на промежутке; нули функции; наибольшее (наименьшее) значение; непрерывность. Отражение свойств функции на графике.

Линейная функция и ее график. Свойства линейной функции. Аппроксимирующая прямая.

Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график. Гипербола. Асимптоты.

Целая и дробная части числа.

6. Вероятность и статистика (10 ч)

Статистические характеристики: характеристики среднего и разброса, медиана.

Частота и вероятность случайного события.

Вероятностная шкала. Элементарные события. Классическое определение вероятности.

Сложные эксперименты (задачи о двух монетах, о двух кубиках, о трех кубиках). Геометрическая вероятность.

Сложение вероятностей.

7. Математика в историческом развитии

Недостаточность рациональных чисел для геометрических измерений, открытие математиков Древней Греции. Введение иррациональных чисел, происхождение термина «иррациональный». Исследование некоторых иррациональностей.

История появления термина «радикал» (корень), символа $\sqrt{\ }$.

Введение древнегреческим математиком Апполонием Пергским слова «парабола» для названия кривой.

Задачи на квадратные уравнения в древних рукописях. Основные вехи развития теории квадратных уравнений в трудах аль-Хорезми, Ф. Виета, Л. Фибоначчи, Дж. Кардано, Р. Декарта, И. Ньютона.

Диофант Александрийский. Решение уравнений в целых числах. Задача о фазанах и кроликах.

Зарождение аналитической геометрии. П. Ферма, Р. Декарт.

Истоки теории вероятностей. Классическое определение вероятности, П.С. Лаплас. Задача Даламбера. Задачи Бюффона.

Резерв (5 ч)

9 класс (102 ч)

1. Неравенства (18 ч)

Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, соотношения между ними. Действительные числа и координатная прямая. Представление действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Сравнение действительных чисел.

Числовые неравенства, свойства числовых неравенств. Линейные неравенства с одной переменной, решение неравенств. Равносильность уравнений и неравенств.

Решение систем линейных неравенств с одной переменной.

Доказательство неравенств.

Погрешность приближенного значения, точность приближения. Способы записи приближенных значений. Относительная погрешность.

Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби.

Среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и связывающие их неравенства.

2. Квадратичная функция (17 ч)

Квадратичная функция. Парабола. Область определения и область значений квадратичной функции.

График и свойства функции $y = ax^2$. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), формулы координат вершины параболы. Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$. Применение свойств квадратичной функции при решении задач из реальной практики, из смежных предметов.

Квадратные неравенства, решение квадратных неравенств. Метод интервалов.

График дробно-линейной функции. Графики уравнений, содержащих модули.

3. Уравнения и системы уравнений (28 ч)

Рациональные выражения, их виды. Область определения рационального выражения.

Преобразование рациональных выражений. Тождество, доказательство тождеств.

Целые уравнения. Решение уравнений третьей и четвертой степени.

Дробные уравнения, решение дробных уравнений. Решение текстовых задач.

Примеры графиков уравнений с двумя переменными. Графическое решение систем уравнений с двумя переменными. Алгебраическое решение систем уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач. Применение алгебраических методов при решении задач на координатной плоскости.

Графическое решение уравнений с одной переменной.

Решение уравнений второй степени. Уравнения с параметром.

4. Арифметическая и геометрическая прогрессии (18 ч)

Числовые последовательности, способы их задания. Последовательность Фибоначчи.

Арифметическая прогрессия и ее свойства. Формула n –го члена арифметической прогрессии. Геометрическое изображение арифметической прогрессии. Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия и ее свойства. Формула n –го члена геометрической прогрессии. Сумма первых n членов геометрической прогрессии.

Простые и сложные проценты.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Треугольник Паскаля.

5. Статистика и вероятность, комбинаторика (11 ч)

Выборочные исследования (выборка и совокупность, таблицы и диаграммы частот, анализ результатов исследования).

Интервальная таблица частот. Гистограмма частот.

Характеристика разброса (размах и отклонения, дисперсия и стандартное отклонение).

Статистическое оценивание и прогноз.

Размещения и сочетания.

Вероятность и комбинаторика.

6. Математика в историческом развитии

Развитие представлений о числе: рациональные числа, открытие иррациональных чисел, действительные числа. Уточнение приближений числа π с древнейших времен до сегодняшнего дня.

История вопроса о нахождении формул корней алгебраических уравнений, неразрешимость в радикалах уравнений степени, большей четырех. Н. Тарталья, Дж. Кардано, Н. Х. Абель, Э. Галуа.

Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) о кроликах, числа Фибоначчи. Задача о шахматной доске. Задачи на прогрессии в древних папирусах.

Истоки зарождения статистики как науки, Ф. Гаусс. Исторические примеры применения статистических исследований. А. Кетле, Ф. Бенфорд и «закон аномальных чисел», Д. Граунт. Вероятностные подходы в статистике. Русская школа теории вероятностей. П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А.Н. Колмогоров.

Резерв (10 ч)

ЧАСТЬ 2. Методические рекомендации

2.1. Примерное поурочное планирование учебного материала

Приводимое ниже поурочное планирование носит рекомендательный характер. В конкретном классе при конкретных условиях число уроков на изучение того или иного пункта, главы может меняться. Более подробное распределение уроков по пунктам приведено для курса, рассчитанного на 5 уроков математики в неделю, т.е. 3 недельных часа алгебры.

Нередко учебный план школы предусматривает 4 часа алгебры в неделю при 6-часовом недельном курсе математики. В таких случаях дополнительным временем можно распорядиться по-разному. Можно, например, в течение всего учебного года в рамках отпущенных часов увеличивать время на изучение каждой темы. Это позволит больше времени уделять решению задач повышенного уровня, более детально работать с задачами-исследованиями, не пропускать рассмотрение материала рубрики «Узнайте больше», содержание которой тесно примыкает к содержанию главы и, как правило, отражено в Примерных программах в качестве вопросов, относящихся к повышенному уровню. В 9 классе в каждой главе содержится по две работы из этой рубрики. В целом в УМК достаточно материала для насыщения этих дополнительных часов.

В приведенной ниже таблице в графе «Число уроков» в левом столбце по каждой главе приводится поурочное планирование для трех часов алгебры в неделю (всего 102 часа). В правом столбце указано суммарное число уроков, которое целесообразно отвести на изучение главы при 4 уроках алгебры в неделю (всего 136 часов).

Глава и пункт учебника		*Число уроков*	
Глава 1. Неравенства		**18**	**23**
1.1 1.2	Действительные числа. «Универсальное имя» действительных чисел	3	
1.3 1.4 1.5	Общие свойства неравенств Решение линейных неравенств Решение систем линейных неравенств	9	
1.6	Доказательство неравенств	2	
1.7	Что означают слова «с точностью до …»	2	
	Обзор и контроль	2	
Глава 2. Квадратичная функция		**16**	**24**
2.1	Какую функцию называют квадратичной	2	
2.2 2.3 2.4	График и свойства функции $y = ax^2$ Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат График функции $y = ax^2 + bx + c$	8	
2.5 2.6	Квадратные неравенства Метод интервалов	4	
	Обзор и контроль	2	
Глава 3. Уравнения и системы уравнений		**28**	**34**
3.1 3.2	Рациональные выражения Тождество	5	
3.3 3.4	Целые уравнения Дробные уравнения	7	
3.5	Решение задач	3	

3.6 3.7	Графическое решение систем уравнений с двумя переменными Алгебраическое решение систем уравнений с двумя переменными	7	
3.8	Решение задач	2	
3.9.	Графическое решение уравнений с одной переменной	2	
	Обзор и контроль	2	
Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**18**	**24**
4.1	Числовые последовательности	2	
4.2 4.3	Арифметическая прогрессия Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии	5	
4.4 4.5	Геометрическая прогрессия Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии	5	
4.6	Простые и сложные проценты	4	
	Обзор и контроль	2	
Глава 5. Статистика и вероятность		**11**	**15**
5.1	Выборочные исследования	2	
5.2	Интервальный ряд. Гистограмма	2	
5.3	Характеристика разброса	2	
5.4	Статистическое оценивание и прогноз	1	
5.5	Размещения и сочетания	2	
	Обзор и контроль	2	
	Повторение. Итоговая контрольная работа	**10**	**16**

2.2. Методические рекомендации по главам учебника

<u>ГЛАВА 1. Неравенства (18 уроков)</u>

Примерное поурочное планирование учебного материала

№ пункта	*Название пункта учебника*	*Число уроков*
1.1 1.2	Действительные числа. «Универсальное имя» действительных чисел	3
1.3 1.4 1.5	Общие свойства неравенств Решение линейных неравенств Решение систем линейных неравенств	9
1.6	Доказательство неравенств	2
1.7	Что означают слова «с точностью до …»	2
	Обзор и контроль	2

<u>Основные цели</u>: познакомить учащихся со свойствами числовых неравенств и их применением к решению задач (сравнение и оценка значений выражений, доказательство неравенств и др.); сформировать умение решать линейные неравенства с одной переменной и их системы; познакомить с применением неравенств в практике измерений, дать представление о точности и относительной погрешности измерений.

<u>Обзор главы и методический комментарий.</u> Изучение темы начинается с обобщения и систематизации знаний о действительных числах. Здесь речь идёт не о построении какой-либо теории действительных чисел, а повторяются известные учащимся термины — натуральные, целые, рациональные, действительные числа; рассматриваются отношения между соответствующими числовыми множествами; вводится понятие бесконечной десятичной дроби как универсального имени действительного числа. Вопрос о периодических и непериодических бесконечных десятичных дробях в обязательном тексте учебника не рассматривается, а отнесён к рубрике этой же главы «Узнайте больше».

Далее формулируются свойства числовых неравенств, которые иллюстрируются геометрически, подтверждаются числовыми примерами. После введения алгебраической трактовки отношений «больше» и «меньше» между числами (п. 1.6) учащиеся смогут еще раз обратиться к этим свойствам и доказать их алгебраически.

Рассмотрение вопроса о решении неравенств с одной переменной сопровождается введением понятия равносильных уравнений и неравенств, формулировкой свойств равносильных уравнений и неравенств. Приём решения линейного неравенства сопоставляется с приёмом решения линейного уравнения, и акцент делается на сходство и различия в этих приёмах. Приобретённые учащимися умения получают развитие при решении систем линейных неравенств с одной переменной. Система упражнений содержит значительное число задач на применение аппарата неравенств – и математических (в том числе геометрических), и практико-ориентированных.

В теме рассматривается также вопрос о доказательстве неравенств. Учащиеся знакомятся с некоторыми приёмами доказательства неравенств и применяют их в ходе решения несложных задач.

При работе с вопросами, представленными в главе целесообразно обратить внимание на ряд методических особенностей, характеризующих подходы к изложению материала.

Первые два пункта посвящены систематизации сведений о действительных числах. Материал, связанный с теорией действительных чисел, сложен в идейном отношении и обычно плохо усваивается учащимися. В связи с этим содержание пунктов тщательно отобрано — рассматриваются только те вопросы, которые можно отнести к разряду общеобразовательных и целесообразно обсуждать со всеми девятиклассниками. Это, прежде всего, понятие множества действительных чисел как объединения рациональных и иррациональных чисел; изображение действительных чисел точками на координатной прямой, недостаточность рациональных чисел для заполнения всей прямой и заполнение всех ее «пустот» действительными числами. Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что именно взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и точками координатной прямой позволяет использовать в математике два равноправных языка — алгебраический и геометрический.

Принципиальным в принятой методике является следующее: бесконечная десятичная дробь не является исходным понятием для определения действительного и иррационального чисел (как это делается в ряде учебников), а рассматривается как универсальное имя действительного числа. При этом вопрос о периодических и непериодических дробях отнесён к необязательному материалу — он включён в пункт 1.7 (*«Узнайте больше»*).

При изложении вопроса о решении линейных неравенств (п. 1.4) систематизируются и обобщаются сведения о линейных уравнениях. Знания учащихся о линейных уравнениях и линейных неравенствах увязываются в единое целое. Алгоритм решения линейного неравенства сопоставляется с алгоритмом решения линейного уравнения — указывается на их явное сходство и отмечаются различия. Наглядная иллюстрация связи решения линейного уравнения и двух соответствующих неравенств на одной координатной прямой позволит впоследствии, при отработке умения решать неравенства, дать учащимся в руки инструмент для самопроверки. Так, в случае сомнений в правильности решения ученик сможет поступить следующим образом: решить соответствующее линейное уравнение $f(x) = g(x)$. Корень этого уравнения разобьёт координатную прямую на два луча, один из которых служит множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$, а другой — множеством решений неравенства $f(x) < g(x)$. Подставив в исходное неравенство какое-нибудь число из любого из этих промежутков, можно проверить правильность полученного решения.

Особенностью задач на доказательство неравенств (п. 1.6) является то, что многие из них могут быть доказаны не единственным способом.

В пункте предлагается два основных пути доказательства неравенств:

1) на основе составления разности левой и правой частей неравенства и последующего сравнения этой разности с нулём;

2) переход от одного неравенства к другому, ему равносильному, на основе свойств неравенств.

Оба пути равноправны. Но нужно следить за аккуратностью записей в том и другом случае. Заметим, что Примерные программы по математике ПООП[i] не предусматривают вопрос о доказательстве неравенств. Поэтому соответствующие умения могут рассматриваться как результат усвоения темы, но не как итоговый результат обучения.

Изложение материала о периодических и непериодических бесконечных десятичных дробях (в рубрике «Узнайте больше») вполне доступно для самостоятельного изучения учащимися. Необходимо только порекомендовать школьникам выполнять на бумаге вслед за текстом учебника все выкладки, представленные в нём. В зависимости от уровня подготовленности можно рассмотреть не весь материал или опустить упражнения, связанные с представлением периодических дробей в виде обыкновенных. Однако познакомиться с этим вопросом на уровне текста учебника всё же целесообразно.

Основные виды деятельности. Приводить примеры иррациональных чисел; распознавать рациональные и иррациональные числа; изображать числа точками координатной прямой.

Находить десятичные приближения рациональных и иррациональных чисел; сравнивать и упорядочивать действительные числа. Описывать множество действительных чисел. Использовать в письменной математической речи обозначения и графические изображения числовых множеств, теоретико-множественную символику.

Использовать разные формы записи приближённых значений; делать выводы о точности приближения по записи приближённого значения.

Формулировать свойства числовых неравенств, иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически; применять свойства неравенств в ходе решения задач.

Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств с одной переменной. Доказывать неравенства, применяя приёмы, основанные на определении отношений «больше» и «меньше», свойствах неравенств, некоторых классических неравенствах.

В результате изучения главы учащиеся должны уметь: пользоваться введенной терминологией; сравнивать и упорядочивать действительные числа, соотносить их с координатной прямой; решать несложные линейные неравенства, системы неравенств, двойные неравенства, применять их при решении задач.

Глава 2. Квадратичная функция (19 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

№ пункта	*Название пункта учебника*	*Число уроков*
2.1	Какую функцию называют квадратичной	3
2.2 2.3 2.4	График и свойства функции $y = ax^2$ Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат График функции $y = ax^2 + bx + c$	9
2.5 2.6	Квадратные неравенства Метод интервалов	5
	Обзор и контроль	2

Основные цели: познакомить учащихся с квадратичной функцией как с математической моделью, описывающей многие зависимости между реальными величинами; научить строить график квадратичной функции и читать по графику её свойства; сформировать умение использовать графические представления для решения квадратных неравенств.

Обзор главы и методический комментарий. Этот вводный фрагмент, сопровождаемый серией разнообразных заданий, делает дальнейшее изучение материала более осознанным и целенаправленным.

Цель упражнений **№116—118** состоит в овладении одним из алгоритмов построения графика квадратичной функции, идея которого такова: имея пару симметричных точек параболы, можно построить её ось симметрии и найти координаты вершины. Назначение упражнений **№119—221** — восстановление навыка использования функциональной символики, а также приёмов нахождения значения y по заданному значению x (и наоборот) с использованием формулы и графика. При выполнении упражнений **№122—123** учащиеся вспомнят термин «нуль функции», а также геометрический эквивалент высказывания «точка $x = a$ является нулём функции $y = f(x)$».

Далее изложение материала осуществляется в следующей последовательности. Сначала рассматриваются свойства и график функции $y = ax^2$. Затем изучается вопрос о графиках функций $y = ax^2 + q$, $y = a(x + p)^2$, $y = a(x + p)^2 + q$, которые получаются с помощью сдвига вдоль осей координат стандартной параболы $y = ax^2$. Полезно вначале изобразить график схематически. (В дальнейшем учащиеся будут делать это мысленно. Это очень важное умение, «организующее» деятельность по построению графика и предупреждающее ошибки.) Полученные знания используются учащимися при построении ряда других графиков, таких, как $y = |x| - 2$, $y = \sqrt{x+4}$, $y = (x - 2)^3$ и т. д.

Надо обратить внимание на **№152** (задача-исследование). В результате её решения учащиеся знакомятся с понятием четной функции и свойством графика четной функции. В сильном классе можно дать логическое завершение проведенного исследования, познакомив учащихся с понятием нечетной функции. Ввести это понятие рекомендуем по тому же плану, по которому вводится в этом упражнении понятие четности функции. Надо подчеркнуть, что нечетные функции также обладают свойством симметрии, но в отличие от четных знак функции меняется при изменении знака аргумента: $f(-x) = -f(x)$, и график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Завершить исследование можно упражнением такого рода: «Какие из следующих функций являются четными; нечетными; ни теми, ни другими:

1) $y = x$; 2) $y = x + 3$; 3) $y = -3x$; 4) $y = |x|$; 5) $y = -x^2$;

6) $y = -x^2 + 4$; 7) $y = 2(x-1)^2$; 8) $y = x^3$; 9) $y = x^3 + 1$; 10) $y = \frac{2}{x}$».

Наконец, доказывается теорема о том, что график любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть получен путем сдвигов вдоль координатных осей параболы $y = ax^2$. Теперь учащиеся по коэффициентам квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ могут представить общий вид соответствующей параболы и вычислить координаты её вершины. Основной практический результат изучения этого материала состоит в том, что теперь учащиеся знают удобный способ нахождения координат вершины параболы: их можно просто вычислить по формулам. Подчеркнём, что формулу $x = -\frac{b}{2a}$, по которой находится абсцисса вершины, учащиеся должны знать наизусть. В то же время формулу для вычисления ординаты вершины помнить необязательно; ординату можно найти, подставив вычисленную абсциссу в уравнение параболы.

Упражнения направлены, прежде всего, на формирование умения строить график функции $y = ax^2 + bx + c$ и читать по графику её свойства. Обратите внимание на упражнение **№155**, в нём содержится план построения графика. Собственно говоря, это тот же план, которым учащиеся пользовались раньше, но теперь они по-новому будут выполнять первый его пункт — нахождение координат вершины параболы. Можно посоветовать учащимся не делать ненужных вычислений при выполнении пункта 4: вычислив координаты какой-либо точки параболы и отметив её в координатной плоскости, можно сразу же построить симметричную ей точку, расположенную по другую сторону оси симметрии. Нужно также добиваться аккуратного вычерчивания параболы (они часто получаются у учащихся «угловатыми»). Обращаем внимание учителя и на то, что нахождение точек пересечения параболы с осью x не является обязательным требованием при её построении. В то же время желательно отмечать точку пересечения с осью y (а также симметричную ей точку). Большое место отводится задачам прикладного характера (**№161—164**), которые чрезвычайно важны с точки зрения демонстрации применимости свойств квадратичной функции.

Решение квадратных неравенств для многих учащихся традиционно является камнем преткновения. Поэтому здесь особенно важны простота и доступность алгоритма решения, свободное владение учащимися опорными знаниями, дифференцированный подход к школьникам при организации их учебной деятельности. Обязательным результатом обучения является умение решать неравенство вида $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c > 0$ с опорой на схематический график квадратичной функции. Образцы рассуждений, возможные способы записи ответа приведены в примерах 1, 2 и 3.

В упражнении **№178** предлагается решить систему неравенств, в которой одно или оба неравенства являются квадратными. Эта система может быть задана неявно с помощью дополнительного условия (**№176**). Подчеркнём, что решение таких систем — достаточно трудная задача. Заниматься этим есть смысл только с учениками, у которых решение квадратных неравенств не вызывает никаких проблем. В упражнениях **№179—187** решение квадратного неравенства является вспомогательным средством для решения данной задачи: нахождения области определения функции, исследования квадратного уравнения с буквенными коэффициентами (с параметрами). В связи с этим обращаем внимание учителя на то, что в следующей главе учебника есть пункт 3.8 «Уравнения с параметром» («*Узнайте больше*»).

Глава завершается решением неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, где $f(x)$ - многочлен, который можно представить как произведение линейных множителей, методом интервалов. На конкретном примере неравенства $(x+4)(x-3)(x-1) < 0$ разбирается способ решения методом интервалов: исследуется знак произведения $(x+4)(x-3)(x-1)$ на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения (вся прямая) нулями функции $f(x) = (x+4)(x-3)(x-1)$, и формулируется алгоритмическое предписание по решению неравенств такого вида. В классах с невысоким уровнем подготовки рекомендуем ограничиться упражнениями **№189-192**. Подчеркнём, что решением неравенств, рассматриваемых в **№195-196,** есть смысл заниматься только с учениками, у которых решение квадратных неравенств не вызывает никаких проблем.

В рубрику «*Узнайте больше*» включен материал, расширяющий представление учащихся о графиках. Вводится определение дробно-линейной функции и на конкретных примерах последовательно раскрывается способ построения графика функции вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Рассматриваются примеры построения графиков уравнений, содержащих модули.

В результате изучения главы учащиеся должны уметь:

• использовать и понимать терминологию и символику, связанные с понятием функции: аргумент, значение функции, область определения функции, график функции, обозначение $f(x)$;

• находить значения функции, заданной формулой, графиком, таблицей; решать обратную задачу: по заданному значению функции находить значение аргумента; по графику функции отвечать на вопросы, связанные со свойствами функции;

• переходить от аналитического языка описания функций к графическому и наоборот; понимать эквивалентность формулировок на разных языках, например, таких как «значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ равно b» и «точка $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$»;

• строить график функции $y = ax^2 + bx + c$ и читать по графику её свойства;

• решать квадратные неравенства с опорой на графические представления, системы, включающие квадратное неравенство.

Основные виды деятельности. Распознавать квадратичную функцию, приводить примеры квадратичных зависимостей из реальной жизни, физики, геометрии.

Выявлять путём наблюдений и обобщать особенности графика квадратичной функции. Строить и изображать схематически графики квадратичных функций; выявлять свойства квадратичных функций по их графикам. Строить более сложные графики на основе графиков всех изученных функций.

Проводить разнообразные исследования, связанные с квадратичной функцией и её графиком.

Выполнять знаково-символические действия с использованием функциональной символики; строить речевые конструкции с использованием функциональной терминологии.

Решать квадратные неравенства, а также неравенства, сводящиеся к ним, путём несложных преобразований; решать системы неравенств, в которых одно неравенство или оба являются квадратными. Применять аппарат неравенств при решении различных задач.

Глава 3. Уравнения и системы уравнений (28 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

№ пункта	*Название пункта учебника*	*Число уроков*
3.1 3.2	Рациональные выражения Тождество	5
3.3 3.4	Целые уравнения Дробные уравнения	7
3.5	Решение задач	3
3.6 3.7	Графическое решение систем уравнений с двумя переменными Алгебраическое решение систем уравнений с двумя переменными	6
3.8	Решение задач	3
3.9	Графическое решение уравнений с одной переменной	2
	Обзор и контроль	2

Основные цели: систематизировать сведения о рациональных выражениях и уравнениях; познакомить учащихся с приёмами решения уравнений целых третьей и четвертой степени с помощью разложения на множители и замены переменной, обучить решению дробных уравнений; развить умения решать системы уравнений с двумя переменными, а также текстовые задачи путем составления систем уравнений; познакомить с возможностью применения графиков для исследования и решения систем уравнений с двумя переменными и уравнений с одной переменной.

Обзор главы и методический комментарий. Одна из принципиальных методических особенностей данного курса состоит в отказе от концентрированного, единовременного предъявления учащимся всего блока теоретических сведений по той или иной изучаемой теме. Все крупные разделы курса строятся «по спирали»; теоретические сведения дополняются и уточняются при каждом следующем проходе. При этом новые понятия вводятся на базе уже имеющихся первоначальных представлений. Именно так обстоит дело и в данном случае.

Основное назначение данной главы – систематизация, обобщение и развитие теоретических представлений и практических умений учащихся, связанных с преобразованием рациональных выражений, решением уравнений, решением текстовых задач алгебраическим способом, применением алгебраического аппарата для решения задач на координатной плоскости. Иными словами, это приведено в систему всего блока собственно алгебраических разделов курса.

Глава начинается с вопроса о рациональных выражениях и их преобразованиях, изучение которых было начато в курсе 7-го класса и продолжено в 8-м классе. Теперь дается сам термин – «рациональное выражение» (а для противопоставления, термин «иррациональное выражение»), рассматриваются виды рациональных выражений, вводится понятие области определения выражения, уточняется смысл слов «преобразование выражения». Далее учащиеся знакомятся с понятием «тождество», со способами доказательства тождеств, а также с приемом опровержения «неверных тождеств». Несколько уроков посвящается преобразованию рациональных выражений, доказательству тождеств; при этом уровень, на который выходят учащиеся, достаточно высокий; навыки преобразований, полученные в 7-м и 8-м классах, получают подкрепление и развитие.

Дальнейшее содержание главы связано с уравнениями и системами уравнений. Новым для учащихся здесь является овладение некоторыми способами решения уравнений высших степеней (разложение на множители, введение новой переменной), уравнений с переменной в знаменателе, знакомство с разнообразными приёмами решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными. В главе содержится большое количество задач, решаемых с помощью составления уравнения или системы уравнений. Таким образом, имеется возможность отрабатывать и совершенствовать соответствующие умения, что важно с точки зрения подготовки к экзамену.

Наконец, в главе уделяется серьезное внимание графическому методу решения и исследования систем уравнений с двумя переменными и уравнений с одной переменной. Вообще, графические интерпретации рассматриваемых алгебраических фактов широко используются при изложении материала всей главы (например, при обсуждении вопроса о возможности изменения области определения выражения в результате выполнения тождественных преобразований, для иллюстрации наличия решений у системы уравнений). Формирование у учащихся умения использовать различные эквивалентные языки для описания той или иной математической ситуации поддерживается и в системе упражнений.

Базовый уровень усвоения содержания данного раздела курса 9-го класса определяется следующими требованиями:

знать и понимать термины «целое выражение», «дробное выражение», уметь находить область определения несложного дробного выражения с одной переменной;

знать и понимать термин «тождество», уметь приводить примеры тождеств, выполнять преобразования несложных рациональных выражений;

распознавать целые и дробные уравнения, владеть основным приёмом решения дробных уравнений и решать несложные уравнения такого вида, применять условие равенства нулю произведения к решению уравнений вида $(ax + b)(cx + d) = 0$;

понимать графическую интерпретацию уравнения с двумя переменными и системы уравнений с двумя переменными, решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и несложные системы двух уравнений, одно из которых второй степени;

составлять по условию несложной текстовой задачи уравнение с одной переменной или систему двух уравнений с двумя переменными.

В рубрике «*Узнайте больше*» данной главы содержатся два фрагмента, каждый из которых тесно примыкает к ее основному содержанию, является его непосредственным углублением и развитием.

Первый фрагмент – «Решение систем уравнений второй степени». Учащиеся знакомятся с классическими приемами решения некоторых видов таких систем; при этом акцентируется внимание на основной идеи применения этих приемов – сведение данной системы к системам более простого вида. Выполняемые преобразования сопровождаются наглядными графическими иллюстрациями.

Второй фрагмент – «Уравнения с параметром». Учащиеся уже неоднократно встречались при выполнении упражнений с несложными уравнениями и системами, содержащими буквенные коэффициенты, и отвечали на конкретные вопросы, поставленные в задаче. Теперь вводится термин «параметр» и разъясняется смысл требования « решить уравнение с параметром». В объяснительном тексте и в системе упражнений представлены как уравнения с одной переменной, так и системы уравнений. При этом для предупреждения формализма в знаниях учащихся и обеспечения наглядности используются графические интерпретации.

Основные виды деятельности. Классифицировать рациональные выражения. Находить область определения рационального выражения; выполнять числовые и буквенные подстановки. Преобразовывать целые и дробные выражения; доказывать тождества. Давать графическую интерпретацию функциональных свойств выражений с одной переменной.

Распознавать целые и дробные уравнения. Решать целые и дробные уравнения, применяя различные приёмы.

Строить графики уравнений с двумя переменными. Конструировать эквивалентные речевые высказывания с использованием алгебраического и геометрического языков. Решать системы двух уравнений с двумя переменными, используя широкий набор приёмов.

Решать текстовые задачи алгебраическим способом: переходить от словесной формулировки условия задачи к алгебраической модели путём составления уравнения или системы уравнений; решать составленное уравнение (систему уравнений); интерпретировать результат. Использовать функционально-графические представления для решения и исследования уравнений и систем.

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии (18 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

№ пункта	*Название пункта учебника*	*Число уроков*
4.1	Числовые последовательности	2
4.2 4.3	Арифметическая прогрессия Сумма первых n членов арифметической прогрессии	5
4.4 4.5	Геометрическая прогрессия Сумма первых n членов геометрической прогрессии	5
4.6	Простые и сложные проценты	4
	Обзор и контроль	2

Основные цели: сформировать начальные представления о числовых последовательностях; изучить свойства арифметической и геометрической прогрессий; развить умение решать задачи на проценты.

Обзор главы и методический комментарий. Глава начинается с создания у учащихся общих представлений о последовательностях: приводятся примеры последовательностей, иллюстрирующие разные способы их задания; вводится минимально необходимый круг терминов и символов. В результате создаётся содержательная и понятийная основа для осознанного изучения основного материала главы — арифметической и геометрической прогрессий.

Арифметическая и геометрическая прогрессии вводятся как частные виды последовательностей, обладающие специальными свойствами.

Мотивацией для их рассмотрения служат широта и разнообразие примеров этих видов последовательностей в человеческой практике. Их изучение строится по одному и тому же плану: определение, рекуррентное задание, формулы n-го члена и суммы первых n членов.

Обсуждаются особенности геометрического изображения этих видов последовательностей: члены арифметической прогрессии изображаются точками, расположенными на прямой, члены геометрической прогрессии — точками, расположенными на экспоненте. Графические иллюстрации делают наглядным рассуждение о сопоставлении характера изменения двух прогрессий. Изменение геометрической прогрессии, в отличие от арифметической, является неравномерным; при $b_1 > 0$ и $q > 1$ ее члены растут очень быстро – именно это «показывает» экспонента, которая круто «уходит вверх».

Характерной особенностью темы в целом являются широта и разнообразие практических иллюстраций, акцент на связь изучаемого материала с окружающим миром. Так, введение понятий арифметической и геометрической прогрессий осуществляется на основе рассмотрения примеров из реальной жизни: стоимость проката лодки, рост колонии бактерий и др. Формулы n-го члена и суммы первых n членов прогрессий применяются для решения разнообразных содержательных задач.

Завершается глава решением задач на простые и сложные проценты. Этот материал, с одной стороны, усиливает прикладной аспект темы путём демонстрации применения изученного математического аппарата для решения жизненных задач, а с другой — позволяет продолжить развитие вычислительных умений школьников, в том числе умения вычислять с применением калькулятора.

В рубрике «*Узнайте больше*» данной главы содержатся два фрагмента. Первый – «Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия» – углубляет основное содержание главы, на интуитивном уровне вводит учащихся в мир математики, которую принято называть высшей. А пример применения формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии демонстрирует простой способ обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную и тем самым возвращает их к теме «Действительные числа».

Назначение второго фрагмента – «Треугольник Паскаля» – в рамках данного курса скорее общекультурное, общеобразовательное. Но, конечно, его содержание имеет и дидактическую ценность (здесь обобщаются известные факты, устанавливаются закономерности, выстраивается алгоритм).

Основные виды деятельности. Применять индексные обозначения, строить речевые высказывания с использованием терминологии, связанной с понятием последовательности.

Вычислять члены последовательностей, заданных формулой n-го члена или рекуррентной формулой. Устанавливать закономерность в построении последовательности по первым нескольким её членам. Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости.

Распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания. Выводить на основе доказательных рассуждений формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий; решать задачи с использованием этих формул.

Рассматривать примеры из реальной жизни, иллюстрирующие изменение величины в арифметической прогрессии, в геометрической прогрессии; изображать соответствующие зависимости графически.

Решать задачи на сложные проценты, в том числе задачи из реальной практики (с использованием калькулятора).

Глава 5. Статистика. Вероятность. Комбинаторика (11 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

№ пункта	*Название пункта учебника*	*Число уроков*
5.1	Выборочные исследования	2
5.2 5.3	Интервальный ряд. Гистограмма Характеристики разброса	2 2
5.4	Статистическое оценивание и прогноз	1
5.5	Размещения и сочетания	2
	Обзор и контроль	2

Основные цели: сформировать представление о статистических исследованиях, обработке данных и интерпретации результатов.

Обзор главы и методический комментарий. В данной главе представлен завершающий фрагмент вероятностно-статистической линии курса. Особенностью принятого в учебниках подхода является то, что статистические понятия в определённом смысле служат стержнем, который пронизывает весь материал данной линии. Такая роль статистики в курсе обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного человека. Они нужны как для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, так и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, включая социологию, экономику, право, медицину, биологию, демографию и т. д. Через решение статистических задач в значительной степени реализуется идея прикладной направленности курса, являющейся одним из основных положений современной концепции математического образования.

В главе повторяются полученные ранее знания о случайных экспериментах, способах представления данных, статистических характеристиках, а также вводятся некоторые новые понятия (выборка, генеральная совокупность, полигон частот, гистограмма, мера разброса и др.). Все эти понятия, как известные, так и новые, рассматриваются на доступных учащимся примерах комплексных статистических исследований.

Заметим, что включение данного материала направлено прежде всего на формирование умения понимать и интерпретировать статистические результаты, представляемые, например, в средствах массовой информации. Иными словами, предполагается не столько формальное заучивание новых терминов, сколько первоначальное знакомство с понятийным аппаратом этой области знаний, представление о которой необходимо каждому современному человеку.

Принципиально важным представляется и то обстоятельство, что при решении задач учащимся придётся выполнять довольно много математических расчётов, используя при этом калькулятор. Особенно актуальным становится умение находить отношение величин и выражать их в процентах, проводить процентные расчёты. Придётся также планировать собственную деятельность, понимать содержание описанного алгоритма и самостоятельно действовать в соответствии с его этапами. Таким образом, эта глава даст серьёзный импульс для совершенствования вычислительных умений школьников, развития алгоритмического мышления.

Основные виды деятельности. Осуществлять поиск статистической информации, рассматривать реальную статистическую информацию, организовывать и анализировать её (ранжировать данные, строить интервальные ряды, диаграммы, полигоны частот, гистограммы; вычислять различные средние, а также характеристики разброса). Прогнозировать частоту повторения события на основе имеющихся статистических данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже предлагаются два приложения:

1. Язык и логика.

2. Элементы статистики, теории вероятностей, комбинаторики.

В первом раскрывается логическое содержание таких понятий, как высказывание и предложение с переменными, суть логических связок «и», «или», «не», равносильность и следование. Учитель может использовать этот материал для индивидуальной работы с сильными учащимися, на внеклассных занятиях, а также в зависимости от уровня подготовки класса и на общих уроках (выборочно или целиком).

Второе приложение содержит темы, предполагаемые в перспективе для изучения в основной школе, в том числе: Независимые события. Случайные величины. Испытания Бернулли. Закон больших чисел. Знакомство с этими материалами поможет учителю углубить и расширить свои знания по этой новой для российской школы линии, выбрать то, что можно предложить для работы на кружках, занятиях по предпрофильной подготовке.

Язык и логика

Логика – это учение о способах рассуждения. Математическая логика исследует способы рассуждения, применяемые в математике. Начиналась математическая логика с анализа того, как люди говорят и рассуждают на естественных языках: выстраивают цепочки умозаключений, делают выводы, доказывают или опровергают различные утверждения и др. Рассматривая некоторые простейшие понятия математической логики, мы тоже будем апеллировать к нашему разговорному русскому языку.

1. Высказывания и предложения с переменной. Начнем с рассмотрения простых повествовательных предложений. Возьмем такие три предложения:

1) Множество натуральных чисел N является подмножеством множества целых чисел Z.

2) Сумма $1+\sqrt{5}$ больше 4.

3) Значение выражения $2\sqrt{a}$ – число иррациональное.

Каждое из них выражает некоторую мысль, что-то утверждает. Первое предложение – верное утверждение, второе – неверное, а третье предложение при одних значениях a верно, а при других – нет (например, при $a = 2$ оно верно, а при $a = 4$ – неверно).

Предложение, о котором можно сказать, верно или неверно содержащееся в нем утверждение, в математике называют **высказыванием**. При этом вместо слов «верно» и «неверно» обычно говорят «истинно» и «ложно». Таким образом, первые два предложения – это высказывания (истинное и ложное соответственно). А третий наш пример – это не высказывание, а **предложение с переменной**. Оно становится высказыванием – истинным или ложным – после того, как вместо переменной a будет подставлено какое-нибудь конкретное ее значение. (Предложения с переменными часто называют *высказывательными формами* – «формами для производства высказываний» - как в промышленности, где для штамповки изделий используются заранее изготовленные формы).

С предложениями с переменными вы постоянно имеете дело при изучении математики, а «главными» школьными примерами предложений с переменными являются уравнения и неравенства. Например, уравнение $x^2 = 4$ и неравенство $x^2 < 4$ – это предложения с переменной x.

Предложение может содержать не одну, а две и более переменных. Вот примеры: $2x + 5y = 10$; $a^2 + b^2 = c^2$; точки K, M и N лежат на одной прямой. Чтобы такое предложение стало высказыванием, нужно вместо *каждой* переменной подставить ее конкретное значение (как говорят, *фиксировать* каждую переменную).

Предложения с переменными (высказывательные формы), как и другие понятия математического языка, имеют свой способ обозначения. Так, предложения с одной переменной обычно обозначают символами типа $P(x)$, $Q(x)$, употребляя для этого прописные латинские буквы.

Множество значений переменной (или переменных), при которых предложение с переменной обращается в истинное высказывание, называется **множеством истинности** этого предложения. Для уравнений и неравенств множеством истинности является множество их решений. Например, множество истинности уравнения $x^2 = 4$ есть $\{-2; 2\}$, а множество истинности неравенства $x^2 < 4$ – интервал $(-2; 2)$.

Упражнения

1. Определите, какие из приведенных предложений являются высказываниями; какие из них истинны и какие ложны:

1) $3^4 = 81$;
2) $3^n = 81$;
3) Число 7 имеет больше двух делителей;
4) Число n имеет больше двух делителей;
5) $2x+3y=8$ при любых значениях x и y;
6) Существуют такие значения x и y, при которых $2x+3y=8$;
7) $\sqrt{5}$ - иррациональное число;
8) $\sqrt{a}$ - иррациональное число.

2. Для каждого предложения с переменными приведите, если возможно, примеры значений этих переменных, при которых оно обращается в исинное высказывание; в ложное высказывание:

а) $x^2+3x-4=0$; в) $(x^2-1)^2+y^2=0$;

б) $x^2 \geq 25$; г) точка A принадлежит графику функции $y=x^2$.

Ответы: **1**. Истинные высказывания: 1, 6 и 7; Ложные высказывания: 3 и 5. **2**. Здесь приведены отдельные примеры, примеры учащегося могут быть другими. а) при x = 1 – истинное высказывание, при x = 0 – ложное; б) истинное при x = – 10; ложное при x = 3,5; в) истинное при x = 1, y = 0; ложное при x = 1, y = 2,7; г) истинное при x = – 1, y = 1; ложное при x = – 1, $y=-1$.

2. Логические связки «И» и «ИЛИ»

Высказывания, как и предложения обычного языка, бывают простыми и сложными. В естественном языке при конструировании сложных предложений мы используем различные союзы. Важную роль они играют и в математических текстах.

Союзами «И» и «ИЛИ» вы систематически пользуетесь в математике. В математической логике эти союзы называют логическими связками. Вот несколько примеров.

Двойное неравенство $4<x<10$ - это предложение с переменной, которое означает: «$x>4$ **И** $x<10$». Это предложение истинно тогда, когда истинны оба составляющие его неравенства, и ложно тогда, когда хотя бы одно из них ложно. Например, при x = 5 истинны оба неравенства, а значит, и двойное неравенство; при x = 1 первое из них ложно, а значит, ложно и исходное двойное равенство. Иными словами, множество истинности предложения с переменной «$x > 4$ **И** $x < 10$» – это пересечение множеств истинности каждого из предложений «$x > 4$» и «$x < 10$».

Система уравнений и система неравенств – тоже примеры предложений с переменными со связкой **И**. И система уравнений, и система неравенств истинны тогда и только тогда, когда истинны все составляющие их уравнения или неравенства. По традиции фигурная скобка, обозначающая систему, заменяет союз **И**.

Таким образом, *предложение с переменной* «$P(x)$ **И** $Q(x)$» *истинно при тех и только тех значениях x, при которых истинны оба составляющие его предложения.* Понятно, что множество истинности предложения «$P(x)$ **И** $Q(x)$» есть пересечение множеств истинности составляющих его $P(x)$ и Q(x).

Примером использования связки **ИЛИ** может служить такое неравенство: $x \geq 7$. Оно означает, что «$x > 7$ **ИЛИ** $x = 7$». Это предложение истинно, когда истинно одно из составляющих его простых предложений, и ложно, если ложны оба. Так, при $x = 7$ предложение истинно, а при $x = 0$ – ложно.

Еще один пример предложения с переменной, в котором используется логическая связка **ИЛИ** – это уравнение, представляющее собой равное нулю произведение нескольких множителей, например, $(x-2)(x+6)=0$. Произведение $(x-2)(x+6)$ равно нулю в том и только том случае, когда равен нулю хотя бы один из множителей (или оба одновременно), т.е.

$$x-2=0 \text{ ИЛИ } x+6=0.$$

Предложение с переменной «$P(x)$ **ИЛИ** $Q(x)$» *истинно при тех значениях x, при которых истинно хотя бы одно из составляющих его предложений, и ложно, если ложны оба.* Понятно, что множество истинности предложения «$P(x)$ **ИЛИ** $Q(x)$» есть объединение множеств истинности $P(x)$ и Q(x).

Логические связки **И**, **ИЛИ** имеют свои аналоги в логике. Для сложного предложения с союзом **И** это **конъюнкция**.

Конъюнкция двух предложений с переменной $P(x)$ и $Q(x)$ *– это новое предложение, которое истинно в том и только том случае, когда оба предложения истинны, и ложно, когда хотя бы одно из них ложно.* Обозначается конъюнкция знаком $\wedge$: $P(x) \wedge Q(x)$.

Множество истинности конъюнкции – это пересечение множеств истинности составляющих ее предложений.

Так, например, уравнение $(x^2-x)^2+(x^2-3x+2)^2=0$ есть конъюнкция предложений $P(x)$ и Q(x), где $P(x)$: $(x^2-x)^2=0$, Q(x): $(x^2-3x+2)^2=0$.

И пусть A – это множество истинности (множество решений) предложения $P(x)$, B – это множество истинности (множество решений) предложения $Q(x)$.

Тогда множество истинности $P(x) \wedge Q(x)$ есть $A \cap B$ (**рис. 1**).

рис. 1

Множество решений уравнения состоит из одного числа: $\{1\}$.

Логическим аналогом в сложного предложения с союзом **ИЛИ** является **дизъюнкция**.

Дизъюнкция двух предложений с переменной $P(x)$ и $Q(x)$ *– это новое предложение, которое ложно в тех и только тех случаях, когда оба предложения ложны, и истинно, когда хотя бы одно из них истинно*. Обозначается конъюнкция знаком $\vee$: $P(x) \vee Q(x)$.

Множество истинности дизъюнкции – это объединение множеств истинности составляющих ее предложений.

Так, например, уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 3x + 2) = 0$ есть дизъюнкция предложений $P(x)$ и Q(x), где $P(x)$: $(x^2 - x) = 0$, Q(x): $(x^2 - 3x + 2) = 0$.
И пусть A – это множество истинности (множество решений) предложения $P(x)$, B – это множество истинности (множество решений) предложения $Q(x)$.

Тогда множество истинности $P(x) \vee Q(x)$ есть $A \cup B$ (**рис. 2**).

рис. 2

Множество решений уравнения: $\{0;1;2\}$.

Упражнения

1. Закончите фразу:

а) предложение P **И** Q истинно в том и только том случае, когда …;

б) предложение P **ИЛИ** Q истинно в том и только том случае, когда ….

2. Буквами $F(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ обозначены следующие предложения:

$$F(x):\ x > 4,\quad P(x):\ x > 12,\quad Q(x):\ x \le 7.$$

Запишите следующие предложения и определите их множества истинности:

а) $F(x)$ ИЛИ $P(x)$; в) $P(x)$ И $Q(x)$; д) $F(x)$ И $Q(x)$;

б) $F(x)$ И $P(x)$; г) $P(x)$ ИЛИ $Q(x)$; е) $F(x)$ ИЛИ $Q(x)$.

3. Запишите каждое предложение с переменными как конъюнкцию или дизъюнкцию простых предложений. В каждом случае приведите примеры значений переменных из множества истинности предложения.

а) $x \geq 10$; в) $(x+2)(x-4)=0$; д) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3; \end{cases}$

б) $-3<a<1$; г) $(x+2)(y-4)=0$; е) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$.

Ответы: **2**. а) $(4;+\infty)$; б) $(12;+\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;7)\bigcup(12;+\infty)$; д) $\left(4;7\right]$; е) $(-\infty;+\infty)$. **3**. а) $x=10 \vee x>10$; б) $a>-3 \wedge a<1$; в) $x+2=0 \vee x+4=0$; г) $x+2=0 \vee y+4=0$; д) $x+y=5 \wedge x-y=3$; е) $x^2-4=0 \wedge x+2 \neq 0$.

3. Равносильность. Следование. Напомним, что два уравнения или неравенства называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений, т.е. если они истинны при одних и тех же значениях переменной (или переменных). Но уравнения и неравенства – это предложения с переменными некоторого частного вида, и в действительности, понятие равносильности относится к произвольным предложениям с переменными. И определение равносильности для предложений с переменными – это буквальное повторение соответствующего определения для уравнений и неравенств: **два предложения с переменными называются равносильными, если они истинны при одних и тех же значениях переменной (или переменных)**.

Вот примеры равносильных предложений:

«Число *n* делится на 3» и «Сумма цифр числа *n* делится на 3»;

«Точка *C* лежит на серединном перпендикуляре отрезка *AB*» и «Отрезок *AC* равен отрезку *BC*»;

«$x^2 + y^2 = 0$» и «$x = 0$ и $y = 0$».

На письме вместо слова «равносильно» употребляют символ $<=>$. Например: «($x^2 + y^2 = 0$) $<=>$ ($x = 0$ и $y = 0$)». А в речи, кроме слова «равносильно», используют такие обороты , как «в том и только том случае», «тогда и только тогда». Например: «$x^2 + y^2 = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$ и $y = 0$».

С понятием равносильности связано еще одно, быть может, важнейшее для математики логическое понятие – **следствие**. Это слово часто употребляется в обычном русском языке и происходит оно от глагола «следует».

Вот примеры ситуации следования одного предложения из другого:

«Из того, что число n делится на 4, следует, что оно делится на 2»;

«Из того, что $x > 2$, следует, что $x^3 > 8$»;

«Из того, что $x > 1$, следует, что $x + 5 > 6$».

В каждом из приведенных предложений *после* слов «следует, что» и идет собственно следствие, а то, что *перед* словами «следует, что» в логике обычно называют «посылкой», а в математике чаще всего называют *условием*.

На логическом языке ситуацию следствия записывают с помощью знака =>. Например, пишут:

$$(n \text{ делится на } 4) \Rightarrow (n \text{ делится на } 2);$$
$$(x > 2) \Rightarrow (x^3 > 8);$$
$$(x > 1) \Rightarrow (x + 5 > 6).$$

Во всех этих случаях мы видим, что если верно первое утверждение, то верно и второе. Поэтому естественно дать следующее о п р е д е л е н и е:

Предложение Q (x) называется следствием предложения $P(x)$, если при всяком значении переменной x, при котором высказывание $P(x)$ истинно, высказывание Q (x) также истинно.

В устном математическом языке вместо термина *следствие* или слова *следует* чаще всего пользуются условными предложениями, сконструированными с помощью союза «если …, то …». Например, вместо утверждения «Из того, что сумма цифр числа n делится на 9, следует, что само число n делится на 9» говорят: «Если сумма цифр числа n делится на 9, то и само число n делится на 9».

Понятия равносильности и следствия, как и вообще многие логические понятия, тесно связаны с основными понятиями теории множеств.

Если множества истинности предложений $P(x)$ и Q (x) обозначить соответственно через A и B, то, сопоставив определения равносильности и следствия с определениями подмножества и равенства множеств, получим:

$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

Например, пусть A – множество истинности предложения $P(x)$ «Натуральное число n кратно 6», а B – множество истинности предложения Q (x) «Натуральное число n кратно 3». Тогда $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $A \subset B$ (**рис. 3**).

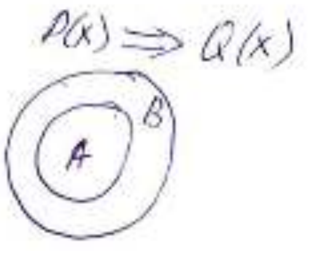

рис. 3

Логика доказательства утверждения вида $P(x) \Rightarrow Q(x)$ такова: берут произвольное x, для которого истинна посылка $P(x)$, и доказывают, что для этого значения x истинно и заключение $Q(x)$. Именно такое рассуждение вы практически всегда применяли в геометрии, когда писали «Дано… Требуется доказать …», или в общем виде: *Дано* $P(x)$ и *требуется доказать* $Q(x)$.

Конечно, все это относится и к алгебре. Например, при всей очевидности утверждения «Из $x < 2$ следует, что $x < 5$», его доказательство проводится по той же стандартной схеме. Явно формулируются условие и заключение: «Дано $x < 2$. Требуется доказать, что $x < 5$». И уже после этой логической процедуры начинается собственно математика: так как $x < 2$, а $2 < 5$, то в силу *транзитивности* отношения «меньше», $x < 5$, что и требовалось доказать.

А что означает утверждение: $Q(x)$ *не следует* из $P(x)$? Утверждение $P(x) \Rightarrow Q(x)$ неверно в случае, если *не при всяком* значении переменной x, при котором высказывание $P(x)$ истинно, высказывание $Q(x)$ тоже истинно. Но это значит, что *существует* такое значение x, при котором $P(x)$ истинно, а $Q(x)$ ложно.

Например, утверждение $\frac{1}{x} < 3 \Rightarrow 3x > 1$ неверно. В самом деле, *не при всяком* значении переменной x, при котором высказывание $\frac{1}{x} < 3$ истинно, высказывание $3x > 1$ также истинно. Примером такого значения x может случить число -10.

А чтобы доказать утверждение $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, можно показать, что каждое из этих двух предложений является следствием другого. Такое рассуждение типично для математических доказательств и очень часто применяется в геометрии. Например, возьмем такие два предложения:

$P(x)$: «Четырехугольник – параллелограмм»;

$Q(x)$: «Диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам».

Тогда сначала доказывают утверждение $P(x) \Rightarrow Q(x)$ (обычно его называют свойством параллелограмма), а затем утверждение $Q(x) \Rightarrow P(x)$ (это утверждение называют признаком параллелограмма). После этого можно утверждать, что $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

Упражнения

1. Какие из предложений равносильны предложению «x – целое положительное число»?

1) x – целое число;

2) x – натуральное число;

3) x – целое неотрицательное число;

4) $x > 0$;

5) $x > 0$ И $x \in Z$.

2. Верно ли утверждение?

а) (Отрезок MN – средняя линия трапеции) <=> (Точки M и N – середины боковых сторон трапеции);

б) (Натуральное число n оканчивается цифрой 6) <=> (Число n делится на 6);

в) (Парабола задана формулой $y = ax^2$, где $a > 0$) <=> (Ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх);

г) (Два угла четырехугольника равны) <=> (Четырехугольник – параллелограмм).

3. Определите, какое из предложений истинно, и какое ложно, и докажите это:

а) $(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 1)$; $(x^2 > 1) \Rightarrow (x > 2)$;

б) $(x^2 = 16) \Rightarrow (x = 4)$; $(x = 4) \Rightarrow (x^2 = 16)$;

в) $(\sqrt{a} < \sqrt{b}) \Rightarrow (a < b)$; $(a < b) \Rightarrow (\sqrt{a} < \sqrt{b})$.

Для истинных предложений определите множество истинности посылки и следствия и установите, какое из них является подмножеством другого.

4. Предложение сформулировано с использованием слов «в том и только том случае». Запишите его с помощью двух условных предложений со свзкой «если …, то …»:

а) Четырехугольник является параллелограммом в том и только том случае, когда его противоположные стороны равны;

б) $x^2 + y^2 = 0$ в том и только том случае, когда $x^2 = 0$ И $y^2 = 0$;

в) Прямые $y = kx + 2$ и $y = mx - 1$ параллельны в том и только том случае, когда $k = m$;

г) Последовательность (a_n) с разностью d является арифметической прогрессией в том и только том случае, когда она может быть задана формулой $y = dn + b$.

Ответы: **1**. а) 2 и 5. **2**. Истинны а и в. **3**. а) истинно первое; б) истинно второе; в) истинно первое; **4**. а) Например, так: Если четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны равны, и обратно, если противоположные стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

4. Отрицание

Еще одна важная логическая операция, с которой на самом деле вы часто встречаетесь как в математике, так и в жизни, это **отрицание**. Возьмем, например, два утверждения (высказывания): «$2 \cdot 2$ равно 4» и «$2 \cdot 2$ не равно 4». Первое из них истинно, второе – ложно. Они *отрицают* друг друга, каждое из них является отрицанием другого.

Вообще, *отрицание некоторого утверждения A – это новое утверждение, которое ложно, если A истинно, и истинно, если A ложно*. Обозначается отрицание знаком $\neg$, например, отрицание высказывания A обозначается $\neg A$ *и читается «*не A» или «неверно, что A».

Так, если обозначить первое из рассмотренных выше утверждений буквой A, то $\neg A$ – это «$2 \cdot 2$ не равно 4», и наоборот: если A – это «$2 \cdot 2$ не равно 4», то $\neg A$ – это «$2 \cdot 2$ равно 4».

Как вы видите, из двух утверждений A и $\neg A$ одно обязательно истинно, а другое ложно, и третьего не дано. Это закон логики, и он имеет специальное название *закон исключенного третьего*.

Так как нам часто приходится формулировать отрицание и при изучении математики, и в повседневной жизни, надо научиться делать это правильно. Но сначала обратим внимание на одну особенность, связанную с высказываниями и предложениями с переменной. Рассмотрим, например, предложение с переменной $P(x)$: $x+3>5$. Оно превращается в высказывание, истинное или ложное, в зависимости от значения x.

Добавим перед этим предложением слова «*Для любых*», получим: «Для любых действительных чисел x: $P(x)$», что на естесвенном языке означает: «Для любых действительных чисел x выполняется неравенство $x+3>5$». Это уже высказывание, так как о нем можно определенно сказать, что оно ложно. Если же перед этим предложением $P(x)$ поставить слово «*Существует*», то получим: «Существует действительное число x, для которого выполняется неравенство $x+3>5$». Это истинное высказывание.

Таким образом, добавки «Для всех …» и «Существует …» обращают предложения с переменными в высказывания. Высказывания первого типа – «Для всех …» – принято называть общими утверждениями. В русском языке одну и ту же мысль можно выразить по-разному. Так и здесь: вместо слов «Для всех ..» употребляют и другие обороты речи. Например: *для любого …, для каждого …,* или *все …, любой …, всякий …, каждый …* . Высказывания типа «Существует …» называют утверждениями о существовании. Здесь вместо слова «существует» вполне применимы и такие синонимы, как: *найдется …, имеется …, хотя бы один …, по крайней мере один …* и пр.

Вернемся теперь к отрицанию. Формулировка отрицания некоторого утверждения определяется логической структурой этого утверждения. Рассмотрим сначала пример утверждения вида «Для всех …».

Пример 1. Сконструируем отрицание утверждения «Все натуральные четные числа делятся на 4».

Можно было бы ошибочно подумать, что отрицанием этого утверждения является следующее: «Все натуральные четные числа не делятся на 4». Но это, конечно, не так. Действительно, оба утверждения «Все натуральные четные числа делятся на 4» и «Все натуральные четные числа не делятся на 4» являются ложными. Но из двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого, одно должно быть ложным, а другое истинным.

Проще всего сформулировать отрицание утверждения можно, вставив слова «Неверно, что …»: «Неверно, что все натуральные четные числа не делятся на 4». Это самая простая формулировка, и обычно используются другие формулировки, уточняющие смысл данной. Заметим, что исходное утверждение является *общим*, оно касается всех элементов некоторого множества (в данном случае – всех натуральных четных чисел). В таких случаях всегда суть отрицания – *существование* элементов рассматриваемого множества (хотя бы одного), для которого рассматриваемое свойство не выполняется (в данном случае – делиться на 4). При этом употребляются слова: существует, некоторые, хотя бы один, найдется, т.е. отрицание рассматриваемого утверждения может выглядеть так:

- Существует натуральное четное число, которое не делится на 4;
- Некоторые натуральные четные числа не делятся на 4;
- Хотя бы одно натуральное четное число не делится на 4.

Напротив, в тех случаях, когда утверждается *существование* элементов множества, обладающих некоторым свойством, отрицанием служит утверждение *общего* характера. Суть отрицания в этом случае состоит в том, что все элементы данного множества не обладают данным свойством. При этом употребляют слова: все, любой, всякий, каждый и пр. Часто они употреблятся с предлогм «для».

Пример 2. Сконструируем отрицание утверждения «Некоторые квадратные уравнения не имеют корней».

Иногда за отрицание этого утверждения принимают следующее: «Некоторые квадратные уравнения имеют корни». Вы теперь легко сможете объянить, почему это не так: второе утверждение так же, как исходное, является истинным.

Формулировка «в лоб» такова: «Неверно, что некоторые квадратные уравнения не имеют корней». Чтобы сформулировать отрицание в уточняющем виде, заметим, что исходное утверждение эквивалентно такому: «Существуют квадратные уравнения, которые не имеют корней». Его отрицание – общее утверждение, оно может быть сформулировано, например, так:

- Все квадратные уравнения имеют корни;
- Любое квадратное уравнение имеет корни;
- Всякое квадратное уравнение имеет по крайней мере один корень.

Исходное утверждение истинно, его отрицание ложно.

Упражнения

1. Определите, какие из следующих утверждений являются отрицанием утверждения $P(x)$: «Для любых действительных чисел x выполняется неравенство $x+3>5$». Истинным или ложным является $P(x)$? $\neg P(x)$?

1) Существует действительное число x, для которого выполняется неравенство $x+3\leq 5$;

2) При любом действительном числе x неравенство $x+3>5$ неверно;

3) Ни при одном действительном числе x не выполняется неравенство $x+3>5$;

4) Найдется действительное число x, при котором $x+3\leq 5$;

2. Для утверждения $P(x)$: «Существует действительное число x, при котором выполняется неравенство $x+3>5$» сформулируйте $\neg P(x)$.

3. Сформулируйте отрицание для каждого из утверждений:

а) существуют действительные числа, квадрат которых – отрицательное число;

б) квадратный корень из любого натурального числа – натуральное число;

в) некоторые треугольники – равнобедренные;

г) любой квадрат является ромбом;

д) найдется равнобедренный треугольник, у которого углы при основании не равны;

е) все простые числа – нечетные.

Ответы:

1. 1) и 4).

2. $\neg P(x)$: для любого действительного числа выполняется неравенство $x+3\leq 5$.

3. а) Квадрат любого действительного числа – неотрицательное число (или больше или равно 0);

б) Найдется натуральное число, квадратный корень из которого не яляется натуральным;

в) В любом треугольнике длины сторон разные;

г) По крайней мере один квадрат не является ромбом;

д) В любом равнобедренном треугольнике углы при основании равны;
е) Существует четное простое число.

Элементы статистики, теории вероятностей, комбинаторики

1. Независимые события

Напомним, что *несовместными* называются события, которые не имеют общих исходов, то есть, не пересекаются. Для несовместных событий справедлива *формула сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Если события *совместны*, то эта формула усложняется:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

При наступлении одного из несовместных событий другое наступить не может – можно сказать, что его вероятность снижается до нуля. В этом смысле несовместные события сильно связаны друг с другом. Возможна и обратная ситуация: наступление события A никак не изменяет вероятность наступления другого события B. Чаще всего эта ситуация возникает, когда A и B связаны с разными испытаниями или разными объектами, участвующими в эксперименте. Такие события принято называть *независимыми*.

Для независимых событий справедлива *формула умножения вероятностей*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

В этом разделе мы попробуем обосновать эту формулу и научимся использовать её при решении задач. Заодно разберёмся, в каких же случаях события независимы, а в каких – нет. Для этого рассмотрим следующий пример, в котором мы введём понятие *условной вероятности*.

Пример 1. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара. Рассмотрим два события:

A = {первый шар белый},

B = {второй шар белый}.

Очевидно, что $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. А как вычислить $P(B)$? Если событие A произошло, то вероятность события B снижается до $\frac{1}{3}$, а если не произошло – наоборот, увеличивается до $\frac{2}{3}$. Мы сталкиваемся здесь с ситуацией, когда вероятность одного события *зависит* от того, произошло или не произошло другое событие. Две полученных дроби можно назвать *условными* вероятностями события B: первую – при условии, что A произошло, вторую – при условии, что A не произошло. Обозначаются они так:

$$P(B\,|\,A)=\frac{1}{3} \qquad \text{и} \qquad P(B\,|\,\overline{A})=\frac{2}{3}.$$

В общем случае *условной вероятностью* события B относительно события A (или вероятностью события B при условии, что событие A произошло) называется отношение

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Смысл этого отношения виден из диаграммы Эйлера (рис.1): если событие A происходит, то множество всех возможных исходов опыта «сужается» до множества A, а благоприятными для события B остаются только те из них, которые входят в пересечение событий $A\cap B$.

Для опытов с равновозможными исходами условную вероятность можно по-прежнему вычислять как отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных, но *в новых условиях эксперимента*:

$$P(B\,|\,A)=\frac{n_{AB}}{n_A}$$

(n_A - количество исходов, благоприятных для A, n_{AB} – количество исходов, благоприятных для пересечения событий $A\cap B$).

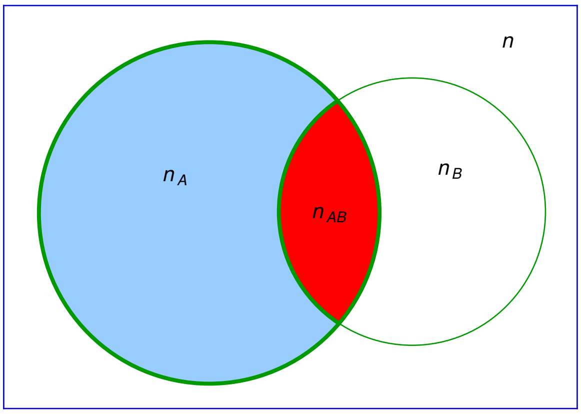

Рис. 1

Если из приведённого выше определения условной вероятности выразить $P(A\cap B)$, то получим *формулу умножения вероятностей* для произвольных событий A и B (требуется только, чтобы $P(A)\neq 0$):

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A).$$

Эта формула оказывается очень полезной при решении многих задач. В нашем примере с её помощью можно посчитать вероятность события C = {оба вынутых шара белые}. Поскольку $C=A\cap B$, то

$$P(C)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Вернёмся теперь к главному вопросу, ради которого мы ввели понятие условной вероятности: *какие же события можно считать независимыми*? Возможны следующие естественные ответы:

1) событие B не зависит от события A, если его условная вероятность относительно события A равна безусловной вероятности: $P(B)=P(B\,|\,A)$;
2) событие B не зависит от события A, если его условные вероятности относительно событий A и $\overline{A}$ одинаковые: $P(B\,|\,A)=P(B\,|\,\overline{A})$.

Замечательно, что любое из этих условий равносильно равенству, с которого мы начали этот раздел (см. задачи 8 и 9): $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Его словесная формулировка звучит так: *вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей*. Эта формула удобна ещё и тем, что, во-первых, в отличие от приведённых выше условий она симметрична относительно событий A и B, и во-вторых, допускает равенство вероятностей A и B нулю. Поэтому в теории вероятностей выполнение этого равенства принимают за определение независимых событий. В задачах, которые мы будем рассматривать, независимость событий, как правило, будет следовать из условий самого эксперимента, а формула умножения использоваться для вычисления вероятности $P(A\cap B)$.

Таким образом, как и для сложения вероятностей, существуют две формулы умножения вероятностей:

- для независимых событий – более простая:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

- для произвольных событий – более сложная:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)$$

Вернёмся к примеру с шарами. Поскольку $P(B\,|\,A)=\frac{1}{3}$, а $P(B\,|\,\overline{A})=\frac{2}{3}$, то $P(B\,|\,A)\neq P(B\,|\,\overline{A})$ и, следовательно, события A и B зависимы (интуитивно, мы это и так понимали). Теперь изменим условия эксперимента и посмотрим, как это скажется на зависимости событий.

Пример 2. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара *с возвращением*. Это значит, что первый шар вынимают, записывают полученный результат (в данном случае цвет шара) и возвращают его обратно в ящик. После этого шары перемешивают и вынимают второй шар. Рассмотрим те же два события:

$$A = \{\text{первый шар белый}\},$$
$$B = \{\text{второй шар белый}\}.$$

Для события A ничего не изменилось, поэтому $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Но теперь и $P(B)$ вычисляется так же просто: ведь к моменту вытаскивания второго шара, независимо от того произошло или нет событие A, в ящике снова 2 белых и 2 чёрных шара, поэтому

$$P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Как видим, события A и B стали независимыми, поэтому вероятность события C = {оба вынутых шара белые} вычисляется теперь как произведение вероятностей A и B:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Заметим, что случайную выборку двух шаров из примера 1 называют *бесповторной*, а из примера 2 – *повторной*. Эти термины часто используются в статистике при организации выборочного контроля на производстве, проведении социологических исследований и т.д.

Пример 3. Бросают два кубика. С какой вероятностью на первом выпадет 3 очка, а на втором 5 очков? Пусть A = {на первом кубике выпадет 3 очка}, B = {на втором кубике выпадёт 5 очков}. Нужно найти $P(A \cap B)$. Поскольку события A и B связаны с разными кубиками, то можно считать их независимыми. По формуле умножения для независимых событий получаем:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Заметим, что эту задачу можно было решить и без использования независимости: у нашего опыта 36 равновозможных исходов, из которых только 1 исход благоприятен для события $A \cap B$. А вот в следующем примере без независимости уже не обойтись.

Пример 4. Вы покупаете 5 билетов лотереи. Вероятность выигрыша на один билет – 0,2. С какой вероятностью хотя бы один билет выиграет?

Обозначим через $A_1,...,A_5$ события «1-й билет выиграет», «2-й билет выиграет» и т.д. Событие «хотя бы один билет выиграет» равно объединению этих событий. Значит, нам нужно найти вероятность события $A = A_1 \cup ... \cup A_5$. Самая грубая ошибка, которая нас здесь подстерегает (и которую, тем не менее, делают очень часто) – воспользоваться формулой сложения для несовместных событий:

$$P(A) = P(A_1 \cup ... \cup A_5) = 0,2 + ... + 0,2 = 1.$$

Ответ абсурдный, поскольку события $A_1,...,A_5$ совместны. Как же всё-таки вычислить эту вероятность? Оказывается, нужно перейти к противоположному событию:

$$B = \overline{A} = \overline{A_1 \cup ... \cup A_5} = \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_5}.$$

В нашем примере оно означает, что все 5 билетов будут без выигрыша. Если считать события $A_1,...,A_5$ независимыми (мы ещё обсудим этот вопрос), то события $\overline{A}_1,...,\overline{A}_5$ также будут независимыми, поэтому

$$P(B) = P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_5}) = P(\overline{A_1}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_5}) = 0,8^5 \approx 0,328,$$

откуда

$$P(A) = 1 - P(B) \approx 0,672.$$

Получив на этот раз правильный ответ, вернёмся к предположению о независимости событий $A_1,...,A_5$. Вообще говоря, оно сделано не совсем обоснованно: ведь купленные билеты назад не возвращаются, как шары из примера 2. Но если считать, что в тираже участвует намного больше пяти билетов, то эта зависимость будет практически не ощутима. В самом деле, если мы купим один или даже пять билетов из миллиона, так ли сильно изменится соотношение выигрышных и проигрышных билетов в оставшейся совокупности?

Нужно отметить, что во многих реальных задачах предположение о независимости событий вообще выполняется, как правило, приближённо. Главное, чтобы это предположение не меняло сути самого опыта. Например, когда в примере 1 мы вытаскивали один за другим два шара без возвращения, то события *A* и *B*, конечно, нельзя было считать независимыми. На вопрос о независимости реальных событий не всегда просто ответить. Представим себе подъезд 5-этажного дома, в котором на каждом этаже горит лампочка. Пусть события $A_1,...,A_5$ заключаются в том, что в течение ближайшего месяца перегорит лампочка на 1-м этаже, на 2-м этаже и т.д. Будут ли эти события независимыми? С одной стороны вроде бы да – ведь они связаны с разными объектами опыта. Но с другой стороны, задумаемся, от чего перегорают лампочки? Безусловно, главная причина – это их «старение», так называемый «естественный износ». Но ведь бывает и так: большой скачок напряжения в подъезде и сгорели сразу все включенные в этот момент лампочки. Значит, если произошло одно из событий A_i, вероятность других событий должна увеличиться? Как тогда найти соответствующую условную вероятность? Выходов здесь два: либо проводить статистические наблюдения и оценивать все эти вероятности по частоте, либо смириться с неточностью модели и предположить независимость событий.

Упражнения

1. Из ящика, в котором находится 2 белых и 2 чёрных шара, вынимают наугад один за другим два шара. Найдите вероятность того, что:
   а) первый шар будет белый, а второй чёрный;
   б) шары будут одного цвета;
   в) шары будут разного цвета.
   Решение. а) $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$; в) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
2. Из ящика, в котором находится 3 белых и 3 чёрных шара, вынимают наугад один за другим три шара. Найдите вероятность того, что все три шара:
   а) белого цвета;
   б) одного цвета;
   в) белых шаров вынуто больше, чем чёрных.
   Решение. а) $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{2}$.
3. Два охотника независимо друг от друга делают по одному выстрелу в одну и ту же цель. Вероятность попадания первого – 0,8, второго – 0,9. С какой вероятностью хотя бы один из выстрелов достигнет цели?
   Решение. $1-(1-0,8)\cdot(1-0,9)=0,98$.
4. Монету бросают 5 раз.
   а) С какой вероятностью все пять раз выпадет орёл?
   б) С какой вероятностью выпадет хотя бы одна решка?
   Решение. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$; б) $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$.
5. Кубик бросают 5 раз.
   а) С какой вероятностью все пять раз выпадет единица?
   б) С какой вероятностью выпадет хотя бы одна шестёрка?
   Решение. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1}{7776}$; б) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{3125}{7776}\approx 0,402$.

В лотерее «Спринт» около 5% билетов выигрышных. Вы купили два билета. С какой вероятностью: а) оба окажутся без выигрыша; б) хотя бы один выиграет?

Решение. а) $0,95^2 = 0,9025$; б) $1 - 0,9025 = 0,0975$.

6. Студенты Петров и Иванов посещают лекции независимо друг от друга, причём Петров чаще, чем Иванов. Установлено, что вероятность их совместного появления на лекции равна 0,02, а вероятность, что ни один не придёт на лекцию – 0,72. Найдите вероятности появления на лекции для каждого студента.

   Решение. Обозначим неизвестную вероятность для Петрова через x, для Иванова - через y. Из условия задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 0,02 \\ (1-x)(1-y) = 0,72 \end{cases}.$$

   Решая её и учитывая, что $x > y$, получаем $x = 0,2$ и $y = 0,1$.

7. Докажите, что если $P(A) \neq 0$, то равенство $P(B) = P(B \mid A)$ равносильно равенству $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

   Решение. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$.

8. Докажите, что если $P(A) \neq 0$ и $P(\overline{A}) \neq 0$, то равенство $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ равносильно равенству $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

   Решение. Заметим, что любое событие B можно записать как объединение двух непересекающихся событий в виде $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, откуда $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$. Делаем равносильные преобразования:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$$

$$P(A \cap B) \cdot (1 - P(A)) = P(A) \cdot (P(B) - P(A \cap B))$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2. Комбинаторика и вероятность

Напомним, что в опытах с равновозможными исходами вероятность случайного события A вычисляется по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число исходов опыта, а m – число благоприятных для события A. В простых ситуациях, когда общее число исходов невелико, и они могут быть явно перечислены, подсчёт n и m не представляет затруднений. В более сложных, когда исходами опыта являются некоторые *комбинации* (например, наборы букв или цифр, пары шаров и т.д.) на помощь приходит комбинаторика с её правилами и формулами.

Важнейшим из них является *правило умножения*: если в комбинации из k элементов первый элемент можно выбрать N_1 способами, после чего второй - N_2 способами, третий – N_3 способами и т.д., то общее количество таких комбинаций будет $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot ... \cdot N_k$.

Пример 1. Номера российских автомобилей имеют вид БЦЦЦББ, где Ц – любая цифра от 0 до 9, Б – любая из двенадцати букв АВЕКМНОРСТУХ. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля все буквы и цифры будут разные?

Найдём общее количество номеров по правилу умножения:

$$n = 12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12.$$

Для подсчёта благоприятных номеров снова воспользуемся правилом умножения, только теперь будем учитывать то, что выбранные на предыдущих шагах буквы и цифры использовать нельзя:

$$m = 12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10.$$

Теперь можем найти вероятность:

$$P(A) = \frac{12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Бывают ситуации, когда правило умножения не работает: количество вариантов для выбора очередного элемента комбинации зависит от того, какие именно элементы были выбраны перед этим. В этих случаях может выручить *правило сложения*: следует попытаться разбить все комбинации на непересекающиеся классы, подсчитать число комбинаций в каждом из них, а затем сложить эти количества. Как видим, это скорее стратегия, а не чёткое правило.

Пример 2. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля сумма первых двух цифр будет равна третьей цифре?

Прежде всего, заметим, что про буквы в этой задаче можно забыть и считать, что номер автомобиля состоит из трёх цифр. Очевидно, что по правилу умножения подсчитать количество благоприятных комбинаций уже нельзя: для первой цифры 10 вариантов выбора, а для второй количество вариантов зависит от того, какая цифра была выбрана первой. В самом деле, если первая цифра 0, то для второй 10 вариантов, если первая цифра 1, то 9 вариантов (не годится цифра 9, т.к. 1+9=10) и т.д. Третья цифра после выбора первой и второй определяется при этом всегда однозначно. Вот и разобьём все благоприятные комбинации на 10 классов, в зависимости от того, какая цифра в номере первая – от 0 до 9. Очевидно, эти классы не пересекаются, а количество комбинаций в каждом из них равно соответственно 10, 9, …, 1. Сложив все эти количества, получаем, что $m = 10 + 9 + ... + 1 = 55$. Отсюда $P(A) = \dfrac{55}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{11}{200} = 0,055$.

Одна из распространённых ошибок при использовании правила сложения – разбиение комбинаций на *пересекающиеся* классы и сложение полученных количеств.

Пример 3. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля либо все буквы, либо все цифры будут разные?

Подсчитаем количество номеров, в которых все цифры разные: $m_Ц = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 12^3 = 1244160$. Теперь то же самое сделаем для букв: $m_Б = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 10^3 = 1320000$. А теперь воспользуемся (ошибочно!) правилом сложения:

$$m = m_Ц + m_Б = 1244160 + 1320000 = 2564160.$$

Ошибка здесь в том, что номера, в которых и буквы, и цифры разные, *учтены два раза*, поэтому правильный подсчёт такой: найдём количество номеров, в которых все буквы и цифры разные (мы это уже делали в примере 1): $m_{БЦ} = 12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10$, и вычтем это количество из полученной суммы:

$$m = m_Ц + m_Б - m_{БЦ} = 1244160 + 1320000 - 950400 = 1613760.$$

Вот теперь можем найти вероятность:

$$P(A) = \frac{1613760}{12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1681}{1800} \approx 0,934.$$

Есть ещё одно интересная комбинаторная стратегия – *правило вычитания*. Его можно сформулировать так: если сложно посчитать благоприятные комбинации, попробуйте посчитать *не* благоприятные, а потом вычесть это количество из всех возможных.

Пример 4. С какой вероятностью в случайном номере автомобиля есть хотя бы две совпадающие буквы или цифры?

Эту задачу можно решить по правилу сложения, но это будет очень долго, так как понадобится разбить все благоприятные комбинации на очень большое количество непересекающиеся классов (в зависимости от того, в каких именно позициях буквы или цифры совпадают, а в каких различны). Гораздо проще воспользоваться правилом вычитания. В самом деле, опишем комбинации, неблагоприятные для нашей задачи: это номера, в которых все буквы разные и все цифры разные. Но ведь это же комбинации из примера 1, количество которых мы легко нашли по правилу умножения: $\overline{m} = 12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10 = 950400$ (мы обозначили это количество через $\overline{m}$, т.к.

теперь это неблагоприятные комбинации). Отсюда находим количество благоприятных $m = n - \overline{m} = 1728000 - 950400 = 777600$ и получаем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{777600}{1728000} = \frac{9}{20} = 0,45\ .$$

Отметим интересную вещь: правилам умножения, сложения и вычитания соответствуют уже известные вам формулы вычисления вероятностей: формула сложения, формула умножения и формула вероятности противоположного события. Так что во всех приведённых примерах можно было вместо комбинаторных правил использовать эти формулы.

Все, кто хоть немного знаком с комбинаторикой, знают, что кроме правил в комбинаторике есть готовые формулы для подсчёта различных типов комбинаций: *перестановок*, *размещений*, *сочетаний* и других, более сложных. Напомним здесь три основные формулы:

Тип комбинаций	**Формула для подсчёта**
Перестановки из N объектов	$P_N = N!$
Размещения из N объектов по k	$A_N^k = N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1) = \dfrac{N!}{(N-k)!}$
Сочетания из N объектов по k	$C_N^k = \dfrac{N!}{(N-k)!k!}$

Первые две формулы – это простое применение правила умножения к соответствующему типу комбинаций, поэтому для решения вероятностных задач нет особой необходимости в их специальном рассмотрении (достаточно уметь применять правило умножения). А вот на сочетаниях мы остановимся подробнее.

Пусть имеется множество из N различных объектов (чисел, букв, шаров, лотерейных билетов, людей и т.д.). Из него нам нужно одновременно выбрать какие-нибудь k объектов (например, выбрать два шара из четырёх). Будем называть каждый такой выбор *сочетанием из N по k*. Спрашивается, сколько всего таких сочетаний существует? Понятно, что ответ не зависит от того, какие объекты мы рассматриваем, а определяется только числами N и k.

Чтобы ответить на этот вопрос, изменим условие задачи: будем выбирать объекты не одновременно, а последовательно друг за другом. Тогда для выбора первого объекта существует N вариантов выбора, для второго - $(N-1)$ вариант (один объект уже выбран), для третьего - $(N-2)$ варианта, …, для последнего k-го объекта - $(N-k+1)$ вариантов выбора (к этому времени $(k-1)$ объект уже выбран). Значит, по правилу умножения, всего таких вариантов последовательного выбора k объектов из N будет

$N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)$ (заметим, что мы только что доказали формулу для числа размещений A_N^k). Это длинное произведение можно записать в более компактной форме: $\frac{N!}{(N-k)!}$.

А теперь вернёмся к сочетаниям. Рассматривая вместо одновременного выбора последовательный, мы посчитали каждое сочетание не один, а $k!$ раз. В самом деле, ведь все комбинации, которые отличаются только порядком выбранных предметов, но не их составом, дают одно и то же сочетание. Посчитаем, сколькими способами можно упорядочить k предметов: на первое место можно поставить любой из k предметов, на второе – любой из $(k-1)$ оставшихся и т.д. – получаем $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1=k!$ (это мы доказали формулу для числа перестановок). Воспользуемся последним комбинаторным правилом, которое мы ещё не упоминали – *правилом деления*: если при подсечёте каких-либо комбинаций мы учли каждую из них r раз (здесь важно, что r одно и тоже для всех комбинаций), то для получения правильного ответа нужно поделить полученное количество на r. В нашем случае в качестве r выступает $k!$:

$$C_N^k=\frac{N!}{(N-k)!k!}$$; формула для числа сочетаний доказана.

Важный частный случай сочетаний получаем при $k=2$ – это *пары объектов*. Полезно запомнить, во что превращается при этом общая формула:

$$C_N^2=\frac{N\cdot(N-1)}{2}$$ - формула для числа пар.

Отметим также, что $C_N^0=1$, $C_N^1=N$. Эти равенства следуют как из общей формулы, так и из самого определения числа сочетаний (ничего не выбрать можно только одним способом, а выбрать один элемент - N способами).

Рассмотрим примеры вероятностных задач с использованием сочетаний.

Пример 5. Из Олиного класса, в котором учится 20 человек, случайным образом выбирают двух дежурных. С какой вероятностью дежурить будут Оля и её подруга Ира?

Равновозможными исходами нашего опыта являются всевозможные сочетания из 20-ти человек по 2 (т.е. пары дежурных). Всего таких сочетаний будет $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. Из них благоприятным для нашего события будет только одно, когда в эту пару попадают Оля и Ира. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{190}\approx 0,0053$.

Пример 6. В той же ситуации нужно ответить на другой вопрос: с какой вероятностью дежурить будет Оля?

Поскольку опыт не изменился, то общее число исходов осталось то же – 190. А вот благоприятными теперь будут те, пары, в которые входит Оля. Таких пар 19 (Олю можно поставить в пару с любым из 19-ти учеников). Искомая вероятность равна $\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$.

Получив такой замечательный ответ, полезно задуматься – а нельзя ли решить эту задачу как-нибудь проще, без использования сочетаний? Выберем пару дежурных следующим образом: положим в шапку 20 бумажек, 2 из них пометим крестиками. Ребята будут по очереди подходить к шапке и вытягивать по бумажке. Те, кто вытянул крестики, будут дежурить. Справедливый жребий? Очевидно, да. Остаётся договориться, кто пойдёт тянуть первым. Пусть это будет Оля. В момент, когда она подошла к шапке, там 20 бумажек, из которых 2 с крестиками. Очевидно, вероятность вытащить бумажку с крестиком - $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

Пример 7. Из ящика, в котором лежат 2 красных, 2 жёлтых и 2 зелёных шара, вытаскивают наугад два шара. С какой вероятностью они будут одного цвета?

В этой задаче часто можно услышать «мгновенные» ответы типа $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, ни один из которых, к счастью, не является верным («к счастью» - потому при правильном ответе очень трудно убедить ученика в неправильных рассуждениях). Как и в двух предыдущих примерах, равновозможными исходами опыта являются сочетания из 6-ти по 2, их количество равно $\frac{5\cdot 6}{2}=15$. Благоприятными будут 3 исхода, поэтому вероятность равна $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

Упражнения

9. Найдите вероятность того, что в случайном номере автомобиля будут только гласные буквы.

   Решение. Очевидно, что про цифры можно забыть и рассматривать номера, состоящие только из трёх букв. Перечислим все гласные буквы, которые можно использовать в номере: АЕОУ. Тогда общее количество исходов по правилу умножения будет $n=12^3$, количество благоприятных - $m=4^3$, вероятность - $P(A)=\frac{4^3}{12^3}=\frac{1}{27}$.

10. Каждый из четверых друзей случайным образом садится в один из 10-ти вагонов электрички. С какой вероятностью все они окажутся в разных вагонах?

    Решение. Каждый из четверых друзей может выбрать любой из 10-ти вагонов электрички, поэтому общее число возможных исходов по правилу умножения будет $n = 10^4$. При благоприятном исходе первый из друзей может выбрать вагон 10 способами, второй – 9 способами, третий – 8 и четвёртый – 7 способами. Отсюда $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, а вероятность $P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = \frac{63}{125} = 0,504$.

11. Шесть школьников случайным образом рассаживаются на скамейку. С какой вероятностью два друга Саша и Коля будут сидеть рядом?

    Решение. Посчитаем общее количество исходов опыта по правилу умножения: $n = 6!$ Благоприятные исходы разобьём на 5 непересекающихся классов, в зависимости от занимаемых нашими друзьями мест: 1 и 2, 2 и 3, …, 5 и 6. В каждом из этих классов посчитаем количество исходов по правилу умножения: $2 \cdot 4!$ Отсюда $m = 5 \cdot 2 \cdot 4!$, и вероятность $P(A) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3}$.

12. Те же шесть школьников случайным образом рассаживаются за круглый стол. С какой вероятностью два друга Саша и Коля будут сидеть рядом?

    Решение. Изменится только количество классов, на которые мы разбиваем благоприятные исходы: добавится класс, в котором друзья занимают места 6 и 1. Отсюда $m = 6 \cdot 2 \cdot 4!$, и вероятность $P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5}$.

13. В ящике лежит 20 яблок, из которых 5 червивых. Маша покупает 6 яблок. С какой вероятностью половина из них будут червивыми?

    Решение. Половина в данном случае означает 3 яблока. Поскольку речь идёт о случайном выборе шести яблок из двадцати, то исходами опыта будут сочетания из 20 по 6, поэтому $n = C_{20}^6$. Чтобы сочетание было благоприятным, нужно выбрать 3 червивых яблока из 5, а затем 3 не червивых из 15. Первое действие можно сделать C_5^3 способами, второе - C_{15}^3 способами, значит, по правилу умножения $m = C_5^3 \cdot C_{15}^3$.

    Отсюда вероятность $P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_{15}^3}{C_{20}^6} = \frac{455}{3876} \approx 0,117$.

14. С какой вероятностью в предыдущей задаче Маше не попадётся ни одного червивого яблока?

Решение 1. Общее число исходов не изменяется. Для благоприятного исхода теперь нужно выбрать все 6 яблок из 15 не червивых, поэтому $m = C_{15}^{6}$. Отсюда вероятность $P(A) = \frac{C_{15}^{6}}{C_{20}^{6}} = \frac{1001}{7752} \approx 0{,}129$.

Решение 2. Решим задачу по формуле умножения для зависимых событий: $P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{11}{16} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1001}{7752} \approx 0{,}129$.

3. Случайные величины

Случайным называется любое событие, связанное со случайным экспериментом. До проведения эксперимента мы не можем точно сказать, произойдет оно или не произойдет. Совершенно аналогично *случайной величиной* называется любая числовая величина, связанная со случайным экспериментом. До проведения эксперимента нельзя однозначно предсказать, какое она примет значение, но можно попытаться найти все её возможные значения и их вероятности. Такая информация позволит с некоторой долей уверенности предсказывать поведение случайной величины в будущем и использовать это для решения практических задач.

Пример 1. Рассмотрим эксперимент с подбрасыванием двух кубиков. Он имеет 36 равновозможных исходов, каждый из которых можно закодировать парой чисел, выпавших на первом и втором кубиках. Введем следующие величины:

X – число очков на первом кубике;
Y – число очков на втором кубике;
S – сумма очков на двух кубиках;
M – максимальное из двух чисел на кубиках;
m – минимальное из двух чисел на кубиках.

Значение любой из этих четырех величин связано с указанным экспериментом. Пусть, например, эксперимент завершился исходом (3;2). Тогда перечисленные величины приняли следующие значения: X=3; Y=2; S=5; M=3; m=2. При другом исходе эксперимента эти значения будут другими. Для каждого из 36-ти возможных исходов эксперимента можно точно указать значение каждой из перечисленных выше величин. В нашем опыте это удобно сделать с помощью таблиц. Вот так, например, будет выглядеть таблица значений случайной величины S, равной сумме значений на двух кубиках:

2-й кубик / 1-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7

2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рис. 1.

Аналогичные таблицы можно составить и для остальных величин, приведенных в примере (см. задачу 1). Таким образом, *случайная величина представляет собой функцию, определенную на множестве всех возможных исходов опыта*: областью определения этой функции является множество всех возможных исходов, а её значениями – числа (целые или действительные). Для каждого исхода случайная величина имеет вполне определенное (неслучайное) значение. Но поскольку исход опыта заранее неизвестен, то и значение, которое примет эта величина в любом опыте, заранее неизвестно, случайно.

Чтобы полностью задать случайную величину, нужно указать, какое значение она принимает на каждом из элементарных исходов опыта. Но это не всегда удобно: исходов, как мы видели, может быть много (или даже бесконечно много), и задать значение случайной величины на каждом из них с помощью таблицы или каким-то другим простым методом будет уже невозможно. К счастью, во многих ситуациях столь подробного описания случайной величины не требуется – достаточно знать, какие значения она может принимать и каковы их вероятности. Эта информация называется *законом распределения вероятностей или просто распределением вероятностей случайной величины*. Если количество возможных значений случайной величины конечно, то закон распределения удобнее всего задавать таблицей (рис. 2): в первой строке по возрастанию перечисляются все возможные значения величины, а во второй – их вероятности.

Значения	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности	p_1	p_2	...	p_n

Рис. 2

Не путайте эту таблицу с той, которая изображена на рис.1: там таблица использовалась для задания самой случайной величины как функции на множестве исходов; здесь – для ее закона распределения. Поскольку в законе распределения учитываются все возможные значения данной величины, то сумма соответствующих им вероятностей должна быть равна 1:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Посмотрим, как будут выглядеть законы распределения для некоторых величин из примера 1.

Пример 1. Закон распределения случайной величины *X*:

Значения	1	2	3	4	5	6
Вероятности	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Рис. 3.

Как видим, все значения, которые может принимать величина *X*, равновозможны. Закон распределения случайной величины *Y*, очевидно, будет точно таким же. На этом примере мы видим, что у разных случайных величин законы распределения могут совпадать.

Закон распределения случайной величины *S*:

Значения	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятности	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Рис. 4.

Здесь значения имеют разную вероятность. Такой закон уже интересно изобразить с помощью графика:

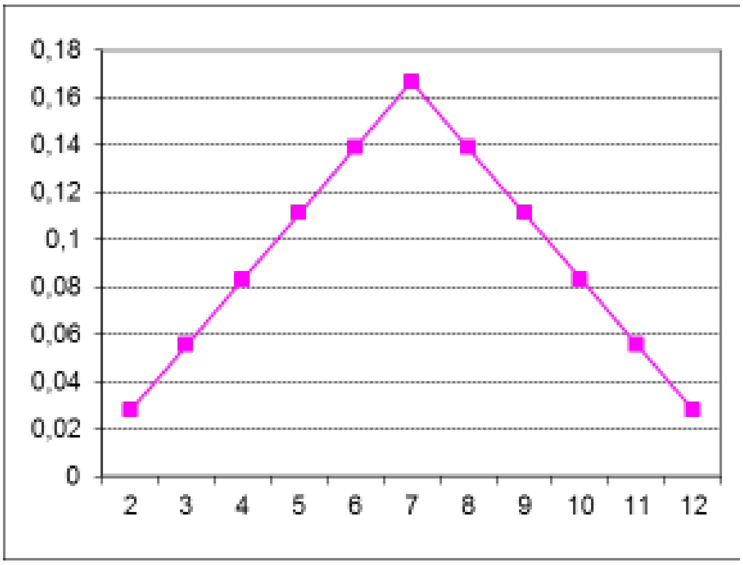

Рис. 5.

По оси О*x* отложены возможные значения случайной величины *S*, по оси О*y* – их вероятности. Поскольку возможных значений всего 11, график представляет собой множество из 11 точек, которые для наглядности соединены отрезками. Такой график называют *полигоном распределения*. Законы распределения случайных величин *m* и *M* мы построим в задаче 2.

Итак, мы выяснили, что для того, чтобы охарактеризовать поведение случайной величины, не обязательно знать ее значение для каждого из возможных исходов опыта – можно вполне обойтись информацией, которую мы назвали законом распределения. Можно пойти еще дальше и сократить количество информации до минимума, заменив закон распределения всего одним или несколькими числами. Конечно, много полезных деталей будет при этом потеряно. Но если числовые характеристики выбраны удачно, то они могут стать «квинтэссенцией», содержащей наиболее важную информацию о поведении случайной величины.

Обратившись к повседневному опыту, нетрудно догадаться, что наиболее важной числовой характеристикой случайной величины является ее среднее значение, или, как говорят в теории вероятностей, *математическое ожидание* случайной величины. Посмотрим, как же оно определяется. Пусть величина X имеет закон распределения, заданный таблицей на рис.2. Что можно считать ее средним значением? Казалось бы, наиболее естественный способ - взять среднее арифметическое всех значений x_i. Но тогда не будут учтены их вероятности, а ведь какие-то из x_i более вероятны и, значит, должны внести больший вес в формирование среднего значения. В теории вероятностей *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины X называют число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n .$$

Как видите, каждое из возможных значений входит в это выражение со своим весом, равным соответствующей вероятности. Обозначение $E(X)$ происходит от английского слова *expectation* – ожидание.

Пример 1. Вернёмся к примеру с двумя кубиками. Поскольку X и Y имеют одинаковый закон распределения, то их математические ожидания совпадают:

$$E(X) = E(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

Получается, что в среднем на каждом из кубиков выпадает по три с половиной очка? Как ни странно, это именно так. Среднее значение может не совпадать ни с одним из возможных значений случайной величины. О том, как можно интерпретировать значение 3,5 на практике, мы поговорим в заключительном разделе этого приложения, где речь пойдёт о законе больших чисел. А теперь найдем математическое ожидание суммы очков на двух кубиках:

$$E(S) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Полученный результат можно было угадать, глядя на график закона распределения случайной величины S: он абсолютно симметричен относительно значения 7. Справедливо следующее общее утверждение: если закон распределения случайной величины симметричен относительно некоторого числа a, то это число и будет математическим ожиданием этой величины. В заключение отметим некоторые свойства математического ожидания, которые можно вывести из его определения:

1. Математическое ожидание константы k равно ей самой: $E(k) = k$.
2. Если k – произвольное число, то $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$.
3. Для любых случайных величин X и Y выполняется равенство
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Кроме этого имеет место еще одно замечательное свойство, которое выполняется уже не для всех случайных величин:

4. Для *независимых* случайных величин X и Y выполняется равенство
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Независимость величин имеет тот же смысл, что и независимость случайных событий, но останавливаться на этом понятии более подробно мы не будем. Приведенные свойства математического ожидания могут значительно облегчить его подсчет. Вернемся к примеру 1. Математическое ожидание случайной величины S можно найти, не обращаясь к ее закону распределения, используя вместо этого свойство 4:
$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Как видите, этот способ намного короче, чем вычисление $E(S)$ по определению.

Итак, мы рассмотрели число, которое характеризует поведение случайной величины в среднем. Но среднее значение далеко не всегда дает даже общее представление о поведении случайной величины. Есть еще одна характеристика, которая зачастую несет не менее важную информацию – это *разброс* (или *рассеивание*) случайной величины вокруг ее среднего значения. Очевидно, проще всего взять в качестве числовой меры такого разброса среднее отклонение от среднего, то есть:
$$E(X - E(X)).$$

Но в силу свойств математического ожидания эта величина всегда равна нулю:
$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0.$$

Этот факт имеет простое объяснение: случайная величина $X - E(X)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, которые компенсируют друг друга и дают в среднем 0. Для получения объективной характеристики разброса необходимо брать все эти отклонения с одним и тем же знаком. Здесь возможны разные варианты – например, взять в качестве меры разброса математическое ожидание модуля отклонения $|X - E(X)|$ или квадрата отклонения $(X - E(X))^2$. В теории вероятностей предпочли остановиться на втором варианте и считать основной мерой рассеивания случайной величины *дисперсию*, равную

$$D(X) = E(X - E(X))^2 .$$

Вычислим дисперсию для случайной величины *X*, имеющей закон распределения, заданный на рис.1. Обозначим для простоты математическое ожидание случайной величины X через $a = E(X)$. Тогда в соответствии с определением дисперсии получаем:

$$D(X) = (x_1 - a)^2 \cdot p_1 + (x_2 - a)^2 \cdot p_2 + (x_3 - a)^2 \cdot p_3 + ... + (x_n - a)^2 \cdot p_n \ .$$

Дисперсия хорошо характеризует разброс случайной величины, но имеет один существенный недостаток: она измеряется в «квадратных» по отношению к самой случайной величине *X* единицах. Например, если *X* измеряется в метрах, то $D(X)$ - в квадратных метрах; если *X* измеряется в рублях, то $D(X)$ - в «квадратных рублях» … Чтобы избежать такого несоответствия, часто используют другую меру рассеивания, равную квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Эта величина называется *средним квадратичным* или *стандартным отклонением* случайной величины *X*. Стандартное отклонение, как и математическое ожидание, измеряется в тех же единицах, что и исходная величина *X*.

Как и математическое ожидание, дисперсия обладает рядом свойств, которые могут облегчить её вычисление:

1. Дисперсия константы равна нулю: $D(k) = 0$.
2. Если *k* – произвольное число, то $D(k \cdot X) = k^2 \cdot D(X)$.
3. $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

А вот дисперсия суммы будет равна сумме дисперсий уже не для всех, а лишь для независимых случайных величин:

4. Для *независимых* случайных величин *X* и *Y* выполняется равенство
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) .$$

Вернёмся к примеру 1 и вычислим дисперсию приведённых там случайных величин.

Пример 1. Вычислим дисперсию случайной величины *X* двумя способами: по определению и с использованием свойства 3. В обоих случаях нам понадобится уже вычисленное ранее математическое ожидание этой величины - $E(X) = 3{,}5$.

1-й способ (по определению дисперсии):

$$D(X)=(1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}=$$
$$=6{,}25\cdot\frac{1}{6}+2{,}25\cdot\frac{1}{6}+0{,}25\cdot\frac{1}{6}+0{,}25\cdot\frac{1}{6}+2{,}25\cdot\frac{1}{6}+6{,}25\cdot\frac{1}{6}=17{,}5\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12}$$

2-й способ (по свойству 3):

$$D(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-3{,}5^2=91\cdot\frac{1}{6}-3{,}5^2=\frac{35}{12}.$$

Как и математическое ожидание, дисперсия полностью определяется законом распределения случайной величины, поэтому $D(Y)=D(X)=\frac{35}{12}$.

А вот для подсчета дисперсии случайной величины S можно воспользоваться одним из свойств дисперсии: нужно вспомнить, что $S=X+Y$, причем величины X и Y очевидным образом независимы. Отсюда

$$D(S)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}.$$

Упражнения

15. Постройте таблицы значений случайных величин m и M из примера 1.

Решение.

2-й кубик / 1-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Таблица значений *m*

2-й кубик / 1-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Таблица значений *M*

16. Найдите законы распределения вероятностей для случайных величин m и M из примера 1 и постройте для них полигоны распределения.

Решение.

m	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Закон распределения *m*

M	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Закон распределения *M*

17. Найдите математическое ожидание случайных величин m и M из примера 1.

Решение.

$$E(m)=1\cdot\frac{11}{36}+2\cdot\frac{9}{36}+...+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{91}{36}$$

$E(M)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+...+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}$

Проверка: поскольку $m+M=X+Y=S$, то должно выполняться $E(m)+E(M)=E(S)=7$. Проверяем: $\frac{91}{36}+\frac{161}{36}=\frac{252}{36}=7$ - выполнено.

18. Стрелок, который попадает в мишень с вероятностью p, сделал 2 выстрела по мишени. Случайная величина S - общее количество попаданий. Найдите математическое ожидание и дисперсию S.

Решение. Найдём закон распределения S:

S	0	1	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$E(S)=0\cdot(1-p)^2+1\cdot 2p(1-p)+2\cdot p^2=2p$;

$E(S^2)=0^2\cdot(1-p)^2+1^2\cdot 2p(1-p)+2^2\cdot p^2=2p+2p^2$;

$D(S)=E(S^2)-E^2(S)=2p+2p^2-(2p)^2=2p-2p^2=2p(1-p)$.

4. Испытания Бернулли

Все новые понятия и формулы, которые мы рассмотрели в разделах 1-3, находят своё применение в одной из самых замечательных вероятностных моделей – так называемой *схеме Бернулли*[3].

Представим себе, что мы проводим случайный опыт, в котором нас интересует наступление некоторого случайного события A. Будем считать наступление этого события *успехом*, а противоположный результат $\overline{A}$ – *неудачей*. Вероятность успеха обозначим p, вероятность неудачи – q:

$$p=P(A),\qquad q=P(\overline{A}),\qquad p+q=1.$$

Если провести N таких независимых опытов, то полученная модель будет называться схемой Бернулли, а сама последовательность – *испытаниями Бернулли*. Мы уже не раз пользовались этой схемой, когда решали задачи, в которых многократно подбрасывались монеты, игральные кубики, производились выстрелы в мишень и т.д. Чтобы любой из перечисленных примеров превратился в схему Бернулли, нужно было лишь договориться о том, что в каждом из этих опытов считать успехом.

---

[3] Поскольку Бернулли – это целая математическая династия, то следует объяснить, что здесь речь идёт о Якобе Бернулли (1654-1705) – швейцарском математике, который помимо теории вероятностей внёс большой вклад в аналитическую геометрию, вариационное исчисление, теорию чисел и другие разделы математики.

Пример 1. Подбрасывание монеты. Успех – выпадение орла. Серия из N таких испытаний представляет собой *симметричные* испытания Бернулли, в которой вероятности успеха и неудачи равны: $p = q = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Тестирование. Ученик отвечает на вопрос, к которому дается 4 варианта ответа, из которых ровно один верный. Предположим, что ученик не знает предмета и выбирает правильный ответ наугад. Будем считать успехом событие A – выбран правильный ответ. Его вероятность $P(A) = \frac{1}{4}$. Экзамен, в котором ученик отвечает на N таких вопросов, можно считать схемой Бернулли, в которой $p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$.

Пример 3. Выбор с возвращением. В ящике находится L деталей, из которых l деталей не удовлетворяют стандарту качества. Из ящика достают деталь, проверяют и кладут обратно. Успехом будем считать событие A – деталь бракованная. Вероятность успеха $P(A) = \frac{l}{L}$. Серия из N таких испытаний будет схемой Бернулли с $p = \frac{l}{L}$, $q = 1 - \frac{l}{L}$.

Пример 4. Выбор без возвращения. Проводится тот же опыт, но проверенная деталь обратно в ящик не возвращается. Будет ли это схемой Бернулли? Очевидно, нет. Результаты опытов становятся зависимыми: если в первом опыте вынутая деталь оказалась бракованной, то шансы на успех во втором опыте уменьшаются. Соответствующая условная вероятность будет равна $\frac{l-1}{L-1}$. Ее отличие от безусловной $\frac{l}{L}$ будет незначительным только в том случае, если числа l и L достаточно велики (мы уже обсуждали этот вопрос в первом разделе).

Последний пример показывает, что не любая последовательность испытаний с двумя исходами может рассматриваться как схема Бернулли.

Одной из первых задач, которые возникают при рассмотрении схемы Бернулли, является *задача о вероятности получить заданное число успехов*. Приведём примеры таких задач для испытаний, описанных в примерах 1-3:

Пример 1а. Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью выпадет ровно 5 орлов?

Пример 2а. Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит на 15 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?

Пример 3а. В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5-ти деталей. С какой вероятностью все выбранные детали будут без брака?

В общем виде задача формулируется так: проводится серия из N испытаний Бернулли с вероятностью успеха p; с какой вероятностью ровно k из этих испытаний закончатся успехом? Обозначим интересующую нас вероятность $P_N(k)$ и докажем следующую *формулу Бернулли*:

$$P_N(k) = C_N^k p^k q^{N-k}$$

Напомним, что через C_N^k в комбинаторике обозначается число сочетаний, т.е. число способов, которым можно выбрать любые k предметов из N имеющихся. Это число находится по формуле $C_N^k = \dfrac{N!}{(N-k)!\cdot k!}$ (см. раздел 2).

Перейдем к доказательству формулы Бернулли. Рассмотрим всю серию из N испытаний как один случайный опыт. Какие у него элементарные исходы и сколько их? Каждый исход такого «длинного» опыта закодируем последовательностью из букв У и Н, которые могут чередоваться в произвольном порядке. Вот так, например, будут выглядеть все возможные исходы серии из трех испытаний:

УУУ, УУН, УНУ, УНН, НУУ, НУН, ННУ, ННН.

Как видим, таких исходов в этом случае восемь. Нетрудно сообразить, что в общем случае для N испытаний возможных исходов будет 2^N - это немедленно следует из правила умножения (подобные задачи мы решали в разделе 2). Будут ли все такие исходы равновероятны? Разумеется, нет! Однако вероятность каждого исхода можно легко вычислить, пользуясь *формулой произведения вероятностей* для независимых событий. В самом деле, поскольку все отдельные опыты в любой серии независимы, то вероятность любой последовательности из k успехов и $(N-k)$ неудач может быть найдена по формуле $p^k q^{N-k}$. Так, для приведенных выше восьми исходов их вероятностями будут: $p^3, p^2q, p^2q, pq^2, p^2q, pq^2, pq^2, q^3$.

Для доказательства формулы Бернулли остается сделать последний шаг – посчитать, сколько всего серий, в которых содержится ровно k успехов. Другими словами, сколько последовательностей длины N можно составить из букв У и Н так, чтобы в них было ровно k букв У? У нас имеется N пустых мест, на которые нужно расставить k букв У и $(N-k)$ букв Н. Сколькими способами это можно сделать? Каждый способ состоит в выборе тех k из N мест, на которых будут стоять буквы У. Это можно сделать C_N^k способами. Значит, всего таких серий будет C_N^k, а поскольку вероятность каждой из них равна $p^k q^{N-k}$, то

$$P_N(k) = p^k \cdot q^{N-k} + p^k \cdot q^{N-k} + ... + p^k \cdot q^{N-k} = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

Формула Бернулли в самом общем случае доказана. Вернемся теперь к нашим примерам 1-3 и вычислим вероятности описанных там событий.

Пример 1а. Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью выпадет ровно 5 орлов?

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{63}{256} \approx 0,246\,.$$

Пример 2а. Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит на 15 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?

$$P_{10}(5) = C_{20}^{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{235467}{68719476736} \approx 0,00000343\,.$$

Пример 3а. В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5-ти деталей. С какой вероятностью все выбранные детали будут без брака?

$$P_{100}(5) = C_{100}^5 \left(\frac{1}{10}\right)^5 \left(\frac{9}{10}\right)^{95} \approx 0,0339\,.$$

На практике представляют интерес вероятности более сложных событий, связанных с испытаниями Бернулли.

Пример 1б. Монету бросают 10 раз. С какой вероятностью орлов выпадет больше половины?

Пример 2б. Ученик отвечает на 20 вопросов теста. С какой вероятностью он правильно ответит хотя бы на 5 вопросов, если плохо знает предмет и выбирает ответы наугад?

Пример 3б. В ящике находится 100 деталей, из которых 10 бракованных. Для оценки доли брака производится повторная выборка из 5-ти деталей. С какой вероятностью хотя бы одна выбранная деталь будет бракованная?

Во всех приведённых примерах речь идёт о событиях типа «число успехов в N испытаниях будет лежать в пределах от k_1 до k_2». Для такой вероятности будем использовать обозначение $P_N(k_1;k_2)$. Ясно, что любую такую вероятность можно найти, просто сложив все вероятности $P_N(k)$, где k пробегает все значения из диапазона от k_1 до k_2. Правда этих вероятностей может оказаться слишком много, поэтому в каждой конкретной задаче стоит поискать более рациональные пути вычисления вероятностей.

Пример 3б. Необходимо вычислить $P_5(1;5) = P_5(1) + ... + P_5(5)$.

Перейдём к противоположному событию:

$$P_5(1;5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{781}{1024} \approx 0,763\,.$$

Вероятности из примеров 1б и 2б вычисляются в задачах 4 и 5.

Рассмотрим теперь случайную величину S_N, равную числу успехов в N испытаниях Бернулли. Очевидно, что она может принимать любые значения от 0 до N, причём вероятность каждого значения задаётся формулой Бернулли:

$$P\{S_N = k\} = P_N(k) = C_N^k p^k q^{N-k}.$$

В следующем разделе для вывода закона больших чисел нам понадобится знать, чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины S_N. Попробуем использовать для их вычисления свойства математического ожидания и дисперсии, о которых говорилось в разделе 3. Рассмотрим случайные величины $X_1,...,X_N$, каждая из которых определяется так:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если i-е испытание завершилось неудачей;} \\ 1, & \text{если i-е испытание завершилось успехом.} \end{cases}$$

Все эти величины имеют одинаковый закон распределения:

X_i	0	1
P	q	p

Непосредственно из этого закона получаем:

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p;$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = p - p^2 = p \cdot (1-p) = pq.$$

Величины $X_1,...,X_N$ независимы, а их сумма равна общему числу успехов в N испытаниях, то есть, интересующей нас случайной величине S_N. Отсюда находим математическое ожидание и дисперсию S_N:

$$E(S_N) = E(X_1 + ... + X_N) = E(X_1) + ... + E(X_N) = Np;$$

$$D(S_N) = D(X_1 + ... + X_N) = D(X_1) + ... + D(X_N) = Npq.$$

Упражнения

1. Монету бросают 4 раза. С какой вероятностью выпадет ровно 2 орла?

   Решение. Это испытания Бернулли с $p = 0,5$ и $N = 4$,

   $$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

2. Какова вероятность того, что при бросании шести кубиков выпадет хотя бы одна шестерка?

   Решение. Это испытания Бернулли с $p = \frac{1}{6}$ и $N = 6$,

$$P_6(1;6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665.$$

На каждом этаже в подъезде 5-этажного дома горят одинаковые лампочки. Вероятность того, что любая из них не сгорит в течение ближайшего месяца, равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение месяца: а) сгорит ровно одна лампочка; б) сгорит хотя бы одна лампочка?

Решение. Если считать успехом перегорание лампочки, то это испытания Бернулли с $p = 0{,}8$ и $N = 5$,

а) $P_5(1) = C_5^1 (0{,}8)^1 (0{,}2)^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 \approx 0{,}0064$;

б) $P_5(1;5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 (0{,}8)^0 (0{,}2)^5 = 1 - (0{,}2)^5 \approx 0{,}9997$.

3. Найдите вероятность события из примера 2б.

   Решение. Необходимо вычислить

   $P_{20}(5;20) = P_{20}(5) + ... + P_{20}(20) = 1 - (P_{20}(0) + ... + P_{20}(4))$.

   Можно сократить вычисления, если перейти к противоположному событию:

   $P_{20}(5;20) = 1 - (P_{20}(0) + ... + P_{20}(4)) \approx 1 - 0{,}415 = 0{,}585$.

4. Найдите вероятность события из примера 1б.

   Решение. Необходимо вычислить $P_{10}(6;10) = P_{10}(6) + ... + P_{10}(10)$.

   Чтобы не вычислять пять вероятностей, составляющих эту сумму, заметим, что в силу симметрии опыта искомая вероятность совпадает с вероятностью события «решек выпадет больше половины», которая равна $P_{10}(0;4) = P_{10}(0) + ... + P_{10}(4)$.

   Остаётся вспомнить, что $P_{10}(0;4) + P_{10}(5) + P_{10}(6;10) = 1$.

   Из всего сказанного получаем:

   $$P_{10}(6;10) = \frac{1 - P_{10}(5)}{2} = \frac{1 - C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{2} = \frac{193}{512} \approx 0{,}377.$$

5. Ученик отвечает на 40 вопросов теста, выбирая каждый раз один из четырёх ответов наугад. На сколько вопросов в среднем он ответит правильно?

   Решение. Это испытания Бернулли с $p = \frac{1}{4}$ и $N = 40$. Нужно найти математическое ожидание числа успехов. Оно равно $Np = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10$.

5. Закон больших чисел

Закон больших чисел – это обобщенное название нескольких теорем, суть которых состоит в том, что

- во-первых, при неограниченном увеличении числа испытаний *частота случайного события стремится к его вероятности;*
- *во-вторых, среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины (в статистике это называется выборочным средним) стремится к её математическому ожиданию.*

Конечно, чтобы эти утверждения стали настоящими теоремами, нужно потребовать, чтобы выполнялись некоторые условия, и придать строгий смысл понятию «стремится». В этом разделе мы постараемся сделать это на доступном для школьника уровне, а также показать различные проявления закона больших чисел в реальной жизни.

Начнём с первой теоремы, которая касается сходимости частоты к вероятности. Представим себе, что мы хотим оценить неизвестную нам вероятность p некоторого случайного события A по его частоте и проводим с этой целью серию повторных *независимых* испытаний, в каждом из которых наше событие может произойти или не произойти. Если считать наступление события A успехом, то мы получаем рассмотренную в предыдущем разделе схему Бернулли. Пусть S_N, как и раньше, обозначает общее число успехов (то есть, наступлений события A) в N испытаниях. Тогда частота f_N события A после проведения N испытаний будет выражаться дробью

$$f_N = \frac{S_N}{N}$$

В предыдущем разделе было показано, что для случайной величины S_N справедливы равенства $E(S_N) = Np$, $D(S_N) = Npq$.

Найдём отсюда математическое ожидание и дисперсию случайной величины f_N:

$$E(f_N) = E\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{1}{N}E(S_N) = \frac{Np}{N} = p\,,$$

$$D(f_N) = D\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}D(S_N) = \frac{Npq}{N} = \frac{pq}{N}\,.$$

Получаем, что математическое ожидание частоты f_N равно вероятности p, а дисперсия f_N (то есть, разброс частоты вокруг вероятности) с ростом N уменьшается и стремится к 0.

Теперь перейдём ко второму утверждению о связи между выборочным средним и математическим ожиданием. Рассмотрим серию *независимых* наблюдений над некоторой случайной величиной X с математическим ожиданием a и дисперсией d. Обозначим эти наблюдения $X_1, X_2, ..., X_N$.

Среднее арифметическое таких наблюдений в статистике называется выборочным средним и обозначается

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\overline{X}$:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N}(E(X_1) + ... + E(X_N)) = \frac{1}{N}(a + ... + a) = \frac{Na}{N} = a,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N^2}(D(X_1) + ... + D(X_N)) = \frac{1}{N^2}(d + ... + d) = \frac{Nd}{N^2} = \frac{d}{N}$$

(при вычислении дисперсии мы пользовались независимостью $X_1, X_2, ..., X_N$).

Получили такие же результаты, как и для частоты: математическое ожидание выборочного среднего равно a, а дисперсия с ростом N уменьшается и стремится к 0.

Таким образом, предположив независимость проводимых испытаний, мы получили, что разброс частоты вокруг вероятности, так же, как разброс выборочного среднего около математического ожидания, с ростом числа испытаний уменьшается и приближается к 0. На практике это позволяет использовать приближённые равенства: $f_N \approx P(A)$, $\overline{X} \approx E(X)$, которые тем точнее, чем больше N. При этом возникает естественный вопрос: сколько испытаний нужно провести, чтобы обеспечить в этих равенствах заранее заданную точность? Например, сколько раз нужно бросить монету, чтобы полученная частота орлов отличалась от 0,5 не больше, чем на 0,01? Простого ответа на этот вопрос, к сожалению, не существует. И связано это всё с той же случайностью, которая присутствует в любом таком опыте.

Представьте себе, что путём каких-то рассуждений мы дали на этот вопрос точный ответ: нужно провести, скажем, 10 000 опытов. После этого кто-то провёл такую серию опытов, и у него получилось 4800 орлов, то есть, отклонение частоты от вероятности составило 0,02. Может такое случится? Да, и, зная формулу Бернулли, мы можем даже найти вероятность такого «чрезвычайного события» - она будет маленькой, но не нулевой. Значит, дать стопроцентную гарантию, что частота после стольких-то опытов будет отличаться от вероятности не больше, чем на 0,01 невозможно. Равенства, написанные выше, кроме того, что они приближённые, ещё и в определённом смысле «случайные»: указывая границы, в которых будет лежать частота после проведения 10 000 опытов, мы должны добавить «с такой-то вероятностью». Например, для опыта с монетой частота орлов после проведения 10 000 испытаний будет лежать от 0,49 до 0,51 (т.е. отклоняться от вероятности не больше, чем на 0,01) с вероятностью 0,955[4].

Найти эту вероятность для заданных границ можно разными способами. Грубую (то есть, не очень точную) оценку даёт *неравенство Чебышёва*[5]:

для любого числа $r > 0$

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq r\right) \leq \frac{D(X)}{r^2}.$$

Словами его смысл можно передать так: вероятность, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания больше, чем на r, не превышает $\frac{D(X)}{r^2}$. Можно записать его и в другой, противоположной форме:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < r\right) > 1 - \frac{D(X)}{r^2}.$$

Если вернуться к примеру с монетой, то после N опытов дисперсия частоты, как мы уже показали, будет равна $\frac{pq}{N} = \frac{1}{4N}$. Значит, вероятность, что частота орлов отклонится от 0,5 больше, чем на 0,01, не превышает по неравенству Чебышёва $\frac{1}{4N \cdot 0{,}01^2} = \frac{10000}{4N}$. Получается, что после 10 000 опытов эта вероятность будет не больше 0,25. Как видите, оценка действительно слишком грубая – выше мы уже говорили, что на самом деле она меньше 0,05. Однако главное, что даёт неравенства Чебышёва: из него следует, что вероятность любого отклонения частоты случайного события от его вероятности (и выборочного среднего от математического ожидания) стремится к 0 с ростом числа испытаний – это и есть математическая формулировка закона больших чисел.

Из неравенства Чебышёва можно сделать ещё один полезный для практических целей вывод: отклонение частоты от вероятности убывает примерно как $\frac{1}{\sqrt{N}}$, где N - число проведённых испытаний. В самом деле, если зафиксировать вероятность, с которой мы «доверяем» неравенству $\left|X - E(X)\right| < r$, сделав её, скажем 0,99 (для практических целей этого, обычно, вполне достаточно), и вспомнить, что дисперсия частоты равна $\frac{pq}{N}$, то

---

[4] Этот результат можно получить с помощью теоремы Муавра-Лапласа, которая выходит за рамки рассматриваемого материала.

[5] П.Л.Чебышёв (1821-1894) – великий русский математик, получивший фундаментальные результаты во многих областях математики и механики. Ему принадлежит один из вариантов закона больших чисел.

получим $\frac{pq}{N\cdot r^2}=0,01$, следовательно, $r=\frac{10\sqrt{pq}}{\sqrt{N}}$. То есть, чтобы повысить точность приближения r в 10 раз, нужно будет провести примерно в 100 раз больше испытаний. Это полезно помнить, когда перед вами стоит реальная задача оценить неизвестную вероятность по полученной частоте.

В заключение, посмотрим, какие ещё проявления закона больших чисел можно наблюдать в повседневной жизни – ведь многократным подбрасыванием монеты мы занимаемся не так уж часто. Более реальный пример из похожей области – всевозможные лотереи, которые проводятся сейчас в большом количестве. Во многих из них (например «Спортлото») условия игры хорошо известны, и после освоения начального курса теории вероятностей вам не составит особого труда рассчитать вероятность выигрыша в такой лотерее, а точнее – его математическое ожидание. Будьте уверены, что оно всегда меньше цены билета, и это вполне оправдано – иначе, благодаря всё тому же закону больших чисел, организаторы лотереи разорились бы уже через несколько тиражей (именно через несколько – ведь в каждом тираже участвует очень много билетов, поэтому закон больших чисел для организаторов начинает работать сразу!). Представьте, что вы покупаете билет лотереи, в которой математическое ожидание выигрыша – 100 рублей, а стоимость билета – 200 рублей. Сыграв в такую лотерею один раз, вы рискуете потерять всего 200 рублей, зато можете выиграть миллион (правда, с очень маленькой вероятностью). Именно по этой причине люди и покупают иногда лотерейные билеты, вполне разумно рассудив, что ничего страшного в потере 200 рублей нет. Но если вы начинаете играть в такую лотерею регулярно (см. задачу 3), то ваши средние потери в соответствии с законом больших чисел будут неуклонно приближаться к 100 рублям на каждый купленный билет, и шансы выйти из такого затруднительного положения с каждым тиражом будут только уменьшатся.

Существуют и более приятные проявления закона больших чисел. Одно из них – повышение точности измерений. Пословица «семь раз отмерь, один раз отрежь» появилась задолго до того, как Якоб Бернулли впервые сформулировал закон больших чисел. Давно известно, что для повышения точности измерения какой-либо величины лучше всего взять результаты нескольких измерений, а потом вычислить их среднее арифметическое (именно так вы действуете на лабораторных работах по физике). В самом деле, если обозначить эти результаты $X_1, X_2, ..., X_N$, то при условии, что измерения независимы и не имеют систематической ошибки (то есть, их математическое ожидание равно неизвестной измеряемой величине a), в силу закона больших чисел мы получим приближённое равенство $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} \approx a$, которое будет тем точнее, чем больше сделано измерений.

Страхование – одна из тех отраслей экономики, где буквально всё основано на законе больших чисел. Именно благодаря проявлению этого закона страховая компания может, основываясь на уже имеющихся данных, рассчитать ожидаемый ущерб клиентов и размеры страховых выплат и быть уверенной, что в ближайшем будущем они не сильно изменятся (или, в более сложной ситуации, следя за определёнными тенденциями, предсказать их изменение).

В медицине первыми симптомами болезни может служить выход некоторых показателей за пределы нормы. Что при этом считать нормой и как отделить случайную изменчивость, свойственную всем живым организмам, от патологии? Здесь тоже поможет хорошее знание закона больших чисел и связанных с ним вероятностных методов. Сейчас на некоторых заключениях, выдаваемых медицинскими лабораториями, можно увидеть такие выводы: «с вероятностью … у пациента диагностировано …». Справедливости ради, нужно отметить, что не всем таким заключениям следует доверять: бывает, что методы теории вероятностей применяются необдуманно и без достаточных на то оснований.

Подытоживая материал этого раздела, можно сказать, что закон больших чисел лежит в основе буквально всех приложений теории вероятностей и позволяет рассматривать вероятность, как объективную характеристику случайных явлений, происходящих вокруг нас.

Упражнения

19. Математическое ожидание случайной величины X равно 5, дисперсия равна 1. В каких границах будут лежать значения X с вероятностью 0,99?

    Решение. Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины X:

    $$P\left(\left|X - 5\right| < r\right) \geq 1 - \frac{1}{r^2}.$$

    Вероятность 0,99 будет достигнута при $1 - \frac{1}{r^2} = 0,99$, откуда $r = 10$. То есть, с вероятностью 0,99 значения X лежит в границах от -5 до 15.

20. В условиях предыдущей задачи провели 100 независимых наблюдений над случайной величиной X и вычислили их среднее арифметическое $\overline{X}$. В каких границах будет лежать значение $\overline{X}$ с вероятностью 0,99?

    Решение. Вычислим математическое ожидание и дисперсию $\overline{X}$:

$$E\left(\overline{X}\right) = \frac{5 \cdot 100}{100} = 5, \quad D\left(\overline{X}\right) = \frac{1 \cdot 100}{100^2} = 0{,}01.$$

Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины $\overline{X}$:

$$P\left(\left|\overline{X} - 5\right| < r\right) \geq 1 - \frac{0{,}01}{r^2}.$$

Вероятность 0,99 будет достигнута при $1 - \frac{0{,}01}{r^2} = 0{,}99$, откуда $r = 1$. То есть, с вероятностью 0,99 значение $\overline{X}$ после 100 наблюдений лежит в границах от 4 до 6.

21. Каждую неделю вы покупаете лотерейный билет стоимостью 200 рублей с математическим ожидание выигрыша 100 рублей и дисперсией 10 (при этом в лотерее разыгрываются призы стоимостью в 1 миллион рублей – на них-то вы и рассчитываете!). В каких границах с вероятность 0,99 будет лежать ваш суммарный проигрыш за 10 лет такой игры?

Решение. Считая, что в году 52 недели, получаем, что за 10 лет вы сыграете в лотерею 520 раз. Обозначим через $\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_{520}}{520}$ ваш средний выигрыш за 10 лет (не считая пока затрат на покупку билетов). Найдём математическое ожидание и дисперсию $\overline{X}$:

$$E\left(\overline{X}\right) = \frac{100 \cdot 520}{520} = 100, \qquad D\left(\overline{X}\right) = \frac{10 \cdot 520}{520^2} = \frac{1}{52} \approx 0{,}019.$$

Запишем неравенство Чебышёва для случайной величины $\overline{X}$:

$$P\left(\left|\overline{X} - 100\right| < r\right) \geq 1 - \frac{0{,}019}{r^2}.$$

Отсюда $1 - \frac{0{,}019}{h^2} = 0{,}99$ и $r \approx 1{,}39$. То есть, с вероятностью 0,99 значения $\overline{X}$ лежат в границах от 98,61 до 101,39. Значит, суммарный выигрыш (умножаем обе границы на 520) – от 51277 до 52723. А теперь – самое интересное – вычитаем из обеих границ затраченные на 520 билетов 104 тысячи рублей: получаем промежуток от -52278 до -51278.

Таким образом, ваш ожидаемый проигрыш с вероятностью 0,99 (то есть, практически наверняка!) составит не менее 51 тысячи рублей.

22. Решая предыдущую задачу, вы могли задаться вопросом: а существует ли такая лотерея, в которой математическое ожидание выигрыша равно 100, дисперсия 10, и при этом есть призы стоимостью 1 миллион? Придумайте такую случайную величину, для которой всё перечисленное выполнено.

Решение. Попробуем подобрать как можно более простое решение задачи. Один выигрыш – в миллион – у нас должен быть обязательно.

Очевидно, как в любой лотерее, будут билеты без выигрыша. Добавим ещё значение 100 и рассмотрим случайную величину с таким распределением:

X	0	100	1 000 000
P	$1-p-q$	q	p

Вероятности p и q попробуем подобрать так, чтобы $E(X)=100$, $D(X)=10$. Найдём математическое ожидание X: $E(X)=10^2 q+10^6 p$. Чтобы оно равнялось 100, должно выполняться соотношение: $q+10^4 p=1$, то есть, $q=1-10^4 p$:

X	0	100	1 000 000
P	$10^4 p-p$	$1-10^4 p$	p

Найдём математическое ожидание X^2: $E(X^2)=10^4(1-10^4 p)+10^{12} p$.

По условию задачи оно должно равняться

$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=10+10000=10010$.

Получаем уравнение $10^4(1-10^4 p)+10^{12} p=10010$, из которого находим

$$p=\frac{10}{10^{12}-10^8}\approx 10^{-11}.$$