Алгебра

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

9 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
А45

16+

Авторы:
*Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова,
М. И. Шабунин*

Вводные статьи к главам написаны Ю. М. Колягиным; решения задач повышенной трудности выполнены М. И. Шабуниным. Остальной материал подготовлен М. В. Ткачёвой и Н. Е. Фёдоровой.

Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 159 с. : ил. — ISBN 978-5-09-043027-2.

А45

Данная книга окажет практическую помощь учителям, работающим по учебнику «Алгебра. 9 класс» авторов Ю. М. Колягина и др. В ней дан обзор основных теоретических идей, а также сформулированы предметные, метапредметные и личностные цели изучения каждой главы. В параграфах даны методические рекомендации по изучению и планированию уроков с указанием заданий из учебно-методического комплекта для работы в классе и дома. Приведены решения сложных упражнений. В конце глав даны рекомендации по проведению урока обобщения, а также тематическая контрольная работа.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-043027-2

Предисловие

Одна из главных особенностей курса алгебры, представленного в учебниках алгебры для 7—9 классов (авторов Ю. М. Колягина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунина), заключается в том, что в нём реализуется взаимосвязь принципов научности и доступности обучения, уделяется особое внимание обеспечению прочного усвоения основ математических знаний всеми учащимися. Основной теоретический материал в учебниках излагается с постепенным нарастанием его сложности. Язык изложения прост и понятен учащимся соответствующей возрастной группы, что обеспечивает возможность самостоятельного чтения учащимися как основного, так и дополнительного материала учебника.

Особенностью курса является также его практическая и мировоззренческая направленность, которая служит стимулом для развития у учащихся интереса к алгебре, а также является основой для формирования осознанных математических навыков и умений.

Курс алгебры построен в соответствии с содержательно-методическими линиями: числовой, функциональной, уравнений и неравенств, алгебраических преобразований, стохастической.

Ведущей линией курса алгебры является числовая. Вокруг неё и с опорой на неё реализуются все остальные содержательно-методические линии. При изложении элементарных функций рассматриваются только числовые функции; уравнения и неравенства трактуются как определённого вида числовые соотношения, содержащие неизвестное число, которое нужно установить; алгебраические преобразования основываются на известных законах и свойствах арифметических действий над числами. Такое построение курса алгебры делает его органическим продолжением и обобщением курса арифметики. Центральное понятие курса — число, которое развивается и расширяется от рационального до действительного.

Изложение, как правило, ведётся конкретно-индуктивным методом с постепенным нарастанием роли дедукции, с опорой на практические задачи, мотивирующие полезность изучения вводимых математических понятий и иллюстрирующие реальную основу математических абстракций.

Опыт показывает, что усвоение алгебры осуществляется наиболее успешно, если изучение теоретического материала проходит в процессе решения задач. Этим достигается осмысленность и прочность знаний учащихся. Большое количество задач на применение алгебры в геометрии, физике, технике и т. д. помогает учащимся понять практическую необходимость изучения курса алгебры.

Содержание каждого из учебников алгебры для 7—9 классов разбито на главы и параграфы.

Текст каждого **параграфа** сопровождается:

- краткой формулировкой предметных, метапредметных и личностных целей изучения материала параграфа;
- перечнем понятий и умений, необходимых для успешного овладения новым содержанием;
- развивающими, историческими, занимательными диалогами и беседами;
- системой устных вопросов и заданий, позволяющих проверить усвоение теоретического материала;
- вводными упражнениями, которые учитель может включить в устную работу в начале уроков по теме;
- трёхуровневой системой упражнений.

К каждой **главе** учебника прилагаются:

- введение, ориентирующее учащихся на понимание роли и места темы, которую предстоит изучить как в курсе алгебры, так и в смежных учебных предметах, в различных научных знаниях, в истории развития математики;
- система практических и прикладных задач, для решения которых используются полученные в главе знания; дополнительные упражнения к главе, включающие упражнения для самоконтроля в рубрике *Проверь себя!* (на трёх уровнях сложности);
- перечень знаний и умений, приобретённых учащимися в ходе изучения главы (на обязательном уровне);
- темы исследовательских работ, позволяющие учащимся самостоятельно и целенаправленно углубить и расширить свои знания по теме, организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность учащихся с учителем и сверстниками.

В конце учебника приведены упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов, задачи повышенной трудности; краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII—IX классов и предметный указатель.

В каждом параграфе учебника рассматриваются решения типовых задач. Рисунки учебника имеют как обучающий, так и иллюстративный характер.

Предполагается, что *упражнения с нечётными подномерами рассматриваются в классе, а с чётными задаются на дом*. Поэтому ответы в учебниках приведены в основном для чётных подномеров.

При работе с учебником алгебры ***учителю желательно придерживаться следующих методических рекомендаций:***

- мотивировать введение нового понятия в ходе выполнения практической задачи, как это делается почти в каждом параграфе учебника;
- не требовать от всех учащихся воспроизведения формулировок определений и теорем в отрыве от их практического применения;

- не сопровождать процесс решения задач излишне сложным оформлением их решений; предпочтение отдавать простейшим решениям, показывая (по возможности) различные способы решения одной и той же задачи;
- особое внимание уделять самостоятельной деятельности учащихся (в том числе при работе с учебником и выполнении исследовательских работ), организуемой и контролируемой учителем;
- требовать от учащихся, отвечающих у доски, комментировать ход решения задачи, обосновывать его правильность;
- за один или два урока до проведения контрольной работы предлагать тест на проверку минимальных знаний по теме, положительный результат которого считать допуском к контрольной работе (материал для тестов брать из книги «Алгебра. Тематические тесты. 9 класс» автора М. В. Ткачёвой);
- для проведения уроков обобщения, предшествующих выполнению контрольных работ, использовать материалы рубрик *В этой главе вы узнали, Устные вопросы и задания, Проверь себя!* (первые два уровня), *Практические и прикладные задачи*; на этих уроках проводить коррекцию знаний по результатам теста; заслушивать представления исследовательских работ по теме.

Структура предлагаемой книги соответствует структуре учебника. В начале каждой главы этой книги приводится краткий обзор основных теоретических идей и положений, которые рассматриваются в соответствующей главе учебника.

Методические рекомендации даются к каждой главе и параграфу, однако они не являются подробной разработкой планов уроков. Для удобства работы учителя в них кратко изложены основные цели и задачи каждого раздела; указано, какой материал является основным и какой вспомогательным; сформулирован уровень требований к знаниям и умениям, которые должен получить каждый учащийся к концу изучения раздела или темы; для каждого урока приведён примерный список упражнений, рекомендуемых для решения в классе и дома; даны тексты самостоятельных и контрольных работ, которые могут быть скорректированы, изменены по усмотрению учителя или заменены работами из дидактических материалов к учебнику; приведена таблица примерного планирования времени, отводимого на изучение каждого параграфа; приведены возможные варианты решения задач повышенной трудности; даны советы по работе с диалогами (приведёнными в конце параграфа).

Ориентиром для определения минимального уровня знаний и умений по теме служат упражнения, перечисленные в последнем абзаце параграфов пособия. Полное и успешное выполнение двухуровневых контрольных работ требует от учащихся владения навыками на уровне, превышающем минимальный. Дальнейшее формирование навыков и умений более высокого уровня должно осуществляться в процессе изучения последующих тем на протяжении всего учебного года и курса основной школы. Учителю следует знать, что в учебнике третий уровень заданий рубрики *Проверь себя!* соответствует предполагаемым достижениям учащихся, интересующихся математикой.

Следует иметь в виду, что *каждая конкретная рекомендация не является для учителя обязательной*. В первую очередь это относится к рекомендациям о количестве упражнений для классной, домашней и самостоятельной работы. В зависимости от условий учитель вправе вносить свои коррективы как в методику построения урока, так и в состав рекомендуемых упражнений.

В рекомендациях учтены особенности изучения курса в зависимости от варианта поурочного планирования учебного материала. Подробные рекомендации даны для первого варианта планирования. При работе по второму варианту планирования рекомендуется использовать задания, которые предлагаются в последнем столбце таблиц распределения учебного материала.

Предполагается, что рабочие тетради к учебнику учитель будет использовать систематически в работе со слабоуспевающими учащимися. Материал рабочих тетрадей может быть эффективно использован на различных этапах обучения (в классной и домашней работе) со всеми учащимися. Предполагается, что задания из дидактических материалов учитель будет применять регулярно для проведения обучающих и контролирующих самостоятельных работ, а также в дополнительной работе с сильными учащимися.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и оффлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

ГЛАВА

I Степень с рациональным показателем (13/16 ч)

В этой главе постепенно расширяется понятие арифметического корня — от квадратного до корня любой натуральной степени, а также расширяется понятие степени числа — от степени с натуральным показателем до степени с действительным показателем.

Понятия степеней с рациональным и иррациональным показателями вводятся лишь ознакомительно. Более подробное изучение этих понятий учащимся предстоит в старших классах.

Как это принято в математике, расширение понятий корня и степени осуществляется так, чтобы сохранялись их основные свойства. Это позволяет проводить вычисления и преобразования по уже известным правилам, а также обосновывать в дальнейшем свойства степенной и показательной функций. Поэтому естественно определить степень с целым отрицательным показателем равенством $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где n — натуральное число, а также равенством $a^0 = 1$, если $a \neq 0$. Всё это позволяет распространить известные свойства степени с натуральным показателем на степень с целым показателем.

Степень с рациональным показателем определяется формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$, m — целое, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Тем самым сохраняются все основные свойства степени, а также выполняется свойство $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$, где $a > 0$, m — целое, n и k — натуральные числа.

Свойства степени с рациональным показателем (а далее и с действительным показателем) формулируются и доказываются только для степени с положительным основанием. Однако некоторые свойства сохраняются и в случае, когда основание степени равно нулю, а показатель степени — положительное число. Например, свойство $(ab)^p = a^p b^p$ выполняется при $p > 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Степень a^p с рациональным нецелым или иррациональным показателем p определяется только при $a > 0$ ради выполнения основных свойств степени.

Следует показать, например, что если для $a < 0$ и нецелого рационального числа $p = \frac{m}{n}$ определить степень по формуле

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

то не будет выполняться свойство

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}.$$

В частности, нельзя считать, что $\left(-8\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, так как $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, но $\left(-8\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left(-8\right)^2} = 2$.

Предполагается, что в соответствии с требованиями стандарта применение свойств степени с рациональным показателем не является обязательным для всех учащихся (даже в простейших случаях).

Степень с иррациональным показателем поясняется на конкретном примере, так как строгое её определение не предусмотрено школьной программой.

Важно только подчеркнуть, что степень с иррациональным показателем и положительным основанием обладает всеми основными свойствами степени.

Рассмотрение логарифмов числа проводится в ознакомительном плане; показывается, что с помощью калькулятора можно приближённо находить десятичный логарифм числа $b > 0$, т. е. корень уравнения $10^x = b$.

Более подробно логарифмы чисел будут изучаться в старших классах.

Возведение в действительную степень неравенства можно проводить только тогда, когда обе его части положительны. Это используется при решении некоторых уравнений и неравенств, а также при изучении некоторых функций.

Сформулируем предметные цели изучения I главы:

- развитие понятия числа;
- расширение понятия степени, обобщение и систематизация свойств степени;
- формирование умений выполнять устные, письменные, инструментальные вычисления значений степеней с целым показателем, корней третьей степени с применением соответствующих свойств;
- развитие умений выполнять преобразования выражений, применяя свойства степени и арифметического корня;

- использование полученных умений для решения практических и прикладных задач.

Метапредметные цели изучения главы:
- демонстрация широкой применимости знаний свойств степени и арифметического корня при решении практических и прикладных задач в геометрии, экономике, технике и т. п.;
- развитие представлений о сущности алгоритмических предписаний при вычислениях и преобразованиях с применением свойств степени и арифметического корня и умений выполнять эти предписания;
- формирование умений выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;
- развитие навыков самоконтроля, умений принимать решение и осуществлять осознанный выбор в учебной и познавательной деятельности.

Личностные цели изучения главы:
- формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития общественной практики;
- развитие умений точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи;
- развитие умений контролировать процесс и результат учебной математической деятельности.

В результате изучения главы I все учащиеся должны знать определения корня натуральной степени и степени с целым показателем и уметь применять их при выполнении упражнений **10**, **12**, **13**, **15**, **16**, **28**, **30**, **31**, **60**, **90** и заданий из рубрики *Проверь себя!* (I уровень).

Степень с натуральным показателем. Повторение (2/2 ч)

Цели предстоящих двух уроков — повторение материала, известного учащимся из курса алгебры 7 класса; подготовка к введению понятия степени с целым показателем, изучению её свойств; формирование умений оценивать правильность выполнения учебной задачи, осуществлять самоконтроль.

Повторение свойств степени с натуральным показателем можно провести в ходе выполнения упражнений, постепенно выписывая используемые свойства в таблицу на доску или выводя на экран с помощью компьютера (с целью сохранения таблицы для использования и уточнения на следующих уроках).

Задание	Свойства степени
1. Представить произведение в виде степени: $(-7)^2 \cdot (-7)^{15}$; $5 \cdot 5^3 \cdot 5^2$; $2^{3m} \cdot 2^m \cdot 2$; $3^n \cdot 3^{2n} \cdot 3^2$; $a^5 \cdot a^{14} \cdot a$; $(-b)^{10} \cdot (-b)^3 \cdot (-b)$.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. Представить в виде степени частное: $13^7 : 13^4$; $(0,6)^9 : 0,6$; $x^{43} : x^{14}$; $a^{15} : a$; $21^{4m} : 21^{3m}$; $18^{5k+1} : 18^{3k}$.	$a^n : a^m = a^{n-m}$ $a \neq 0,\ n > m$
3. Возвести степень в степень: $(3^7)^2$; $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^8$; $((-15)^6)^9$; $((-2)^3)^3$.	$(a^n)^m = a^{nm}$
4. Представить в виде степени: $\frac{3^7}{7^7}$; $\frac{12^5}{4^5}$; $\frac{a^{15}}{b^{15}}$; $\frac{7^6}{9^6}$; $\frac{(3a)^9}{(2a)^9}$.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Упражнения таблицы могут быть выполнены устно, для письменного решения можно предложить, например, следующие:

1. Вычислить:

1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$; 2) $6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$.

2. Вычислить, предварительно упростив:

1) $\dfrac{8 \cdot 2^6 - 19 \cdot 2^4}{5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^8}$; 2) $\dfrac{12 \cdot 3^{10} + 7 \cdot 3^{12}}{-8 \cdot 3^{11} + 3^{13}}$;

3) $\dfrac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^9}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$; 4) $\dfrac{2 \cdot 3^{15} - 6 \cdot 3^{14} + 10 \cdot 3^{13}}{3^{11} + 7 \cdot 3^{10} - 5 \cdot 3^{12}}$.

Желательно, чтобы при решении упражнений учащиеся давали устные пояснения своим действиям. Важно, чтобы при умножении и делении степеней подчёркивалось, что основания степеней одинаковые, а при делении обращалось внимание на показатели степени делимого и делителя.

Целесообразно воспользоваться упражнениями учебника из раздела «Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов».

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1—2	Краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII—IX классов	РТ № 1—12; № 528, 530, 531, 535, 538, 542, 552, 561	№ 530 (2, 3), 535 (3), 538 (5, 7)	№ 731, 732; ПЗ № 1

§ 1 Степень с целым показателем (4/4 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с определением и свойствами степени с целым отрицательным и нулевым показателями, обучение применению свойств степени с целым показателем для преобразования алгебраических выражений и вычислений; формирование умений определять понятия, создавать обобщения, проводить аналогии, устанавливать причинно-следственные связи.

Определение степени с целым отрицательным и нулевым показателями вводится, опираясь на свойство деления степеней с одинаковыми основаниями и натуральным показателем. Воспроизведения этих рассуждений от учащихся требовать не следует, целесообразнее уделить больше внимания вычислению значений степени с отрицательным показателем. Предупреждению ошибок в определении знака при возведении отрицательного числа a в степень $-n$ (с отрицательным показателем) может послужить, в частности, строгое следование на первых этапах алгоритму:

1) записать число a^{-n} в виде $\frac{1}{a^n}$;

2) определить знак и значение степени a^n;

3) записать значение $\frac{1}{a^n}$.

Прежде чем переходить к изучению свойств степени, необходимо повторить запись числа в стандартном виде, чтобы применение свойств можно было рассматривать на примерах практических задач. Целесообразно предложить учащимся самостоятельно найти примеры таких задач и обсудить их в классе.

Изучая материал параграфа, учащиеся убеждаются в том, что известные им свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с целым отрицательным показателем. В учебнике доказывается справедливость свойства возведения в степень произведения. Другие свойства можно предложить доказать учащимся, интересующимся математикой, самостоятельно.

Распределение материала параграфа по урокам может быть, например, следующим: на первом уроке ввести определения и повторить стандартный вид числа, прочитать *Диалог об истории*; на втором уроке проверить усвоение определений и знание свойств степени с натуральным показателем и, познакомив со свойствами степени с целым показателем, начать их применять при вычислениях; третий и четвёртый уроки посвятить выполнению упражнений и разбору задачи текста учебника. Учащимся, интересующимся математикой, ознакомиться с диалогом из рубрики *Шаг вперёд*. В конце четвёртого урока провести небольшую проверочную работу.

Для устной работы на этих уроках можно предложить упражнения:

1. Вычислить:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $1:\frac{3}{10}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; $(4\cdot 10^5)^2$; $(-2)^3$; $64^2:4^3$.

2. Сравнить:

$\left(\frac{1}{3}\right)^3$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $-(-4)^2$ и 0; $3^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$ и 1;

$\left(\frac{1}{2}\right)^2$ и $(-2)^3$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; $(-4)^2$ и 0.

3. Найти число, обратное данному:

$\frac{7}{3}$; $-0{,}7$; $\frac{a}{b}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{4}{y}$.

4. Представить выражение в виде степени:

$x^m\cdot x^n$; $\frac{a^8}{a^3}$; $\frac{m^3}{m^4}$; $\frac{a^3}{c^3}$; $\frac{1}{x^{15}}$.

5. Вычислить:

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $(0{,}3)^{-1}$; $(-2)^{-4}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $3{,}1\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^3$;

$1{,}5\cdot 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-3}$; $3\cdot 10^{15}\cdot 2{,}3\cdot 10^{-14}$; $\frac{3{,}9\cdot 10^{-3}}{1{,}3\cdot 10^{-4}}$;

$\sqrt{2{,}25\cdot 10^{-8}}$; $\sqrt{5^{-2}\cdot 5^4\cdot 10^{-10}}$.

6. Представить в виде дроби:

x^{-2}; $2b^{-1}$; $2c^{-1}b$; $(x+y)^{-2}$.

Проверить усвоение определений 1 и 2 и свойств степени с целым показателем можно с помощью теста:

1. Вычислить: 3^{-2}.

1) -9; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $-\frac{1}{9}$; 4) -27.

2. Вычислить: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

1) 8; 2) -8; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $-\frac{1}{8}$.

3. Записать в стандартном виде число 0,000463.

1) $4{,}63 \cdot 10^{-3}$; 2) $0{,}463 \cdot 10^{-4}$; 3) $4{,}63 \cdot 10^{-4}$; 4) $46{,}3 \cdot 10^{-5}$.

4. Представить $\frac{1}{16}$ в виде степени с отрицательным показателем.

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 2) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$; 3) 2^{-4}; 4) 2^{-3}.

5. Представить в виде степени: $\frac{3^3 \cdot 3^5}{27^3}$.

1) 3^2; 2) 3^6; 3) 3^{-1}; 4) 3^5.

6. Найти значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

1) $1\frac{3}{16}$; 2) $1\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{32}$; 4) $1\frac{1}{32}$.

По результатам изучения параграфа может быть проведена проверочная самостоятельная работа (на 20 мин).

1. Вычислить:

а) $\frac{5^{-7} \cdot 5^{-8}}{5^{-13}}$; б) $\frac{3{,}6 \cdot 10^7}{0{,}9 \cdot 10^{19}}$. [а) $\frac{4^{-4} \cdot 4^{-9}}{4^{-12}}$; б) $\frac{3{,}2 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^{14}}$.]

2. Представить в виде степени и найти числовое значение выражения

$\frac{a^{-9}}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$. [$\frac{a^{-6}}{a^{-3} \cdot a^{-2}}$ при $a = \frac{3}{4}$.]

3. Сравнить: $(1{,}4 \cdot 10^{-2}) \cdot (2 \cdot 10^{-1})$ и 0,003.

[$(3{,}1 \cdot 10^{-1}) \cdot (3 \cdot 10^{-2})$ и 0,009.]

4. Упростить: $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot (a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + b^{-4})$.

[$(a^{-3} - a^{-2}b^{-1} - a^{-1}b^{-2} + b^{-3}) : (a^{-3}b^{-3})$.]

В результате изучения рубрики *Диалог об истории* желательно, чтобы учащиеся могли отвечать на такие, например, вопросы: «Какие специальные обозначения степеней ввёл Диофант в книге «Арифметика»?», «Когда впервые появились записи степени с отрицательным показателем?».

С началом диалога «Фантастические разрезы и реальные расчёты» рекомендуется ознакомить всех учащихся, а расчёты могут проверить те, кто интересуется математикой. Этим же учащимся можно предложить в качестве домашнего задания изучить диалог «Делимость степени» и выполнить предложенное в нём задание (подобные задания есть и в дидактических материалах к учебнику).

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1 (до свойств степени)	ВУ № 1, 2; РТ № 7; № 1 (1), 4—8, 16, 17; ДМ № 6	№ 6 (3, 5), 7 (1, 2)	Диалог об истории (с. 9)
2	§ 1 (до задачи)	УВ № 1, 2; № 2 (1), 3 (1); РТ № 13—15; № 10—14	Самостоятельная работа из текста пособия	№ 25; ПЗ № 6
3	§ 1	УВ № 3, 4; РТ № 17—19; № 15, 18, 19, 21, 22; ДМ № 10	№ 21 (1), 19	Шаг вперёд (с. 10); ДМ № 14, 15
4	§ 1	УВ; РТ № 20, 21; № 23, 24; ДМ № 11, 12 (1, 2)	Самостоятельная работа из текста пособия	Шаг вперёд (с. 11); ДМ № 17, 16, 12

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать определения степени с целым показателем, уметь применять свойства степени при выполнении упражнений 6, 9, 10—14 и отвечать на устные вопросы.

§ 2 Арифметический корень натуральной степени

§ 3 Свойства арифметического корня (4/4 ч)

Цели изучения параграфов — ознакомление учащихся с понятием арифметического корня натуральной степени и его свойствами; формирование умений выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки.

Арифметический корень натуральной степени и его обозначение вводятся по аналогии с арифметическим квадратным корнем, поэтому полезно, повторив понятие квадратного корня и его свойства, предложить учащимся выдвинуть свои гипотезы о существовании действия, обратного действию возведения в любую натуральную степень. При этом должны сохраняться основные свойства корня: формулы для их произведения и частного, возведения корня в целую степень. Естественно, должны добавляться и новые свойства. С помощью учителя делается вывод о появлении нового свойства: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. Высказывается предположение, что все эти же свойства определяют и правила действий над корнями; например, из равенства $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ следует, что $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. В учебнике доказывается одно из свойств корней (при наличии времени или в процессе индивидуальной работы можно доказать, например, свойство 2).

Особо стоит вопрос об определении корня из отрицательного числа и степени с отрицательным основанием. Рассмотрим возможные случаи.

Степень a^n с целым отрицательным показателем n определяется для любого $a \neq 0$, в том числе и для $a < 0$. Например:

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^{-2}} = \frac{1}{9},\ (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^{-3}} = -\frac{1}{8}.$$

Для корня чётной степени $\sqrt[2k]{a}$, где k — натуральное число и $a < 0$, вопрос решается также просто. Так как уравнение $x^{2k} = a$ при $a < 0$ не имеет действительных корней, то считается, что выражение $\sqrt[2k]{a}$, где $a < 0$, не имеет смысла. Например, выражение $\sqrt{-16}$ не имеет смысла, так как уравнение $x^4 = -16$ не имеет действительных корней.

Корень $\sqrt[2k+1]{a}$ нечётной степени, где k — натуральное число, определяется для любого действительного числа a, в том числе и для $a < 0$, так как уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет при $a < 0$ действительный корень, причём только один. Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, так как уравнение $x^3 = -27$ имеет единственный действительный корень $x = -3$. Свойства этого корня для отрицательных чисел a отдельно не рассматриваются, так как он выражается через арифметический корень равенством $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$, и, таким образом, действия над корнями нечётной степени из отрицательных чисел сводятся к действиям над арифметическими корнями. Например,

$$\sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[3]{-2} = \left(-\sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(-\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Отметим, что в старших классах обозначение корня нечётной степени будет использоваться для обозначения функции, обратной к функции $y = x^{2k+1}$, которая возрастает на всей числовой прямой и поэтому является обратимой. Обратная к ней функция обозначается $y = \sqrt[2k+1]{x}$, она определена и возрастает на всей числовой прямой.

Вообще с арифметическим корнем n-й степени учащихся следует ознакомить только для того, чтобы можно было ввести понятие степени с рациональным показателем и далее аргументированно говорить о степенной функции. Более детальное изучение темы, обучение преобразованиям выражений, содержащих корни n-й степени, относится к курсу математики старших классов. Поэтому оба параграфа рекомендуется изучать вместе в течение четырёх уроков по такой схеме: на первом уроке познакомить учащихся с теоретическим материалом § 2; разобрать из § 2 подробно задачу 1 и ознакомительно задачу 2; на втором уроке рассмотреть доказательство свойства, приведённое в § 3, и задачу этого параграфа. На остальных уроках выполнять упражнения из учебника, рабочих тетрадей, дидактических материалов.

Необходимо помнить, что применение свойств корня натуральной степени для преобразований и вычислений рассматривается в основном на примерах корней третьей и четвёртой степеней, это же относится и к приближённому вычислению корней с помощью калькулятора. Свойства кубического корня полезно рассматривать с использованием калькулятора, например сравнивать значения корня для различных значений подкоренного выражения (что будет полезным при изучении следующей главы).

Для первичного закрепления определения и свойств корня n-й степени выполнить по выбору учителя задания из упражнений **27—32**, **37—41**, **43**, **44**, **46**, **47**, затем **42**, **45**, **48** учебника. В ходе их выполнения полезно повторять соответствующие свойства квадратного корня.

Дополнительно с учащимися, интересующимися математикой, можно решить задачи **54—57** учебника и дополнительно № 18, 19 из дидактических материалов.

При возможности в конце четвёртого урока проводится самостоятельная работа на 10 мин, результат которой позволит выяснить, до какой степени можно опираться на знания учащихся при изучении следующей темы.

1. Вычислить:

$$\sqrt[3]{0{,}125\cdot 8}-\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}+\sqrt[4]{10000}.\ \left[\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[4]{16\cdot 81}.\right]$$

2. Упростить:

$$\sqrt[4]{ab}:\sqrt[4]{b}+2\sqrt{\sqrt{a}}.\ \left[3\sqrt{\sqrt[3]{a}}-\sqrt[6]{ab}:\sqrt[6]{b}.\right]$$

При изучении *Диалога об истории* предложить учащимся выполнить задание из него. Желательно, чтобы учащиеся могли ответить на вопросы: «Почему можно допустить, что Омар Хайям действительно нашёл способы извлечения корней любых степеней?», «По какой формуле можно найти первое приближение числа $\sqrt{A}$, пользуясь методом, предложенным Алькархи?», «Что означают буквы a и b в этой формуле?».

Учащимся, интересующимся математикой, рекомендуется изучить диалог *Шаг вперёд* и выполнить предложенное в нём упражнение для самостоятельной работы. (Подсказка: выражения во второй и третьей скобках можно перемножить с помощью известной формулы сокращённого умножения.)

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2	РТ № 1—6; ДМ № 1, 2; № 27—29	ДМ № 3	Диалог об истории (с. 15)
2	§ 2, 3	УВ к § 2; РТ № 7—9; № 37—40; ДМ № 2, 4	№ 37 (1), 38 (3), 39 (1), 40 (2)	№ 35; ДМ № 6, 7
3	§ 2, 3	УВ к § 3; РТ № 15—17; № 31, 32, 42—45, 54	№ 31 (3), 32 (1, 2)	РТ № 22, 23; № 55, 56; ПЗ № 2
4	§ 2, 3	ДМ № 4—8; № 33, 47—49, 51	Самостоятельная работа из текста пособия	Шаг вперёд (с. 13, 21); ДМ № 18, 13; ПЗ № 5

В результате изучения параграфов все учащиеся должны знать определение арифметического корня n-й степени и его свойства, уметь применять их при выполнении заданий типа **28—30, 37, 38, 41, 43—45** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

§ 4 Степень с рациональным показателем

§ 5 Возведение в степень числового неравенства (2/3 ч)

Цели изучения параграфов — ознакомление учащихся с понятием степени с рациональным и иррациональным показателями и возведением в рациональную степень неравенств, у которых левая и правая части положительны; формирование первичных умений записи учебного материала, представленного в форме лекций.

Во введении к данной главе подробно изложены основные положения, которые легли в основу формирования понятия степени с действительным показателем. Материал § 4, а соответственно и опирающийся на него материал § 5 по программе не является обязательным для изучения в основной школе и будет подробно разбираться в старших классах. Однако представление об основных математических фактах, изложенных в этих параграфах, необходимо для дальнейшего изучения курса алгебры 9 класса. В связи с этим рекомендуется разобрать материал § 4 и 5 в ознакомительном плане. С этой целью можно прочитать лекцию, заранее подготовив необходимый прикладной материал на компьютере или интерактивной доске, а также рабочие листы с заданиями, которые учащиеся будут заполнять частично по ходу лекции, частично дома, прочитав необходимый материал по учебнику. Можно провести и традиционный урок ознакомления с новым материалом.

Заготовка рабочего листа для записи лекции может выглядеть, например, так:

Тема. **Степень с действительным показателем**

План

1. Извлечение корня n-й степени из числа a^m, если $\frac{m}{n}$ — целое число.

2. Определение степени с дробным показателем.

3. Возведение в степень числа 0.

4. Свойства степени с рациональным показателем.

5. Представление о степени с иррациональным показателем.

6. Сравнение чисел.

7. Решение уравнений с неизвестным в показателе степени.

Ход лекции

1*. Вычислить: 1) $\sqrt[3]{7^6}$.

$7^6 = (7^2)^3, \quad \sqrt[3]{7^6} = \sqrt[3]{\_\_\_}$ **,

$\sqrt[3]{7^6} = 7 -;$

2) $\sqrt[4]{5^{-12}} = \sqrt[4]{(5^{-3})^4} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$,

$\sqrt[4]{5^{-12}} = 5-.$

2. Определение степени с дробным показателем:

$a^{\frac{m}{n}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, где a ________________,

m — ____________, n — ____________,

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^{-})^{-}} = \sqrt[4]{\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$,

$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27-}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Ознакомление с *Диалогом об истории*.

Выполнить упражнения **58, 59** (оставить для них место в рабочих листах).

3. $0^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, где n — натуральное;

$0^{-n} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, где n — натуральное;

$0^{\frac{m}{n}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, где $\frac{m}{n} > 0$;

$0^{\frac{m}{n}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, где $\frac{m}{n} < 0$.

4. Для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1) $a^p \cdot a^q = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$;

2) $a^p : a^q = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$;

3) $(a^p)^q = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$;

4) $(ab)^p = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

---

* Данный номер здесь и далее соответствует пунктам плана.
** Подчёркнутые места заполняются учащимися по ходу лекции.

Доказательство свойства $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ученикам, интересующимся математикой, предложить дома прочитать рубрику *Шаг вперёд*).

Выполнить упражнение **61** (1, 4).

1) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5$ _________;

4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = 4$ _________.

5. (Самостоятельно прочитать рубрику *Шаг вперёд*, а затем учителю дать пояснения.) Введение степени с иррациональным показателем на примере $3^{\sqrt{2}}$:

$\sqrt{2}$; 1,4; 1,41; 1,414, ...

$3^{\sqrt{2}}$; $3^{1,4}$; 3–; 3–; 3–.

$3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288044$.

Выполнить упражнение **66** (1, 4).

1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot (2^3)^{\sqrt{5}} =$ _________________;

4) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}} = 5^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 5$–.

6. Если $a > b > 0$, $r > 0$, то a^r _________________ b^r.

Если $a > b > 0$, $r < 0$, то a^r _________________ b^r.

(Доказательство можно не давать, показать лишь применение на примерах. Можно рассмотреть рубрику *Шаг вперёд* (с. 30).)

76. 1) $2^{\frac{1}{3}}$ ___ $3^{\frac{1}{3}}$, так как 2 ___ 3, $\frac{1}{3}$ ___ 0.

77. 1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ ___ $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$, так как 0,88 ___ $\frac{6}{11}$, $\frac{1}{6}$ ___ 0;

2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ ___ $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$, так как $\frac{5}{12}$ ___ 0,41, $-\frac{1}{4}$ ___ 0.

7. Задача 3 § 5.

$10^x = 1$, $x = 0$.

78. 1) $6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}}$, $2x = \frac{1}{5}$, _____________;

2) $3^x = 27$, $3^x = 3^3$, _____________.

Подвести итог лекции, напомнить о заданиях, которые давались по ходу лекции.

На последующем уроке (уроках) выполнить упражнения и ознакомить с диалогом «Разговор о важном», в котором даются первые представления о логарифмах.

Учащимся, интересующимся математикой, рекомендовать изучить материал рубрики *Шаг вперёд*, который способствует более глубокому осознанию понятия степени с рациональным показателем. Аналоги задач, рассмотренных в диалоге, имеются в дидактических материалах к учебнику.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	**Теоретический материал**	**Задания**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 4 и 5	Лекция по материалу, предложенному в пособии	ДМ № 3	Диалог об истории (с. 27); шаг вперёд (с. 23); шаг вперёд (с. 28)
2	§ 4 и 5	УВ к § 4, 5; РТ № 8, 9, 10, 18; № 62, 64, 65, 79, 80	Тест № 2	Шаг вперёд (с. 33, 34); ДМ § 4, № 15, § 5, № 10; ПЗ № 4, 3

В результате изучения параграфа все учащиеся должны с помощью учебника или справочника выполнять такие упражнения, как **58**, **59**, **61**, **66**, **76—78**, и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Урок обобщения знаний и представления исследовательских работ (0/2 ч)

Следует начать с анализа результатов выполнения теста, проведённого на предыдущем уроке. Для коррекции найденных ошибок и с целью подготовки к контрольной работе можно пользоваться заданиями из упражнений к главе, дидактических материалов и рабочих тетрадей.

Рекомендуется, пользуясь подготовленными заранее плакатами, повторить все определения степени с различными показателями, сделать вывод о том, что положительное число можно возвести в степень с любым действительным показателем, и убедиться ещё раз на примерах в применимости свойств степени для любого действительного показателя. С этой целью выполнить упражнения **86**, **87**, **89** (3, 4), **90**.

Так как преобразование выражений, содержащих корень натуральной степени $n > 2$, не входит в программу основной школы, то рекомендуется выполнить упражнения на преобразование выражений, содержащих квадратные корни. Кроме упражнения **89** (3, 4), можно использовать несколько более сложных заданий из дидактических материалов.

Оставшееся время посвятить представлению лучших исследовательских работ.

Контрольная работа № 1

1. Вычислить:

$$5^{-8} \cdot 5^{10} - 7^{-3} : 7^{-5} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{-1}.$$

$$\left[\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^2 + 3^{-9} \cdot 3^{-12} - 6^{-7} : 6^{-9}.\right]$$

2. Упростить:

1) $\dfrac{5a^{-6} \cdot 3\left(\sqrt{a^3}\right)^4}{a^{-3}}$; 2) $(x^{-1} + y^3)^2 - 2y^3 \cdot x^{-1}$.

$\left[1)\ \dfrac{7\left(\sqrt{a^5}\right)^4 \cdot 2a^{-11}}{a^{-4}};\ 2)\ (x^2 - y^{-1})^2 + 2x^2 \cdot y^{-1}.\right]$

3. Сравнить числа:

1) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^5$ и $(0{,}67)^5$; 2) $\left(1\dfrac{3}{7}\right)^2$ и $(0{,}7)^{-2}$.

[1) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^7$ и $(0{,}71)^7$; 2) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ и $(0{,}6)^{-3}$.]

---

4. Упростить выражение

$$(1 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^{-1}} + ab^{-1}) : \frac{1 - \sqrt{ab^{-1}}}{b}.$$

$$\left[(x^{-1}z + 2\sqrt{x^{-1}}\sqrt{z} + 1) : \frac{1 + \sqrt{zx^{-1}}}{x}.\right]$$

5. Решить уравнение

$2^{8 - x^2} = 4^x$. [$3^{x^2 - 15} = 9^x$.]

ГЛАВА

III Степенная функция (15/19 ч)

Этой главой завершается изучение функций, представленных в курсе алгебры основной школы. Целью её изучения является не только знакомство учащихся со степенной функцией, но и расширение известных им сведений о свойствах функций в целом. Так, при изучении степенных функций активно используется понятие области определения функции (для ранее изученных линейной и квадратичной функций ею является всё множество действительных чисел).

Показывается, как аналитически устанавливается возрастание или убывание функции. Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси, так как из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $x_1^3 < x_2^3$. Действительно,

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right) < 0.$$

Такие выкладки должны приводиться на простых примерах и иллюстрироваться графиком.

Симметричность графиков обобщается в свойствах чётности и нечётности функции.

Здесь же рассматриваются новые виды уравнений и неравенств, содержащих степени или корни.

При определении степенной функции $y = x^r$, где r — заданное число, следует иметь в виду, что её свойства зависят от того, какими числами являются основание и показатель степени. Например, функции $y = x^2$, $y = x^3$ определены при всех x, но множество значений функции $y = x^2$ — множество неотрицательных чисел, а множество значений функции $y = x^3$ — множество всех действительных чисел; функция $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ определена при $x \neq 0$, множество её значений $y \neq 0$.

Нужно иметь в виду, что функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ также называют степенными, так как $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geqslant 0$.

Однако, например, функции $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ различны, так как первая из них определена при всех значениях x, а вторая — только при $x \geqslant 0$.

Детальное изучение функции $y = \frac{k}{x}$ объясняется её практическим значением, а также её особым графиком — гиперболой.

При $k > 0$ и $x > 0$ эта функция выражает обратную пропорциональность величин, известную учащимся из курса арифметики.

Основным способом решения иррациональных уравнений является возведение этих уравнений в целую степень. При этом могут появиться посторонние корни, значит, проверка является обязательной частью решения. Необходимо иметь в виду, что обучение решению иррациональных уравнений и неравенств не является обязательным в 9 классе, поэтому здесь рассматриваются только простейшие примеры.

Рассмотренные в этой главе неравенства решаются с применением свойства возрастания или убывания функций.

Предметные цели изучения II главы:

- овладение основными функциональными понятиями (функция; область определения и множество значений функции; возрастание и убывание; чётность и нечётность; график функции), свойствами функций $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{k}{x}$, умением строить их графики;
- развитие умений использовать функционально-графические представления для решения учебных и прикладных задач, для описания и анализа реальных зависимостей;
- развитие умений использовать словесный, символический, графический языки математики.

Метапредметные цели изучения главы:

- формирование начальных представлений о математике как универсальном языке науки и техники, средстве моделирования различных явлений и процессов;
- развитие умений использовать графики для иллюстрации развития процессов, интерпретации явлений, аргументации выводов;
- формирование умений видеть различные стратегии и способы решения задач.

Личностные цели изучения главы:

- расширение представлений о математической науке, о вехах её развития;
- развитие критичности мышления, умения отличать гипотезу от факта;
- формирование коммуникативной компетентности в общении со взрослыми и сверстниками в процессе образовательной деятельности.

В результате изучения главы II все учащиеся должны уметь строить графики простейших степенных функций, выявлять их свойства (аналитически и графически) при выполнении упражнений **148**, **149** (3, 4), **150** (1, 2), **152**, **153** и из рубрики *Проверь себя!* (I уровень).

§ 6 Область определения функции (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — повторение сведений о функциях, известных учащимся из курса алгебры 7—9 классов; обучение нахождению области определения функции, заданной формулой или графиком; развитие умений определять понятия, устанавливать аналогии, устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, делать выводы.

В данном параграфе впервые явно формулируется определение функции, начинает активно применяться термин «аргумент», упоминаются линейная и квадратичная функции. Повторение функциональных понятий курса алгебры 7—9 классов играет существенную роль при изучении новой темы, поэтому имеет смысл подготовить наглядный материал (на отдельных листах или компьютере), позволяющий организовать повторение при изучении как данного параграфа, так и всех последующих.

По ходу изучения нового материала такие пособия (общие и индивидуальные) должны пополняться. Например, пока учащиеся не знакомы с областью определения, чётностью, в соответствующих этим понятиям записях имеется пропуск, который заполняется после введения соответствующего термина.

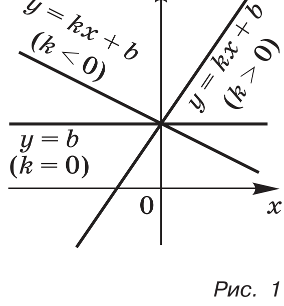
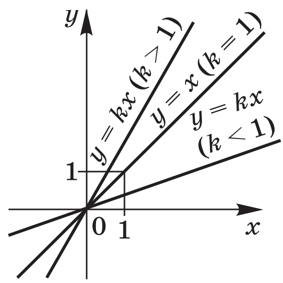
<table>
<tr><td colspan="2">Линейная функция $y = kx + b$</td></tr>
<tr><td>Область определения:
____
Функция принимает значение:
____
При $k > 0$ возрастает,
при $k < 0$ убывает на всём множестве действительных чисел.</td><td>

Рис. 1</td></tr>
</table>

Продолжение

<table>
<tr>
<td>Функция $y = kx$
при $x > 0$, $y > 0$ и $k > 0$ —
прямая пропорциональность.

Функция $y = kx$ ______________,

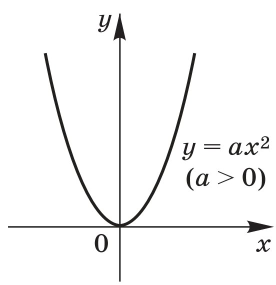
так как $k(-x) = -kx$.</td>
<td>
Рис. 2</td>
</tr>
</table>

С помощью таблиц повторяется известный учащимся материал о функциях. При изучении данного параграфа целесообразно повторить определения функций, способы их задания с помощью формулы и графика, расположение графиков в зависимости от первых коэффициентов, симметрию относительно начала координат или оси Oy.

Для повторения использовать вводные упражнения, упражнения **96**, **97** учебника, задания 1—4 из рабочих тетрадей.

Понятия области определения и графика функции ввести в соответствии с текстом параграфа. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что в учебнике для 7 класса, давая определение графика функции, не упоминали того факта, что абсциссы строящихся точек равны «значениям независимой переменной *из области определения этой функции*».

<table>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Область определения:
____

1. Функция $y = ax^2$ ($b = 0$, $c = 0$)
при $a > 0$:
возрастает при $x \geqslant 0$;
убывает при $x \leqslant 0$;
$y \geqslant 0$ при всех x;
наименьшее значение $y = 0$ при
$x = 0$;
функция $y = ax^2$ ______________, так
как $a(-x)^2 = ax^2$.</td>
<td>
Рис. 3</td>
</tr>
</table>

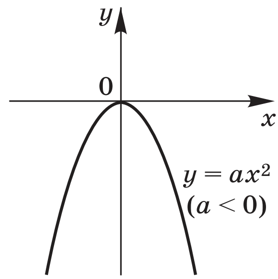
<table>
<tr>
<td>Функция $y = ax^2$ ($b = 0$, $c = 0$)
при $a < 0$:
возрастает при $x \leqslant 0$;
убывает при $x \geqslant 0$;
$y \leqslant 0$ при всех x;
наибольшее значение $y = 0$ при
$x = 0$;
функция $y = ax^2$ ______________, так
как $a(-x)^2 = ax^2$.</td>
<td>

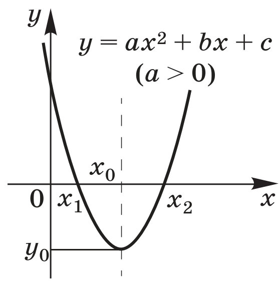
Рис. 4</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Функция $y = ax^2 + bx + c$.
а) $D = b^2 - 4ac > 0$.
При $a > 0$:
возрастает при $x \geqslant x_0$,
где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
убывает при $x \leqslant x_0$;
$y > 0$ при $x < x_1$, $x > x_2$,
где x_1 и x_2 — нули функции;
$y < 0$ при $x_1 < x < x_2$.
Наименьшее значение $y_0 = y(x_0)$.</td>
<td>

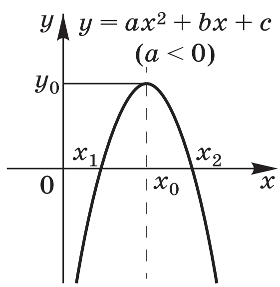
Рис. 5</td>
</tr>
<tr>
<td>При $a < 0$:
возрастает при $x \leqslant x_0$,
где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
убывает при $x \geqslant x_0$;
$y > 0$ при $x_1 < x < x_2$, где x_1 и
x_2 — нули функции;
$y < 0$ при $x < x_1$, $x > x_2$.
Наибольшее значение $y_0 = y(x_0)$.</td>
<td>

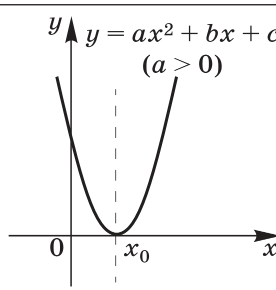
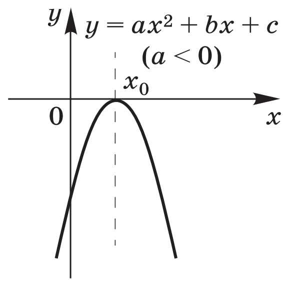
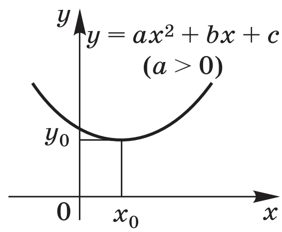
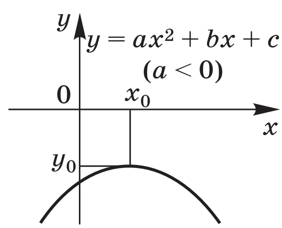
Рис. 6</td>
</tr>
<tr>
<td>б) $D = b^2 - 4ac = 0$.
При $a > 0$:
возрастает при $x \geqslant x_0$,
где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
убывает при $x \leqslant x_0$;
$y > 0$ при $x \neq x_0$.
Наименьшее значение $y = 0$ при
$x = x_0$.</td>
<td>

Рис. 7</td>
</tr>
</table>

Продолжение

При $a < 0$: возрастает при $x \leqslant x_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; убывает при $x \geqslant x_0$; $y < 0$ при $x \neq x_0$. Наибольшее значение $y = 0$ при $x = x_0$.	 Рис. 8
в) $D = b^2 - 4ac < 0$. При $a > 0$: возрастает при $x \geqslant x_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; убывает при $x \leqslant x_0$; $y > 0$ при всех действительных значениях x. Наименьшее значение $y_0 = y(x_0)$.	 Рис. 9
При $a < 0$: возрастает при $x \leqslant x_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; убывает при $x \geqslant x_0$; $y < 0$ при всех действительных значениях x. Наименьшее значение $y_0 = y(x_0)$.	 Рис. 10

Выполняя задания на нахождение области определения функции по формуле, учащиеся должны обязательно начинать ответ со слов, приведённых в начале решения каждого пункта задачи 1 текста параграфа («Выражение ... имеет смысл при ...»).

Прежде чем рассматривать решения задач 2 и 3 текста параграфа, рекомендуется повторить соответствующий материал 8 класса по графикам, изображённым на рисунке 11. При этом задание может быть таким: записать уравнения парабол, полученных сдвигами графика функции $y = x^2$. Рисунок 11 можно использовать и в дальнейшем: при изучении § 7 — полностью и § 8 — рисунки *а*, *г*, *д*, *е*, *ж*, § 9 — полностью.

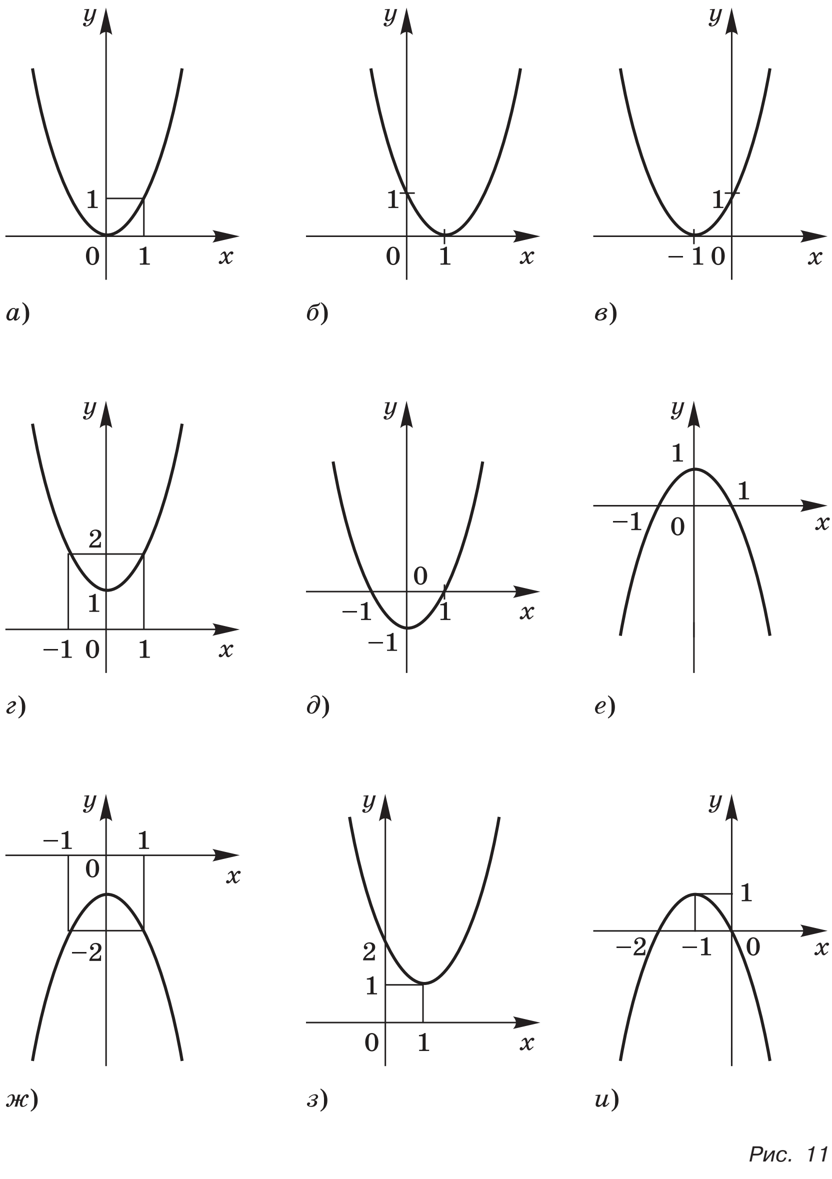


Рис. 11

На **первом** из трёх рекомендуемых уроков целесообразно повторить материал 8 класса, связанный с понятием функции, и ввести понятие области определения; решение задач на отыскание области определения частично перейдёт на **второй** урок, где будут рассматриваться решения задач 2 и 3 текста параграфа; **третий** урок посвятить решению задач и провести небольшую проверочную работу.

В качестве устных заданий на этих уроках можно использовать задания из рабочих тетрадей, а также следующие:

1. Решить неравенства:

$3x < 0$; $3x - 2 > 0$; $-x + 1 \leqslant 0$; $x^2 < 4$; $x^2 \geqslant 9$.

2. При каких значениях x имеет смысл выражение:

$5x$; $4x - 2$; $3x^2 + 4$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x+5}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt{-x}$; $\sqrt[3]{x}$?

3. Функция $y = y(x)$ задана таблицей:

x	−3	−1,5	0	1	2	4
y	−8	−2	1	4	8,5	10

Принадлежат ли числа −4; −1,5; 8,5 области определения этой функции?

Основными при изучении параграфа являются упражнения **97—100**, дополнительно можно использовать задания **101—103**, а также задания из дидактических материалов и рабочих тетрадей.

Самостоятельная работа

1. Найти область определения функции:

1) $y = x^2 - 3$; 2) $y = x^3 + x^2 - 1$;

3) $y = \frac{1}{3x+5}$; 4) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

[1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^4 + x^2 + 1$;

3) $y = \frac{1}{x^2 - 16}$; 4) $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$.]

2. Построить график функции

$y = |x + 2| - 1$. [$y = |x - 1| + 2$.]

Учащимся, интересующимся математикой, после изучения рубрики *Шаг вперёд* рекомендуется решить задачи, предложенные в диалоге, и выполнить подобные им задания из дидактических материалов.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	**Теоретический материал**	**Задания**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 6, задача 1	ВУ № 1, 2, 4; РТ № 1—4; № 96, 97, 98 (1, 3, 5)	ДМ № 4 (1, 4, 5, 7)	№ 101 (1, 3, 5)

2	§ 6, задачи 2, 3	УВ № 1—5; ВУ № 3; № 98, 99 (1, 2); ДМ № 7, 8 (1, 2); РТ № 5	№ 98 (4); ДМ № 6	№ 103; ДМ № 9
3	§ 6	УВ; РТ № 7, 8, 12—14; ДМ № 5	Самостоятельная работа из текста пособия	Шаг вперёд (с. 47); ДМ № 10, 11

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение функции, уметь находить область определения функции при выполнении упражнений **98, 99** и отвечать на вопросы к параграфу.

В конце урока рекомендуется предложить учащимся выбрать тему исследовательской работы.

Решение упражнений

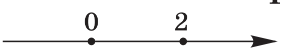


Рис. 12

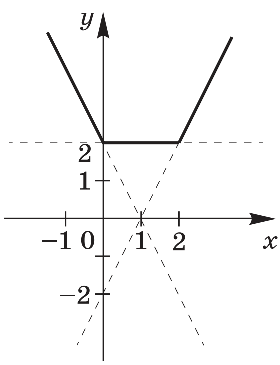


Рис. 13

103. 1) Найдём нули функций $y = x$ и $y = x - 2$. Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ разбивают числовую ось на три промежутка (рис. 12).

Функция $y = |x| + |x - 2| = -x - x + 2 = -2x + 2$ при $x < 0$; $y = |x| + |x - 2| = x - x + 2 = 2$ при $0 \leqslant x < 2$; $y = |x| + |x - 2| = x + x - 2 = 2x - 2$ при $x \geqslant 2$.

На каждом из промежутков строим график соответствующей функции (рис. 13).

§ 7 Возрастание и убывание функции (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление с поведением степенной функции в зависимости от показателя степени и формирование умения устанавливать промежутки возрастания и убывания функции, заданной аналитически; развитие умения применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений.

При изучении параграфа учащиеся знакомятся с понятием степенной функции и на конкретных примерах выявляют область её определения.

Учителю следует иметь в виду, что подробно степенная функция будет изучаться в старших классах, здесь же рассматриваются лишь её частные случаи, остальное — в ознакомительном плане.

На данном этапе изучения степенной функции важно, чтобы все учащиеся осознали, что знакомые им функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ и некоторые другие являются степенными. Для этого имеет смысл рассмотреть такую таблицу:

Степенная функция	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = x$	$y = x^2$	$y = \sqrt[3]{x^2}$
Показатель степени n	$n = -2$	$n = -1$	$n = \frac{1}{2}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = \frac{2}{3}$

Используя эту таблицу, выяснить область определения каждой функции и напомнить свойства уже известных функций ($y = x$, $y = x^2$) по пособию, подготовленному к изучению предыдущего параграфа, если это необходимо.

С возрастанием и убыванием линейной и квадратичной функций учащиеся знакомы и могут выявить характер изменения этих функций по графику. Сформулировав строгое определение функции, возрастающей и убывающей на промежутке, ознакомившись с примером доказательства возрастания функции $y = \sqrt{x}$ на всей области определения, можно предложить учащимся самостоятельно или в группах аналитически доказать, что функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$.

От учащихся требуется усвоить результат рассуждений и суметь его применить при выполнении упражнения **106 (1)**.

Рассуждения о характере возрастания функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ проводятся с активным использованием рисунков 6 и 7 учебника. При этом важно, чтобы в результате собственных рассуждений школьники пришли к выводу, что график степенной функции обязательно пройдёт через точку (1; 1).

Решение задачи 2 желательно предложить учащимся, интересующимся математикой, для самостоятельного изучения заранее, чтобы на уроке они могли помочь учителю в роли консультантов при выполнении упражнения **110**.

Материал параграфа рекомендуется изучать в соответствии с текстом учебника. На первом уроке рассмотреть теоретический материал до задачи 1 и упражнения **104**, **105**, **149**, **106**, дополнительно **111**; на втором уроке ознакомить учащихся с задачами 1, 2 и выполнить упражнения **107**, **108**, **157** (1, 2), **109**, дополнительно **110**, **157**, **768** (3, 4).

Рубрику *Разговор о важном* желательно предложить прочитать всем учащимся, так как в ней приводятся приёмы решения, которые будут полезными и при изучении других разделов программы (особенно в старших классах). Учащимся, интересующимся математикой, можно предложить решить упражнение № 9 из дидактических материалов.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 7, до задачи 1	ВУ; РТ № 1, 3—5; № 104—106, 149; ДМ № 3	№ 105, 106 (1)	№ 111 (1); ПЗ № 5
2	§ 7, задачи 1, 2	УВ; РТ № 8; ДМ № 6; № 107—109, 157; РТ № 6	№ 107 (1); ДМ № 2 (4)	Разговор о важном (с. 52); № 110 (3, 4), 157, 768 (3, 4)

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение возрастающей (убывающей) функции, уметь выполнять упражнения типа **104—107** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

110. 2) Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Покажем, что $y(x_2) < y(x_1)$ на промежутке $x \geqslant 0$.

Рассмотрим разность

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{1}{x_2^2 + 1} - \frac{1}{x_1^2 + 1} =$$

$$= \frac{x_1^2 + 1 - x_2^2 - 1}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)}.$$

Так как $x_2 > x_1$, то $(x_1 - x_2) < 0$; так как $x_2 > x_1 \geqslant 0$, то $(x_1 + x_2) \geqslant 0$, $x_2^2 + 1 > 0$, $x_1^2 + 1 > 0$. Следовательно, $y(x_2) - y(x_1) < 0$ и $y(x_2) < y(x_1)$, т. е. при $x \geqslant 0$ функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ является убывающей. Аналогично доказывается, что функция возрастает на промежутке $x \leqslant 0$.

3) Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$. Рассмотрим разность

$$y(x_2) - y(x_1) = (x_2^3 - 3x_2) - (x_1^3 - 3x_1) =$$
$$= (x_2^3 - x_1^3) - 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3).$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Так как $x_2 > x_1 \geqslant 1$, то $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \geqslant 3$ и $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 \geqslant 0$. Следовательно, $y(x_2) - y(x_1) > 0$ и $y(x_2) > y(x_1)$.

4) Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$. Рассмотрим разность

$$y(x_2) - y(x_1) = (x_2 - 2\sqrt{x_2}) - (x_1 - 2\sqrt{x_1}) = x_2 - x_1 - 2\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1} =$$
$$= (x_2 - x_1) - 2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = \left((\sqrt{x_2})^2 - (\sqrt{x_1})^2\right) - 2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) =$$
$$= (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}) - 2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} - 2).$$

Так как $x_2 > x_1$ и функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая при $x \geqslant 1$, то $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$. Так как $x_2 > x_1 \geqslant 1$, то $\sqrt{x_2} \geqslant 1$ и $\sqrt{x_1} \geqslant 1$, т. е. $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \geqslant 2$ и $(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} - 2) \geqslant 0$. Следовательно, $y(x_2) - y(x_1) > 0$ и $y(x_2) > y(x_1)$.

Аналогично доказывается, что функция убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 8 Чётность и нечётность функции (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с понятиями чётности и нечётности функции; формирование умений осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач.

К определениям чётной и нечётной функций учащимся придётся часто обращаться в основном в старших классах. Здесь происходит первое знакомство с этими понятиями на наглядном уровне. Желательно, чтобы учащиеся могли применять определения при выполнении упражнений **112**, **113**, обосновывая ответы.

В тетрадях учащихся могут быть сделаны следующие записи:

113. 3) $y(x) = x^4 + x^2$, $y(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2$, $y(-x) = y(x)$ для всех x, значит, функция $y = x^4 + x^2$ чётная.

6) I способ. $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $y(-x) = \dfrac{1}{(-x)+1} = \dfrac{1}{1-x} = -\dfrac{1}{x-1}$, $y(x) \neq y(-x)$, $y(x) \neq -y(-x)$, т. е. функция $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$ не является ни чётной, ни нечётной.

II способ. Область определения функции $y(x) = \frac{1}{x+1}$ не содержит точку $x = -1$, но содержит точку $x = 1$, поэтому эта функция не является ни чётной, ни нечётной.

Учащиеся должны уверенно строить график функции $y = x^3$ и перечислять свойства этой функции. Ученикам желательно уметь изображать график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и понимать отличие функции $y = \sqrt[3]{x}$ от функции $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Понятия чётности и нечётности фактически заменяют учащимся ранее знакомые им понятия симметрии графиков функций относительно оси Oy или начала координат. Поэтому после знакомства с понятием чётности можно показать схематическое изображение графиков функций $y = x^4$, $y = x^8$ (не изучая свойства этих функций). Аналогично можно поступить и после введения понятия нечётной функции, схематически изобразив графики $y = x^5$, $y = x^7$. После этого следует выполнить упражнение **114** (1—3) (упражнение **114** (4) выполняется по желанию учителя после ознакомления с задачей 2).

В качестве устных упражнений на этих уроках можно использовать вводные упражнения, а также следующие:

1. Назвать число, противоположное данному: 7; -3; 1; $\frac{1}{8}$; $-0{,}1$; 0.

2. Найти значение функции $y(x) = x^2$ при $x = 1; -1; -2; 2; 3; -3; a; -a$.

3. Найти значение функции $y(x) = x^3$ при $x = \pm1; \pm2; \pm3; \pm a$.

4. Дана функция: 1) $y(x) = 2x + 1$; 2) $y(x) = x^2 + x$; 3) $y(x) = x^3 + x^2$; 4) $y(x) = 2|x|$. Найти $y(-x)$.

5. Найти область определения функции: $y = x^2 + 3x$; $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^3 - 2x$; $y = \frac{1}{x+1}$; $y = \sqrt{x-3}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Материал параграфа изучается в соответствии с текстом учебника, причём на первом уроке изучается весь теоретический материал и выполняются упражнения; на втором уроке выполняются упражнения и проводится проверочная самостоятельная работа на проверку усвоения первых трёх параграфов главы.

Самостоятельная работа
(тест с выбором ответа на 10 мин)

1. Промежуток $x \geqslant -1$ является областью определения функции $y(x)$:

1) $y(x) = x + 1$; 2) $y(x) = \frac{1}{x+1}$;

3) $y(x) = \sqrt{x + 1}$; 4) $y(x) = \sqrt[3]{x + 1}$.

2. Из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси абсцисс на 2 единицы влево получен график функции:

1) $y = 2|x|$; 2) $y = |x + 2|$; 3) $y = |x - 2|$; 4) $y = |x| - 2$.

3. На промежутке $x \geqslant 0$ возрастает функция:

1) $y = 1 - 2x$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = x^4$; 4) $y = -x$.

4. Симметричным относительно оси ординат является график функции:

1) $y = |x + 1|$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = (x - 1)^2$; 4) $y = x^4 - 1$.

5. Нечётной является функция:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = x^3 + x$; 3) $y = x^3 + x^2$; 4) $y = (x - 1)^3$.

Учащимся, интересующимся математикой, будет полезно изучить рубрику *Разговор о важном* и выполнить задания, которые предлагаются для самостоятельной работы. Кроме того, можно решить № **13** из дидактических материалов.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	**Теоретический материал**	**Задания**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 8	ВУ; РТ № 3, 5; № 112—114	№ 113 (3, 4), 114 (1)	Разговор о важном (с. 58); ДМ № 13, 9, 10
2	§ 8	УВ; № 115—118	Самостоятельная работа из текста пособия	№ 120—123

В результате изучения параграфа все учащиеся должны с помощью графиков выявлять чётные и нечётные функции, знать свойства функций $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, уметь строить их графики, выполнять упражнения типа **112, 113** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

§ 9 Функция $y = \frac{k}{x}$ (3/4 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с функцией $y = \frac{k}{x}$ при различных значениях k; обучение построению графика функции $y = \frac{k}{x}$, чтению этого графика; формирование умений создавать математические модели задач из других дисциплин, из окружающей жизни.

Функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \frac{1}{x}$, поэтому и изучение функции $y = \frac{k}{x}$ начинают с изучения функции $y = \frac{1}{x}$, рассматривая её как степенную функцию $y = x^{-1}$.

В задаче 1 для построения графика функции $y = \frac{1}{x}$ используются все свойства функции, изученные в предыдущих параграфах. При построении графиков функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = -\frac{2}{x}$ применяется уже знакомое учащимся из курса 8 класса растяжение графика функции $y = \frac{1}{x}$ от оси абсцисс в 2 раза. Затем с помощью графиков формулируются свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и $k < 0$.

Уже знакомое учащимся понятие прямой пропорциональности, которое они изучали в 7 классе, дополняется понятием обратной пропорциональности, часто встречающимся, например, при изучении законов физики:

$V(p) = \frac{k}{p}$ (V — объём газа, p — давление, k — коэффициент пропорциональности).

$p(S) = \frac{F}{S}$ (p — давление, S — площадь, F — сила).

$I(t) = \frac{q}{t}$ (I — сила тока, t — время, q — заряд).

$I(R) = \frac{U}{R}$ (I — сила тока, R — сопротивление, U — напряжение).

Материал параграфа по урокам можно распределить, например, таким образом: на первом уроке изучить задачи 1 и 2, выполнить упражнения **124—126**; на втором уроке познакомить с понятием обратной пропорциональности, решить задачу 3 и выполнить упражнения **128**,

129, обсудить задачи на применение обратной пропорциональности, подобранные учениками, дополнительно решить задачу **131**; на третьем уроке выполнить упражнение **127**, разобрать задачу 4, дополнительно выполнить упражнение **130**, после чего предложить самостоятельную работу с проверкой в классе.

1. Построить график функции

$$y(x) = -\frac{4}{x}. \left[y(x) = \frac{4}{x}.\right]$$

1) Найти область определения функции.

2) Выяснить, при каких значениях аргумента значения функции положительны; отрицательны.

3) Сравнить $y(-5)$ и $y(1)$; $y(2)$ и $y(6)$.

4) Выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей) на промежутках $x > 0$, $x < 0$.

2. Решить графически уравнение

$$-\frac{4}{x} = -x + 1. \left[\frac{4}{x} = x - 1.\right]$$

В результате изучения *Диалога об истории* желательно, чтобы учащиеся могли ответить на следующие вопросы: «После публикации работ каких математиков и в каком веке начал активно использоваться термин «функция»?», «Какими «функциями» пользовались вавилонские мудрецы ещё 4—5 тысяч лет назад?», «В трудах какого математика окончательно оформился графический способ задания функции?», «В каких отраслях знаний и технике используются свойства парабол $y = x^2$ и $y = x^3$?».

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 9, задачи 1, 2	ВУ; РТ № 1, 5, 6; № 124—126; ДМ № 1	№ 125 (1), 126 (1)	ДМ № 6; ПЗ № 2, 3
2	§ 9, до задачи 4	УВ (1—5); № 128, 129; РТ № 10; ДМ № 4	№ 127 (1)	ДМ № 7; диалог об истории (с. 65); № 131
3	§ 9	УВ; № 127 (2—4); РТ № 11, 12	Самостоятельная работа из текста пособия	№ 130; ДМ № 5

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и $k < 0$, уметь строить график функции $y = \frac{k}{x}$ при конкретных значениях k, таких, как в заданиях **124**, **125**, и отвечать на устные вопросы к параграфу.

§ 10 Неравенства и уравнения, содержащие степень (2/4 ч)

Ц е л и и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — обучение решению простейших уравнений и неравенств, содержащих степень; ознакомление с понятием иррационального уравнения; развитие умений применять знаки и символы, связанные с понятием степенной функции для решения учебных и познавательных задач.

Материал параграфа позволяет показать практическое применение свойств степенной функции при решении уравнений и неравенств. Решения задач 1 и 2 опираются на свойства степенной функции с натуральным показателем. В начале параграфа доказываются свойства степенной функции с любым действительным показателем r, поэтому необходимо напомнить учащимся, что это понятие известно им из § 4 и 5.

Подробные рассуждения по ходу решения каждого неравенства, как это сделано в тексте учебника, позволят избежать формального запоминания алгоритма решения подобных неравенств.

Если ученику легче решать неравенство, пользуясь наглядными представлениями, можно рекомендовать ему находить решения неравенств после изображения эскизов графиков соответствующих функций. Действительно, при решении неравенства $x^{2k+1} \gtrless a$ $(k \in N)$ ученик выявляет область определения функции $y = x^{2k+1}$ и непосредственно пользуется свойством возрастания функции на всей числовой оси. Рассуждения для решения неравенства, в котором фигурирует степень с чётным показателем, потребуют от учащихся больших усилий, здесь и будет особо полезен эскиз графика функции $y = x^{2k}$, $k \in Z$. Можно предложить учащимся прежде, чем изучать задачи 1 и 2, рассмотреть задачи 2 и 3 из рабочих тетрадей. По ходу решения неравенств повторяется и вычисление корня натуральной степени. Запись решения неравенства в тетради может быть такой:

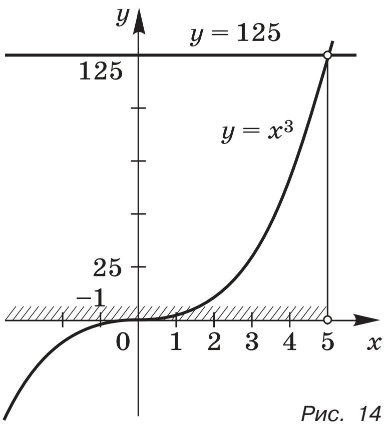


Рис. 14

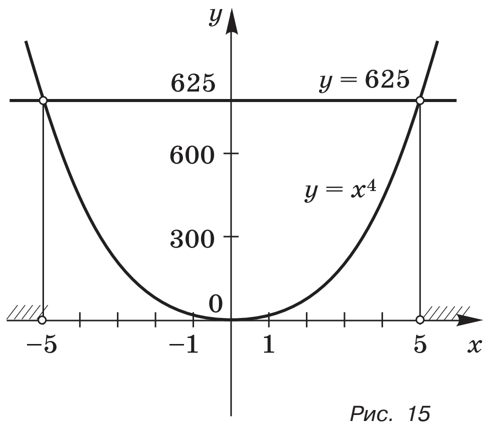


Рис. 15

132. 4) $x^3 < 125$.
Область определения функции $y = x^3$ — все действительные числа.
$x^3 = 125$, $x = \sqrt[3]{125}$, $x = 5$.
$x^3 < 5^3$ при $x < 5$ (рис. 14), так как функция $y = x^3$ возрастающая.
Ответ. $x < 5$.

132. 6) $x^4 > 625$.
Область определения функции $y = x^4$ — все действительные числа.
$x^4 = 625$, $x = \pm\sqrt[4]{625}$, $x = \pm 5$.
При $x \leqslant 0$ функция убывает, т. е. $x^4 > 5^4$ при $x < -5$. При $x \geqslant 0$ функция возрастает, т. е. $x^4 > 5^4$ при $x > 5$ (рис. 15).
Ответ. $x < -5$, $x > 5$.

В задаче 3 напоминается графический способ решения уравнений, при этом применяются свойства возрастания и убывания функции. Так как при решении уравнений бывает полезно предвидеть количество корней уравнения, то после разбора задачи 3 текста учебника можно выполнить упражнение № 13 из дидактических материалов, а также следующие:

1. Выполнив построение графиков соответствующих функций, выяснить, сколько корней имеет уравнение:

1) $-\frac{2}{x} = -x^2 + 4x - 4$; 2) $-\frac{2}{x} = 4 - x^2$.

2. Решить задачу **153** двумя способами: аналитическим и графическим.

Запись решения упражнений может быть такой:

153. 4) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$.

1) Приведём аналитическое решение $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x = \frac{1}{x^3}$, $x^4 = 1$, $x = \pm 1$.

2) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ нечётная, возрастающая на всей области определения (рис. 16).

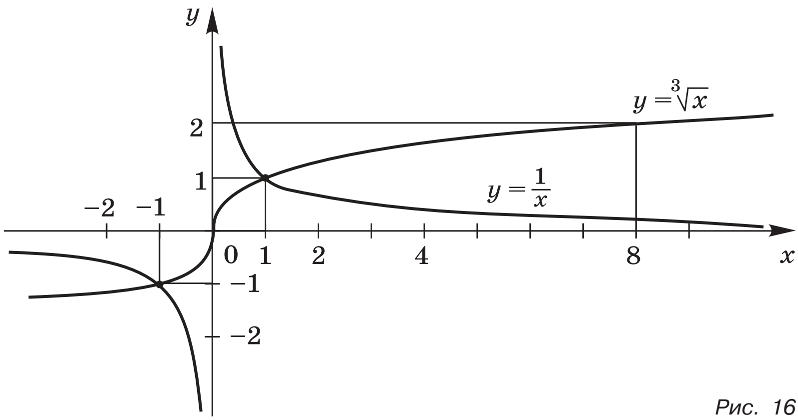


Рис. 16

x	0	1	8
y	0	1	2

Функция $y = \frac{1}{x}$ нечётная, убывающая при $x < 0$ и при $x > 0$.

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$

Ответ. $x = \pm 1$.

В задачах 4—7 рассматриваются решения иррациональных уравнений. Следует учесть, что более подробно эта тема изучается в старших классах. Тогда же вводится понятие равносильности уравнений. В задаче 4 показывается возможность появления постороннего корня, а его выявление осуществляется с помощью проверки. Рассуждения, которые приводятся в задаче 4, знакомы учащимся. Следует напомнить, что предположение о том, что x является корнем уравнения, даёт возможность применить свойства верных числовых равенств и получить способ решения уравнения. В данном параграфе демонстрируется основной способ решения иррациональных уравнений — возведение в одну и ту же степень обеих его частей. Следует иметь в виду, что задачи 5—7 рекомендуются для изучения учащимся, интересующимся математикой.

Материал параграфа по урокам можно распределить так: на первом уроке повторить свойства степенной функции, разобрать задачи 1 и 2 текста учебника и выполнить упражнения **132**, **133**, дополнительно упражнение **140**; на втором уроке решить задачи 3, 4 и аналогичные им, выполнить упражнение **153**.

Вариант оформления решения иррациональных уравнений фактически приводится в задаче 5. Однако можно использовать и более лаконичную запись решения:

136. 4) $\sqrt{2x-1}=3$,

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=3^2,$$
$$2x-1=9,$$
$$2x=10,$$
$$x=5.$$

Учащиеся должны устно пояснить, что проверку делать не следует, так как левая и правая части исходного уравнения неотрицательны.

Ответ. $x=5$.

139*. 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$,

$$\left(\sqrt{x^2+x-6}\right)^2=(x-1)^2,$$
$$x^2+x-6=x^2-2x+1,$$
$$3x=7,$$
$$x=\frac{7}{3}.$$

Проверка. Если $x=\frac{7}{3}$, то $\sqrt{x^2+x-6}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{7}{3}-6}=$ $=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$; $x-1=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$.

Ответ. $x=\frac{7}{3}$.

142*. 3) $x+\sqrt{13-4x}=4$,

$$\left(\sqrt{13-4x}\right)^2=(4-x)^2,$$
$$13-4x=x^2-8x+16,$$
$$x^2-4x+3=0,$$
$$x_1=1,\quad x_2=3.$$

Проверка. Если $x_1 = 1$, то $x + \sqrt{13 - 4x} = 1 + \sqrt{13 - 4} = 1 + 3 = 4$, $4 = 4$.

Если $x_2 = 3$, то $x + \sqrt{13 - 4x} = 3 + \sqrt{13 - 12} = 3 + 1 = 4$, $4 = 4$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Кроме вводных упражнений учебника, использовать следующие:

1. Вычислить:

$\left(\sqrt{18}\right)^2$, $\left(\sqrt{\frac{17}{40}}\right)^2$.

2. При каком значении x верно равенство:

$\sqrt{x} = 4$; $\sqrt{x} = \frac{2}{5}$; $\sqrt{x} = 0$; $2\sqrt{x} = 12$?

3. Решить уравнение:

$x^2 = 25$; $x^2 = -36$; $4x^2 - 1 = 0$;

$x^2 = \frac{100}{121}$; $x^2 - 0{,}16 = 0$; $x^2 = 3$.

4. Является ли верным равенство:

$\sqrt{16} = -4$; $\sqrt{169} = 13$?

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 10, задачи 1, 2	ВУ; РТ № 2, 3; № 132, 133; РТ № 6, 7; ДМ № 2, 3	№ 132 (1—5)	№ 140; ДМ № 9
2	§ 10, задачи 3, 4	УВ; РТ № 10, 8, 9; ДМ № 13; № 134—136, 138	№ 135 (2); 136 (1); тест № 2	№ 153, 140—147; ПЗ № 1

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь решать упражнения типа **132, 135, 136** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

145. 1) Возведём обе части уравнения $\sqrt{4 + \sqrt{x}} = \sqrt{19 - 2\sqrt{x}}$ в квадрат: $4 + \sqrt{x} = 19 - 2\sqrt{x}$, $3\sqrt{x} = 15$, $\sqrt{x} = 5$, $x = 25$.

Проверка показывает, что $x = 25$ является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = 25$.

146. 5) $\sqrt{5x + 11} > x + 3$.

I способ. 1) Если $x + 3 > 0$, то обе части неравенства можно возвести в квадрат (см. § 5, с. 29):

$\left(\sqrt{5x + 11}\right)^2 > (x + 3)^2$,

$5x + 11 > x^2 + 6x + 9$, $x^2 + x - 2 < 0$,

$(x + 2)(x - 1) < 0$, $-2 < x < 1$.

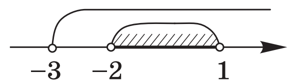


Рис. 17

Таким образом, исходное неравенство выполняется при $x > -3$ и $-2 < x < 1$ (рис. 17), т. е. при $-2 < x < 1$.

2) Если $x + 3 < 0$, то левая часть неравенства не определена, так как $5x + 11 \geqslant 0$ при $x \geqslant -2\frac{1}{5}$. Поэтому исходное неравенство при $x < -3$ не имеет решений (рис. 17).

Ответ. $-2 < x < 1$.

II способ основан на графической иллюстрации с предварительным решением уравнения $\sqrt{5x + 11} = x + 3$.

146. 6) $\sqrt{x + 3} \leqslant x + 1$.

I способ. В одной системе координат строим графики функций $y = \sqrt{x + 3}$ и $y = x + 1$ (рис. 18), решаем уравнение

$\sqrt{x + 3} = x + 1$,

$x + 3 = x^2 + 2x + 1$,

$x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Проверка показывает, что $x = -2$ — посторонний корень.

График функции $y = \sqrt{x + 3}$ лежит не выше графика функции $y = x + 1$ при $x \geqslant 1$.

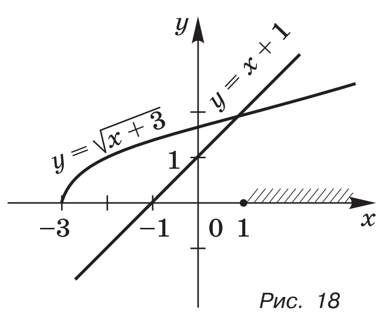


Рис. 18

II способ. 1) При $x + 1 < 0$ неравенство не имеет решений, так как $\sqrt{x + 3}$ не может быть меньше отрицательного числа, как арифметический корень.

2) При $x + 1 \geqslant 0$, т. е. при $x > -1$, должно выполняться

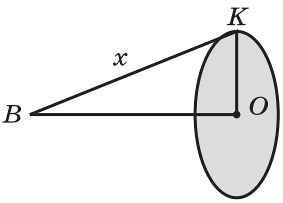


Рис. 19

неравенство $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 \leqslant (x+1)^2$, т. е. $x + 3 \leqslant x^2 + 2x + 1$, откуда $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1$.

Ответ. $x \geqslant 1$.

147. Пусть точка выстрела B и $BO = x$ (рис. 19). Так как $KO =$ $= 50$ см по условию задачи, то

$$BK^2 = x^2 + 2500, \quad BK - BO = \sqrt{x^2 + 2500} - x.$$

Запишем неравенство $\sqrt{x^2 + 2500} - x \leqslant 2$ в виде $\sqrt{x^2 + 2500} \leqslant 2 + x$. По смыслу задачи $2 + x > 0$, поэтому обе части последнего неравенства можно возвести в квадрат:

$$\left(\sqrt{x^2 + 2500}\right)^2 \leqslant (2 + x)^2,$$

откуда $x^2 + 2500 \leqslant 4 + 4x + x^2$,
$4x \geqslant 2496, \quad x \geqslant 624$.

Ответ. Расстояние должно быть не меньше 624 см.

Решение практических и прикладных задач

1. Соответствие тела C и рис. *б*, тела D («повёрнутого» тела C) и рис. *г* устанавливается легко: при вертикальном погружении цилиндра объём и соответственно (согласно закону Архимеда) масса вытесненной жидкости увеличивается равномерно, т. е. в соответствии с законом $y = kx$. При погружении меньшего цилиндра (высота которого примерно равна высоте большого цилиндра) масса вытесненной воды меньше, чем при погружении большего (при одном и том же Δx для малого и большого цилиндров соответствующие Δy различны — у большего цилиндра Δy больше).

Дифференциацию рисунков для погружающихся конусов учащиеся могут выполнять на интуитивном уровне: при погружении конуса A увеличение объёма идёт «медленнее», чем при погружении конуса B, для которого в конце погружения увеличение (Δy) объёма вытесненной жидкости становится «всё меньше и меньше» ($A \to b$, $B \to a$).

Учитель может поступить и следующим образом: сообщить учащимся формулу объёма конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, предложить считать в данном конусе $R = h = x$, т. е. считать $V = kh^3$ или $y = kx^3$. Тогда учащиеся поймут, что для конуса A изменение объёма происходит по закону $y = kx^3$ и на рисунке *в* увидят часть кубической параболы. Можно сообщить учащимся, что на рисунке *а* изображена часть графика функции $y = m\sqrt[3]{x}$ — обратной для функции $y = kx^3$.

2. В y кг молока, содержащего $x\%$ жира, содержится $\frac{y \cdot x}{100}$ кг жира. В 1 кг масла, содержащего 80% жира, содержится 0,8 кг жира. Требуется, чтобы $0{,}8 = \frac{y \cdot x}{100}$, откуда $y = \frac{80}{x}$ (кг).

3. Для стороннего наблюдателя за 1 мин проходят $20 \cdot 2 = 40$ зубьев первого колеса. Сцеплённое с ним второе зубчатое колесо (имеющее n зубьев и проходящее те же 40 зубьев) сделает за минуту $y = \frac{40}{n}$ оборотов.

Можно говорить о равенстве скоростей прохождения зубьев через общую точку зубчатых колёс (но не о равенстве скоростей вращения; эти скорости находятся в обратной пропорциональной зависимости от числа зубьев: $v \cdot n = \text{const}$).

4. Через первый шкив за минуту проходит часть ремня длиной $\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4$ м. Через второй шкив за минуту проходит $\pi \cdot d \cdot y$ м ремня. Если ремень не рвётся, то $\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 = \pi \cdot d \cdot y$, откуда $y = \frac{0{,}8}{d}$.

Урок обобщения знаний и представления исследовательских работ (2/2 ч)

Урок можно начать с анализа результатов выполнения теста и коррекции допущенных ошибок.

Затем следует повторить свойства степенной функции, с которыми учащиеся познакомились по ходу изучения главы при рассмотрении конкретных функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^{-1}$, $y = \frac{k}{x}$ (при различных значениях k). Дополнить эти примеры функциями $y = x^6$, $y = x^{10}$, $y = x^7$, $y = x^5$. Вывод о свойствах степенной функции при любом действительном показателе сделать лишь ознакомительно и не заострять на нём внимание. Можно использовать упражнения **148, 151—155, 157, 158**; дополнительно упражнения **159—162**, прикладная задача № 4.

Оставшееся время можно посвятить представлению исследовательских работ.

Контрольная работа № 2

1. Найти область определения функции:

1) $y = \frac{3}{2x+1}$; 2) $y = \sqrt{16 - x^2}$.

$\left[1)\ y = \frac{2}{3-2x};\quad 2)\ y = \sqrt{x^2 - 25}.\right]$

2. Построить график функции $y(x) = -\frac{4}{x}$ $\left[y(x) = \frac{6}{x}\right]$ и найти:

1) $y(-2)$ [$y(-3)$];
2) значение x, при котором значение функции равно 8 [−12];
3) промежутки, на которых $y(x) > 0$ [$y(x) < 0$];
4) промежутки возрастания, убывания.

3. Выяснить, проходит ли график функции $y = x^4 - 1$ [$y = x^3 + 1$] через точку $M(-2; -17)$ [$N(-2; -7)$].

---

4. С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{x} = -x^2 + 4$. $\left[\sqrt{x} = (x-2)^2.\right]$

5. Решить уравнение

$\sqrt{x+7} = 1 + x$. $\left[x + 2 = \sqrt{8 + x}.\right]$

ГЛАВА

III Прогрессии (15/19 ч)

С различными последовательностями учащиеся уже не раз встречались: натуральный ряд чисел, последовательность квадратов чисел, последовательность чётных чисел и др. Последовательности получались также при вычислении приближённых величин с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

В учебнике определение последовательности не даётся, а поясняется на конкретных примерах. Последовательность рассматривается как некоторый упорядоченный (занумерованный) набор чисел.

Понятие последовательности находит широкое применение и в дальнейшем: при определении степени с действительным показателем, при введении понятия определённого интеграла и др.

Арифметическая и геометрическая прогрессии определяются традиционно рекуррентными формулами. Можно было бы определить прогрессии формулами их общих членов, а из них получить рекуррентные формулы.

Например, определив арифметическую прогрессию формулой $a_n = a_1 + (n - 1)d$, получаем $a_{n+1} = a_1 + (n + 1 - 1)d = a_1 + (n - 1)d + d = a_n + d$.

Формулы общих членов прогрессий выводятся индуктивно. Их строгое доказательство можно было бы провести методом математической индукции, рассмотрение которого не предусмотрено программой для всех учащихся. Заметим, что если прогрессии определить формулами их общих членов, то потребность в доказательствах отпадает.

Вывод формул суммы n первых членов прогрессий обосновывается свойствами верных числовых равенств.

Предметными целями изучения главы III являются:

- формирование понятия последовательности и двух её видов: арифметической и геометрической прогрессий;
- формирование умений применять понятие прогрессии и свойства прогрессии для решения задач практического характера;
- формирование умения интерпретации понятия прогрессии как функции, определённой на множестве натуральных чисел;
- развитие умений точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии.

Метапредметные цели изучения главы:

- формирование умений развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности;
- развитие умений устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение и делать выводы;
- развитие умений осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Личностные цели изучения главы:

- развитие представлений о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах её развития;
- формирование ответственного отношения к осознанному выбору и построению индивидуальной траектории образования на основе профессиональных предпочтений;
- формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики.

В результате изучения главы III все учащиеся должны иметь представления о последовательностях и способах их задания, знать определения и основные свойства арифметической и геометрической прогрессий, применять их при выполнении упражнений **234**, **235**, **238**, **240**, **244**, **245**, а также упражнений из рубрики *Проверь себя!* (I уровень).

§ 11 Числовая последовательность (1/2 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с понятием числовой последовательности и способами её задания; формирование умения создавать математические модели задач окружающей действительности.

Понятие последовательности определяется с помощью знакомого учащимся натурального ряда чисел, также являющегося последовательностью. Поэтому изложение материала на уроке следует начать, как и в учебнике, с рассмотрения натурального ряда чисел. На начальном этапе изучения темы соответствие натуральных чисел и членов последовательности можно иллюстрировать стрелочками, например:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & n+1, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & n^2, & (n+1)^2, & \ldots \end{array}$$

Это поможет учащимся осознать тот факт, что индекс n указывает номер члена a_n. Явное определение понятия последовательности не приводится, а его смысл разъясняется на примерах.

Полезно предложить учащимся прочитать, например, практические задачи № 1—3. Анализ условия позволяет понять, что в этих обыденных жизненных ситуациях мы имеем дело с некоторыми последовательностями. Об особенностях этих последовательностей они узнают на следующих уроках, тогда и решат эти задачи. Также на примерах показывается запись n-го члена последовательности и задание последовательности рекуррентным способом.

Чтобы обеспечить восприятие рекуррентного способа задания последовательности, сначала полезно на примерах разъяснить запись предыдущего и последующего членов. Это можно сделать, например, с помощью таких заданий:

1. Дана последовательность $a_1, a_2, ..., ..., a_{10}, ..., a_n, ...$. Записать для этой последовательности члены, предыдущие для a_{10} и a_n; последующие для a_{10} и a_n.

2. Записать числа в порядке возрастания:

$n - 1, \quad n + 1, \quad n - 2, \quad n + 2, \quad n,$ где $n \in N$.

3. Члены некоторой последовательности a_{n+1}, a_{n-2}, a_n, a_{n+2}, a_{n-1} записать в том порядке, в котором они должны располагаться в этой последовательности.

Члены последовательности могут быть изображены точками на числовой оси или координатной плоскости. Эта интерпретация позволяет учащимся ещё раз обратиться к понятию функции и убедиться, что область определения такой функции, как последовательность, — множество натуральных чисел.

Очень интересен *Диалог об истории*, который позволяет заглянуть и в биологию, и в астрономию, и в экономику. Желательно, чтобы учащиеся не забывали особенности последовательности Фибоначчи и, возможно, сами нашли примеры её применения, выбрав для себя одну из тем 3—5 исследовательских работ.

На этом уроке значительное внимание следует уделить выполнению упражнений **164**, **166**, **167** и заданию 5 из рабочей тетради. Желательно, чтобы запись решения сопровождалась устным комментарием. В тетради может быть следующая запись:

166. 2) $a_n = n^2 - 2n - 6$. Пусть $a_n = 2$, тогда $2 = n^2 - 2n - 6$, откуда

$$n^2 - 2n - 8 = 0,$$

$$n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3,$$

$n_1 = 4$, $n_2 = -2$ — не является решением, так как номер n должен быть числом натуральным.
Ответ. $a_4 = 2$.

Дополнительно на этом уроке можно выполнить задания **171, 172.**

В результате изучения параграфа каждый учащийся должен иметь представление о числовой последовательности, уметь выполнять упражнения **163—167** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

§ 12 Арифметическая прогрессия (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с арифметической прогрессией, формирование умений использовать её характеристическое свойство и формулу n-го члена при решении задач; развитие основ самоконтроля, самооценки, осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

Изучение параграфа рекомендуется вести в соответствии с текстом учебника. Как объём, так и уровень доступности теоретического материала дают возможность организовать работу учащихся дифференцированно с большой долей самостоятельности. При этом решение задач **1—5** текста учебника одним учащимся предложить выполнить полностью самостоятельно, другим — самостоятельно разобрать готовое решение по учебнику, а третьим — с помощью учителя разобрать задачи либо по тексту, либо оформляя решение на доске.

Система упражнений к параграфу также позволяет организовать дифференцированную работу с учащимися на всех трёх уроках.

Учащимся, интересующимся математикой, полезно решить задачу **191**, в которой фактически требуется доказать обобщённые свойства членов арифметической прогрессии.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии закрепляется при решении задачи **187.** Прежде чем выполнить эту задачу, полезно рассмотреть такие, например, задания:

1. Найти пятый член арифметической прогрессии, если:
1) $a_4 = 3$, $a_6 = 7$;
2) $a_4 = -2$, $a_6 = -8$.

2. Найти:
1) $a_5 + a_6 + a_7$, если $a_6 = 11$;
2) $a_5 + a_6 + a_7$, если $a_5 + a_7 = 10$.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: на первом уроке в ходе дифференцированной работы разобрать весь материал параграфа; второй и третий уроки можно провести в форме практикума, используя, кроме упражнений к параграфу, задачи к главе, ко всему учебнику (в конце книги), задачи из дидактических материалов.

Можно распределить тот же материал иначе: на первом уроке разобрать материал параграфа до формулы n-го члена и выполнить упражнения **173—175**, **237**, также приведённые выше упражнения 1 и 2 этого пособия; на втором уроке решить задачи 2 и 3 текста параграфа и выполнить упражнения **176—180**, **185—187**, дополнительно упражнение **191**; на третьем уроке — задачи 4 и 5, упражнения **181—184**, **188**, дополнительно упражнения **189**, **191**.

В *Диалоге об истории* приводится задача, найденная на вавилонских табличках. Полезно предложить учащимся, интересующимся математикой, изучить эту задачу и рассказать суть её решения в начале урока по § 13. Ученики ещё раз убедятся в том, что суммы пар чисел, одинаково удалённых от начала и конца всей суммы, равны, что послужит подготовкой к изучению новой темы.

Распределение учебного материала по урокам, представленным во втором варианте, может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 12, до формулы n-го члена	ВУ; РТ № 1, 2; № 173—175, 237; задания 1, 2 из пособия	№ 175 (3); ДМ № 3 (1)	ДМ № 13; № 190
2	§ 12, задачи 2, 3	УВ (1—4); РТ № 3, 4; ДМ № 6; № 176—180, 185—187	№ 176 (3), 180	№ 191 (2); диалог об истории (с. 83)
3	§ 12, задачи 4, 5	УВ; РТ № 5, 6, 7; № 181—184, 188; ДМ № 9, 10	№ 182 (1), 184 (1)	ДМ № 12, 15; № 189, 191 (1)

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение арифметической прогрессии, уметь выполнять упражнения типа **174—176**, **181**, **182** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

189. Так как $a_1 = 15$ мин, $d = 10$ мин, а $a_n = 1$ ч 45 мин $= 105$ мин, то $105 = 15 + 10(n - 1)$, $10n = 100$, $n = 10$.

190. $a_{n-l} = a_1 + (n - l - 1)d = a_1 + (n - 1)d - ld = a_n - ld$,

$a_{k+l} = a_1 + (k + l - 1)d = a_1 + (k - 1)d + ld = a_k + ld$,

$a_{n-l} + a_{k+l} = (a_n - ld) + (a_k + ld) = a_n + a_k$,

$a_{10} + a_5 = a_{10-3} + a_{5+3} = a_7 + a_8 = 30$.

191. 2) $a_{n+k} = a_1 + (n + k - 1)d = a_1 + (n - 1)d + kd = a_n + kd$,

$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1)d = a_1 + (n - 1)d - kd = a_n - kd$,

$a_{n+k} + a_{n-k} = a_n + kd + a_n - kd = 2a_n$,

$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$, $a_{20} = \frac{a_{10} + a_{30}}{2} = 60$.

§ 13 Сумма n первых членов арифметической прогрессии (3/4 ч)

Цели изучения параграфа — обучение нахождению суммы n первых членов арифметической прогрессии и использованию формулы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ при решении задач; развитие умений определять способы действий в рамках предложенных условий.

Доказательству теоремы о сумме членов арифметической прогрессии предшествует задача 1. Её решение на конкретном примере демонстрирует рассуждения, аналогичные тем, которые будут проведены в общем виде при доказательстве теоремы. Поэтому не следует игнорировать рассмотрение этой задачи.

Для формирования первичных навыков применения теоремы используются упражнения **192** и **240**. Задачи 2 и 3 текста учебника можно рассмотреть в ходе самостоятельной работы с книгой, а затем выполнить упражнения **193—198**, **241**.

В задаче 4 выводится вторая формула суммы n первых членов арифметической прогрессии. Несмотря на то что эта формула не выделяется отдельной строкой, учащимся полезно её запомнить (или выписать в свой справочник) и применять в удобных ситуациях, например при решении упражнений **202**, **203**.

Изучение параграфа можно организовать следующим образом: на первом уроке изучить весь теоретический материал, кроме задач 2 и 3, и выполнить упражнения **192, 240, 201**; второй и третий уроки провести в форме практикума, используя остальные упражнения к параграфу, дополнительно упражнения **205—207, 260, 261**; в конце третьего урока можно провести небольшую проверочную работу по материалу § 12, 13.

Кроме заданий учебника и дидактических материалов, на втором и третьем уроках можно рассмотреть и другие задачи. Например:

1. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_3 = -1$, $a_5 = 3$, $n = 10$;

2) $a_1 + a_3 = -4$, $a_4 = 2$, $n = 14$;

3) $a_7 + a_9 = 12$, $a_1 + a_3 = -12$, $n = 3$;

4) $a_1a_2 = 10$, $d = 1{,}5$, $n = 40$.

2. В арифметической прогрессии $a_1 = -6$, $d = 3$. Сколько последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы получить сумму, равную 99?

Самостоятельная работа (15 мин)

1. Найти десятый член арифметической прогрессии и сумму её первых десяти членов, если $a_1 = -8$, $d = 2$.

[Найти девятый член арифметической прогрессии и сумму первых девяти членов, если $a_1 = 2$, $d = -4$.]

2. Число 102 является членом арифметической прогрессии 10, 14, 18, ... Найти номер этого члена. Найти сумму $10 + 14 + 18 + ... + 102$ членов этой прогрессии.

[Число -34 является членом арифметической прогрессии 10, 6, 2, ... Найти номер этого члена. Найти сумму $10 + 6 + ... + (-34)$ членов этой прогрессии.]

Диалог об истории желательно прочитать всем учащимся. Перед ними всё шире раскрывается история развития математики. Полезно предложить учащимся проверить нахождение сумм чисел (чётных, нечётных, натуральных), приведённых в диалоге с помощью выведенной формулы суммы членов арифметической прогрессии.

Логическим продолжением диалога является материал рубрики *Шаг вперёд*. Здесь учащиеся впервые встречаются с методом математической индукции. Учащимся, интересующимся математикой, необходимо внимательно изучить этот диалог и попытаться выполнить задания, которые там предложены.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 13, до задачи 2	ВУ; РТ № 1, 2; № 192, 240, 201; ДМ № 1	№ 192 (3); ДМ № 1 (3)	ДМ № 9; ПЗ № 1
2	§ 13, задачи 2—4	УВ; РТ № 5, 6; № 193—196, 204	№ 195 (1), 196 (1)	№ 205, 206; ПЗ № 2; диалог об истории (с. 94)
3	§ 13	РТ № 7; ДМ № 2, 4, 6; № 194, 198, 202, 203	Самостоятельная работа из текста пособия	№ 260, 261; шаг вперёд (с. 95); ДМ № 19; ПЗ № 3

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь применять формулу (1) суммы n членов арифметической прогрессии при выполнении упражнений типа **195**, **196** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

205. $a_3 + a_9 = a_1 + a_{11}$ (см. задачу 191), следовательно,

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = 44.$$

206. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, тогда

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d,$$

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d.$$

По условию задачи S_5 и S_{10} — суммы членов одной и той же арифметической прогрессии, следовательно,

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 65, \\ 10a_1 + 45d = 230. \end{cases}$$

Решим систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{array}{r} -\ 10a_1 + 20d = 130 \\ 10a_1 + 45d = 230 \\ \hline 25d = 100, \end{array}$$ откуда $d = 4$, $a_1 = 5$.

207. $S_{12} = \dfrac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = 12a_1 + 66d,$

$$S_4 = \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 4a_1 + 6d,$$

$S_8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = 8a_1 + 28d.$

Отсюда $S_8 - S_4 = 4a_1 + 22d$, но $S_{12} = 12a_1 + 66d = 3(4a_1 + 22d)$.

260. Так как $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, то $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15$, $a_1 + d = 5$.

$$\begin{cases} a_1 + d = 5, \\ a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d) = 80, \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ (5 - d) \cdot 5(5 - d + 2d) = 80. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:
$(5 - d)(5 + d) = 16$, $d^2 = 9$, $d = \pm 3$.

Следовательно, получили две арифметические прогрессии, у которых $d = 3$, $a_1 = 2$ или $d = -3$, $a_1 = 8$.

Ответ. $a_1 = 2$, $d = 3$; $a_1 = 8$, $d = -3$.

261. I способ. Так как $a_1 + a_3 = 2a_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, то $3a_2 = 0$, откуда $a_2 = 0$, $a_3 = -a_1$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_3^2 = 2a_1^2 = 50$, $a_1 = \pm 5$. Если $a_1 = 5$, то $a_3 = -5$. Но $a_3 = a_1 + 2d$, т. е. $-5 = 5 + 2d$, откуда $d = -5$. Если $a_1 = -5$, то $a_3 = 5 = a_1 + 2d$, откуда $d = 5$.

Ответ. $a_1 = 5$, $d = -5$; $a_1 = -5$, $d = 5$.

II способ. $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, следовательно, $3a_1 + 3d = 0$ и $a_1 = -d$, $a_2 = a_1 + d = 0$. $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) = 0$.

По условию $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$, значит, $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = -25$. Но $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, т. е. $a_1 + a_2 = -a_3$, откуда $a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 = -25$, $(a_1 + a_2)^2 = a_1a_2 + 25$. Так как $a_2 = 0$, то $a_1^2 = 25$, $a_1 = \pm 5$.

Ответ. $a_1 = 5$, $d = -5$; $a_1 = -5$, $d = 5$.

Решение практических и прикладных задач

1. Пусть a_1 — стоимость работы на первом метре глубины, тогда по условию стоимость за последний метр $a_n = 2a_1$, а оплата за всю работу составит $S_n = \frac{a_1 + 2a_1}{2} \cdot n$. Тогда средняя цена за 1 метр составит $\left(\frac{3}{2}a_1 n\right) : n$, что по условию равно 3750 р.: $\frac{3}{2}a_1 = 3750$, $a_1 = 2500$, а $a_n = 5000$. По формуле n-го члена $5000 = 2500 + 500(n - 1)$, откуда $n = 6$, следовательно, стоимость работы $3750 \cdot 6 = 22\,500$ (р.).

2. Моделью решения данной задачи является арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 5$, $d = 3$, следовательно, $a_8 = 26$. За один проход полива всех саженцев будет пройдено расстояние $S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 124$. Таких проходов будет 4, следовательно, будет пройдено расстояние $124 \cdot 4 = 496$ (м).

Задание 1 из рубрики *Шаг вперёд* со страницы 96.

Доказать, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. (1)

1) При $n = 1$ $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, $1 = 1$ — формула верна;

2) предположим, что формула верна для некоторого $n = k$, т. е. верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Докажем, что в этом случае равенство верно и при $n = k + 1$, т. е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

По предположению $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, следовательно, $\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+2)^2}{4}$.

Что и требовалось доказать.

Вывод: из проверенного в пункте 1 и доказанного в пункте 2 следует справедливость равенства (1) для любого натурального n.

§ 14 Геометрическая прогрессия (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с новой последовательностью — геометрической прогрессией, обучение применению её характеристического свойства и формулы n-го члена при решении задач; развитие умений самостоятельно создавать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

Определение геометрической прогрессии, которое даётся через описание её рекуррентной формулы, вводится после рассмотрения практической задачи, важной для понимания возникновения последовательности такого вида.

При изучении данного параграфа учащиеся знакомятся с интересными прикладными задачами и познавательным материалом в диалоге, которые помогают школьникам не только расширить кругозор, но и заглянуть в другие науки, которыми, возможно, они заинтересуются.

Задача 1 показывает, как с помощью определения геометрической прогрессии обосновать принадлежность некоторой последовательности к геометрической прогрессии. Затем это же определение используется для вывода характеристического свойства прогрессии.

Формула n-го члена появляется в ходе индуктивных рассуждений, и её непосредственное применение демонстрируется в задачах 2 и 3. Так как при решении задач активно используются свойства степени, желательно в устную работу на первом уроке включить упражнение на повторение свойств степени. В ходе изучения параграфа решаются простейшие показательные уравнения на множестве натуральных чисел. Термин «показательное уравнение» не вводится, решение опирается на свойства, изложенные в § 5.

Решение задач 4 и 5 (особенно 5) желательно показать всем учащимся, но умение решать подобные задачи от всех учащихся не требуется. В процессе решения задачи 6 выводится формула сложных процентов, применение которой рассматривается в задаче 7.

На первом этапе обучения решению задач учителю важно не торопиться и требовать от учащихся как подробного объяснения своих действий, так и подробной записи в тетрадях. Решение задач может быть записано следующим образом:

212. 1) 4, 12, 36, ... — геометрическая прогрессия;
$b_1 = 4$, $b_2 = 12$. Найдём q.

$q = \frac{b_2}{b_1}$, $q = \frac{12}{4} = 3$.

Подставим $b_1 = 4$, $q = 3$ в формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ — формула n-го члена.

213. 4) −1, 2, −4, ..., <u>128</u>, ... — геометрическая прогрессия.
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

$b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $q = \frac{b_2}{b_1} = -2$.

$128 = b_n$, значит,
$128 = -1 \cdot (-2)^{n-1}$, $-128 = (-2)^{n-1}$.
Приведём левую часть уравнения к основанию −2:

$$-128 = (-2)^7,\ (-2)^7 = (-2)^{n-1},$$

откуда $7 = n - 1$, $n = 8$.

Ответ. $n = 8$.

214. 1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$.
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Следовательно, $b_5 = b_1 \cdot q^{5-1}$, $162 = 2 \cdot q^4$, $q^4 = 81$, откуда $q = \pm 3$.

Ответ. $q = 3$ или $q = -3$.

Материал параграфа по урокам можно распределить следующим образом: на первом уроке рассмотреть весь материал параграфа до задачи 4 и выполнить часть упражнений **208—212**, **242—244**, дать задание к третьему уроку самостоятельно подготовиться к обсуждению решений задач 4 и 5; на втором и третьем уроках изучить задачи 6 и 7, выполнить упражнения, которые не успели закончить на первом уроке, а также **213—215**, **255**, дополнительно упражнения **219—221**, **263**.

На каждом уроке полезно к упражнениям учебника добавлять, например, такие:

1. Для геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ найти:

а) $b_1 \cdot b_3$, если $b_2 = -5$; б) $b_1 b_2 b_3$, если $b_2 = -5$;

в) $b_1 b_2 b_3$, если $b_1 b_3 = 9$; г) $\frac{b_4}{b_3 b_5}$, если $b_4 = 17$.

2. Дана геометрическая прогрессия 1, b_2, 0,25, b_4, b_5. Найти b_2, b_4, b_5.

Эти упражнения помогают осознать возможности применения свойства геометрической прогрессии $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n > 1$.

Материал *Диалога об истории* продолжает линию ознакомления школьников с историей возникновения математических понятий и символов, названий и обозначений. Будет полезно предложить школьникам заглянуть в учебники для 7—8 классов и привести примеры появления того или иного обозначения или названия.

Важно, чтобы учащиеся поняли, что названия арифметической и геометрической прогрессий тесно связаны с названием пропорции, идущим ещё от древних греков.

Понятие экспоненциального роста величин, которое обсуждается в рубрике *Шаг вперёд*, будет более глубоко рассматриваться в старшей школе, но на данном этапе важно показать учащимся его широкое применение в различных отраслях знаний. Можно предложить учащимся найти в различных источниках ещё примеры экспоненциального роста величин.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 14, до задачи 4	ВУ; РТ № 3, 4; № 208—212, 242, 244	№ 210 (1), 211 (3), 244 (1)	№ 257, 220; диалог об истории (с. 103)
2	§ 14, задачи 6 и 7	РТ № 5, 6; № 213—215, 218; РТ № 12, 13	№ 214 (3), 215 (1)	№ 219; ПЗ № 3; ДМ № 11; шаг вперёд (с. 104)
3	§ 14	УВ; задачи 5, 6; РТ № 10, 11; № 216, 217	ДМ № 5 (1), № 6 (1), 8 (1)	№ 263; ДМ № 12, 13

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение геометрической прогрессии и пользоваться формулой n-го члена при выполнении упражнений **209—212**, уметь отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

218. Применяя формулу сложных процентов $b = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ при $a = 300\,000$, $p = 120\%$ и $n = 2$, получаем $b = 300\,000(1 + 1{,}2)^2 = 1\,452\,000$.

219. Пусть S_n — площадь n-го квадрата. Так как $S_1 = 4^2$, $S_2 = \frac{1}{2}S_1$, $S_3 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{4}S_1$ и вообще $S_n = \frac{1}{2^{n-1}}S_1$, то $S_7 = \frac{1}{2^6}S_1 = \frac{1}{2^6} \cdot 2^4 = \frac{1}{4}$.

220. Пусть a — первоначальное число инфузорий, a_n — число инфузорий после n делений. Тогда $a_1 = 2a$, $a_2 = 2a_1 = 4a = 2^2a$, $a_n = 2^na$, $a_6 = 2^6a$, по условию $2^2a = 320$, откуда $a = 5$.

263. а) $b_{n+l} = b_nq^l$, $b_k = b_{k-1}q^l$,

$b_{n+l} \cdot b_{k-1} = b_nq^l \cdot \frac{b_k}{q^l} = b_nb_k$.

б) $b_3b_5 = b_1q^2 \cdot b_1q^4 = b_1^2q^6 = 72$,

$b_1b_7 = b_1 \cdot b_1q^6 = b_1^2q^6 = 72$.

Решение практических и прикладных задач

3. Моделью задачи является геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 12{,}5$, $b_{23} = 2000$, а найти нужно b_{12}.

Имеем $b_{23} = b_1 \cdot q^{22}$, откуда $q^{22} = \frac{2000}{12{,}5} = 160$. Но $b_{12} = b_1 \cdot q^{11}$, а $q^{11} = \sqrt{q^{22}} = \sqrt{160}$, тогда $b_{12} = 12{,}5 \cdot \sqrt{160} = \sqrt{25\,000} \approx 158$ (оборотов в минуту).

§ 15 Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии (3/4 ч)

Цели изучения параграфа — обучение применению формул суммы n первых членов геометрической прогрессии при решении задач; развитие умений определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.

Формула $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ выводится по ходу доказательства теоремы, которой предшествует задача 1. В этой задаче на конкретном примере приводятся рассуждения, аналогичные используемым в доказательстве теоремы. Поэтому важно обратить внимание учащихся на то, что найти искомую сумму удаётся за счёт умножения обеих частей равенства на знаменатель прогрессии $q = 3$.

Задачи 2—4 знакомят учащихся с различными способами применения изученной формулы, а в задаче 5 выводится вторая формула нахождения суммы членов геометрической прогрессии, которой могут пользоваться школьники.

Упражнения к параграфу позволяют организовать последовательное закрепление приёмов, продемонстрированных при решении задач текста учебника: после решения задачи 2 выполняются упражнения **222**, **223**; после задачи 3 — упражнение **224**, частично **226**, **245**, **246**; после задачи 4 — упражнение **225**; после задачи 5 — упражнение **227**.

Учебный материал рекомендуется изучать в соответствии с текстом параграфа: на первом уроке задачи 1—5 и теорема, упражнение **222**, на втором и третьем уроках выполняются остальные упражнения к параграфу. Можно выбрать другой порядок изучения: на первом уроке решить задачу 1, доказать теорему, решить задачу 5 и выполнить упражнения; на втором уроке решить задачи 2—4 и упражнения; на третьем уроке выполнить оставшиеся упражнения и провести тест 3 на проверку усвоения главы III. Дополнительно на всех уроках можно использовать упражнения **230—232**, **264**, **265**.

Задания для самостоятельной работы на уроках 1 и 2:

1. Какая из приведённых ниже последовательностей является геометрической прогрессией:

1) 2,3; 3,5; 4,7; 5,9; ...; 2) $-\frac{1}{2}$; 1; –2; 4; ...;

3) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ...; 4) –3; 5; –7; 9; ...?

2. В геометрической прогрессии $b_1 = -8$; $b_2 = 4$. Найти b_4.

1) –1; 2) 8; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1.

3. В геометрической прогрессии $b_5 = 2$; $b_7 = 18$. Найти b_6.

1) 9; 2) 36; 3) 6; 4) $\frac{1}{9}$.

4. Найти сумму пяти членов геометрической прогрессии –0,5; –1,5; –4,5; ... .

1) 60,5; 2) –242; 3) –60,5; 4) 242.

5. Сумма шести членов геометрической прогрессии равна 73,5, $q = -2$. Найти b_1.

1) $3\frac{51}{130}$; 2) 3,5; 3) $1\frac{21}{126}$; 4) –3,5.

В диалоге *Шаг вперёд* учащиеся, интересующиеся математикой, вновь обращаются к методу математической индукции, но рассматривают его на примере решения несложного неравенства.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 15, до задачи 2, задача 5	ВУ; РТ № 1, 2; № 222, 223, 227	Задания № 1, 2, 4 для самостоятельной работы	№ 230, 264
2	§ 15, задачи 2—4	УВ; РТ № 3; № 224—226, 245, 246	Задания № 3, 5 для самостоятельной работы	№ 231, 232; шаг вперёд (с. 109)
3	§ 15	РТ № 4—6; ДМ № 3, 4, 5, 6	Тест № 3	ПЗ № 9, 6; ДМ № 8

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь применять формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии при выполнении упражнений типа **420**, **425** и отвечать на устные вопросы к параграфу.

Решение упражнений

230. Преобразуем левую часть равенства, выполнив умножение:

$S = x^n + x^{n-1} + ... + x - (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

В этой сумме взаимно уничтожаются все пары слагаемых, кроме одной. Поэтому $S = x^n - 1$.

231. 1) $b_3 = b_1q^2 = 135$, $b_1 = \frac{135}{q^2}$, $S_3 = b_1(1 + q + q^2) = 195$, откуда $b_1 = \frac{195}{1+q+q^2}$. Решая уравнение $\frac{135}{q^2} = \frac{195}{1+q+q^2}$, имеем $13q^2 = 9(q^2 + q + 1)$, $4q^2 - 9q - 9 = 0$, откуда $q = 3$ или $q = -\frac{3}{4}$. Если $q = 3$, то $b_1 = \frac{135}{q^2} = 15$, а если $q = -\frac{3}{4}$, то $b_1 = 240$.

2) $S_3 = b_1(1 + q + q^2)$, т. е. $372 = 12(1 + q + q^2)$, $q^2 + q + 1 = 31$, $q^2 + q - 30 = 0$, откуда $q = -6$ или $q = 5$.

Если $q = -6$, то $b_3 = b_1q^2 = 432$, а если $q = 5$, то $b_3 = 300$.

232. 1) $b_3 + b_5 = b_1(q^2 + q^4) = 90$, где $b_1 = 1$.

Пусть $q^2 = t$, тогда $t^2 + t - 90 = 0$, откуда $t = 9$ или $t = -10$ (не годится). Итак, $q^2 = 9$, откуда $q = 3$ или $q = -3$.

2) $b_4 + b_6 = b_2(q^2 + q^4) = 60$, где $b_2 = 3$.

Пусть $q^2 = t$, тогда $t^2 + t - 20 = 0$, откуда $t = 4$, т. е. $q^2 = 4$. Итак, $q = 2$ или $q = -2$.

3) $b_1 - b_3 = b_1(1 - q^2) = 15$, $b_2 - b_4 = b_1(q - q^3) = b_1q(1 - q^2) = 30$, $q = 2$, $b_1 = \frac{15}{1-q^2} = -5$, $S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = (-5)\frac{1-2^{10}}{1-2} = -5115$.

4) $b_3 - b_1 = b_1(q^2 - 1) = 24$, $b_5 - b_1 = b_1(q^4 - 1) = b_1(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 624$, $q^2 + 1 = 26$, $q = 5$ или $q = -5$; $S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = 78$ (при $q = 5$), $S_5 = 521$ (при $q = -5$).

264. Пусть b_k — число клеток после k-го деления, тогда $b_k = a2^k$. Если $k = 10$, то $b_{10} = 2^{10}a = 1024a$.

Решение практических и прикладных задач

9. Затраченная сумма соответствует сумме 24 членов геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$.

$S_{24} = \frac{2^{-2}(2^{24}-1)}{q-1} = 2^{-2}(2^{24} - 1) = 2^{-2}((2^{12})^2 - 1) = 0{,}25 \times 1\,677\,726 = 4\,194\,304$. 4 194 304 к. = 41 943,04 р. Покупка обошлась почти в 42 000 р.

Урок обобщения знаний и представления исследовательских работ (1/2 ч)

Урок желательно начать с анализа результатов теста 3 и коррекции допущенных ошибок.

К уроку обобщения желательно подготовить плакат, который позволит сравнить арифметическую и геометрическую прогрессии:

Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	
$a_{n+1} = a_n + d$, d — разность, $d = a_{n+1} - a_n$.	$b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_n \neq 0$, $q \neq 0$, q — знаменатель, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + d(n-1)$.	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
Основное (характеристическое) свойство	
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n > 1$.	$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, $n > 1$ (если все члены последовательности положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$).
Формулы суммы n первых членов	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.	$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$.
$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.	$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q}$, $q \neq 1$.

Здесь же можно провести беседу, по ходу которой повторить всё, что изучали в этой главе.

1. Первый член последовательности равен 10. Записать рекуррентную формулу для числовой последовательности, если каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с числом 3 [умноженному на число 3].

2. Как называется такая последовательность?

3. Записать для неё формулу n-го члена.

4. Найти 5-й член этой последовательности.

5. Является ли число 270 членом последовательности? Если является, то указать его номер.

6. Найти сумму пяти первых членов этой последовательности.

7. Даны первые два члена некоторой последовательности: 6; -3; ... . Написать формулу n-го члена и формулу для нахождения суммы n первых членов, если эта последовательность является геометрической прогрессией [арифметической прогрессией].

8. Как называется последовательность, у которой каждый член, начиная со второго, равен корню квадратному из произведения двух соседних с ним членов [полусумме двух соседних с ним членов]?

9. Дана прогрессия: c_1; -9; c_3; -1; ... . Найти c_1 и c_3, если прогрессия арифметическая [геометрическая, у которой $c_1 < 0$].

Дополнительно можно выполнить упражнения **520**, **521** и решить практические и прикладные задачи 6 и 5.

Оставшееся время можно посвятить обсуждению исследовательских работ.

Решение упражнений

520. Пусть x, y, z, t — искомые числа. Тогда $x + t = 11$, $y + z = 2$. По свойствам прогрессий $x + z = 2y$, $z^2 = yt$. Отсюда получаем $y = 2 - z$, $x = 2y - z = 4 - 3z$, $t = 11 - x = 7 + 3z$, $z^2 = (2 - z)(3z + 7)$, $4z^2 + z - 14 = 0$, $z_1 = -2$, $z_2 = \frac{7}{4}$.

Если $z = -2$, то $y = 4$, $x = 10$, $t = 1$, а если $z = \frac{7}{4}$, то $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $t = \frac{49}{4}$.

Ответ. $(10; 4; -2; 1)$, $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{49}{4}\right)$.

521. Пусть x, y, z — искомые числа. Тогда $x + y + z = 78$, $xz = y^2$, $4(y - x) = z - x$, откуда $z = 78 - (x + y)$ и $z = 4y - 3x$. Тогда

$$y = \frac{78+2x}{5}, \quad z = \frac{4}{5}(78 + 2x) - 3x = \frac{312}{5} - \frac{7}{5}x,$$

$$x\frac{312-7x}{5} = \left(\frac{78+2x}{5}\right)^2, \quad 39x^2 - 1248x + 6084 = 0,$$

$$x^2 - 32x + 156 = 0,$$

$x_1 = 6$, $x_2 = 26$, $y_1 = 18$, $y_2 = 26$, $z_1 = 54$, $z_2 = 26$.

Ответ. $(6; 18; 54)$, $(26; 26; 26)$.

Решение практических и прикладных задач

4. Модель — геометрическая прогрессия, у которой $q = 1{,}1$ и $b_n = b_1q^{n-1} = 2b_1$, откуда $q^{n-1} = 2$, $1{,}1^{n-1} = 2$, $n - 1 = \log_{1,1}2$, или $n - 1 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}1}$, $n - 1 \approx 7{,}5$, $n \approx 8{,}5$.

5. 1) Пусть a — длина одной стороны, тогда две другие имеют длины $a + d$ и $a + 2d$. Периметр равен $3(a + d) = 9$, откуда $a + d = 3$. Возможный вариант $a = 1$, $d = 2$ даёт длины сторон 1, 3, 5, что не удовлетворяет условию «сумма длин двух сторон больше длины третьей» $(1 + 3 < 5)$; вариант $a = 2$, $d = 1$ даёт длины сторон 2, 3, 4.

5. 2) $P = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d$, значит, $12 = 3(x_1 + d)$, $x_1 + d = 4$, $x_1 = 4 - d$, тогда $x_2 = 4$, $x_3 = 4 + d$, $x_1 + x_3 = 8$, следовательно, x_1 и x_3 могут представлять пары чисел 1 и 7; 2 и 6; 3 и 5; 4 и 4. Только две из них вместе с $x_2 = 4$ составят арифметическую прогрессию: 2, 4, 6; 3, 4, 5, но треугольник может иметь только стороны 3, 4, 5.

6. Сумма внутренних углов n-угольника равна $180^\circ(n - 2)$. Эти углы образуют геометрическую прогрессию, у которой $s = 20$, $a_n = 170$, $S_n = 180(n - 2)$. Выразим a_1 из равенства $170 = a_1 + 20(n - 1)$, $a_1 = 190 - 20n$. Имеем $180(n - 2) = \frac{190 - 20n + 170}{2} \cdot n$, $180n - 360 = 180n - 10n^2$, $10n^2 = 360$, $n^2 = 36$, $n = 6$ (так как $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$).

Контрольная работа № 3

1. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n - 1$ и условием $a_1 = 3$.
[$b_{n+1} = 4b_n + 7$ и условием $b_1 = -3$.]
Найти четыре первых члена этой последовательности.

2. В арифметической прогрессии $a_1 = -7$, $d = 3$. Найти a_{12} и сумму первых двенадцати членов этой прогрессии.
[В геометрической прогрессии $b_1 = 9$, $q = \frac{1}{3}$. Найти b_6 и сумму шести первых членов этой прогрессии.]

---

3. Найти четвёртый член геометрической прогрессии, если $b_2 = -2$, $b_7 = \frac{1}{16}$.
[Найти шестой член арифметической прогрессии, если $a_3 = 0$, $a_8 = 25$.]

4. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна -12. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.
[Произведение второго и восьмого членов геометрической прогрессии равно 36. Найти пятый член этой прогрессии.]

ГЛАВА

IV Случайные события (14/15 ч)

Предметом теории вероятностей (основы которой предстоит изучать в этой главе) является изучение количественных закономерностей, которым подчинены массовые однородные случайные события, свойства этих событий и операции над ними. Одной из основных целей изучения теории вероятностей является предвидение и прогнозирование событий в массовых случайных явлениях.

Значение теории вероятностей для научных и прикладных знаний трудно переоценить. Это было понятно ещё со времён зарождения данного раздела математики. Так, один из создателей теории вероятностей — выдающийся французский математик П.-С. Лаплас (1749—1827) — говорил: «...наука, которая началась с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческих знаний... Ведь по большей части важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами теории вероятностей».

Проблема введения в содержание общего образования отечественной школы вероятностно-статистических знаний назрела давно. Мир, каким он представлялся школьникам последних десятилетий через призму различных школьных учебников, был строго детерминированным, в нём не было места случайности. Реальная же жизнь ставит человека в вариативные ситуации, требует от него умения анализировать случайные факторы, оценивать шансы, выдвигать гипотезы, прогнозировать развитие событий и принимать решение в ситуациях неопределённости (имеющих вероятностный характер).

Стохастика — наука о случайном (включающая в себя элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики) находит применение практически во всех областях знаний: в физике, химии, биологии, экономике, социологии, лингвистике, геологии, психологии и др. В школе закладываются основы знаний и умений взрослого человека, которые в дальнейшем сформируют его мировоззрение. А мировоззрение, не содержащее вероятностно-статистических идей и представлений, является искажённым, не позволяющим адекватно понимать и оценивать окружающую природу и социальную действительность. Вероятностные законы универсальны, и именно они лежат в основе описания научной картины мира.

Стохастические концепции и закономерности, как говорил академик Б. В. Гнеденко, «должны быть знакомы буквально всем. Именно в школе должны закладываться элементы этих знаний, когда ум подвижен и идеи, сообщённые в эту пору, становятся рабочим инструментом на всю жизнь». Заметим, что элементы стохастики в школах Европы, США, Японии присутствуют более ста лет, причём овладение стохастическими знаниями и умениями начинается с младших классов.

Причины необходимости изучения стохастики в школе очевидны. Очевидны и возможности достаточно раннего начала изучения вопросов стохастики: математический аппарат, который необходим для начального её освоения, базируется на элементарных математических знаниях, умениях и навыках — навыках выполнения операций с числами, умении использовать буквенную и функциональную символику, на знании свойств простейших геометрических объектов, умениях организовывать перебор вариантов комбинаций элементов из небольшой совокупности данных, подсчитывать число этих комбинаций.

Основные понятия, с которыми учащиеся познакомятся при изучении данной главы, — это *события, элементарные события, различные виды событий (случайные, достоверные и невозможные; совместные и несовместные; независимые и зависимые), вероятность события (в классическом и статистическом понимании), сумма событий, произведение событий*. Учащиеся также познакомятся с мировоззренчески важным *законом больших чисел*, научатся решать несложные вероятностные задачи.

Основные формулы, которыми учащиеся будут пользоваться при решении вероятностных задач, следующие:

1) $P(A) = \frac{m}{n}$ — формула вероятности события A (в классическом понимании), где n — число всех возможных (элементарных, равновозможных) исходов испытания, m — число благоприятствующих событию A исходов;

2) $W(A) = \frac{M}{N}$ — формула относительной частоты события A в серии из N испытаний, где M — число наступлений события A;

3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ — формула нахождения вероятности одного из двух несовместных событий A и B;

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — формула нахождения вероятности события $\bar{A}$ — противоположного событию A;

5) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ — формула нахождения вероятности совместного наступления двух независимых событий A и B.

Учитель должен понимать, что самое корректное введение вероятностных понятий лучше всего делать на теоретико-множественной основе (так в основном и поступают авторы вузовских учебников). В учебнике для 9 класса последняя глава содержит начальные сведения из теории множеств: основные множественные понятия, символы, схемы, обозначения. Например, понятиями объединения и пересечения множеств с помощью кругов (диаграмм) Эйлера—Венна можно было бы достаточно просто проиллюстрировать операции над событиями (сумму, произведение событий). Однако авторским коллективом было принято решение (в ущерб степени корректности введения некоторых понятий теории вероятностей) сфокусировать внимание учащихся на сути случайных явлений и событий, на демонстрации применения классического и статистического определений вероятности для решения практических и прикладных задач, на развитии вероятностной интуиции. Материал же последней главы учебника «Логика. Множества» было решено дать для обобщения, систематизации и поднятия на более высокий научный уровень всех идей, методов и знаний учащихся, усвоенных ими при изучении алгебры и геометрии в основной школе. При изучении главы «Логика. Множества» учитель сможет показать аналогию в операциях над множествами и над событиями, подчеркнув тесную связь между теорией множеств и теорией вероятностей.

Вопросы теории вероятностей и статистики в наших учебниках рассматриваются в завершающей части курса, после изучения традиционных разделов алгебры. Учителя знают, что самыми трудными для учащихся в курсе алгебры являются текстовые задачи, так как для их решения (до применения знакомых формул и алгоритмов) нужно понять условие и создать математическую модель для её решения. А задачи стохастики — практически все текстовые. При этом задачи стохастики учащимся представляются намного разнообразнее, чем алгебраические, в которых они привыкли выделять несколько типов (на покупки и цены, на движение и другие процессы, на проценты и смеси). Действительно, фабула стохастических, в частности вероятностных, задач намного разнообразнее алгебраических: помимо задач с бросанием кубиков и монет, существует множество задач с другими сюжетами. Задача учителя при обучении стохастике — убедить учащихся в том, что математических моделей, с помощью которых решаются вероятностные задачи, немного. Для этого придётся решить немалое число таких задач, благо, что многие из них несложны и обсуждение их условий, создание моделей для решения можно производить достаточно быстро устно при фронтальной работе.

Учителю при обучении стохастике придётся существенно изменить стиль своей работы (в сравнении со стилем работы на уроках алгебры; возможно, отдельные приёмы обучения геометрии будут перенесены на уроки стохастики). Придётся сделать уроки более «гуманитарными»: организовывать дискуссии и обсуждения, широко применять дополнительную (не только математическую) литературу, организовывать деловые игры и т. д. Необходимо создавать в классе специальную обучающую среду, в которой важное значение будут иметь практические и лабораторные работы, эксперименты, исследования и проектная деятельность учащихся, поиск информации за пределами учебника (с привлечением Интернета), выбор инструментария для работы.

Учителю математики придётся расширить свой кругозор, углубить знания в других научных областях: в биологии, лингвистике, социологии, истории, географии и др. Связано это с тем, что на сегодняшний день формирование вероятностно-статистических представлений происходит в школе в основном лишь на уроках математики. Вероятностное мышление детей через ожидание возможных различных исходов рассматриваемых явлений природы и жизнедеятельности человека содержанием других учебных предметов практически не формируется.

Таким образом, сформулируем предметные цели изучения IV главы:

- формирование понимания вероятностных закономерностей в окружающих явлениях;
- знакомство с элементами теории вероятностей как адекватными средствами описания явлений реального мира (путём создания и изучения их стохастических моделей);
- освоение вероятностной терминологии (широко использующейся как в повседневной речи, так и в научных, популярных и публицистических текстах);
- развитие вероятностной интуиции;
- подведение к пониманию того, что анализ многих явлений может быть осуществлён не только после эксперимента, но и исходя из ряда теоретических соображений (до проведения эксперимента);
- формирование начального представления о статистической устойчивости в мире случайного, об устойчивости относительной частоты события в сериях с большим числом испытаний;
- формирование представлений о случайных, достоверных и невозможных событиях, о совместных и несовместных событиях, о зависимых и независимых событиях;

- обучение нахождению вероятностей несложных событий в классической схеме, а также обучение оценке вероятности события по результатам серии испытаний;
- формирование представления о прогнозировании относительной частоты события в серии испытаний, исходя из теоретических соображений;
- формирование умения находить в простейших случаях вероятность суммы двух несовместных событий, вероятность произведения двух независимых событий;
- обучение нахождению вероятности события, противоположного данному;
- повышение уровня математической культуры;
- формирование вероятностной интуиции и стохастического стиля мышления.

Метапредметные цели изучения главы:

- формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и современному представлению о картине мира;
- формирование понимания роли математических знаний для решения прикладных и житейских задач, задач других учебных предметов;
- демонстрация единства эмпирических и теоретических уровней познания окружающей действительности;
- демонстрация межпредметных связей математики и других учебных предметов;
- знакомство с законом больших чисел, демонстрация его воплощения в массовых явлениях окружающей действительности;
- знакомство с прогнозированием и экстраполяцией, позволяющими выявлять закономерности и получать выводы практического характера;
- обучение моделированию реальных процессов;
- ознакомление с идеями выдвижения, принятия и неприятия гипотезы (на примере гипотез о равновозможности событий, о справедливых играх и т. п.);
- обучение реальным и мыслительным экспериментам;
- обучение созданию своими руками оборудования для проведения экспериментов;
- обучение поиску альтернативных путей решения задач, выбору оптимальных способов решения;
- формирование умения оценивать правильность выполнения учебной задачи, формирование навыков самоконтроля;
- развитие умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, устанавливать причинно-следственные связи, делать умозаключения и выводы;

- обучение аргументации своих высказываний и умозаключений;
- формирование представлений о классификации объектов;
- развитие мотивов и интересов познавательной деятельности;
- обучение самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности, организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, выбору индивидуальной образовательной траектории;
- развитие устной и письменной речи;
- развитие компьютерной компетентности в области использования информационно-коммуникативных технологий.

Личностные цели обучения:

- повышение интереса к обучению;
- укрепление веры учащихся в возможности своего глубокого и осознанного овладения математикой;
- формирование готовности к саморазвитию и самообразованию;
- развитие критического мышления;
- развитие творческих способностей;
- формирование уважительного и доброжелательного отношения к мнениям других;
- освоение правил поведения в коллективе, в творческих группах; развитие чувства коллективизма.

Сформулированные цели будут конкретизироваться при изучении отдельных параграфов главы. Учитель до начала обучения школьников элементам теории вероятностей должен познакомиться с содержанием и структурой всех элементов УМК по теме, заранее подобрать наглядные модели для введения ряда понятий теории вероятностей, подготовить реальные объекты для иллюстрации решения отдельных задач. Желательно, чтобы учитель сам просмотрел несколько учебников для вузов по теории вероятностей, нашёл доступные сайты, с помощью которых можно иллюстрировать или моделировать учебный материал. Желательно также, чтобы в ходе обучения школьников теории вероятностей учитель продолжил развитие комбинаторного мышления учащихся, чему могут способствовать следующие источники:

1) научно-популярная книга Н. Я. Виленкина «Комбинаторика»;

2) пособие М. В. Ткачёвой и Н. Е. Фёдоровой «Элементы статистики и вероятность»;

3) статья М. В. Ткачёвой в журнале «Математика в школе» № 5, 2003 г. (с. 42—43) «Анализ данных в учеб-

никах Н. Я. Виленкина и др.» (в статье приводятся примеры самых разнообразных комбинаторных задач);

4) популярная брошюра А. Я. Халамайзера «Комбинаторика и бином Ньютона».

В результате изучения главы все учащиеся должны: усвоить понятие случайного события, научиться находить вероятность события в опыте с определяемым числом всех равновозможных элементарных исходов и определяемым числом благоприятствующих исходов; научиться находить относительную частоту события, понимать смысл закона больших чисел; усвоить правила нахождения вероятности суммы двух несовместных событий и произведения двух независимых событий. Эти знания учащиеся должны уметь применять при решении упражнений типа **271**, **274**, **278**, **284**, **285**, **287**, **294**, **305**, **306** (1, 2), **310**, **311** и из рубрики *Проверь себя!* (I уровень).

§ 16 События (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство с предметом теории вероятностей, с основными вероятностными понятиями: опыт (испытание), события и их виды (случайные, невозможные и достоверные; совместные и несовместные; равновозможные и неравновозможные); знакомство с различными примерами вероятностных событий.

Первый урок по теме желательно начать с вводной беседы о предмете теории вероятностей, истории её возникновения и развития, о важности её для решения прикладных задач. Для этого можно использовать материал введений к главе IV учебника и к этой главе методических рекомендаций.

Так как в повседневной речи учащихся достаточно осознанно фигурируют слова «вероятно», «маловероятно», «шансы», «пятьдесят на пятьдесят» и т. п., можно поговорить во время вводной беседы о том, что многие люди (не изучавшие теории вероятностей) неверно понимают суть понятия *вероятность события*. Можно, например, рассказать следующий анекдот.

Преподаватель на занятиях по теории вероятностей спрашивает у студентов: «Чему равна вероятность того, что, выйдя в очередной раз из дома на улицу, вы встретите динозавра?» Хороший студент говорит: «Нулю!», а прогульщик отвечает: «$\frac{1}{2}$, потому что исходов два — встречу или не встречу динозавра».

После рассказа такого анекдота следует поинтересоваться у учащихся: как они считают — кто из двух студентов прав; почему ответ второго студента ошибочен? При обсуждении ответов следует подчеркнуть, что для вычисления вероятности события находятся два типа исходов испытания: все возможные и благоприятствующие. В рассмотренной анекдотической ситуации всех возможных исходов (n) много — все выходы на улицу за жизнь человека, а благоприятствующих — ноль (динозавра никогда не встретишь — они все вымерли), т. е. $P = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$. Второй студент подсчитал не исходы испытания, а количество ситуаций: «Встречу; не встречу».

После подобных обсуждений мотивацией изучения основ теории вероятностей для учащихся станет ещё и желание не попасть впросак в реальных ситуациях, в дискуссиях, при получении информации из разных источников.

Учитель должен понимать, что понятие *события* в теории вероятностей является первичным (неопределяемым), разъясняется оно на примерах. При введении понятия *испытания* полезно использовать материал рубрики *Разговор о важном*, приведённый в конце параграфа учебника. Учащимся следует понять, что испытание (опыт, стохастический эксперимент) осуществляется при соблюдении определённого комплекса условий, который должен каждый раз строго выполняться. Если испытание проводится при другом комплексе условий, то это уже другое испытание.

Усвоение понятия *события* многим учащимся даётся непросто. Некоторые учащиеся воспринимают его в бытовом смысле, трактуя его в качестве единичного бытового события, в связи с чем путают его с понятием опыта (т. е. испытания). Нужно сразу разграничить в сознании учащихся понятия опыта (испытания, эксперимента) и события — исхода этого опыта.

В связи с этим лучше с первого же урока в качестве примеров событий не рассматривать много бытовых явлений, а концентрировать внимание на событиях, происходящих в результате опытов с простейшими вероятностными моделями: подбрасыванием игрального кубика и монеты, раскручиванием стрелки рулетки, стрельбой по мишени и т. п. При рассмотрении исходов опытов с этими объектами с первых же уроков начинает формироваться представление об *элементарных исходах* (*событиях*), которое понадобится при введении понятия вероятности события в следующем параграфе.

Формированию понятия *событие* способствует рассмотрение классификации событий по степени возможности их реализации (невозможные, достоверные и случайные события). Классификацией объектов по разным основаниям (признакам) учащиеся будут в явном виде заниматься при изучении последней главы учебника. Так что рассмотрение в неявном виде классификаций событий по рассмотренным в параграфе трём основаниям (по возможности их реализации; по возможности совмещения в одном испытании; по равно- и неравновозможности) является пропедевтикой изучения понятия классификации, имеющего большое мировоззренческое значение.

На данном этапе рассмотрения, например, классификации по основанию «степень возможности реализации» учитель может сказать: «В окружающей нас действительности других событий, кроме как достоверных, невозможных и случайных, не существует, а каждое из существующих событий обязательно относится к одному и только одному из перечисленных трёх видов».

На уроках по изучению этого параграфа (и всех следующих параграфов) следует активно использовать в устной и письменной работе соответствующие материалы рабочих тетрадей и дидактических материалов.

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, таким:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 16, п. 1	ВУ № 1—7; № 267—271; разговор о важном (с. 124)	РТ № 5	РТ № 1—3; ДМ № 1
2	§ 16, пп. 2, 3	№ 272—280	РТ № 8—10	РТ № 6, 7; ДМ № 2, 3

В результате изучения параграфа все учащиеся должны получить представления о случайном испытании, о событии и видах событий, отвечать на устные вопросы к параграфу и выполнять задания типа **271**, **274**, **278**.

§ 17 Вероятность события (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство с историей возникновения понятия вероятности; изучение понятий: вероятность события, элементарные исходы испытания, благоприятствующие исходы; введение определения вероятности события в опыте с равновозможными исходами (классическое определение) и решение простейших вероятностных задач с использованием этого определения; оценка вероятностей достоверных, невозможных и случайных событий.

В учебнике осуществлён исторический подход к введению понятия вероятности. Объяснение нового материала желательно вести с опорой на приведённые в учебнике рассуждения Паскаля, наблюдавшего за азартными играми. Более подробные высказывания Паскаля о сути понятия вероятности и способах её измерения можно найти в замечательной книге *А. Реньи «Письма о вероятности»* (или в его же трилогии «*Диалоги о математике*», куда «Письма о вероятности» входят составной частью). В этой книге автор приводит предполагаемую переписку Паскаля и Ферма, в которой зарождаются основы теории вероятностей.

После встречи в учебнике слов *азарт*, *азартные игры* можно предложить учащимся прочитать первую половину *Диалога об истории*, приведённого в конце параграфа (до последнего вопроса мальчика).

При желании (после введения понятия элементарного события) учитель может ввести понятие *пространства* (*поля*) *элементарных событий* — совокупности всех элементарных событий данного испытания.

Очень важна для всех учащихся (с практической и мировоззренческой точек зрения) аргументация верного решения упражнения **289**. Во-первых, до обсуждения решения этой задачи полезно напомнить учащимся, что речь идёт о правильной, математической монете, о которой говорилось в конце *Разговора о важном* (приведённого в конце предыдущего параграфа). Во-вторых, до решения этой задачи можно рассказать учащимся анекдот о том, как на вопрос «Что выпадет, *орёл* или *решка*, в 101-й раз, если предыдущие 100 раз выпадал *орёл*?» отвечали математик, физик и психолог (не изучавший теорию вероятностей):

— математик: «С вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет *орёл*»;

— физик: «Эксперимент показал, что должен выпасть *орёл*»;

— психолог: «Конечно, выпадет *решка*, ей же тоже хочется».

До обсуждения решения упражнения **289** полезно обсудить ответы на вопрос практической задачи 8 (приведённой в конце главы).

Распределение учебного материала по теме может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 17	ВУ; № 281—284; ДМ № 1, 4, 5	ДМ № 2, 3	РТ № 1, 2; первая половина диалога об истории (до последнего вопроса мальчика)
2		УВ; РТ № 3—5; № 285—291; ПЗ № 8; ДМ № 6, 7	ДМ № 8, 9; РТ № 6, 7	Вторая половина диалога об истории (с. 131); шаг вперёд (с. 132); ДМ № 10—12

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение вероятности события и научиться его применять при решении упражнений типа **284**, **285**, **287**.

Решение упражнений

290. 5) Карт червовой масти с чётным числом три (6, 8 и 10), т. е. $m = 3$, $n = 36$, $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

291. Указание. Перед решением задачи выяснить, сколько у куба вершин, рёбер и граней. В каждой вершине находится кубик с тремя окрашенными гранями, в середине каждого ребра — кубик с двумя окрашенными гранями, в середине грани — кубик с единственной окрашенной гранью, в центре куба — кубик без окрашенных граней.

§ 18 Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — обучение решению задач на нахождение вероятности события, в которых число всех исходов и благоприятствующих исходов испытания находится с помощью комбинаторных знаний (в частности, с помощью правила произведения).

В начале первого урока следует восстановить следующие комбинаторные знания и умения, полученные учащимися в 7 классе:

1) умение составлять таблицу вариантов для подсчёта комбинаций из элементов двух множеств;

2) умение подсчитывать число различных комбинаций из двух элементов с помощью полных и неполных графов; с помощью формулы $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число элементов множества;

3) умение организовывать подсчёт комбинаций из двух и более элементов с помощью схемы-дерева (графа-дерева);

4) знание правила произведения и умение его применять при решении задач;

5) знание того, что такое перестановка; умение находить число всех перестановок из n элементов.

Повторению элементов комбинаторики в данном объёме помогут задания 1—5 из § 18 рабочих тетрадей и вводные упражнения, приведённые в конце параграфа учебника. Можно воспользоваться также либо материалом учебника для 7 класса, либо пособием М. В. Ткачёвой и Н. Е. Фёдоровой «Элементы статистики и вероятность», либо (если названные книги отсутствуют) материалом раздела «Краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII—IX классов», помещённым в конце учебника.

Дополнительно к вводным упражнениям и заданиям рабочей тетради можно предложить задачи на применение правила произведения и задачи, которые позволят учащимся понять соотношения числа упорядоченных пар элементов и пар элементов (из того же множества) «в совокупности» (без учёта их порядка в паре). Вторая из предложенных ниже задач является пропедевтикой дифференциации понятий *размещения* и *сочетания*.

1. Сколько различных двухбуквенных кодов можно образовать с помощью букв *а*, *б*, *в*, *г*, если буквы в коде: 1) могут быть одинаковыми; 2) должны быть разными? (Ответ. 1) $4 \cdot 4$; 2) $4 \cdot 3$.)

2. В классе 25 человек. Сколькими способами можно из числа учащихся класса выбрать: 1) старосту и казначея; 2) двоих учащихся для дежурства по столовой? (Ответ. 1) $25 \cdot 24$; 2) в 2 раза меньше, чем $25 \cdot 24$, так как порядок в паре не имеет значения.)

Если в 7 классе со всеми учащимися правило произведения рассматривалось лишь для подсчёта упорядоченных пар элементов (из двух множеств), то сейчас можно со всеми учащимися рассмотреть упражнения **296**, **297**, для решения которых необходимо расширить применимость правила произведения до подсчёта упорядоченных комбинаций из трёх и четырёх элементов.

В конце первого урока для домашней работы большинству учащихся стоит предложить разобрать текст рубрики *Шаг вперёд*, сопроводив его вопросами (на которые в начале следующего урока предстоит ответить):

1) Какие тройки очков (на трёх костях — игральных кубиках) дают в сумме 9 очков? 10 очков?

2) Сколько существует вариантов получить в сумме 10 очков на трёх брошенных костях, когда появляются 6, 3 и 1 очко?

3) Сколько существует вариантов получить в сумме 10 очков на трёх брошенных костях, когда появляются 6, 2 и 2 очка?

4) Сколько комбинаций благоприятствует появлению в сумме 9 очков в результате бросания трёх игральных костей?

5) Какова вероятность того, что на трёх костях, брошенных одновременно, в сумме выпадет 10 очков? 9 очков?

В конце второго урока желательно провести проверочную работу по вариантам на 10—15 минут, используя как обязательные, например, задания 9 и 10 из рабочих тетрадей, а как дополнительные — по выбору учителя из № 9—12 дидактических материалов.

Распределение учебного материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	**Теоретический материал**	**Задания**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 18, до задачи 5	ВУ; РТ № 1—5; № 292—295; ДМ № 3, 7	№ 294 (7, 8); ПЗ № 5	РТ № 6; ПЗ № 6; ДМ № 4; шаг вперёд (с. 138—139)
2	§ 18, задача 5	УВ; № 296—300; ДМ № 5, 8	Проверочная работа: I вариант: РТ № 9 (1), 10 (1); ДМ № 10 II вариант: РТ № 9 (2), 10 (2); ДМ № 11	РТ № 7; № 301—304; ПЗ № 9; ДМ № 13—15

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться решать простейшие задачи с применением комбинаторных знаний, аналогичные задаче **294**.

Решение упражнений

294. Число всех исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$. 1) Благоприятствующий исход один: 2 и 3 очка, $m = 1$, $P = \frac{1}{36}$; 2) благоприятствующих исходов два: 2 и 3, 3 и 2, $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; 3) $m = 1 \cdot 6$ (5 очков жёлтой кости соединяются с любым из 6 очков зелёной кости), $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; 4) $m = 3 \cdot 6$ (каждое из трёх чисел жёлтой кости комбинируется с каждым из шести чисел зелёной кости), $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; 5) $m = 3 \cdot 3$, $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; 6) $m = 2 \cdot 3$, $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; 7) $m = 6$; 8) $m = 2$ (1 и 2, 2 и 1); 9) $m = 3$ (1 и 1, 1 и 2, 2 и 1); 10) $m = 2$ (5 и 6, 6 и 5); 11) $m = 3$ (4 и 6, 6 и 4, 5 и 5); 12) $m = 6$ (4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6).

295. $n = 36$. 1) $m = 2$ (1 и 5, 5 и 1); 2) $m = 3$ (1 и 4, 4 и 1, 2 и 2); 3) $m = 2$ (2 и 5, 5 и 2); 4) $m = 4$ (2 и 6, 6 и 2, 3 и 4, 4 и 3).

296. Всего трёхзначных чисел из этих трёх цифр на карточках можно образовать $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Каждая из данных комбинаций единственная $\left(P = \frac{1}{6}\right)$.

297. $n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $m = 1$ (в обоих заданиях), $P = \frac{1}{24}$.

298. $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$; 1) $m = 1$, $P = \frac{1}{216}$; 2) $m = 3$ (6, 2 и 2; 2, 6 и 2; 2, 2 и 6), $P = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

300. $n = \frac{4(4-1)}{2} = 6$ (число всевозможных пар, образованных из элементов, выбранных из четырёх данных), $m = 1$, $P = \frac{1}{6}$.

301. $n = 6$ (как в предыдущей задаче); 1) $m = \frac{3(3-1)}{2} = 3$, $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $m = 1 \cdot 3 = 3$, $P = \frac{1}{2}$.

302. $n = 6$; 1) $m = 1$, $P = \frac{1}{6}$; 2) $m = 4$ (найти с помощью графа), $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

303. $n = \frac{5(5-1)}{2} = 10$; 1) $m = \frac{4(4-1)}{2} = 6$, $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; 2) $m = 4$ (каждый из четырёх белых — с единственным чёрным), $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

304. $n = \frac{36(36-1)}{2} = 630$; 1) $m = 1$, $P = \frac{1}{630}$; 2) $m = \frac{4(4-1)}{2} = 6$, $P = \frac{6}{630} = \frac{1}{105}$.

Решение практических и прикладных задач

5. 1) $n = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, $m = 1$, $P = 0{,}001$; 2) $n = 10^4$, $m = 1$, $P = 0{,}0001$.

6. $n = \frac{70 \cdot 69}{2}$, $m = \frac{50 \cdot 49}{2}$, $P = \frac{50 \cdot 49}{70 \cdot 69} = \frac{35}{69}$.

9. $n = P_5 = 120$, $m = 1$, $P = \frac{1}{120}$.

§ 19 Сложение и умножение вероятностей (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — введение понятий: сумма двух событий, противоположные события, произведение двух событий, независимые события; обучение косвенному нахождению вероятности события в случае: 1) когда событие является суммой двух несовместных событий, вероятности каждого из которых известны; 2) когда событие является произведением двух независимых событий, вероятности каждого из которых известны (или легко находятся).

Мотивация изучения материала параграфа хорошо сформулирована во введении к параграфу. Объяснение нового материала желательно вести в соответствии с текстом учебника, закрепляя основные теоремы и формулы их применением в соответствующих упражнениях.

На одном из уроков по этой теме желательно распределить среди учащихся темы исследовательских работ.

Рассмотрение текста рубрики *Шаг вперёд* желательно провести хотя бы с учащимися, проявляющими интерес к математике (после разбора задачи 3 параграфа). Задания для проверки понимания этого текста могут быть следующими:

1) Чему равна вероятность совместного наступления независимых в совокупности событий?

2) Событие A — попадание стрелком по мишени при каждом выстреле. Стрелок трижды стрелял по мишени. Записать событие, состоящее в том, что: а) первый и третий раз стрелок попал по мишени, а во второй раз промахнулся; б) первый раз попал по мишени, а во второй и в третий раз промахнулся.

3) Допустим, что p — вероятность попадания по мишени некоторым стрелком при каждом выстреле. Найти

вероятность того, что стрелок, выстрелив по мишени 4 раза: а) попал по мишени все 4 раза; б) первые 3 раза попал, а последний раз промахнулся; в) первый и второй раз попал по мишени, а два последних раза промахнулся.

В случае наличия дополнительного времени учитель может на последнем уроке материал рубрики *Шаг вперёд* рассмотреть со всеми учащимися.

На последнем уроке по теме можно провести проверочную работу на 10—15 минут, используя задачи дидактических материалов и рабочих тетрадей. На последнем уроке следует попросить всех учащихся класса принести на следующее занятие по одной рублёвой монете и микрокалькулятор (для проведения исследовательской работы по определению относительной частоты события).

Распределение учебного материала по урокам может быть, например, таким:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 19, п. 1	ВУ; № 305 (1, 2), 306	РТ № 1—3, 4 (1—6), 5	ДМ № 1; РТ № 6, 7
2	§ 19, п. 2	УВ № 1—4, 8—10; № 305 (3), 307	РТ № 4 (7—10), 8—11	ДМ № 2—4, 8, 9; шаг вперёд (задачи 1, 2)
3		УВ № 5—7; ПЗ № 1, 4; ДМ № 10, 11	Проверочная работа: I вариант ДМ № 5 (1), 6 (1), 7 (1) II вариант ДМ № 5 (2), 6 (1), 7 (2)	ДМ № 12, 13; шаг вперёд (задачи 3, 4); ПЗ № 2

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определения понятий суммы и произведения двух событий, а также события, противоположного данному; уметь применять формулы (1)—(3) при выполнении упражнений типа **305** (2, 3), **306** (1, 2).

Решение упражнений

307. 1) Пусть событие E — попадание стрелком по мишени при одном выстреле, тогда $A = E \cdot E$, $B = \bar{E} \cdot \bar{E}$, $C = E \cdot \bar{E}$, $D = E\bar{E} + \bar{E}E + EE$ или $D = \bar{B}$; $P(E) = 0{,}8$, $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0{,}2$; $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$; $P(B) = 0{,}2 \times$ $\times\ 0{,}2 = 0{,}04$; $P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$; $P(D) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 +$

$+ 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}64 = 0{,}96$ или $P(D) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

2) $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$; $P(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{1}{6} \times \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$; $P(D) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$.

3) $P(A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$; $P(B) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$; $P(C) = P(D) = = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{49}$; $P(E) = 1 - P(B) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$; $P(F) = 1 - - P(A) = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$.

4) $P(A) = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{81}$; $P(B) = \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{324}$; $P(C) = \frac{2}{36} \times \times \frac{2}{36} = \frac{1}{324}$; $P(D) = \frac{20}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{324}$.

Решение практических и прикладных задач

1. $P = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

2. 1) $P = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$; 2) вероятность, например, того, что будут даны верные ответы на 4 первых вопроса, а на последний — неверный, равна $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{1024}$; неверным может быть ответ на любой из 5 вопросов, т. е. $P = 5 \cdot \frac{3}{1024} = \frac{15}{1024}$ (эта задача фактически на испытания Бернулли).

4. (Самая сложная в этой главе задача.) Нужно понять, что второе место в финале займёт второй игрок в том и только том случае, если в I туре они с лучшим игроком будут в разных подгруппах (т. е. один из них будет иметь один из номеров 1—4, а другой — один из номеров 5—8). Задача сводится к нахождению вероятности того, что эти игроки окажутся в разных подгруппах.

I способ. Второму по силе игроку нужно получить один из четырёх номеров той подгруппы, в которой нет лучшего игрока, т. е. для него $n = 7$, $m = 4$, $P = \frac{4}{7}$.

II способ. Число всех возможных вариантов распределения двоих игроков по восьми номерам $n = \frac{8 \cdot (8-1)}{2} = 28$. Число вариантов попадания двоих игроков (лучшего и второго по мастерству) в одну из подгрупп равно $\frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 6$, а в первую или вторую — в два раза больше, т. е. $m = 12$. Вероятность попасть этим игрокам в одну подгруппу равна $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$. Вероятность не попасть этим игрокам в одну подгруппу (вероятность противоположного события) равна $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

§ 20 Относительная частота и закон больших чисел (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство со статистическим способом нахождения вероятности события, с законом больших чисел; обучение проведению статистического эксперимента, фиксации результатов эксперимента, анализу явлений и прогнозированию развития процессов.

После анализа проверочной самостоятельной работы, проведённой на предыдущем уроке, после повторения ранее изученных понятий, восстановления вычислительных и функциональных умений (с помощью вводных упражнений и заданий 1—3 рабочих тетрадей) проводится беседа о том, что не всегда вероятность события можно найти с помощью классического определения вероятности.

После введения понятия относительной частоты события и рассмотрения задачи 1 текста параграфа желательно со всем классом провести практическую работу с подбрасыванием монеты, описанную в исследовании. Для этого все учащиеся класса разбиваются на группы по 2 человека (если в классе нечётное число учащихся, то одному из сильных учащихся порекомендовать провести всю работу самостоятельно). В тетрадях или на отдельных листках каждая группа учащихся копирует столбцы и строки первой таблицы параграфа (для 50 подбрасываний монеты) и заполняет таблицы по мере проведения эксперимента (один ученик бросает монету и объявляет результат испытания, второй фиксирует результат в таблице). После завершения серии из 50 испытаний каждый учащийся выполняет в своей тетради рисунок, аналогичный рисунку 38 учебника.

Сводную таблицу, аналогичную второй таблице параграфа, каждый учащийся также строит в своей тетради, учитывая, что в ней должно быть n заполненных строк, где n — число пар учащихся, проводивших эксперимент. Заполнение второго столбца (M) происходит одновременно всеми учащимися, когда учитель опрашивает последовательно каждую пару, задавая вопрос: «Сколько раз в вашей серии из 50 испытаний появляется *орёл*?» (Количество выпадений *орла* у каждой группы учащихся последовательно суммируется.) Третий столбец таблицы каждый учащийся заполняет самостоятельно, применяя при вычислениях микрокалькулятор.

Важно, чтобы учащиеся сами сделали вывод о приближении значения W к $\frac{1}{2}$ при увеличении числа испытаний.

Если учитель не имеет в кабинете наборов для проведения статистических экспериментов, то в домашнюю работу после первого урока следует включить задание принести на следующий урок игральные кости (по одному набору на двоих учащихся для выполнения на втором уроке исследовательской работы по упражнению **313**).

На втором уроке, после ответов на устные вопросы, желательно разобрать со всеми учащимися материал рубрики *Это интересно* (причём в слабом классе рекомендуется «вылавливать» из пруда оба раза по 100 рыб так, чтобы во второй раз среди отловленных рыб оказалось, например, 5 меченых; тогда x — число рыб в пруду найдётся из пропорции $\frac{100}{x} = \frac{5}{100}$). К этой задаче можно будет вернуться при изучении § 23, посвящённого генеральной совокупности и выборке. Фактически сейчас она является пропедевтикой изучения § 23.

После выполнения упражнений **311**, **312** следует провести исследовательскую работу, описанную в упражнении **313**.

Желательно напомнить учащимся, что на следующем уроке будет проведён тест по материалу IV главы, а также заслушаны лучшие презентации по темам исследовательских работ.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 20, до задачи 2	ВУ № 1—5; РТ № 1—3; № 308—310; исследование с бросанием монеты	№ 310	ДМ № 1—3
2	§ 20, задача 2	УВ; № 311—313; РТ № 4—6; это интересно (с. 156—157) (до задач с шарами)	№ 313; РТ № 4, 6	ДМ № 4—10; это интересно (с. 157) (задача с шарами); ПЗ № 3

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться проводить элементарные стохастические эксперименты, обрабатывать их результаты, делать выводы из полученных экспериментальных данных; должны знать определение понятия относительной частоты события в серии испытаний, понимать суть закона больших чисел и справляться с решением упражнений типа **310**, **311**.

Урок обобщения знаний и представления исследовательских работ (2/2 ч)

На первом уроке желательно провести обобщение и систематизацию знаний, полученных при изучении главы (используя материал рубрик *В этой главе вы узнали*, *Устные вопросы и задания*, *Проверь себя!*), выполнить упражнения к главе (**314—321**) и провести тестовую работу по вариантам (тест № 4 из пособия М. В. Ткачёвой «Тематические тесты. 9 класс»).

При наличии времени на этом уроке можно начать заслушивать презентации по темам *исследовательских работ*, начав с темы «Представление о геометрической вероятности». Если никто из учащихся не исследовал эту тему, желательно, чтобы учитель кратко рассказал о том, что существует ещё один способ определения вероятности (допускающий обобщение классического определения на случай, когда число всех возможных исходов испытания n бесконечно):

«Пусть, например, мы наугад отмечаем точку M внутри отрезка AB, имеющего длину L (рис. 20). Очевидно, что выбор различных точек этого отрезка — события равновозможные, несовместные и единственно возможные. Поставим задачу найти *вероятность того, что выбранная точка окажется внутри отрезка CD, принадлежащего отрезку AB*. Длина отрезка CD равна l. Общее число исходов (точки отрезка AB) и число благоприятствующих исходов (точки отрезка CD) определить нельзя (множества точек отрезков бесконечные).

Если $CD = AB$ ($l = L$), то, очевидно, вероятность искомого события будет равна 1. Естественно считать, что вероятность искомого события пропорциональна длине l отрезка CD. Вот почему за вероятность такого события принимается отношение длин данных отрезков: $P = \frac{l}{L}$.

Рис. 20

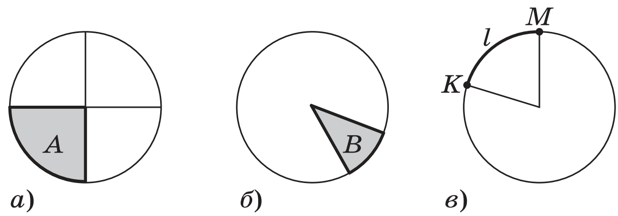


Рис. 21

Вероятность, найденная в данной задаче и в аналогичных ей задачах (при рассмотрении случайного выбора точки на площадях, в объёмах и т. п.), называется *геометрической вероятностью*».

С методической точки зрения для большинства учащихся целесообразнее вводить (иллюстрировать) понятие геометрической вероятности после решения такой задачи: «Какова вероятность того, что стрелка рулетки остановится: 1) на секторе A (рис. 21, *а*); на секторе B, имеющем площадь S_B, если площадь круга равна S (рис. 21, *б*); 2) на дуге KM, длина которой l, если длина окружности равна C (рис. 21, *в*)?»

На втором уроке следует провести коррекцию знаний учащихся по теме (после анализа результатов тестовой работы) и завершить заслушивание презентаций исследовательских работ.

На следующем уроке проводится контрольная работа по материалу главы IV. Для её проведения можно использовать задания контрольной работы № 4 из дидактических материалов, а можно воспользоваться следующими вариантами работы.

Контрольная работа № 4

1. В коробке находятся 2 белых, 4 чёрных и 5 красных шаров. [3 белых, 6 чёрных и 4 красных шара.] Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар: 1) чёрный; 2) не белый; 3) белый или красный. [1) красный; 2) не чёрный; 3) белый или чёрный.]

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно: 1) 5; 2) 6. [1) 4; 2) 3.]

3. Монету бросают 40 [60] раз. *Орёл* появляется 18 [28] раз. Какова относительная частота появления *орла* в этой серии испытаний?

4. Антон и Борис играют в шашки одну партию. Вероятность выигрыша у Антона равна 0,3, а вероят-

ность сыграть вничью — 0,4. Найти вероятность того, что Антон эту партию проиграет.
[Анна и Ольга играют в шахматы одну партию. Вероятность проиграть для Анны равна 0,2, а сыграть вничью — 0,5. Какова вероятность того, что Анна эту партию выиграет?]

5. В ящике находятся 3 белых и 4 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что появились: 1) шары разных цветов; 2) 2 белых шара.
[В ящике находятся 2 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что появились: 1) 2 красных шара; 2) шары разных цветов.]

6. Из полного набора карт (36 листов) дважды вынимают по одной карте, возвращая их сразу в колоду. Найти вероятность того, что: первый раз извлекалась карта бубновой масти, а второй раз — король чёрной масти [первый раз извлекалась дама красной масти, а второй раз — карта с числом червовой масти].

ГЛАВА

V Случайные величины (12/13 ч)

Вероятностно-статистические знания играют важную роль в общеобразовательной подготовке современного человека: без этих знаний трудно воспринимать социальную, политическую, экономическую информацию и принимать на её основе осознанные, обоснованные решения. Без стохастических знаний невозможно и полноценное изучение вопросов современной физики, биологии, химии.

Та часть содержания общего образования, которая в образовательных стандартах названа *статистикой* (и включает в себя изучение средних характеристик выборки, некоторые меры разброса элементов выборки, наглядное представление данных), является фактически лишь *описательной и наглядной статистикой*. Знаний описательной статистики достаточно для элементарного анализа данных в обозримых выборках; для нахождений некоторых характеристик совокупности данных, по которым можно судить обо всей выборке; для правильного восприятия статистической информации, получаемой из средств массовой информации; для проведения несложных массовых исследований; для понимания того, какая выборка может считаться репрезентативной, и т. п. Можно считать знания описательной статистики элементом общей культуры современного человека.

Однако понятия описательной и наглядной статистики лишь в первом приближении отражают содержание *математической статистики*, которая является составной частью теории вероятностей.

Основным понятием математической статистики является *случайная величина*, она же является основным предметом изучения данного стохастического раздела математики. Напомним определение случайной величины (которое в явном виде в учебнике не формулируется, а разъясняется на конкретных примерах): «Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до его измерения (появления) невозможно точно предсказать». В учебнике понятия случайной величины и её значений вводятся в результате рассмотрения опытов с бросанием игральной кости (здесь случайная величина X принимает одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Но если в описательной статистике чаще всего рассматриваются *дискретные случайные величины* (т. е. величины, принимающие изолированные значения; множество значений конечно или счётно), то математическая статистика занимается в основном изучением свойств *непрерывных случайных величин* (т. е. величин, принимающих любые значения из некоторого промежутка).

В действительности рассматриваемые в описательной статистике дискретные случайные величины можно условно разделить на две категории: *чисто дискретные* (как, например, оценки за контрольную работу: здесь случайная величина может принимать любое из пяти целочисленных значений 1, 2, 3, 4 и 5) и *условно дискретные*, являющиеся фактически средними значениями интервалов непрерывной случайной величины (как, например, размеры одежды: так, 48-й размер одежды присвоен середине интервала полуобхвата грудной клетки от 47 до 49 см). Учащимся, интересующимся математикой, в учебнике будет рассказано и о непрерывных случайных величинах.

Учитель должен знать, что существует и другой подход к определению непрерывной случайной величины — *функциональный* (который и используется в вузовских курсах математической статистики). При этом подходе случайную величину X рассматривают как функцию элементарных событий с областью определения — множеством всех элементарных событий. Для случайной величины можно априори (до опыта) указать лишь вероятности попадания значения случайной величины в некоторые числовые промежутки (например, $X < x$, $a \leqslant X \leqslant b$ и т. п.) и подсчитывать соответствующие вероятности: $P\ (X < x)$, $P\ (a \leqslant X \leqslant b)$ и т. п. Формулируется *закон распределения случайной величины* — соотношение, устанавливающее каким-либо образом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. К важнейшим характеристикам случайной величины относится *функция распределения* случайной величины $F(x)$ — вероятность события $X < x$, означающая, что случайная величина X в результате некоторого испытания примет значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P\ (X < x)$.

Сформулированные определения позволяют изучать дискретные и непрерывные случайные величины в одной логике. Для дискретных случайных величин закон распределения записывается либо формулой, либо в виде *таблицы распределения* по вероятностям (в случае конечного множества значений случайной величины). Относительные частоты в описательной статистике являются *прообразами вероятностей* появления того или иного значения случайной величины. Поэтому в учебнике для 9 класса, где рассматриваются небольшие по объёму «учебные» выборки, законы распределения значений случайных величин представлены в виде *таблиц распределения по частотам и относительным частотам*.

Графической формой задания закона распределения дискретной случайной величины является *полигон* (многоугольник) частот, а непрерывной — *гистограмма*. Желательно, чтобы как можно чаще рассматривались и анализировались на уроках выборки с большим числом элементов (более 50), распределение значений в которых близко к *нормальному распределению*. Для таких выборок полигоны частот (относительных частот) будут по виду приближаться к виду кривой нормального распределения (имеющей форму перевёрнутого колокола). По графическим иллюстрациям удобно изучать свойства рассматриваемой случайной величины (соотносить среднее значение с медианой совокупности, определять размах, ощущать дисперсию).

Помимо обозначенных в стандартах понятий, обязательных для изучения в данном разделе (генеральная совокупность и выборка, мода, медиана, среднее, размах, дисперсия), в учебнике (как необязательные — в рубриках *Шаг вперёд*) рассматриваются также понятия *математическое ожидание*, *квартили*, *корреляция*, *нормальное распределение* значений случайной величины. С нашей точки зрения, представления об этих понятиях уже могут быть сформированы у учащихся данной возрастной группы (и в силу достаточной математической базы для их введения). С другой стороны, эти понятия помогут укрепить внутрипредметные связи всех стохастических разделов курса и расширить стохастический тезаурус учащихся.

Предметными целями изучения главы V являются:

- обучение сбору, анализу и наглядному представлению статистических данных;
- формирование умения *читать* готовые таблицы и диаграммы, видеть за ними конкретные явления с присущими им закономерностями;
- формирование представлений о случайной величине, значениях случайной величины и законе распределения значений случайной величины (по вероятностям, частотам и относительным частотам);
- обучение заданию закона распределения значений случайной величины в виде таблицы;
- обучение наглядному представлению распределения значений случайной величины в виде полигонов частот, относительных частот, вероятностей;
- обучение преобразованию форм представления статистических данных;

- формирование понятий центральных тенденций выборки: моды, медианы, среднего арифметического; обучение вычислению этих центральных тенденций в случаях представления значений случайной величины в виде ряда, таблицы, полигона;
- формирование понятий мер рассеяния данных выборки: размаха, дисперсии; обучение вычислению этих мер рассеяния в случаях представления данных в виде ряда, таблицы, полигона;
- формирование представлений о генеральной совокупности и репрезентативной выборке, о выборочном методе;
- формирование представления о математике как о методе познания действительности;
- развитие навыков устных, письменных и инструментальных вычислений;
- развитие умений применять изученные знания, результаты и методы для решения прикладных и практических задач, задач смежных дисциплин с использованием (при необходимости) компьютерных технологий.

Метапредметные цели изучения главы:

- знакомство с элементами статистики как адекватным средством описания явлений реального мира и окружающей действительности (путём построения и изучения их стохастических моделей);
- обучение выбору способа представления статистических данных с учётом целей, для которых они требуются;
- формирование умения выдвигать гипотезы развития массовых явлений;
- развитие элементов стохастического мышления;
- развитие мотивов и интересов познавательной деятельности;
- развитие умений планировать пути достижения цели (в том числе альтернативные), осуществлять контроль и коррекцию своей деятельности;
- формирование умений определять понятия, создавать обобщения, устанавливать причинно-следственные связи, делать выводы;
- формирование умений создавать, применять и преобразовывать модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
- развитие умения работать с учебными текстами и текстами средств массовой информации;
- развитие умения организовывать учебное сотрудничество.

Личностные цели изучения главы:

- формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

- формирование ответственного отношения к учению и к самообразованию;
- формирование уважительного и доброжелательного отношения к сверстникам и взрослым, к их мнениям; готовности вести диалог и достигать в нём взаимопонимания — формирование коммуникативной компетенции.

В результате изучения главы все учащиеся должны уметь отвечать на устные вопросы, приведённые в конце параграфов, а также справляться с упражнениями типа **323, 327, 328, 333, 340, 341, 344—347, 353, 354, 357.**

§ 21 Таблицы распределения (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — введение понятия случайной величины, знакомство с представлением закона распределения значений случайной величины в виде таблицы; обучение составлению таблиц распределения значений случайной величины (по вероятностям, частотам, относительным частотам); знакомство с историей возникновения и развития описательной статистики.

На первом уроке по изучению темы проводится краткая беседа, разъясняющая понятие случайной величины на конкретных примерах (за основу можно взять текст введения к главе), из которой учащиеся должны осознать, что с этим понятием они фактически уже знакомы. После разбора задач 1 и 2 текста параграфа выполняются соответствующие упражнения из учебника, дидактических материалов и рабочих тетрадей.

Ко второму уроку можно одного из учащихся попросить подготовить доклад об истории развития описательной статистики (за основу взять материалы *Диалога об истории*, приведённого в конце параграфа). Сам учитель может дополнить этот доклад следующей информацией:

«Можно считать, что у истоков статистики находился Древний Китай, в котором ещё за две тысячи лет до нашей эры народонаселение исчислялось по полу и возрасту, собирались сведения о состоянии промышленности и сельского хозяйства. В Древнем Риме собирались сведения о численности населения и имуществе граждан. Переписи населения в Древнем Риме проводились регулярно — до нас дошли сведения о 36 таких мероприятиях. С одной из таких переписей связано начало нашего летоисчисления: в Евангелии сказано, что рождение Иисуса Христа (Рождество Христово, от которого идёт отсчёт нашего летоисчисления) пришлось на время переписи населения в Римской империи. Описание имущества и населения аббатств, епископств, графств и т. п. в Европе Средних веков также свидетельствует о многолетнем существовании начал описательной статистики.

Представление статистических данных в виде таблиц появилось в России в первой половине XVIII в. Стали тогда же применять анкеты по изучению производительных сил в государстве, стали впервые использоваться выборочный и некоторые другие методы статистики.

Первое экономико-статистическое обозрение России было составлено *И. К. Кириловым* (1695—1737) — русским учёным-географом и государственным деятелем. В 1760 г. *М. В. Ломоносов* (1711—1765) разработал *Академическую анкету* с 30 вопросами для сбора статистических данных, которая стала основой формирования отечественной экономической статистики.

Центральное статистическое управление (ЦСУ) как единый, общегосударственный статистический орган России было создано 17 сентября 1918 г.»

Учитель должен понимать, что в приводимых в учебнике (и в данном пособии) исторических справках о статистических опросах (сборе информации) заложена пропедевтика понятия *классификации* объектов по разным признакам (основаниям).

При желании (и наличии времени) на базе упражнений **330, 331** можно организовать на уроке исследовательскую работу по выявлению частотного распределения букв в русскоязычных текстах (ниже в решениях упражнений приводятся достаточно точные частотные данные).

К следующему уроку нужно попросить учащихся принести транспортиры (для построения круговых диаграмм).

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 21, до задачи 3	ВУ; РТ № 1, 2; № 323—326; ДМ № 2, 3, 6; РТ № 3	ДМ № 4, 6 (2)	ДМ № 5, 7
2	§ 21, задача 3; диалог об истории (с. 171)	УВ; № 327—330; ДМ № 8, 9; РТ № 4—7	РТ № 6, 7	История статистики (материалы из данного пособия); № 331; ДМ № 10

В результате изучения параграфа все учащиеся должны получить представление о случайной величине и табличном способе представления её значений; должны познакомиться с историей статистики (историей переписи населения в России); должны научиться представлению значений случайной величины в виде таблиц распределения по вероятностям, по частотам и относительным частотам при выполнении упражнений типа **323**, **327**, **328**.

Решение упражнений

330. Учащиеся должны получить таблицу, близкую по значениям относительных частот к значениям следующей таблицы (полученной компьютером после анализа большого объёма текстов на русском языке):

А	Б	В	Г	Д	Е (Ё)	Ж	З
0,087	0,015	0,042	0,014	0,026	0,081	0,008	0,018
И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0,075	0,013	0,035	0,043	0,033	0,064	0,093	0,034
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч
0,055	0,055	0,063	0,029	0,004	0,009	0,005	0,013
Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0,008	0,005	0,001	0,021	0,019	0,002	0,010	0,022

Если закодированный текст не имеет пробелов, т. е. реальные пробелы между словами также закодированы некоторым числом, то распределение букв и пробелов выглядит иначе. Приведём таблицу их распределения по относительным частотам (в порядке уменьшения частот) из книги А. М. Яглома и И. М. Яглома «Вероятность и информация» (с учётом неразличимости букв *е* и *ё*, а также букв *ь* и *ъ*).

Пробел	О	Е, Ё	А	И	Т	Н	С
0,175	0,090	0,072	0,062	0,062	0,053	0,053	0,045
Р	В	Л	К	М	Д	П	У
0,040	0,038	0,035	0,028	0,026	0,025	0,023	0,021
Я	Ы	З	Ъ, Ь	Б	Г	Х	Й
0,018	0,016	0,016	0,014	0,014	0,013	0,012	0,010
Ч	Ж	Ю	Ш	Ц	Щ	Э	Ф
0,009	0,007	0,006	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002

§ 22 Полигоны частот (1/1 ч)

Цели изучения параграфа — повторение ранее известных способов наглядного представления данных (в виде линейных, столбчатых и круговых диаграмм) и знакомство с новым способом представления распределения значений случайной величины по частотам (и относительным частотам) — с помощью полигона частот.

Построение линейных и столбчатых диаграмм у учащихся в 5—6 классах не вызывало проблем. Не вызовет сложностей и обучение построению и чтению полигонов частот. Однако построение и чтение круговых диаграмм у многих учащихся вызывает затруднения. Поэтому до построения распределения в виде круговой диаграммы (например, в задании 5 из рабочих тетрадей), после повторения понятия процента, следует повторить разбиение числа (величины) в заданном процентном соотношении. Делать это можно в ходе решения, например, таких задач:

1. Сто рублей распределить между тремя детьми в отношении 2 : 3 : 5.

2. Прямой угол разделён двумя лучами, выходящими из его вершины, на три угла, причём первый составляет 15% этого угла, второй — 40%. Найти величину третьего угла.

В начале урока выполняются вводные упражнения учебника и задания 1, 2 из рабочих тетрадей. В классе решаются первые номера из упражнений **332—335**, из рабочих тетрадей задания 3—6, из дидактических материалов задания 3, 4. Для домашней работы предлагаются вторые номера из упражнений **332—335** и задание 6 из дидактических материалов. Остальные задания из данных пособий используются на этом и следующих уроках как дополнительные и для самостоятельной работы.

В заключительной части урока желательно, чтобы учащиеся ответили на устные вопросы, приведённые в конце параграфа.

Интересующихся математикой учащихся познакомить с понятием *корреляции*, предложив им для самостоятельного чтения (в классе или дома) материал рубрики *Шаг вперёд*. В домашнюю работу таким учащимся можно включить задание придумать примеры прямой, обратной и криволинейной корреляционных зависимостей величин.

При желании текст учебника перед примером о разбиении упорядоченной совокупности на классы может быть дополнен (уточнён) информацией, являющейся корректно сформированными условиями разбиения на классы (разбиения на классы совокупности значений *дискретной* случайной величины; заметим, что аналогично формулируются условия для разбиения на интервалы значений *непрерывной* случайной величины).

Условия:

1) классы не должны пересекаться (т. е. иметь общие элементы);

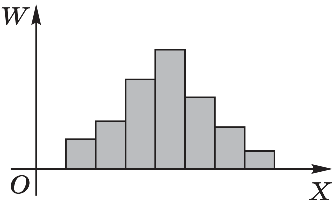


Рис. 22

2) классы должны включать в себя все значения совокупности;

3) классы должны иметь одинаковую длину (допускаются отличия в длинах крайних классов);

4) классы не должны иметь «пробелов».

Заметим, что если наглядным представлением распределения значений случайной величины (изолированных дискретных значений и дискретных значений, сгруппированных по классам) является столбчатая диаграмма (аналогичная той, которая изображена на рисунке 49 учебника), то наглядным представлением распределения значений непрерывной случайной величины, разбитой на интервалы, является *гистограмма* — столбчатая фигура, не имеющая «просветов», «зазоров» между столбцами (см., например, рис. 22).

В конце урока желательно вместе с учащимися сделать вывод о том, какие преимущества даёт полигон частот. С его помощью легко находятся: наибольшее и наименьшее значения выборки; значения, встречающиеся чаще других (пропедевтика понятия *моды*); наибольшая разница между элементами (пропедевтика понятия *размаха*); часть упорядоченной выборки, в которой сосредоточена большая часть элементов; симметрия выборки (если она есть) относительно какого-либо элемента; «выбросы» значений (сильно отклоняющиеся от остальных значений) и т. п.

При наличии времени можно в классе рассмотреть диалог рубрики *Это интересно* и рассказать о некоторых примерах использования комуляты: при определении спроса на определённую продукцию (подсчитывая накопительные частоты продаж); для определения проходного и полупроходного баллов ЕГЭ абитуриентов при поступлении на конкретные факультеты вузов (выстраивая выборки значений баллов от большего к меньшему) и т. п.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны выполнять построение полигонов частот в упражнениях типа **333**, а также должны научиться анализировать информацию, представленную в виде полигона частот (относительных частот) значений случайной величины (в заданиях типа упражнения 4 из дидактических материалов).

Решение упражнений

336. Выборку можно разбить на классы, например длиной 10 лет. Тогда таблица распределения возрастов жильцов дома по частотам будет иметь следующий вид:

Классы (число лет)	0—9	10—19	20—29	30—39	40—49	50—59	60—69	70—79	80—89
Частота M	22	12	12	15	8	7	5	4	1

§ 23 Генеральная совокупность и выборка (1/1 ч)

Цели изучения параграфа — формирование представления о репрезентативной выборке из генеральной совокупности; обучение расчёту числа элементов определённого признака в генеральной совокупности по результатам анализа репрезентативной выборки; знакомство с выборочным методом.

Рассказ учителя о соотношениях признаков в генеральной совокупности и репрезентативной выборке следует дополнить сообщением о том, что каждый из учащихся неоднократно пользовался информацией, полученной специалистами в разных областях на основе обследования репрезентативных выборок. Например, надпись на пачках сигарет о вреде курения сделана на основании обследования здоровья большого количества людей, выбранных случайным образом. Это обследование показало, что продолжительность жизни курящих людей в среднем на 20 лет меньше, чем у некурящих. Рекомендации по применению того или иного лекарства при определённом заболевании основаны на результатах проверки эффективности этого препарата на экспериментальной группе людей, составленной по принципу репрезентативной выборки, и т. д.

Существуют способы, основанные на законе больших чисел, позволяющие гарантировать достаточную репрезентативность созданной выборки. Таким способом, в частности, является *метод случайного выбора* (выборочный метод) элементов генеральной совокупности (когда каждый её элемент имеет равный с другими элементами шанс попасть в выборку). На выборочном методе в производстве основан контроль качества продукции.

Объяснение нового материала можно провести в соответствии с текстом параграфа, уделяя особое внимание обсуждению причин репрезентативности и нерепрезентативности выборки в упражнениях **337, 338**. После рассмотрения задачи 1 текста параграфа выполнить в классе упражнения **339** и **341** (дополнительно ПЗ № 1—3; задания 4, 5 из рабочей тетради и задание 1 (1) из дидактических материалов). Для самостоятельной работы в классе (по вариантам, с проверкой в классе) можно предложить № 3 (I вариант) и № 4 (II вариант) из дидактических материалов. В домашнюю работу обязательно включить изучение материала рубрики *Это интересно*; ответы на устные вопросы и задания; упражнения **340, 342**; № 1 (2) и 5 из дидактических материалов.

Учитель может рассказать учащимся анекдот, заставляющий задуматься о том, какие исследования вообще стоит производить и как с помощью «якобы статистики» можно «доказать» ложные или парадоксальные утверждения (не зря английский премьер-министр XIX в. Б. Дизраэли говорил: «Существуют три вида лжи: простая ложь, наглая ложь и статистика»). Анекдот такой: «Средства массовой информации по результатам первого всемирного опроса населения (которое отвечало на вопрос «Счастливы ли вы?») сообщили, что россияне — самые счастливые люди на планете. А по результатам повторного аналогичного опроса оказалось, что россияне — самые несчастные люди на Земле. Позже выяснилось, что первый опрос проводился в воскресенье, а второй — утром в понедельник».

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь из предложенных выборок отобрать ту, которая наилучшим образом представляет генеральную совокупность (т. е. должны справляться с упражнениями типа **337**) и находить числовые значения исследуемого признака в генеральной совокупности, анализируя данные выборки в задачах типа **340, 341**.

§ 24 Центральные тенденции (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — обучение нахождению центральных тенденций выборки (моды, медианы, среднего); формирование представления о том, какое из центральных значений наилучшим образом может представлять совокупность данных.

Измерение центральной тенденции выборки значений случайной величины состоит в выборе одного числа, которое *наилучшим образом* описывает все значения выборки (все значения признака из имеющегося набора данных), является *типичным значением*, типичным представителем элементов выборки. Центральная тенденция несёт в себе концентрированную информацию обо всей выборке, позволяет оперативно сравнивать между собой несколько выборок (описывающих один и тот же признак, свойство, явление). Естественно, оценивая выборку одной из центральных тенденций, упускается информация о распределении значений случайной величины по частотам, о разбросе данных в выборке, о плотности их распределения в совокупности (об оценке двух последних характеристик выборки будет рассказано в следующем параграфе учебника).

На первом уроке (после повторения с помощью устных вопросов к предыдущему параграфу, вводных упражнений к изучаемому параграфу и заданий 1—4 из рабочей тетради) проводится вводная беседа о том, что все учащиеся в повседневной жизни нередко дают оценку выборкам различных значений случайной величины с помощью одного числа (или характеристического свойства). Например, нередко говорят о своих *средних* оценках по разным учебным предметам (на основании которых им будут выставлены четвертные или годовые оценки). Зная *моду* на определённую ширину брюк в сезоне, большинство молодых людей приобретают и носят брюки именно этой ширины. С понятием *медианы* все школьники знакомы из курса геометрии; медианой также называют, например, среднюю линию трассы (т. е. понятие медианы у всех ассоциируется с делением чего-то на две равные части). Далее сообщить о том, что в статистике эти три термина используются для определения центральных характеристик совокупности данных. Можно предложить учащимся высказать предположение о том, какое число в выборке 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5 они бы назвали *модой*, а какое — *медианой* этой выборки. После этого попросить найти *среднее* арифметическое этой совокупности. Затем ввести (в соответствии с тестом учебника) принятые в статистике определения понятий моды, медианы и среднего.

При желании учитель может показать формулы для нахождения медианы упорядоченного ряда для случаев нечётного и чётного числа элементов в выборке:

— если число членов N упорядоченной выборки нечётно, то $\mathrm{Me} = X_{\frac{N+1}{2}}$;

— если число членов N упорядоченной выборки чётно, то $\mathrm{Me} = \frac{1}{2}\left(X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}\right)$.

На первом уроке следует ввести понятия всех трёх рассмотренных в учебнике центральных тенденций (рассмотреть материал параграфа до задачи 2) и обязательно поговорить о том, что не каждую выборку следует формально характеризовать той или иной центральной тенденцией. В подтверждение этого следует рассмотреть пример выборки (5), приведённой в конце параграфа.

На втором уроке отрабатывается навык вычисления моды, медианы и среднего для учебных выборок (с помощью упражнений учебника, дидактических материалов и рабочих тетрадей) и разбирается задача 2 текста параграфа. На этом уроке желательно провести распределение тем исследовательских работ (из списка, приведённого в конце главы).

На третьем уроке желательно организовать нахождение центральных тенденций в достаточно объёмных выборках (для этого подойдут, например, данные из задачи 3 § 21, из упражнений **328**, **329**; выборка значений размеров обуви мальчиков из первой части § 22, из упражнения **335**, из задачи 1 § 23, из упражнения **341**). Все эти выборки имеют распределения, близкие к *нормальному распределению* величин, встречающемуся очень часто в окружающей нас действительности. Поэтому желательно после решения указанных упражнений со всем классом изучить материал рубрики *Это интересно*. Материал рубрики *Шаг вперёд*, посвящённый связи понятий среднего арифметического и *математического ожидания*, следует предложить учащимся, интересующимся математикой, разобрать самостоятельно в классе или дома. На этом уроке желательно провести проверочную самостоятельную работу по материалу § 22—24 (на 15 минут).

При желании (на втором или третьем уроке по теме) учитель может рассказать о некоторых свойствах среднего значения выборки.

Свойство 1. Среднее есть единственная мера центральной тенденции, для которой сумма отклонений всех значений равна нулю: $\sum(X - \bar{X}) = 0$ (предварительно нужно ввести понятие отклонения значения выборки X_i от её среднего значения $\bar{X}$ — оно равно $X_i - \bar{X}$).

Свойство 2. Если каждое значение выборки увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то её среднее значение также увеличится (уменьшится) на это число.

Свойство 3. Если каждое значение выборки умножить на некоторое число a, то среднее значение новой выборки будет равно $a\bar{X}$, где $\bar{X}$ — среднее значение исходной выборки.

Последнее свойство имеет большое практическое значение при переводе физических величин выборки из одной системы мер в другую. Например, если данные выборки приведены в граммах и найдено их среднее значение, то среднее значение той же выборки данных, переведённых в килограммы, будет иметь среднее значение в 1000 раз меньше прежнего.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 24, до задачи 1 и последние четыре абзаца параграфа	ВУ; № 343, 344, 346; ДМ № 1 (1—4), 2	ДМ № 1 (3), 2 (3)	РТ № 1—4, 6—8
2	§ 24, задача 2	УВ; № 345, 347, 348; РТ № 5, 9	ДМ № 2 (3); РТ № 9 (3)	ДМ № 5, 8
3	Это интересно (с. 193)	№ 349—352; построить полигоны частот данных в № 341, 329	Самостоятельная работа: I вариант ДМ № 1 (5), 4 (2); РТ № 11 (2) II вариант ДМ № 1 (6), 4 (3); РТ № 11 (1)	ДМ № 6, 7, 9; это интересно (с. 193)

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться находить моду, медиану и среднее значение выборки в упражнениях типа **344—347**; должны понять, зачем вводятся в статистике понятия центральных тенденций и для каких совокупностей эти характеристики не отражают реальные тенденции значений выборки.

§ 25 Меры разброса (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — формирование представлений о мерах разброса статистических данных; обучение нахождению размаха совокупности данных, отклонения от среднего и дисперсии выборки.

Изучение материала следует проводить в соответствии с его изложением в учебнике. На первом уроке при желании (и наличии времени) учитель может сразу после оценки и сравнения выборок с помощью *размаха* рассмотреть материал рубрики *Шаг вперёд 1* со всем классом. Не отрабатывая навыка нахождения квартилей и квартильного размаха, можно всё же предложить учащимся в классе найти эти величины для следующих выборок:

1) −5, −1, −1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 8, 10;
(Ответ. Q_2 = Me = 1; $Q_1 = 0$; $Q_3 = 3$; $Q_3 - Q_1 = 3$.)
2) 4, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 12.
(Ответ. $Q_2 = 8{,}5$; $Q_1 = 7{,}5$; $Q_3 = 9$; $Q_3 - Q_1 = 1{,}5$.)

Если материал рубрики *Шаг вперёд 1* на первом уроке не рассматривается, то на этом уроке стоит ввести понятие дисперсии и рассмотреть решение задачи 1 текста параграфа. Если же часть первого урока будет посвящена понятию *квартили* (на изучение темы отводятся три урока), то изучению дисперсии посвящается весь второй урок, а на третьем уроке решаются прикладные задачи 4—5, рассматривается материал рубрики *Шаг вперёд 2* и выполняется проверочная самостоятельная работа по теме. Содержание этой работы может быть таким: *I вариант*: дидактические материалы № 1 (1), 6 (1); *II вариант*: дидактические материалы № 1 (2), 6 (2).

Распределение учебного материала (при 2 ч):

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 25, до задачи 2	ВУ; № 353—357; ДМ № 2—5; РТ № 3—7	РТ № 6, 7	Шаг вперёд (с. 201); РТ № 1, 2, 8
2	§ 25, задача 2	УВ; № 358—360; ДМ № 7; РТ № 8; ПЗ № 4	РТ № 8; проверочная работа (на 15 мин)	№ 361—362; шаг вперёд (с. 202); ДМ № 8, 9; ПЗ № 5

Для проверки усвоения материала рубрики *Шаг вперёд 2* можно задать вопросы: «Почему в статистике для определения степени разброса данных чаще пользуются средним квадратичным отклонением, а не дисперсией?», «Как связаны дисперсия и среднее квадратичное отклонение?», «Как связаны изменения плотности значений случайной величины около среднего значения и величина среднего квадратичного отклонения?».

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться находить размах и дисперсию выборки при выполнении упражнений типа **353, 354, 357**.

Урок обобщения знаний и представления исследовательских работ (2/2 ч)

После анализа проведённой накануне самостоятельной работы первый урок следует посвятить повторению и обобщению знаний, полученных при изучении главы. Повторению материала будут способствовать: перечень усвоенных знаний и умений из рубрики *В этой главе вы узнали* (приведённый в конце главы), а также упражнения к главе **363—366** и из рубрики *Проверь себя!*.

В конце первого урока провести тест № 5, а на втором уроке организовать коррекцию знаний.

Заслушать презентации по темам исследовательских работ на первом и втором уроках.

Контрольную работу по теме провести с помощью текста контрольной работы № 5 из дидактических материалов или с помощью предложенных ниже заданий.

Контрольная работа № 5

1. Составить таблицу распределения по относительным частотам значений случайной величины X, задаваемой частотным распределением:

X	–2	0	1	2	3
M	1	1	3	4	1

[

X	–1	1	3	4
M	1	2	3	2

]

Построить полигон относительных частот значений случайной величины X.

2. Найти среднее, медиану, моду и размах выборки значений случайной величины X:
3, –4, 2, –2, 1, 0, 3, 0. [–1, –5, 3, 0, 5, 4, –1, –5, 1.]

3. Найти дисперсию выборки:
25 см, 26 см, 23 см, 26 см. [18 г, 19 г, 13 г, 22 г.]

4. Измерив рост 30 девятиклассников [девятиклассниц], результаты занесли в таблицу:

170	171	176	168	179	172
178	175	161	174	167	177
165	170	184	172	171	169
178	168	171	163	175	180
173	176	174	183	173	177

[

160	165	161	169	166	160
168	163	156	162	173	168
165	152	160	162	163	169
162	169	171	158	169	179
170	161	166	168	164	165

]

Сгруппировав данные по классам 160—164, 165—169, ..., 180—184 [150—154, 155—159, ..., 175—180], представить частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью: 1) таблицы частот; 2) полигона частот.

ГЛАВА

VI Множества. Логика (16/18 ч)

Сразу отметим, что эта глава не ставит своей целью изучение основ теории множеств и математической логики. В неявном виде представлениями и понятиями этих двух разделов математики учащиеся пользовались на протяжении изучения всего курса математики. Правильности и логичности высказываний, обоснованию своих утверждений, умению делать выводы, обобщать, систематизировать и классифицировать, находить в простейших случаях объединение и пересечение множеств школьники учились на занятиях практически по всем учебным предметам. При изучении данной главы все учащиеся познакомятся со строгими определениями основных понятий логики и теории множеств, часть из которых уже им знакома на интуитивном уровне. Они познакомятся с символикой этих двух разделов математики; поймут, что некоторыми символами они уже неоднократно пользовались (например, символами записи числовых промежутков; знаком фигурной скобки слева от уравнений или неравенств, обозначающим фактически задачу нахождения *пересечения* множеств корней уравнений или решений неравенств, входящих в систему). Окончательно поймут, почему после решения одних уравнений обязательно делать проверку найденных корней, а после решения других не обязательно (с понятиями равносильных и неравносильных преобразований учащиеся знакомились в неявном виде). Учащиеся, интересующиеся математикой, найдут в учебнике дополнительные сведения из теории множеств и логики высказываний и при желании смогут углубиться в изучение истории и теории этих разделов (что, возможно, найдёт отражение в результатах их исследовательских работ). Краткие исторические сведения о зарождении и развитии этих разделов математики учитель сообщит всем учащимся на уроках (некоторые из них он найдёт в данном пособии).

В курсах алгебры и геометрии учащиеся знакомились с формулировками (и доказательствами) многих теорем. Иногда формулировали и доказывали обратные теоремы, использовали при доказательстве отдельных утверждений *метод от противного*. Однако логику формулировок прямых и обратных теорем, их взаимосвязь и суть доказательства многие учащиеся не понимали. В этой главе будут в явном виде показаны принципы конструирования теорем прямых, обратных и противоположных; будет объяснено, почему доказательство любой теоремы можно заменить доказательством теоремы, противоположной обратной (на чём и основан метод доказательства *от противного*).

Завершит главу материал, интегрирующий знания учащихся в алгебре и геометрии (изложенный таким образом, чтобы понятия логики и теории множеств использовались при его изучении). Это вопросы, связанные с записью уравнений прямой и окружности (традиционно в математике рассматривающиеся в разделе, называемом *аналитической геометрией*), а также с изображением множеств точек на плоскости, удовлетворяющих определённым уравнениям, неравенствам и системам. Эти вопросы в стандартах образования включены в содержание курса алгебры основной школы. В нашем учебнике этот материал мы используем, в частности, с целью демонстрации глубоких внутрипредметных связей в курсе алгебры (в данной главе уравнения и неравенства рассматриваются как предложения с переменными), а также межпредметных связей алгебры и геометрии.

Предметные цели изучения VI главы:

- знакомство с понятиями множества и его элементов, пустого множества; со способами задания множества; с понятиями подмножества, разности множеств, дополнения множества до другого множества, пересечения и объединения множеств;
- формирование начальных умений в нахождении объединения и пересечения множеств (в частности, множеств точек на координатной плоскости), разности двух множеств; умения переходить от задания множества с помощью характеристического свойства к перечислению или описанию его элементов;
- демонстрация расширения (на основе дополнений) числовых множеств от множества натуральных чисел до множества всех действительных чисел; иллюстрация этого расширения с помощью кругов Эйлера;
- разъяснение понятий системы уравнений (неравенств) и совокупности уравнений (неравенств) с привлечением понятий теории множеств;
- введение понятий: высказывание, отрицание высказывания, истинное и ложное высказывания, предложение с переменной, множество истинности высказывания;
- знакомство с символами общности и существования;
- формирование умения опровергать высказывания вида $(\forall x)\ p(x)$ с помощью контрпримера;
- обучение выделению в формулировках теорем условия и заключения; конструированию теоремы, обратной данной;

- знакомство с понятиями необходимых и достаточных условий в формулировках теорем, с конструированием противоположных теорем; разъяснение сути доказательства методом от противного;
- введение понятий следования и равносильности предложений на языке математической логики; конкретизация этих понятий для уравнений, неравенств и их систем; обобщение методов решения уравнений и неравенств;
- систематизация видов преобразований уравнений (неравенств) и их систем, приводящих к равносильным уравнениям (неравенствам) и системам;
- обучение нахождению расстояния между двумя точками, заданными своими координатами;
- формирование представления об уравнении фигуры;
- формирование умений записи уравнений окружностей и прямых;
- формирование умения находить множества точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнениям с двумя неизвестными и их системам, неравенствам и системам неравенств с двумя неизвестными;
- развитие умений точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии, проводить классификации и логические обоснования математических утверждений;
- развитие функционально-графических умений;
- формирование умения моделировать с помощью языка алгебры, логики и теории множеств геометрические задачи, умения исследовать построенные модели и интерпретировать полученный результат графическими образами.

Метапредметные цели изучения главы:

- создание представления об универсальности языка теории множеств и логики высказываний;
- установление межпредметных связей математики с другими учебными предметами средствами теории множеств и логики;
- формирование умений определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, устанавливать причинно-следственные связи, строить отрицания высказываний, проводить цепочки логических рассуждений, делать умозаключения и корректные выводы;
- развитие умения применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и прикладных задач.

К личностным целям изучения главы относятся:

- формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

- формирование коммуникативных компетенций: умений организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителями и сверстниками, работать индивидуально и в группе; формирование осознанного уважительного и доброжелательного отношения к другому человеку, к его мнению.

В результате изучения главы VI все учащиеся должны уметь отвечать на устные вопросы, приведённые в конце параграфов, справляться с упражнениями типа **367**, **370**, **371**, **373**, **374**, **376**, **387—390**, **397—401**, **420**, **422**, **424**, **433**, **437**, **439**, а также с заданиями рубрики *Проверь себя!* (I уровень).

§ 26 Множества (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство с начальными понятиями теории множеств: множество и его элементы, пустое множество, принадлежность элемента множеству, подмножество, характеристическое свойство элементов множества, разность множеств, дополнение до множества, пересечение и объединение множеств; введение и использование множественной символики при действиях с множествами; обучение использованию кругов Эйлера для иллюстрации множественных понятий; формирование начальных умений в нахождении разности множеств, дополнения до множества, объединения и пересечения множеств (заданных либо перечислением элементов, либо характеристическим свойством); разъяснение понятий системы и совокупности уравнений (неравенств) на языке теории множеств; знакомство с историей создания теории множеств и её значением для всех разделов математики.

К материалу этого параграфа хочется предложить шутливый эпиграф: «Математики до сих пор верят, что пересечение двух плоских шуток даёт одну тонкую».

Теория множеств является одной из основ почти всех математических дисциплин. В 1949 г. *Николя Бурбаки* (под этим псевдонимом работала большая группа французских математиков) писал: «Все математические теории можно рассматривать как расширения общей теории множеств. Я утверждаю, что на этом фундаменте можно построить всё здание сегодняшней математики».

Теоретико-множественный подход позволяет увидеть общее во многих разделах школьной математики: в арифметике, математическом анализе, геометрии, комбинаторике, теории вероятностей и др. На этой основе ещё в начальной школе формируются такие важные математические понятия, как: натуральное число, величина, геометрическая фигура, операции над натуральными числами. Числовые функции, геометрические преобразования, измерения геометрических величин и т. д. являются различными аспектами общего понятия *отображения множества*. Теоретико-множественная основа удобна при формулировках высказываний о решениях уравнений, неравенств, их систем. Формулировки многих понятий школьной математики упрощаются при использовании языка и символики теории множеств.

Учителя знают, что существовали и существуют школьные учебники математики, концептуальной основой которых является теория множеств. Однако изложение всех разделов математики (особенно алгебры) может сделать их излишне абстрактными и сложными для большинства учащихся. Поэтому в наших учебниках (в которых ведущей содержательной линией является *числовая*) явное знакомство с элементами теории множеств, её языком и символикой отнесено на конец курса основной школы. Изложение этого материала в учебнике имеет практический и прикладной характер, ставит своей целью обобщить и систематизировать многие ранее изученные понятия и сформированные действия на более высоком научном уровне.

Содержание параграфа следует изучать в предложенной последовательности, дополнив его по желанию учителя (и при наличии времени) сообщением об истории становления теории множеств, об основных вопросах, решаемых этой теорией, о значении теоретико-множественной основы в изложении различных разделов математики. Некоторые дополнительные сведения изложены ниже.

Дополнительные сведения о теории множеств

1. История

Так называемая *наивная теория множеств* зародилась 3—4 тысячи лет назад в трудах китайских учёных. В современном виде вся наивная теория множеств (принадлежность, включение, свойства булевых операций, декартово произведение, конечная комбинаторика и др.) была сформулирована в XVII—XVIII вв. *П. Ферма*, *Р. Декартом*, *Г. Лейбницем*, *Я. Бернулли* и *И. Бернулли* и *Л. Эйлером*.

Первые попытки придать разрозненным исследованиям о различных множествах вид научной теории сделал чешский математик *Бернард Больцано* (1781—1848), который в своей работе «Парадоксы бесконечного», вышедшей в 1850 г., для сравнения произвольных (числовых) множеств определил понятие взаимно-однозначного соответствия.

В 1870 г. *Георг Кантор* разработал программу стандартизации всей математики. В условиях этой программы любой математический объект должен был стать тем или иным множеством. Например, любое натуральное число следовало рассматривать как множество, состоящее из единственного элемента другого множества, называемого «натуральным рядом», которое, в свою очередь, само представляет собой часть другого множества. Само понятие множества Кантор определял как «многое, мыслимое как единое».

Программа Кантора вызвала протесты со стороны многих математиков (Л. Кронекера, Г. Шварца, А. Пуанкаре). Однако другие крупные учёные (Г. Фреге, Р. Дедекинд, Д. Гильберт) поддержали программу Кантора перевести всю математику на теоретико-множественный язык. В частности, тогда теория множеств стала фундаментом теории меры и интеграла, топологии и функционального анализа.

Вскоре было установлено, что в теории Кантора неограниченная свобода на действия с бесконечными множествами приводит к ряду парадоксов, позволяющих некоторые утверждения доказывать вместе с их отрицаниями (пример *парадокса Рассела* см. ниже). После этого одна часть математиков решила полностью отказаться от использования теории множеств, а другая (возглавляемая Д. Гильбертом) сделала ряд попыток строго обосновать ту часть теоретических представлений, которая позволяла создать парадоксы (*антиномии*).

В 1904—1908 гг. *Эрнст Цермело* (1871—1953) предложил первую версию *аксиоматической теории множеств*, которая позволила выйти из кризиса в разных областях математики, использовавших построенную Кантором теорию. Особенностью аксиоматического подхода является отказ от представления о реальном существовании множеств; множества «существуют» только формальным образом, и их «свойства» зависят от выбора аксиом. В дальнейшем аксиоматика Э. Цермело была усовершенствована. В настоящее время наиболее распространённой аксиоматикой теории множеств является *ZFC — теория Цермело — Френкеля* с *аксиомой выбора*.

Аксиомой выбора является следующее утверждение: «Для каждого семейства непустых непересекающихся множеств существует (по крайней мере одно) множество, которое имеет только один общий элемент с каждым из множеств данного семейства».

2. Мощность континуума

Основной характеристикой *конечного множества* является число его элементов. Если в множествах $A = \{a_1,$

$a_2, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ одинаковое число элементов, то из элементов этих множеств можно составить пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n). При этом каждый элемент множества A, как и каждый элемент множества B, входит в одну и только одну пару. Говорят, что в таком случае между элементами множеств A и B установлено *взаимно-однозначное соответствие*.

Г. Кантор предложил аналогичным образом сравнивать и *бесконечные множества*. Договорились считать, что если между элементами любых множеств A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то они имеют одинаковую **мощность**. Кантор показал, что, например, можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ и множеством целых чисел $\boldsymbol{Z}$; между множеством $\boldsymbol{N}$ и множеством $\boldsymbol{Q}$ — всех рациональных чисел (способы установления таких соответствий можно найти в любом учебнике по теории множеств или, например, в книге *Р. Куранта* «Что такое математика»). Таким образом, в теории бесконечных множеств теряет силу утверждение о том, что часть меньше целого (например, множества $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Q}$ — равномощные, хотя множество $\boldsymbol{N}$ является лишь частью $\boldsymbol{Q}$).

Множества, имеющие такую же мощность, как и множество натуральных чисел, называют *счётными*. А вот множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, так же как и множество всех точек числовой прямой — *несчётные множества*. Так как прямая линия непрерывна, то мощность множества её точек называют *мощностью континуума* (от лат. *continuum* — непрерывный). Мощность континуума имеют, например, множества точек любого треугольника, куба, плоскости и пространства.

Много лет математики пытались решить проблему: существует ли множество, мощность которого промежуточна между счётной и мощностью континуума. В 60-х г. XX в. было доказано, что ни существование, ни отсутствие такого множества (само такое множество не найдено) не противоречит остальным аксиомам теории множеств. Этот факт аналогичен тому, как принятие аксиомы о параллельных прямых (аксиоматика Евклида) или отрицание этой аксиомы (геометрия Лобачевского) не противоречит остальным аксиомам геометрии.

3. Парадокс Рассела

Парадокс Рассела, открытый в 1901 г. английским математиком и философом *Бертраном Расселом* (1872—1970), демонстрирует противоречивость логической системы, заложенной Г. Кантором в его формализацию наивной теории множеств. Парадокс звучит так: «Пусть $\boldsymbol{M}$ — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли $\boldsymbol{M}$ само себя в качестве элемента? Если *да*, то, по определению $\boldsymbol{M}$, оно не должно быть элементом $\boldsymbol{M}$ — приходим к противоречию. Если *нет*, то, по определению $\boldsymbol{M}$, оно должно быть элементом $\boldsymbol{M}$ — вновь противоречие».

Существует немало популярных формулировок этого парадокса. Одна из них называется *парадоксом брадобрея*: «Одному деревенскому брадобрею король приказал *брить всякого, кто сам не бреется*, и *не брить того, кто сам бреется*. Как брадобрей должен поступить с самим собой?»

Другой вариант парадокса: «В одной стране издали указ, по которому *мэры всех городов должны жить не в своём городе*, а *в Городе Мэров*. Где должен жить мэр Города Мэров?»

Противоречие в парадоксе Рассела возникает в связи с использованием внутренне противоречивого понятия *множество всех множеств* и представления о возможности неограниченного использования законов классической логики в действиях с множествами. Для преодоления этого парадокса было предложено несколько путей формализации теории (теория Цермело—Френкеля ZF, теория Неймана—Бернайса—Гёделя NBG и др.).

Очевидно, что изложенные здесь дополнительные сведения по теории множеств используют при изложении язык математической логики. Поэтому учитель может применять этот материал для оживления структуры уроков при изучении не только данного параграфа, но и двух следующих.

Несколько конкретных рекомендаций:

1) При введении символов теории множеств нужно чётко дифференцировать знаки принадлежности одного элемента множеству ($\in$) и принадлежности множества множеству ($\subset$); зафиксировать, какой «стороной» дуга знака принадлежности повёрнута к элементу множества, какой — к подмножеству множества. Заметим, что в начале изучения множественной символики многие школьники предпочитают во всех случаях пользоваться одним из этих знаков.

2) Круги Эйлера желательно изображать в виде кругов или овалов (как это сделано в учебнике), хотя можно и в виде любых частей плоскости, ограниченных замкнутой линией.

3) Можно оформить в классе решения одного-двух уравнений (аналогов задачи 3 текста параграфа) с использованием знака совокупности, например следующих уравнений: $(x - 5)(x^2 - 3x + 2) = 0$; $(x^2 - 9)(x^2 + x - 12) = 0$. При решении уравнения (2) текста параграфа следует напомнить учащимся, что произведение двух множителей

равно нулю в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом имеет смысл. Заменить, например, уравнение $\sqrt{x+2} \cdot (x^2 - 16) = 0$ можно равносильной ему совокупностью $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 0, \\ \begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 + 16 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ или системой

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 0, \\ x^2 - 16 = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

4) Желательно найти время (если не при изучении данного параграфа, то при изучении следующих) и рассмотреть материал рубрики *Это интересно* и выполнить задания для самостоятельной работы по классификации. Сообщим строгие математические определения понятия классификация:

Классификация — это распределение объектов какого-либо понятия на классы по наиболее существенным признакам (свойствам). Например, в биологии все живые организмы распределяются на типы, виды, семейства; слова в словарях разбивают на подмножества, располагая их в алфавитном порядке. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева — пример научной классификации химических элементов.

Классификация определяется через разбиение множества на попарно не пересекающиеся множества. Полагают, что множество M разбито на подмножества (классы) $K_1, K_2, \ldots, K_n$, если совместно выполняются следующие условия:

а) подмножества $K_1, K_2, \ldots, K_n$ попарно не пересекаются, т. е. $K_i \cap K_j = \varnothing$ для любых i и j, $i \neq j$;

б) объединение подмножеств $K_1, K_2, \ldots, K_n$ совпадает с множеством M, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = M$;

в) все подмножества не пусты, т. е. $K_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, считается, что разбиение на классы проведено неправильно.

Наиболее доступная для понимания всеми учащимися — *дихотомическая классификация* (от греч. διχοτομια — *разделение надвое*). Она представляет собой деление множества элементов классифицируемого понятия на два противоположных друг другу видовых понятия, одно из которых обладает рассматриваемым признаком, а другое не обладает. Например, натуральные числа можно разделить на чётные и нечётные (не являющиеся чётными); на однозначные и многозначные (не являющиеся однозначными); за исключением числа 1: на простые и составные (не являющиеся простыми) и т. д.

На практике нередко классификация проводится по нескольким основаниям. Например, если за основание классификации натуральных чисел (больших 2) взять два критерия: *чётность* и *принадлежность к составным или простым числам*, то можно рассматривать деление натуральных чисел ($n > 2$) на следующие 3 класса: нечётные простые числа; чётные составные числа; нечётные составные числа.

5) При изучении данной главы в классах с трёхчасовой недельной нагрузкой начать систематическое повторение курса алгебры 7—9 классов (за исключением глав IV—VI курса 9 класса). Рекомендации по повторению смотрите в конце данного пособия.

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 26, пп. 1—3	ВУ; № 367—375; ДМ № 4	№ 374 (2); ДМ № 4 (3, 7)	ДМ № 3—6; это интересно (с. 217); ДМ № 13—14; ПЗ № 1, 2
2	§ 26, п. 4	УВ; № 376—384; ДМ № 1 (1—20), 2, 7—11; УВ № 12—16	ДМ № 6 (3), 7 (3), 8 (5), 9 (3, 5)	№ 385, 386; шаг вперёд (с. 218); ДМ № 12, 15, 16; ПЗ № 4—6

В результате изучения параграфа все учащиеся должны отвечать на устные вопросы, приведённые после текста параграфа, а также выполнять упражнения типа **367, 370, 371, 373, 374, 376**.

Решение практических и прикладных задач

1. Например: мот, мост, место, нож, ост, жест, сев, сом, сон, том, вес, вест.

2. 1-й способ. $19 + 16 = 35$ — число учащихся, изучающих немецкий язык, английский, и удвоенное число учащихся, изучающих оба языка. $35 - 25 = 10$ — число учащихся, изучающих оба языка. 2-й способ (см. рис. 23). Пусть x — число учащихся, изучающих два языка, тогда $19 + (16 - x) = 25$, откуда $x = 35 - 25 = 10$.

3. Пусть x учащихся занимаются только футболом, тогда $(7 - 4) + x = 13$, откуда $x = 10$.

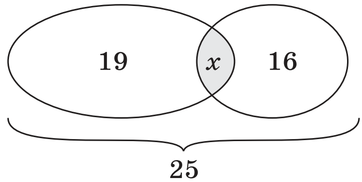


Рис. 23

4. Условие задачи проиллюстрируем на рисунке 24 с помощью кругов Эйлера (внутри ограниченных областей записаны соответствующие числа учащихся; буквами A, P и H обозначены области языков, начинающиеся с соответствующих букв). Тогда искомое число незнающих ни одного языка равно $100 - (55 + 22 + 25) = 8$.

5. Смотри схему (рис. 25), составленную по условию задачи. Тогда, например: $16 + 1 + 1 + (4 - x) = 20$, откуда $x = 2$. Можно иначе: $10 + 1 + 1 + (10 - x) = 20$, откуда $x = 2$; или $8 + (4 - x) + x + (10 - x) = 20$, откуда $x = 2$.

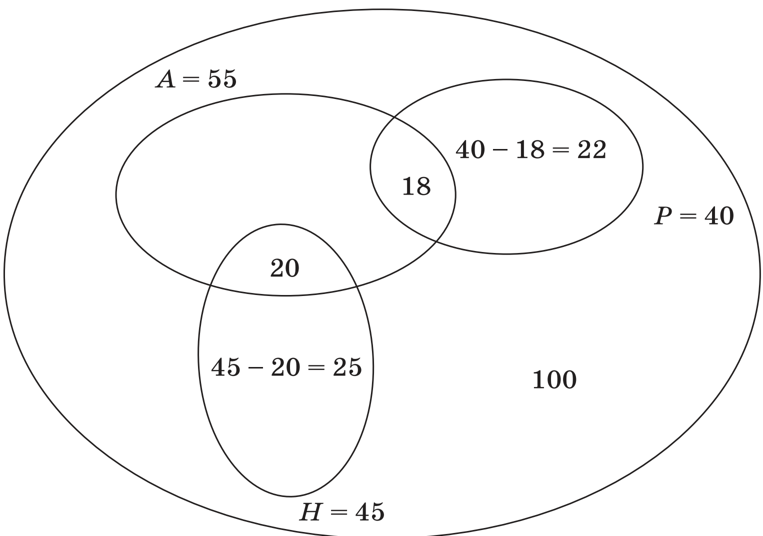


Рис. 24

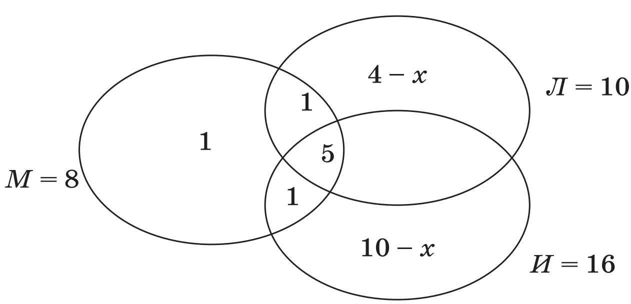


Рис. 25

§ 27 Высказывания. Теоремы (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство с языком и символикой математической логики, с понятиями высказывания и предложения с переменной, с конструированием прямых и обратных теорем.

Как уже отмечалось во введении к главе, рассмотрение элементов математической логики даётся в нашем курсе в ознакомительном плане с целью демонстрации на достаточно высоком научном уровне принципов конструирования знакомых учащимся теорем, с целью завершения формирования умений в создании корректных высказываний и выводов. Отрабатывать навыки записи с помощью формальной символики отдельных высказываний, предложений, теорем не следует. Однако сообщить учащимся об истории развития математической логики и о том, как она используется в бытовых и научных высказываниях, желательно. Способствовать построению соответствующей беседы с учащимися будет следующий дополнительный материал.

Логику определяют как науку о формах и законах правильного мышления, о способах рассуждения, о способах доказательства и опровержения. Логика изучает способы достижения истины из знаний, полученных ранее, о способах получения *выводного знания*. Одна из основных задач логики — определить, как прийти к выводу из предпосылок. В любой науке логика является одним из основных инструментов.

Неформальная логика занимается исследованием аргументации в естественном языке. Одной из главных её задач является исследование ошибок.

Некоторый вывод (сделанный на естественном языке) обладает *формальным* содержанием, если можно показать, что он является частным применением универсального правила. Например, высказывание «Все люди смертны; Иван — человек, значит, Иван смертен» является *силлогизмом* (категорическим дедуктивным умозаключением), в котором из двух суждений «Все S суть P; A есть S» следует новое суждение (заключение, вывод) «A суть P».

Такие выводы с чисто формальным содержанием называются *логическими выводами*, они и являются предметом *формальной логики*. Формальная логика зародилась в древности и оформилась в трудах древнегреческого философа *Аристотеля* (384—322 гг. до н. э.).

Символическая (или *математическая*) *логика* изучает символьные абстракции, которые фиксируют формальную структуру логического вывода. В математической логике истинность или ложность вывода зависит только от его формы и не зависит от конкретного содержания составляющих его слов. Например, высказывание «Если все растения красные, а все собаки — растения, то все собаки красные» кажется бессмысленным, но с точки зрения математической логики оно абсолютно верно (см. конструкцию силлогизма).

Именно эта высокая степень абстракции построения математической логики и способствовала как значительному развитию самой формальной логики, так и становлению целого ряда новых областей современной математики и её приложений. Если одним из основных понятий формальной логики является *суждение*, то аналогичным ему понятием в математической логике является *высказывание* — утверждение, для которого важно лишь то, истинно оно или ложно. Следует отметить, что слова *и*; *или*; *если…*, *то…* и т. д. (являющиеся связками в предложениях естественного языка) в математической логике (обозначаются соответственно символами $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) имеют несколько иной смысл. Так, если эти слова в предложениях обычного языка связывают предложения, соответствующие друг другу по смыслу («Он сел в автобус **и** поехал на работу»), то в математической логике они могут соединять любые предложения независимо от их смысловой связи («Он сел в автобус, **и** 5 — простое число»).

Основы современной математической логики были заложены в конце XIX—начале XX в. Большой вклад в её развитие внесли такие учёные, как *Дж. Буль*, *О. де Морган*, *Г. Фреге*, *Ч. Пирс* и др. В XX в. математическая логика оформилась как самостоятельный раздел логической науки.

В середине XX в. развитие вычислительной техники привело к появлению логических элементов, логических блоков и др. В 80-х гг. XX в. начались исследования в области создания искусственного интеллекта на базе языков и систем логического программирования.

Сегодня школьники на уроках информатики изучают элементы математической логики для объяснения принципов работы логических схем и устройств вычислительной техники.

Поясним взаимосвязь понятий *высказывание* и *предложение с переменными* (пп. 1 и 2 параграфа).

В математике имеется много различных предложений, которые хотя и содержат определённое утверждение или отрицание, но относительно них нельзя сказать, истинны они или ложны (это предложение вида $7x - 3 = 0$, $x > 2$, $x \neq 5$ и др.). Однако каждое такое предложение становится высказыванием при замене неизвестного каким-либо конкретным значением. Такие предложения (предложения с переменными) иногда называют *открытыми высказываниями, высказывательными формами*. Аналогами предложений с переменными в повседневной речи являются так называемые *неопределённые высказывания*, относительно которых без дополнительных объяснений нельзя установить, истинны они или ложны. Так, неопределённым является высказывание «Мяч круглый»: оно истинно, если речь идёт о футбольном мяче; ложно, если речь идёт о мяче для игры в регби, и неопределённо, если речь идёт о мяче вообще.

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием. Если это условие не выполняется, высказывание называют *сложным*. Например, высказывание «Волга впадает в Каспийское море, Каспийское море является озером» — сложное высказывание, состоящее из двух простых (см. материал рубрики *Шаг вперёд*, приведённый в конце параграфа). Таким образом, можно сказать, что конкретизация одного предложения с переменной является высказыванием; высказыванием является предложение, образованное из двух или нескольких высказываний.

Уровень глубины изучения материала параграфа учитель выбирает сам в зависимости от уровня готовности учащихся к его восприятию. В слабом классе достаточно, если учитель в лекционной форме будет небольшими порциями излагать материал, после чего читать соответствующие изложенному содержанию устные вопросы и задания и просить учащихся находить на них ответы в тексте учебника, приводить примеры высказываний, прочитывать символические записи высказываний (особое внимание уделить ответу на вопрос № 7). В слабом классе основными для выполнения следует считать задания типа 1—3, 6 из дидактических материалов и **387**, **390** из учебника. В сильном классе рассматриваются пп. 5 и 6 текста параграфа. Желательно, чтобы термины *необходимые* и *достаточные условия* высказываний с пояснениями и примерами прозвучали от учителя для всех учащихся.

Распределение учебного материала в классе со средним уровнем подготовленности может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания: основные для работы в классе и дома	Задания: для самостоятельной работы в классе	Задания: дополнительные
1	§ 27: пп. 1 и 2	ВУ; № 387—389; ДМ № 1—4	ДМ № 3 (3, 5), 4 (7)	ПЗ № 7, 8, 9

Продолжение

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
2	§ 27: пп. 3, 4	УВ № 1—5; № 390—394; ДМ № 5, 6, 8; УВ № 6—10	ДМ № 5 (5, 7), 6 (5, 7), 8 (3, 7)	№ 395, 396; ДМ № 7, 9; шаг вперёд (с. 227—228); ДМ № 10—12; УВ № 11; § 27, пп. 5, 6

В результате изучения параграфа все учащиеся должны с помощью текста учебника отвечать на устные вопросы и справляться с упражнениями типа **387—390**, приводить примеры простейших прямых и обратных теорем.

§ 28 Следование и равносильность (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — на языке логики и множеств ввести понятия равносильности и следования; обобщить способы решения уравнений, систем уравнений и неравенств, дифференцируя в ходе их решения равносильные преобразования и преобразования, приводящие к следствию.

В ходе изучения материала параграфа появляется естественная возможность повторения навыков решения уравнений, систем уравнений и неравенств, сформированных при изучении курса алгебры основной школы (с этой целью можно использовать пп. 2 и 3 *Упражнений для повторения*, помещённых в конце учебника).

Новый материал рассматривается после повторения теоретического материала предыдущих параграфов главы (особенно § 27). Повторение делать с помощью устных вопросов и вводных упражнений к данному и предыдущим параграфам. На втором уроке желательно провести проверочную самостоятельную работу по материалу § 26—28 (на 20 минут) примерно такого содержания:

1. Найти $A \cup B$, $A \cap B$ и A/B, если $A = \{-6;\ 3;\ 4\}$, $B = \{-8;\ -6;\ 1;\ 3\}$. [$A = \{-2;\ 0;\ 1;\ 5\}$, $B = \{-3;\ -1;\ 5\}$.]

2. Найти дополнение множества M до множества всех действительных чисел, если $M = \{x : x > 7,\ x \in R\}$.
[$M = \{x : x \leqslant -1,\ x \in \boldsymbol{R}\}$.]

3. Сформулировать высказывание $\overline{v}$, если высказывание v следующее: 1) $3 \leqslant 5$; 2) число a делится на 3. [1) $7 > 2$; 2) число b является целым числом.]

4. Дано предложение $p(x)$: $|x| < 2$ [$x^2 - 1 > 0$]. Определить, истинным или ложным является высказывание: 1) $(\forall x)p(x)$; 2) $(\exists x)p(x)$.

5. Установить, является ли второе предложение следствием первого: 1) натуральное число x оканчивается нулём; 2) число x делится на 5. [1) натуральное число x оканчивается цифрой 6; 2) число x делится на 6.]

6. Объяснить, почему равносильны неравенства $\frac{x}{2} - 3 > x + 1$ и $\frac{x}{4} < -2$ [уравнения $4 - \frac{x}{3} = 1 - \frac{x}{3}$ и $x^2 - 2x + 3 = 0$].

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания: основные для работы в классе и дома	Задания: для самостоятельной работы в классе	Задания: дополнительные
1	§ 28, пп. 1 и 2	ВУ № 1, 4; № 397—400, 402; ДМ № 1, 2	ДМ № 1, 2	№ 403, 404
2	§ 28, п. 3	ВУ № 2, 3, 5; № 401; ДМ № 3—6	ДМ № 3 (2, 4), 4 (2, 4), 5 (2), 6 (2, 4)	№ 405, 406; шаг вперёд (с. 235—236)
3	§ 28	УВ; упражнения для повторения курса алгебры 7—9 классов из пп. 2 и 3	Проверочная самостоятельная работа	ДМ № 7—9

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определения равносильных уравнений и неравенств, уравнения-следствия; знать виды равносильных преобразований уравнений и неравенств, должны справляться с упражнениями типа **397—401**.

Решение упражнений

405. 1) Уравнения равносильны, если множества их корней совпадают. Корень первого уравнения $x = \frac{a+7}{2}$, корень второго уравнения $x = \frac{-2a}{3}$. $\frac{a+7}{2} = \frac{-2a}{3}$, если $3a + 21 = -4a$, т. е. при $a = -3$.

3) Первое уравнение запишем в виде $(a - 7)x = -4$, второе — в виде $(a - 3)x = 4$. Так как правые части обо-

их линейных уравнений отличны от нуля, то для их равносильности возможны два случая: а) оба уравнения не имеют корней; б) имеют совпадающие корни.

Не существует a таких, чтобы одновременно $a - 7$ и $a - 3$ равнялись нулю, поэтому первый случай отпадает. Рассмотрим второй случай. При $a \neq 7$ из первого уравнения $x = \frac{4}{7-a}$, а при $a \neq 3$ из второго уравнения $x = \frac{4}{a-3}$; $\frac{4}{7-a} = \frac{4}{a-3}$, если $a - 3 = 7 - a$, т. е. при $a = 5$; $5 \neq 7$ и $5 \neq 3$. Ответ. При $a = 5$.

406. 1) Системы уравнений равносильны, если множества их решений совпадают. Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 1, \\ 5x - y = -8 \;|\cdot 3; \end{cases} \qquad + \begin{array}{l} 8x + 3x = 1, \\ \underline{15x - 3x = -24}; \\ 23x = -23, \text{ откуда } x = -1; \end{array}$$

$y = 5x + 8$ (из 2-го уравнения); если $x = -1$, то $y = 3$.

Подставим найденное решение в первую систему и решим её относительно a и b:

$$\begin{cases} (a-4)\cdot(-1) + 2\cdot 3 = 4, \\ 6\cdot(-1) + (b+3)\cdot 3 - 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} 4 - a + 6 - 4 = 0, \\ 6 + 3b + 9 - 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} a = 6, \\ b = -4. \end{cases}$$

Ответ. При $a = 6$, $b = -4$ (обе системы имеют единственное решение $x = -1$, $y = 3$).

§ 29 Уравнение окружности (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство с понятием уравнения фигуры (заданной на координатной плоскости) как с предложением с двумя переменными; нахождение расстояния между двумя точками, заданными своими координатами; составление уравнения окружности с заданными центром и радиусом.

Материал параграфа не нуждается в дополнительных комментариях, излагается в соответствии с текстом учебника. Навыки нахождения расстояния между двумя точками и записи уравнения окружности формируются с помощью заданий учебника и дидактических материалов с большой долей самостоятельной работы.

На первом уроке рассматривается весь теоретический материал параграфа и задачи 1—3; выполняются аналогичные им упражнения. На втором уроке разбираются нестандартные задачи 4 и 5 и выполняются теоретические упражнения.

На одном из уроков по этой теме желательно провести распределение тем исследовательских работ. Текст *Разговора о важном* желательно разобрать со всеми учащимися, предварительно вспомнив определение функции.

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 29, до задачи 4	ВУ; № 407—411; ДМ № 1—4	ДМ № 4 (3, 5)	ДМ № 5, 6
2	§ 29, задачи 4 и 5	УВ; ДМ № 5, 6; № 412—418	№ 413 (3), 416 (3)	Разговор о важном (с. 241); ДМ № 7—12

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать формулу длины отрезка (соединяющего две точки, заданные своими координатами) и уравнение окружности; должны уметь выполнять упражнения типа **407**, **410**.

Решение упражнений

412. Рассмотреть, например, случай $x_2 > x_1$ и $y_1 > y_2$ (затем обобщить случаи всех соотношений): $x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

414. 1) Точка K имеет координаты $(0;\ y_0)$. Так как по условию $KM = KN$, то $(2 - 0)^2 + (3 - y_0)^2 = (-3 - 0)^2 + (1 - y_0)^2$, откуда $4 + 9 - 6y_0 + y_0^2 = 9 + 1 - 2y_0 + y_0^2$, $4y_0 = 3$, $y_0 = 0{,}75$. Ответ. $K(0;\ 0{,}75)$.

415. 1) Точка P имеет координаты $(x_0;\ 0)$. Так как $PK = PM$, то $(-4 - x_0)^2 + (-1 - 0)^2 = (-2 - x_0)^2 + (3 - 0)^2$, $16 + 8x_0 + x_0^2 + 1 = 4 + 4x_0 + x_0^2 + 9$, $4x_0 = -4$, $x_0 = -1$. Ответ. $P(-1;\ 0)$.

416. 1) $r^2 = CD^2 = (1 + 5)^2 + (-1 - 2)^2 = 36 + 9 = 45$. Уравнение окружности с центром в точке $C(-5;\ 2)$ и радиусом $\sqrt{45}$: $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 45$.

417. 1) Центр окружности M находится в середине отрезка AB, его координаты: $x = \frac{-4+2}{2} = -1$, $y = \frac{0-6}{2} = -3$, т. е. $M(-1;\ -3)$. Радиус $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2+4)^2 + (-6-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+36}}{2} = 3\sqrt{2}$. Уравнение окружности: $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 18$.

418. 1) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = (x^2 + 2 \cdot 5x + 25) - 25 + (y^2 - 2 \cdot 3y + 9) - 9 + 18 = (x + 5)^2 + (y - 3)^2 - 16$, т. е. исходное уравнение можно записать в виде $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Ответ. Окружность с центром в точке $(-5; 3)$ и радиусом 4.

3) $x(x - 2) + y(y - 4) = x^2 - 2x + y^2 - 4y = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$. Ответ. Окружность с центром $M(1; 2)$ и $R = \sqrt{5}$.

§ 30 Уравнение прямой (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — обоснование того, что графиком уравнения $ax + bx = c$ является прямая линия; введение понятия углового коэффициента прямой и с его помощью установление взаимного расположения прямых.

При обосновании того факта, что график уравнения $ax + by = c$ имеет вид прямой, в учебнике используются лишь в неявном виде понятия необходимого и достаточного условий (так как текст учебника рассчитан на всех учащихся и соответствует обязательным требованиям стандартов). Если учитель в сильном классе рассматривал содержание пп. 5 и 6 § 27, то доказательство теоремы данного параграфа можно оформлять с использованием терминов *необходимое условие, достаточное условие* (необходимость, достаточность).

Отметим, что учащимся часто при записи $a^2 + b^2 \neq 0$ требуется пояснение того, что это компактная запись условия «a и b одновременно не равны нулю». Заменять её записью $a \neq b \neq 0$ (1) или $a \neq 0$, $b \neq 0$ (2) не корректно: первая форма исключает допустимое равенство a и b; вторая исключает «поочерёдное» равенство нулю a и b.

При изучении параграфа желательно повторять написание уравнения окружности, а в конце второго урока провести проверочную самостоятельную работу (на 10—15 минут) примерно такого содержания:

1. Записать уравнение окружности с центром в точке $M(-3; 2)$ [$N(5; -2)$] и радиусом $2\sqrt{2}$ [$3\sqrt{3}$].

2. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-7; 0)$ и $B(3; -4)$. [$K(6; -3)$ и $P(0; -4)$.]

3. Установить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями $4x + 3y = 2$ и $8x - 3y = 1$. [$2x - 5y = 1$ и $-4x + 10y = 3$.]

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 30 (полностью)	ВУ; № 419, 420, 422, 423; ДМ № 2, 4, 8	ДМ № 2 (5), 4 (3)	ДМ № 1, 7, 9; шаг вперёд (с. 246—247); ДМ № 12
2		УВ; № 421, 424—429; ДМ № 3, 5, 6	ДМ № 5 (5); проверочная самостоятельная работа	№ 430; ДМ № 10, 11, 13

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать ответы на устные вопросы и задания (приведённые в конце параграфа) и научиться выполнять упражнения типа **420**, **422**, **424**.

Решение упражнений

426. 1) Найдём координаты середины M отрезка BC: $x = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-1+1}{2} = 0$. Запишем уравнение прямой AM в виде $ax + by = c$, зная, что $A(2; 5)$ и $M(0{,}5; 0)$. Имеем $\begin{cases} 2a + 5b = c, \\ 0{,}5a + 0 = c, \end{cases}$ откуда $a = 2c$, $b = \frac{c-2a}{5} = \frac{c-4c}{5} = -0{,}6c$. Итак: $2cx - 0{,}6cy = c$ или $2x - 0{,}6y = 1$ ($c \neq 0$, так как в противном случае $a = 0$ и $b = 0$). Это уравнение можно записать (после умножения обеих частей на 5) в виде $10x - 3y = 5$.

427. 1) Убеждаемся в том, что основания трапеции — BC и AD. Запишем уравнение средней линии, параллельной BC. Координаты точки M — середины отрезка AB: $x = \frac{6+0}{2} = 3$, $y = \frac{0-4}{2} = -2$. Координаты точки N — середины отрезка AC: $x = \frac{6-4}{2} = 1$, $y = \frac{0+4}{2} = 2$. Ищем уравнение прямой MN, где $M(3; -2)$ и $N(1; 2)$:
$\begin{cases} 3a - 2b = c, \\ a + 2b = c, \end{cases}$ откуда $4a = 2c$, $a = 0{,}5c$, $b = \frac{c-a}{2} = \frac{c-0{,}5c}{2} = 0{,}25c$; $0{,}5cx + 0{,}25cy = c$ или $2x + y = 4$ (так как $c \neq 0$, в противном случае и $a = 0$, и $b = 0$).

428. 1) При $x = 0$ имеем $-3y = 5$, $y = -\frac{5}{3}$.

При $y = 0$ имеем $2x = 5$, $x = \frac{5}{2}$.

Ответ. $\left(0; -\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

429. 1) $\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot (-1) = 3, \\ a \cdot 2 + b \cdot 3 = 3, \end{cases}$ откуда $b = -3$, $a = 6$.

430. 1) Диагонали лежат на координатных осях. Ответ. $x = 0$ и $y = 0$.

2) $M(2;\ 1)$, $N(-1;\ -2)$ — середины сторон AB и CD соответственно. Ищем уравнение прямой MN в виде $ax + by = c$:

$\begin{cases} 2a + b = c, \\ -a - 2b = c \mid \cdot\ 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 2a + b = c, \\ -2a - 4b = 2c, \end{cases}$ откуда $-3b = 3c$, $b = -c$, $a = 2c - c = c$.

Ответ. $x - y = 1$.

§ 31 Множества точек на координатной плоскости (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — с помощью языка логики и теории множеств обобщить функционально-графические знания учащихся; научить изображению на плоскости различных фигур, задаваемых объединением и пересечением других фигур (которые, в свою очередь, заданы предложениями с переменными — уравнениями, неравенствами).

На уроках по изучению данной темы естественным является построение графиков функций, в которых производится сдвиг графика одной из основных функций, изученных в основной школе ($y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$). Поэтому в начале первого урока к заданиям вводных упражнений до изучения нового материала можно добавить задания из упражнения **431**.

При рассмотрении п. 2 параграфа подчеркнуть договорённость о том, что граничную линию, изображающую точки, входящие в множество истинности предложения с переменной (уравнения, неравенства), будем изображать сплошной линией, в противном случае — пунктирной линией.

На втором уроке после выполнения упражнения **439** желательно всем учащимся рассказать о применении изученного материала при решении задач линейного программирования (можно прочитать условие задачи из рубрики *Шаг вперёд*, сказать, что по её условию был построен многоугольник, исследование которого дало результат — ответ на вопрос задачи). В сильном классе материал этой рубрики желательно разобрать подробно.

В конце второго урока следует включить в домашнее задание повторение ранее изученного материала (используя устные вопросы к параграфам и упражнения к главе) с тем, чтобы в конце следующего урока — первого урока обобщения изученного материала — провести тестовую работу по всей теме.

Распределение учебного материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Задания		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 31, п. 1	ВУ; № 431—435; ДМ № 1, 2	ДМ № 1 (1), 2 (3, 5)	ДМ № 3; № 451, 453
2	§ 32, п. 2	УВ № 1, 2; № 436—440; ДМ № 4—7; УВ № 3, 4	ДМ № 4 (5, 7), 5 (1, 3)	Шаг вперёд (с. 253—256); ДМ № 8, 9; ПЗ № 10—12; № 444—447

В результате изучения параграфа все учащиеся должны справляться с заданиями типа **433**, **437**, **439**.

Решение практических и прикладных задач

11. Пусть x машин по 5 т и y машин по 10 т отправляются на базу за 1 ч. Целевая функция $S = 5x + 10y$, откуда $y = -\frac{x}{2} + \frac{S}{10}$. По условию задачи составим систему $\begin{cases} x + y \leqslant 10, \\ x \leqslant 8, \\ y \leqslant 6. \end{cases}$ На рисунке 26 штриховкой изображено множество решений системы для $x \in R$ и $y \in R$ (в найденном решении системы затем выберем при необходимости $x \in N$ и $y \in N$). Прямая целевой функции $y = -\frac{x}{2} + \frac{S}{10}$ параллельна прямой $y = -\frac{x}{2}$. Наибольшее значение S принимает в точке A с ординатой $y = 6$, абсцисса которой находится из уравнения $10 - x = 6$, откуда $x = 4$. Ответ. 4 машины по 5 тонн и 6 машин по 10 тонн.

12. Перенесём условие задачи в таблицу:

Вид корма	Составляющие вещества, ед.			Цена единицы корма, у. е.
	A	*B*	*C*	
I	1	1	1	3
II	4	2	—	2

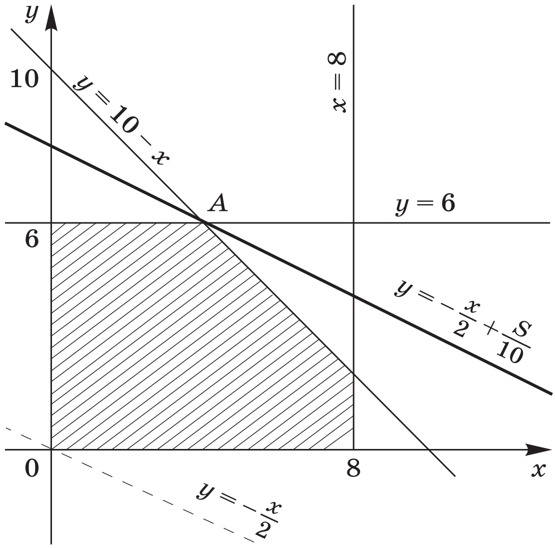


Рис. 26

Пусть x — число единиц корма I, y — число единиц корма II содержатся в дневном рационе наименьшей стоимости. Целевая функция $S = 3x(1 + 1 + 1) + 2y(4 + 2) = 9x + 12y$, откуда $y = -\frac{3}{4}x + \frac{S}{12}$. Согласно условию:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 4y \geqslant 1, \\ 1 \cdot x + 2y \geqslant 4, \\ 1 \cdot x \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y \geqslant \frac{1}{4} - \frac{x}{4}, \\ y \geqslant 2 - \frac{x}{2}, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

На рисунке 27 штриховкой показана часть плоскости, соответствующая полученной системе. Минимальное значение функция S принимает в точке A, абсцисса которой $x = 1$, а ордината находится как значение функции $y = 2 - \frac{x}{2}$ при $x = 1$, т. е. $y = 1{,}5$. Ответ. Одна единица корма I и 1,5 единицы корма II.

ДМ № 9. 1) $S = 30x + 40y$. Условия задачи образуют систему $\begin{cases} 12x + 4y \leqslant 300, \\ 4x + 4y \leqslant 120, \\ 3x + 12y \leqslant 252, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ где x — количество изделий вида V_1, y — количество изделий вида V_2. Ответ. 12 и 18.

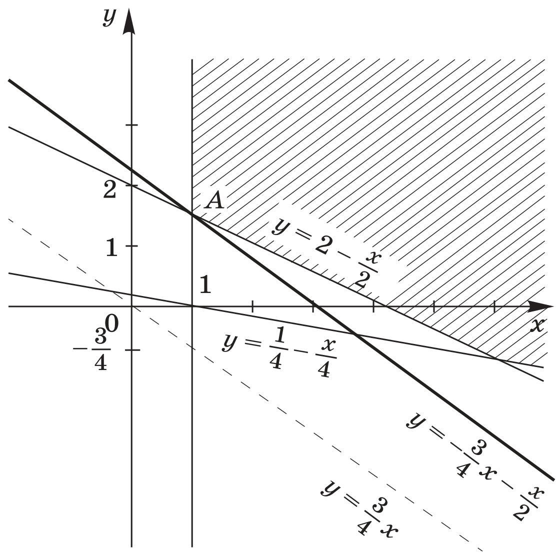


Рис. 27

2) $S = 45x + 80y$, где x — число столов, y — число шкафов. Условие описывается системой $\begin{cases} 5x + 20y \leqslant 400, \\ 10x + 15y \leqslant 450, \\ x \geqslant 0,\ x \in N, \\ y \geqslant 0,\ y \in N. \end{cases}$

Ответ. 24 стола, 14 стульев.

Урок обобщения знаний и представления творческих работ (2/2 ч)

На первом уроке повторяется и обобщается ранее пройденный материал (учащиеся накануне получали задание его повторить). С этой целью используются устные вопросы к параграфам главы, упражнения к главе, задания рубрики *Проверь себя!* и перечень знаний и умений, сформулированный в рубрике *В этой главе вы узнали*. В конце урока проводится *тест 6* (из сборника тематических тестов). При наличии времени можно начать обсуждение выполненных творческих работ и послушать одну презентацию.

На втором уроке, после анализа тестовой работы и рекомендаций по подготовке к предстоящей контрольной работе, заслушать презентации лучших исследовательских работ.

Содержание контрольной работы может быть позаимствовано из дидактических материалов, взято из данного пособия или составлено учителем самостоятельно в соответствии с уровнем подготовленности класса.

Контрольная работа № 6

1. Найти $A \cap B$ и $A \cup B$, если:
1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$; 2) $A = \{x: -3 < x < 2\}$, $B = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 4\}$.
[1) $A = \{k, l\}$, $B = \{k, l, m\}$; 2) $A = \{x: 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $B = \{x: -2 < x < 5\}$.]

2. Сформулировать высказывание $\overline{\vee}$ и определить, истинно оно или ложно, если дано высказывание $\vee$:
1) $x^2 + 5 < 0$; 2) $N \cup Z = Z$. [1) $N \cap Q = N$; 2) $|x - 1| < 0$.]

3. На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих неравенству $2x + y \geqslant 3$ [$3x - y > 2$].

4. Записать уравнение окружности с центром в точке $M(-2; 3)$ [$N(1; -2)$] и проходящей через точку $A(2; 0)$ [$B(-5; 6)$].

---

5. Найти координаты середины отрезка AB, если $A(5; -3)$, $B(-1; -7)$ [$A(-4; 5)$, $B(-2; -3)$].

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M(2; 0)$ и $N(0; -3)$ [$M(0; 4)$ и $N(-2; 0)$].

7. На координатной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих:
1) уравнению $(x - 3)^2 + (3y + 4)^2 = 0$ [$(2x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$];
2) системе неравенств $\begin{cases}(x - 1)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 4, \\ x - y + 1 > 0.\end{cases}$

$$\left[\begin{cases}(x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 9, \\ x + y - 2 \geqslant 0\end{cases}\right].$$

Краткие рекомендации по заключительному повторению курса алгебры VII—IX классов

Главной дидактической целью уроков повторения курса алгебры является обобщение и систематизация знаний, полученных учащимися в 7—9 классах, и подготовка к государственной аттестации. На этих уроках школьники должны усвоить связи и отношения между понятиями, получить целостное представление об изученном материале, решить ряд комбинированных задач и упражнений.

Важным в организации повторения является выбор методов, форм и средств систематизации обобщения.

Особое место на этих уроках отводится упражнениям, по ходу выполнения которых осуществляется повторение всего комплекса знаний и умений, подлежащих систематизации, расширение и углубление знаний, применение обобщённых знаний в конкретных ситуациях. К таким упражнениям относятся, в частности, задания на составление схем и таблиц, классификацию понятий и составление их «родословной». Можно использовать таблицы и схемы, подготовленные в течение всего изучения курса алгебры, предлагая учащимся установить связи между вынесенными в таблицы определениями и понятиями (например, плакат на с. 65 по теме «Прогрессии»), использовать компьютерные программы.

Вариантов распределения учебного материала на уроках повторения может быть много. Приведём три из них, а на одном остановимся подробнее.

I вариант

1) Вычисления и преобразования алгебраических выражений.
2) Уравнения и системы уравнений.
3) Решение текстовых задач.
4) Неравенства и системы неравенств.
5) Функции.
6) Итоговая контрольная работа.
7) Решение задач по всему курсу алгебры 7—9 классов.

Этот вариант предполагает непосредственное использование упражнений для итогового повторения из учебника для 9 класса, а также упражнений из дидактических материалов для 7—9 классов. Тема «Прогрессии» в этом случае повторяется на всех уроках.

II вариант

1) Вычисления и преобразования алгебраических выражений.
2) Функции. Уравнения. Неравенства.
3) Решение текстовых задач.
4) Итоговая контрольная работа.
5) Решение задач по всему курсу алгебры 7—9 классов.

В этом варианте повторение уравнений и неравенств осуществляется по ходу повторения свойств функции.

III вариант

1) Вычисления и преобразования алгебраических выражений.
2) Уравнения и системы уравнений.
3) Решение текстовых задач.

4) Функции. Неравенства. Системы неравенств.

5) Итоговая контрольная работа.

6) Решение задач по всему курсу алгебры 7—9 классов.

Рекомендации, которые будут приведены ниже, ориентированы в основном на III вариант планирования. Однако и устные упражнения, и рекомендации по работе с упражнениями учебника могут быть полезными и для работы по первым двум вариантам. В любом случае такие вопросы, как, например, свойства степени, разложение многочленов на множители, свойства и способы решения простейших уравнений и неравенств, чтение графиков, можно повторять по ходу выполнения устных упражнений.

Приняв за основу тот или иной план повторения, полезно заранее продумать систему интересных, может быть, и нетрудных, но нестандартных задач к каждому блоку уроков. Таких задач много в конце учебника, при этом можно использовать и задачи повышенной трудности из учебников для 7 и 8 классов. Например, к урокам 1—3 можно заранее попросить некоторых учащихся подготовить решение задач **722**, **741**, **742**, **758—762** из учебника «Алгебра, 9». Рассматривать на таких уроках можно не все задания, но решение по одному из каждого позволяет показать, как, например, умение преобразовывать алгебраические выражения помогает доказывать неравенства. Обсуждение решений таких сложных задач не должно занимать много времени, а если класс слабый, то подобную работу можно провести индивидуально с теми, кто заинтересуется их решениями.

1) Вычисления и преобразования алгебраических выражений

Повторяя эту тему, полезно использовать схему (рис. 30, учебник «Алгебра, 8»), напоминающую учащимся, как расширялись их представления о числе. При этом можно предложить выполнить следующее устное упражнение:

Даны числа:

$-3;\ -2\frac{1}{3};\ -\sqrt{2};\ -1;\ 0;\ 0{,}7070070007...;\ 1;\ 2;\ \pi;\ 5;\ 6;\ 7;\ \sqrt{50}.$

Выбрать из них числа: а) натуральные; б) целые; в) рациональные; г) иррациональные; д) действительные.

Законы и свойства арифметических действий можно повторить, например, выполняя такие устные задания:

Вычислить:

1) $1{,}9 + 4{,}8 - 0{,}5 + 5{,}2$;

2) $-16 \cdot 1{,}5$; $-2\frac{3}{4} \cdot 4$; $\left(-1\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)$;

3) $8 \cdot (-0{,}175) \cdot 125$; $\left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) : 0{,}75$; 4) $8{,}7 \cdot 0{,}45 + 0{,}55 \cdot 8{,}7$.

Кроме действий I и II ступени, учащиеся вспоминают, какие ещё действия с действительными числами они научились выполнять: возводить число в степень с натуральным и целым отрицательным, рациональным показателями, находить процент от числа и число по его проценту, делить число в данном отношении, извлекать квадратный корень, корень натуральной степени; познакомились с числовыми последовательностями и научились находить n-й член и сумму n членов некоторых последовательностей.

Каждое из перечисленных действий обладает своими свойствами, которые полностью опираются на свойства действительных чисел. Показывается это на примерах упражнений **522—527**, **551**, **552**, **650** учебника «Алгебра, 9». Можно использовать задания из дидактических материалов.

Преобразования многочленов и алгебраических дробей также в основе своей опираются на законы и свойства арифметических действий. Последовательное выполнение упражнений **529—535**, **546**, **548**, **549** позволит не только повторить правила преобразований многочленов и выражений, содержащих квадратные корни, но и поставить вопрос: можно ли считать формулы сокращённого умножения тождествами, а выполненные преобразования тождественными? Полезно вспомнить, какие же значения букв будут допустимыми для тождеств сокращённого умножения, для тождества $\sqrt{a^2} = |a|$. Сильным учащимся можно предложить подумать, являются ли равенства в упражнении **742** тождествами.

Применение формул сокращённого умножения для разложения многочлена на множители полезно рассмотреть на упражнениях **535** (особенно важны задания 3 и 4), **560** (7, 8), а затем перейти к более сложным упражнениям, например **834**, **835** из учебника для 7 класса. При этом возможно подвести учащихся к решению трудного задания, используя более лёгкое, например выполняя запись решения несколькими способами:

535 (4) («Алгебра, 9»).

I. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = (a - b)^2(a + b)^2$.

II. $(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 =$

835 (1) («Алгебра, 7»).

I. $a^4 + 2a^2 - 3 = a^4 - a^2 + 3a^2 - 3 = (a^4 - a^2) + (3a^2 - 3) = a^2(a^2 - 1) + 3(a^2 - 1) = (a^2 - 1) \times (a^2 + 3) = (a - 1) \times (a + 1)(a^2 + 3)$.

$= (a^2 + b^2 - 2ab)(a^2 + b^2 + 2ab) = (a - b)^2(a + b)^2.$

II. $a^4 + 2a^2 - 3 = ((a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1) - 1 - 3 = (a^2 + 1)^2 - 4 = (a^2 + 1)^2 - 2^2 = (a^2 + 1 - 2)(a^2 + 1 + 2) = (a^2 - 1)(a^2 + 3) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 3).$

III. Пусть $a^2 = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.
$t^2 + 2t - 3 = (t + 3)(t - 1)$,
$a^4 + 2a^2 - 3 = (a^2 + 3)(a^2 - 1) = (a^2 + 3)(a - 1)(a + 1).$

Таким образом, на примере задания **835 (1)** из учебника для 7 класса не только повторяются разные способы разложения на множители, но и демонстрируется постепенное расширение знаний учащихся.

С целью экономии времени на уроках повторения при рассмотрении ряда примеров (например, на совместные действия с алгебраическими дробями) для одних заданий достаточно определить только порядок действий; выполняя другие, можно промежуточные действия решать по вариантам (например, при выполнении упражнений типа **522**, **523**), а заключительные выполнить всем классом.

Кроме уже указанных упражнений, на уроках и в домашней работе рекомендуется использовать задания **537—539**, **542**, **544**, **546**, **551—553**, **563**, **565—567**, **571**.

2) Уравнения и системы уравнений

Повторяя решение уравнений и систем уравнений, необходимо напомнить учащимся, что и здесь законы и свойства чисел играют важную роль: предполагая, что некоторое значение неизвестного является корнем уравнения, мы имеем право воспользоваться свойствами верных числовых равенств, чтобы найти значение этого неизвестного и, подставив его в исходное уравнение, проверить, действительно ли получили верное равенство.

Виды уравнений, их свойства, способы решения целесообразно повторить по ходу выполнения устных упражнений. Можно также использовать дидактические материалы, рабочие тетради, тесты с 7 по 9 класс.

1. Для каких из данных уравнений число 2 является корнем:

1) $3x^2 + 2x + 1 = 0$; 2) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$; 3) $x^2 - 4 = 0$;

4) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$; 5) $\sqrt{x - 2} = 1$; 6) $3^x = 9$?

2. Решить уравнение:

1) $\frac{x}{4} = \frac{9}{5}$; $\frac{20}{7} = \frac{x}{14}$;

2) $-2x - 3 = 0$; $\frac{1}{3} + 2x = 0$; $0{,}5x = -1{,}5$;

3) $x(x + 5) = 0$; $3x^2 - \frac{1}{2}x = 0$; $2x^2 - 64 = 0$;

4) $|x| = 3$; $2|x| = 5$; $\sqrt{x^2} = 1$;

5) $x^2 + 4x + 4 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$;

6) $\sqrt{x} = 2$; $2\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2 - x}$;

7) $2^x = 8$; $3^{2x} = 27$; $4^{x-1} = 64$.

3. Выразить каждую из величин через другие:

$s = vt$, $h = \frac{gt^2}{2}$, $I = \frac{U}{R}$.

Линейные уравнения на заключительных уроках можно специально не решать: к их решению будут сводиться многие другие уравнения. А решения квадратных уравнений разными методами повторить полезно. Например, одно из уравнений в упражнении **577** можно предложить выполнить различными способами по вариантам:

I вариант — методом выделения полного квадрата;

II вариант — по формуле;

III вариант — графически.

Выполняя упражнение **580**, полезно предложить решить четвёртое уравнение $|3x| - 3x = 6$ аналитически и графически, чтобы наглядно убедиться в том, что в отличие от всех других уравнений этого задания данное уравнение имеет единственное решение.

С этой же целью можно предложить выполнить двумя способами упражнение **583 (3)**.

При изучении главы «Прогрессии» учащиеся решали показательные уравнения, когда неизвестное принимало лишь натуральные значения, в то время как при изучении § 5 они ознакомились с решением показательного уравнения, где корнем могло быть любое действительное число. Так как изучение показательных уравнений учащимся предстоит в старших классах, на данном этапе полезно акцентировать их внимание лишь на прикладном аспекте этих уравнений — при нахождении номера члена геометрической прогрессии (упражнение **656 (1)**).

Желательно, чтобы, повторив решение уравнений, учащиеся могли ответить на вопросы:

1. Какие виды уравнений вы умеете решать?

2. Какие свойства уравнений используются при их решении?

3. Какие методы решения уравнений вы знаете?

Решая системы уравнений, повторите на одном примере разные способы решения систем (например, **586** (2)) и выберите оптимальный способ решения данной системы.

Так как учащиеся уже знакомы с функцией $y = \frac{k}{x}$, то полезно, решая системы уравнений в упражнении **588** (3, 4), сначала рисовать эскизы графиков каждого из уравнений, чтобы убедиться, что система имеет решения. Затем, обсудив возможные способы решения, выбрать оптимальный и довести решение до конца.

Решая уравнения или системы уравнений, в которых необходимо выполнить преобразование алгебраических выражений, полезно просить учащихся обосновать те или иные действия, ссылаясь на применяемые определения, свойства, формулы.

Наиболее важными на этих уроках (и для домашнего задания) можно считать задания из упражнений **575—577**, **580**, **582**, **585**, **586**, **588**, **591**, **593**, **599**.

Дополнительно рекомендуется использовать задачи **595**, **598**, **750—753**, **744**, **746**.

3) Решение текстовых задач

На этих уроках рассматриваются задачи, при решении которых составляются уравнения первой степени с одним неизвестным, квадратные уравнения, системы уравнений, а также задачи по темам: прогрессии, основы теории вероятностей, элементы статистики. Задания для повторения последних двух из указанных разделов целесообразно брать из задач к соответствующим главам учебника и из дидактических материалов.

Работа с задачами должна быть разнообразной. Для одних задач достаточно провести в классе анализ условия и наметить путь решения (например, **618**, **621**), а решение этих задач включить в домашнюю работу. Другие задачи довести до составления уравнения или системы уравнений и не решать их до конца, если методы решения этих уравнений хорошо усвоены большинством и у учащихся не возникает проблем при переходе от математической модели к задачной ситуации с целью выбора ответа. Решение третьих задач довести до конца (чтобы в тетради учащихся были записи решения разных типов задач: **620**, **623**, **625**, **629**, **631**, **510**, **514**). Оформление решений может сопровождаться схемой или рисунком для анализа условия, таблицей или подробной записью (как это делать, описывалось в данной книге в параграфах, относящихся к решениям задач, или в рабочих тетрадях).

Подготовительные упражнения к решению конкретных задач можно выбрать, например, из следующих:

1. Записать число, которое:
1) на 0,3 больше числа x;
2) на 25 меньше числа y;
3) в 5 раз больше числа a;
4) в 3 раза меньше числа b.

2. Найти:
1) 10% от числа 80;
2) 25% от числа x;
3) 120% от числа p.

3. Ковёр до снижения цен на 20% стоил 1000 р. На сколько рублей подешевел ковёр?

4. Найти:
1) число x, если 20% от него составляют 40;
2) число a, если 15% от него равны b.

5. Выразить полчаса, четверть часа, полтора часа, 1 ч 20 мин, 2 ч 10 мин, 3 ч 40 мин:
1) в минутах; 2) в часах.

6. Сравнить:
1) 80 с и 1,5 мин; 20 мин и $\frac{1}{3}$ ч; 5 мин и 0,1 ч;
2) 6 км/ч и 100 м/мин; 35 км/ч и 10 м/с; 120 км/ч и 0,12 м/мин.

7. Рабочий изготовил за смену a деталей. Какова производительность труда рабочего?

8. Найти собственную скорость лодки, если её скорость по течению реки 18 км/ч, а против течения 12 км/ч.

9. Найти скорость течения реки, если скорость лодки по течению 18 км/ч, а против течения 12 км/ч.

Кроме задач, предложенных в учебнике для 9 класса, можно воспользоваться задачами из учебников для 7 класса **(779, 787, 791, 805, 813)** и 8 класса **(778, 779, 784, 806, 831)**. Полезно использовать старинные и прикладные задачи из этих книг.

Задачи на проценты традиционно трудны для учащихся. Однако на этапе итогового повторения решать такие задачи необходимо. Так как учащиеся изучили арифметическую и геометрическую прогрессии, полезно показать, как с их помощью можно подойти к формулам простых и сложных процентов, что позволит углубить знания учащихся и научить применять формулы, столь необходимые на практике.

Задача. Для покрытия пола в коридоре школы пластиковой плиткой нужно 300 плиток. За один год 22% плиток изнашиваются и заменяются новыми. Сколько плиток нужно приобрести, чтобы их хватило на 6 лет?

Для того чтобы учащиеся поняли, что в ходе решения задачи они должны найти шестой член арифметической прогрессии, можно по ходу анализа условия составить схему (рис. 28).

a_1 — первоначальное количество плиток;

$0{,}22 \cdot a_1$ — количество плиток, которое изнашивается за год;

a_2 — количество плиток, которое потребуется на 2 года:

$a_2 = a_1 + 0{,}22 \cdot a_1$;

a_3 — количество плиток, которое потребуется на 3 года:

$a_3 = a_2 + 0{,}22 \cdot a_1$;

a_4 — количество плиток, которое потребуется на 4 года:

$a_4 = a_3 + 0{,}22 \cdot a_1$;

$a_5 = a_4 + 0{,}22 \cdot a_1$;

$a_6 = a_5 + 0{,}22 \cdot a_1$.

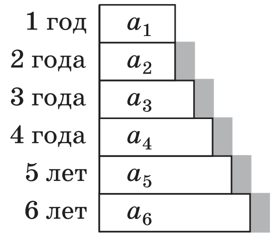


Рис. 28

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ находим $a_6 = a_1 + 5d$.

По условию задачи $a_1 = 300$, в результате анализа пришли к выводу, что $d = 0{,}22 \cdot a_1 = 0{,}22 \cdot 300$, отсюда

$a_6 = 300 + (0{,}22 \cdot 300) \cdot 5 = 630$.

Ответ. 630 плиток.

В общем виде, учитывая, что $a_1 = 300 \cdot 0{,}22$ соответствует 22 % изнашиваемости плиток, 5 соответствует числу лет, получаем $a_n = a_1 + \frac{p}{100} \cdot a_1(n - 1)$, где p — число процентов, n — число лет, т. е. $a_n = a_1\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$. Эту формулу называют формулой простых процентов. Такая формула применяется, когда искомая величина меняется на одно и то же число процентов от одного и того же числа.

В случае когда величина меняется на одно и то же число процентов от вновь полученного числа, применяется формула сложных процентов, вывести которую на интуитивном уровне поможет знание геометрической прогрессии, которую изучали в теме «Прогрессии» § 14.

Кроме задач, указанных выше, можно использовать задачи **558**, **624**, **627**, **665**; дополнительно задачи **632**, **669**, **671**.

4) Функции. Неравенства. Системы неравенств

Повторение изученных функций и их свойств целесообразно объединить с обобщением и систематизацией знаний по теме «Неравенства», так как непосредственное решение неравенств при исследовании функций позволяет сделать повторение и того и другого материала более осмысленным.

Упражнения учебника целесообразно дополнять вопросами, которые ведут к необходимости применения знаний по всему курсу алгебры. Например, упражнение **633** можно дополнить требованием: выяснить, при каких значениях x функция принимает положительные (отрицательные) значения. Решение упражнения **634** (1, 2) целесообразно выполнить в одной координатной плоскости, что позволит сделать вывод о влиянии и знака коэффициента k, и его модуля на расположение прямой в плоскости.

Построение графиков из упражнения **635** полезно выполнить двумя способами: по пяти точкам и с помощью сдвигов. Затем предложить с помощью графика провести исследование функции по схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Указать, какие значения может принимать функция.
3. Определить, при каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю.
4. Определить, при каких значениях аргумента функция возрастает; убывает.
5. Выявить, имеет ли функция наибольшее или наименьшее значение.
6. Выявить, является ли график функции симметричным относительно оси ординат, начала координат (является ли функция чётной или нечётной).

Если позволяет уровень математической подготовки класса, упражнение **641** желательно выполнить в обратном порядке: сначала исследовать функцию по указанной схеме аналитически, а потом построить её график. В таком же порядке можно выполнить и упражнения **644 (1, 2)**, **645** (1, 2). А в заданиях **644** (3, 4), **646**, **647** исследование функций провести с помощью графика.

Выполняя аналитическое исследование функций, повторить различные способы решения неравенств первой степени и квадратных. Учащихся можно попросить переформулировать задание в упражнении **606**, чтобы связать его с исследованием соответствующих функций. А неравенства из упражнения **607** можно решить как аналитически, так и с помощью графика.

Решение систем неравенств из упражнения **604, 605** можно предложить выполнить дома самостоятельно, результат выполнения проверить в классе.

Прежде чем решить неравенства **608, 615** методом интервалов, полезно переформулировать задания, например, так:

608. 3) При каких значениях x функция $y = (x + 1{,}5) \times (x - 2)x$ принимает положительные значения? В качестве дополнительных вопросов попросить выяснить: что является областью определения этой функции? Какие значения она может принимать? Чему равны нули этой функции?

Упражнение **615** (1) можно усложнить, предложив найти область определения и нули функции $y = \frac{(x+3)(x-7)}{2-x}$, и выяснить, при каких значениях x функция принимает положительные значения.

Одно-два задания из упражнений **608**, **615** можно предложить переформулировать самим учащимся, что поможет выяснить, насколько осознанно учащиеся подходят к цели изучения приёмов решения неравенств.

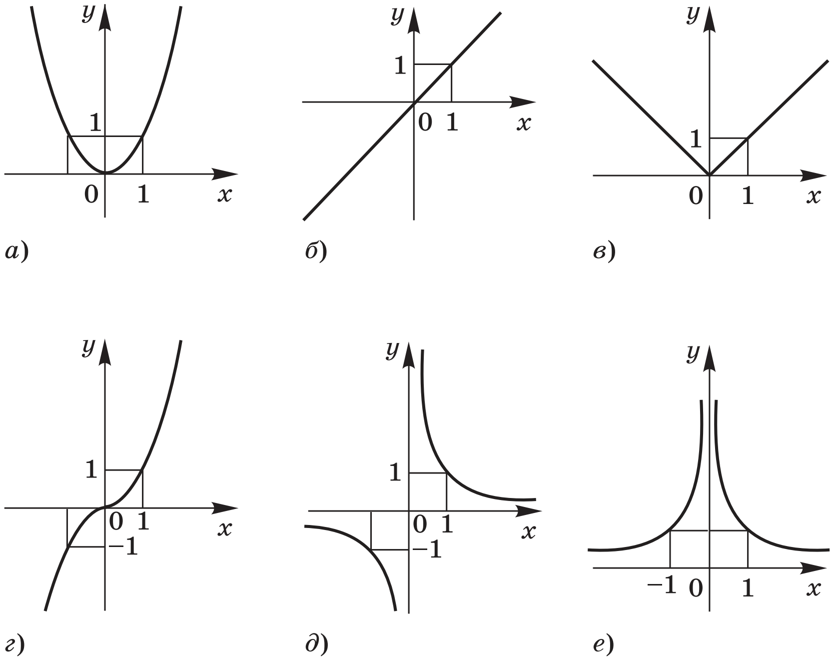
При обсуждении этих же упражнений имеет смысл предложить учащимся подумать, какими ещё методами можно решить данные неравенства, какой из них будет наиболее рациональным. Упражнение **608** (1) выполнить с помощью систем и графика и обсудить возможность подобных решений неравенства **608** (4). Здесь важно, чтобы учащиеся сами сделали вывод об удобстве метода интервалов при решении подобных неравенств.

Можно сообщить учащимся, что в старших классах они научатся строить графики функций, которые заданы многочленами 3-й и 4-й степеней.

К концу обучения в основной школе учащиеся должны хорошо знать свойства функций: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, поэтому целесообразно на каждом из уроков повторения темы «Функция» использовать таблицу с изображением графиков некоторых конкретных функций (рис. 29) (общую или индивидуальную), чтобы устно исследовать. Построения графиков с помощью сдвигов можно проследить с помощью программ-графпостроителей.

При наличии времени полезно предложить учащимся построить на координатной плоскости точки, соответствующие первым нескольким членам некоторой числовой последовательности, например последовательности, заданной формулой n-го члена: $a_n = 3n - 2$. Полученные точки лежат на одной прямой, но не все точки прямой соответствуют членам последовательности. Учащиеся знакомились ранее с функцией, областью определения которой являются натуральные числа и графиком которой является множество точек плоскости. Такая иллюстрация позволяет дать представление о многообразии функций и их применении.

Все задания п. 5 «Функции и графики» из упражнений для итогового повторения можно использовать на этих уроках, обратив внимание на комментарии к некоторым из них, приведённые выше. Дополнительно можно решить упражнения **754—756**, **768—770**.



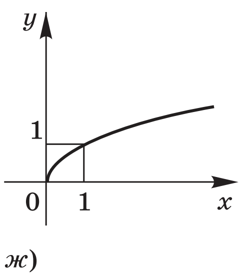


Рис. 29

5) Итоговая контрольная работа

Работа может представлять собой один из вариантов ГИА, предложенных в качестве демоверсий (части «Алгебра» и «Реальная математика»).

6) Решение задач по всему курсу алгебры VII—IX классов

На этих уроках можно использовать комплексные задания п. 7 «Итоговое повторение» учебника «Алгебра, 9». Варианты этих заданий составлены так, что, выполняя один из них, учащиеся вынуждены решать задачи разных разделов курса, а это определённым образом готовит их к выполнению экзаменационной работы. Конкретные варианты для решения на последних уроках рекомендуется подобрать по результатам анализа контрольной работы.

Указания к решениям и решения задач раздела «Задачи для внеклассной работы»

721. Так как данное число a не делится на 3, то $a = 3n + 1$ или $a = 3n - 1$, откуда $a^2 = 3m + 1$, где m — натуральное число. **722.** Воспользоваться решением задачи **721**. **723.** 1) $10^{70} - 361 = 10^{70} - 1 - 9 \cdot 40 = \underbrace{99...9}_{70\text{ цифр}} - 9 \cdot 40$. 2) $10^{80} - 298 = \underbrace{99...99}_{40\text{ цифр}} - 11 \cdot 27$. 3) Число $91^{50} - 19^{75} = (18 \cdot 5 + 1)^{50} - (18 + 1)^{75}$ делится на 18, так как при делении на 18 произведения $(18m + 1)(18n + 1)$, где m и n — натуральные числа, получается остаток, равный 1. 4) Данное число равно $(4 \cdot 19 - 1)^{26} \cdot (5 \cdot 19 - 1)^{26} + (2 \cdot 19 + 1)^{25} \cdot (3 \cdot 19 - 1)^{25}$, при делении на 19 остаток от деления первого слагаемого равен 1, а второго равен -1. **724.** Остаток от деления на 9 натурального числа равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа. Так как суммы цифр данного числа a и числа $5a$ одинаковы, то при делении на 9 чисел $5a$ и a получается один и тот же остаток, а их разность $4a$ делится на 9, откуда следует, что a делится на 9 (4 не делится на 9). **725.** По условию $m = 1 + p \cdot 3^n$, где p — натуральное число. Поэтому число $m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1) = p \cdot 3^n(m^2 + m + 1)$ делится на 3^{n+1}, так как $m^2 + m + 1$ делится на 3. **726.** При любых целых x и y числа $x + y$ и $x - y$ либо оба делятся на 2, либо оба не делятся на 2. В первом случае их произведение делится на 4, а число 1982 не делится на 4; во втором случае $(x + y)(x - y)$ не делится на 2, а 1982 делится на 2. **727.** Если существуют натуральные числа x и y, такие, что верно равенство $mx + ny = mn$, где m и n — взаимно простые числа, то $ny = m(n - x)$ и число y должно делиться на m, т. е. $y = mk$, где k — натуральное число. Тогда $mx + ny = mx + mkn = mn$, откуда $x + kn = n$, что невозможно ($x \geqslant 1$, $k \geqslant 1$). **728.** Если n делится на 3, то остаток от деления на 3 числа $a = 7n^2 + 1$ равен 1, а если число n не делится на 3, то остаток от деления числа a на 3 равен 2 (см. задачу **721**). **729.** Если равенство $15x^2 = 9 + 7y^2$ является верным при некоторых целых x и y, то $15x^2 - 9 = 7y^2$, откуда следует, что y делится на 3, т. е. $y = 3m$, где m — целое число. Тогда $15x^2 = 9 + 63m^2$ или $5x^2 = 3 + 21m^2$, и поэтому x делится на 3, т. е. $x = 3p$. Следовательно, $45p^2 = 3 + 21m^2$ или $15p^2 = 1 + 7m^2$, что невозможно (см. задачу **721**). **730.** Так как число $m^3 - m = (m - 1)m(m + 1)$ делится на 6, то остатки от деления на 6 чисел m^3 и m равны, и поэтому остатки от деления на 6 чисел $m^3 + n^3 +$

$+ k^3$ и $m + n + k$ также равны. **731.** Если число m не делится на 5, т. е. $m = 5k + r$, где k — неотрицательное целое число, r — одно из чисел 1, 2, 3, 4, то $m^4 = 5p + r^4 = 5q + 1$ (p и q — целые числа). **732.** 1) Число $m^6n^2 - n^6m^2 = m^2n^2(m^4 - n^4) = m^2n^2(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$ делится на 2 (если m и n — нечётные числа, то $m^2 - n^2$ — чётное число). 2) Если оба числа m, n не делятся на 3, то число $m^2 - n^2$ делится на 3 (см. задачу **721**). 3) Если оба числа m, n не делятся на 5, то число $m^4 - n^4$ делится на 5 (см. задачу **731**). **733.** $\frac{(n+1)^4 + n^4 - 1}{2} = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n^3(n + 1) + n^2(n + 1) + 2n(n + 1) = n(n + 1)(n^2 + n + 2) = n(n + 1)(n(n + 1) + 2)$. **734.** 1) Если $m \leqslant n$, то левая часть меньше или равна $n(n + 1)$. При $m \geqslant n + 1$ левая часть больше или равна $(n + 1)(n + 2)$. 2) Равенство записать в виде $m(m + 1) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1) \cdot (n(n + 1) + 2)$, используя результат задачи **733**. Далее воспользоваться задачей **734** (1). **735.** $n^3 + 6n^2 + 15n + 15 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + 3(n + 2) + 1 = (n + 2)^3 + 3(n + 2) + 1$. **736.** $a = n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. Если a — простое число, то $n^2 - n + 1 = 1$, откуда $n = 1$. **737.** Записать уравнение в виде $(x + y + 1)(x - y - 1) = 12$ и воспользоваться тем, что множители $x + y + 1$ и $x - y - 1$ — чётные числа (их разность — чётное число, правая часть уравнения — чётное число). Задача сводится к решению следующих систем:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 2, \\ x - y - 1 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 1 = 6, \\ x - y - 1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 1 = -2, \\ x - y - 1 = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 1 = -6, \\ x - y - 1 = -2. \end{cases}$$

738. Произведение четырёх последовательных натуральных чисел записать так: $(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$. Задача сводится к решению квадратного уравнения $t(t + 2) = 5040$, где $t = n^2 + 3n$. **739.** Если $P(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, то $P(0) = q$, $P(1) = m + n + p + q$, $P(-1) = -m + n - p + q$, $P(2) = 8m + 4n + 2p + q$ — числа, кратные 5. Тогда число $P(1) + P(-1) = 2n + 2q$ делится на 5, и поэтому n делится на 5. Далее на 5 делятся числа $P(2) - 2P(-1) = 10m + 2n + 4p - q$, $10m$, n и q, откуда следует, что $4p$ (а значит, и p) делится на 5. Наконец, m делится на 5, так как числа $P(1) = m + n + p + q$, n, p и q делятся на 5. **740.** Если $D = b^2 - 4ac = 63$, то b — нечётное число, т. е. $b = 2k - 1$. Тогда $(2k - 1)^2 - 4ac = 63$ или $2(k^2 - k - ac) = 31$, что невозможно. **741.** 1) Использовать равенства $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 2) Использовать равенства $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

742. 1) Будем рассматривать равенство как уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$. Так как это уравнение имеет три различных корня ($x = a$, $x = b$, $x = c$), то $A = B = C = 0$ и равенство является верным при всех значениях x. 2) Левая часть равенства совпадает с правой при $x = a$, $x = b$, $x = c$. Два многочлена не выше второй степени тождественно равны, если они принимают равные значения в трёх различных точках. **743.** 1) Записать знаменатель в виде $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)$ и использовать равенство $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. 2) Записать данное выражение в виде $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ и воспользоваться равенствами $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$, $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$. Далее привести дроби к общему знаменателю. 3) Воспользоваться равенствами $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2$, $x + 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} + 1)^2$, $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$ при $1 < x < 2$. 4) Воспользоваться формулами для разности квадратов, суммы и разности кубов двух чисел. **744.** 1) Свести уравнение к квадратному относительно $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. 2) Записать уравнение в виде $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$ и свести к квадратному относительно $t = x + \frac{1}{x}$. 3) Полагая $\sqrt{2x-5} = 2t$, записать уравнение в виде $\sqrt{(2t+1)^2} + \sqrt{(2t+3)^2} = 14$, $t \geqslant 0$. 4) Полагая $x^2 - 2x + 4 = t$, записать уравнение в виде $2\sqrt{t} - \sqrt{t+5} = 1$. **745.** 1) Свести уравнение к квадратному относительно $t = x^2 + 3x$. 2) Полагая $x - 3 = t$, получить уравнение $t(t^2 + 6t + 21) = 0$. **746.** 1) Разделить первое уравнение на второе. После преобразований получится квадратное уравнение относительно $t = \frac{x}{y}$. 2) Второе уравнение, записанное в виде $4(x + y)^2 = 9x^2y^2$, распадается на два уравнения: $2(x + y) = 3xy$ и $2(x + y) = -3xy$. Далее ввести новые неизвестные: $u = x + y$, $v = xy$. **747.** 1) Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (x+1)(y+1) = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 61, \\ xy + x + y) = 11. \end{cases}$$

Сложив уравнения второй системы, получим квадратное уравнение относительно $t = x + y$. 2) $x + y = u$, $xy = v$. 3) Умножить первое уравнение на -4, а второе на 3 и сложить. Получится квадратное уравнение относительно xy. 4) $\frac{xy}{x + 2y} = u$, $\frac{xy}{x - 2y} = v$. 5) $x + y = u$, $xy = v$. 6) Возвести оба уравнения в квадрат и сложить. В результате получится уравнение $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$, откуда $y^2 = 1$, так как $x^2 \neq 1$ в силу второго уравнения исходной системы. **748.** Если система имеет действительное решение, то при возведении в квадрат первого уравнения получаем $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$, а второе уравнение можно записать в виде $xy + yz + zx = 0$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, откуда $x = y = z = 0$, что невозможно. **749.** 1) Из системы следует, что $|y - 5| + y - 5 = 1$. Это уравнение не имеет решений при $y < 5$, а при $y \geqslant 5$ получаем $y = 5{,}5$, и тогда $|x - 1| = \frac{1}{2}$. 2) Вычитая из второго уравнения системы первое, находим $y + \sqrt{2y - x} = \sqrt{5y - x}$. Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, находим $y(y - 3 + 2\sqrt{2y - x}) = 0$. 3) Полагая $y - x = u$, запишем систему в виде $\begin{cases}\sqrt{u + 3x} = 1 + u,\\ \sqrt{u + 8x} = 4 - u.\end{cases}$ Возводя в квадрат обе части каждого из уравнений системы и исключая затем x из полученной системы, придём к уравнению $u^2 + 7u - 8 = 0$. 4) Возводя в квадрат обе части каждого из уравнений и складывая полученные уравнения, находим

$$76 - 2(x^2 + y^2) = (x + y)^2. \quad (1)$$

Перемножив почленно уравнения, получим

$$y^2 - x^2 = \sqrt{8(16 + (x + y)^2)}, \quad \text{откуда}$$

$$(x - y)^2(x + y)^2 = 8(16 + (x + y)^2). \quad (2)$$

Полагая в (1) и (2) $(x + y)^2 = u$, $(x - y)^2 = v$, придём к системе $\begin{cases}2u + v = 76,\\ uv = 8(u + 16).\end{cases}$ **750.** 1) $D = (4 + 2r)^2 - 4(5 + 4r) = 4(r^2 - 1) = 0$; 2) $x_1 + x_2 = -(4 + 2r) = 0$, $D > 0$. **751.** Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ неотрицательны тогда и только тогда, когда выполняются условия $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p^2 - 4q \geqslant 0$. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{a} \leqslant 0, \\ \dfrac{a+2}{a} \geqslant 0, \\ \dfrac{(a+3)^2}{a^2} - \dfrac{a+2}{a} \geqslant 0. \end{cases}$$

При $a = 0$ уравнение имеет один отрицательный корень. **752.** $D = a^2 - 4a > 0$, $x_1^2 x_2 = ax_1 = a^2$; $a \neq 0$ (если $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$). **753.** Ветви параболы $y = x^2 + ax + a^2 + 6a$ направлены вверх; $y < 0$ при всех $x \in (1; 2)$ тогда и только тогда, когда $y(1) = a^2 + 7a + 1 \leqslant 0$ и $y(2) = a^2 + 8a + 4 \leqslant 0$. **754.** Если $a = 0$, то уравнение имеет действительный корень, так как $bc + c^2 \leqslant 0$. Если $a \neq 0$, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox, так как $c(a + b + c) = y(0)y(1) \leqslant 0$. **755.** $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p^2$, $(x_1 + 1)\cdot(x_2 + 1) = pq$; $-p + 2 = p^2$, $q - p + 1 = pq$. **756.** Так как $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, то исходное неравенство сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (r + 2) + 4 > 0, \\ 4x^2 + (r - 3)x + 1 > 0. \end{cases}$$

Далее воспользоваться тем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} (r + 2)^2 - 16 < 0, \\ (r - 3)^2 - 16 < 0, \end{cases}$$ которую можно записать так: $$\begin{cases} |r + 2| < 4, \\ |r - 3| < 4. \end{cases}$$

757. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ (a + 2)^2 - 2a^2 - 4a < 0. \end{cases}$$

758. 1) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 17 = (x - 1)^2 + 4(y - 2)^2$; 2) $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 6y + 13 = (y - 2x + 3)^2 + (x - 2)^2$. **759.** 1) $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c + 14 = (a - 1)^2 + (b + 2)^2 + (c - 3)^2$. 2) Исходное неравенство, записанное в виде $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geqslant 0$, является верным, так как его левая часть равна $\frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$. 3) Исходное неравенство можно записать в виде $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$. **760.** 1) Левая часть неравенства содержит n слагаемых, каждое из которых (кроме последнего) больше последнего. 2) Воспользоваться неравенством $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2$. **761.** 1) Воспользоваться равенством

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right)$. 2) Используя неравенство $\frac{x + y + z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, справедливое при любых неотрицательных x, y, z (задача **761**, 1), получить неравенства

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \quad ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

3) Перемножить неравенства

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geqslant 2\sqrt{ac}.$$

4) Полагая $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{c+a-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$, запишем неравенство в виде

$$8xyz \leqslant abc. \tag{1}$$

Пусть хотя бы одно из чисел x, y, z (например, x) отрицательно, тогда $a > b + c$, откуда $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ (по условию $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$), $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $xyz \leqslant 0$ и неравенство (1) является верным. Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то, используя неравенство

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geqslant 8xyz, \tag{2}$$

доказанное в задаче **761**, 3), и учитывая, что $x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$, установим, что из (2) следует неравенство (1). **762.** 1) Воспользоваться неравенствами $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ab}}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{\sqrt{bc}}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ac}}$.

2) Полагая $x = a + b$, $y = b + c$, $z = a + c$, записать неравенство в виде $(x + y + z)(xy + xz + yz) \geqslant 9xyz$ и воспользоваться результатом задачи **761**, 2). **763.** Возводя обе части исходного неравенства в квадрат, получаем неравенство $\frac{ad+bc}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$, которое является верным, так как для любых положительных чисел x, y справедливо неравенство $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. **764.** Воспользоваться неравенствами $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$, $1 + b \geqslant 2\sqrt{b}$, $1 + c \geqslant 2\sqrt{c}$. **765.** Если $x \leqslant 0$, то $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geqslant 1$. Если $0 < x < 1$, то $P(x) = 1 - x + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0$. Если $x \geqslant 1$, то $P(x) = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 \geqslant 1$. **766.** $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. **767.** 1) $a^3 - 2a^2 + 5a + 26 = a^3 + 2a^2 - 4(a^2 + 2a) + 13(a + 2) = (a + 2)(a^2 - 4a + 13)$, $a^3 - 5a^2 + 17a - 13 = a^3 - a^2 - (4a^2 - 4a) + 13(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 4a + 13)$. 2) $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2 = a^2(2a^2 + a + 2) + 2a^2 + a + 2 = (2a^2 + a + 2)(a^2 + 1)$, $2a^3 - a^2 + a - 2 = 2a^2(a - 1) + a^2 + a - 2 = (a - 1)(2a^2 + a + 2)$.

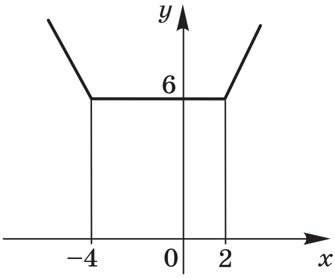


Рис. 30

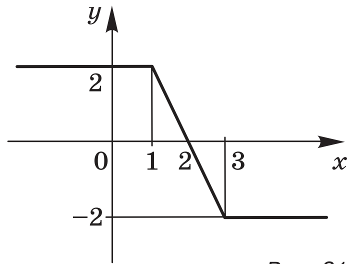


Рис. 31

768. 1) $y = \begin{cases} -2x - 2, & \text{если } x < -4, \\ 6, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x + 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

График изображён на рисунке 30.

2) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 1, \\ 4 - 2x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -2, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

График изображён на рисунке 31.

3) $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} =$

$= |x + 2| + |x - 3| =$

$= \begin{cases} 1 - 2x, & \text{если } x < -2, \\ 5, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

График изображён на рисунке 32.

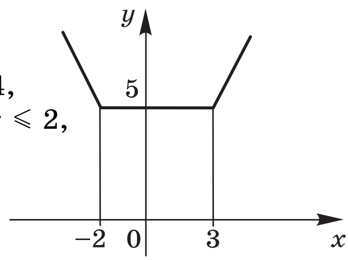


Рис. 32

4) $y = \begin{cases} -6, & \text{если } x < -5, \\ 2x + 4, & \text{если } -5 \leqslant x \leqslant 1, \\ 6, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

График изображён на рисунке 33.

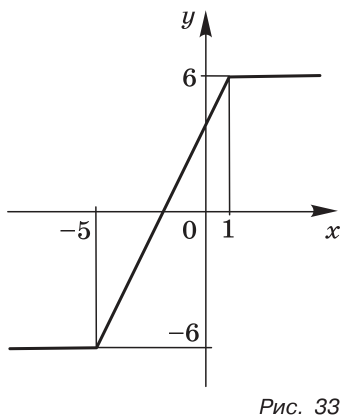


Рис. 33

5) $y = -3 + \frac{1}{1-x}$ при $x < 1$

и $y = 3 + \frac{1}{x-1}$ при $x > 1$.

График изображён на рисунке 34.

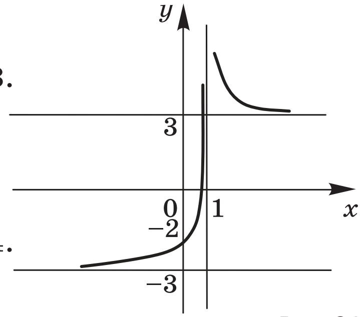


Рис. 34

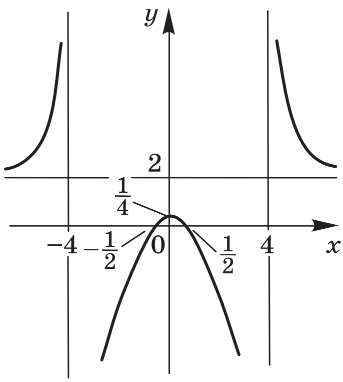


Рис. 35

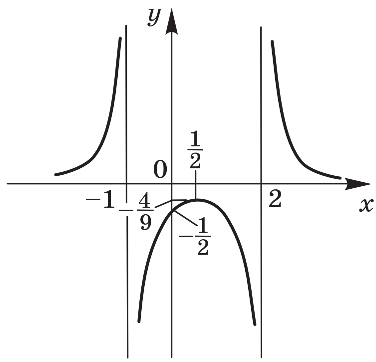


Рис. 36

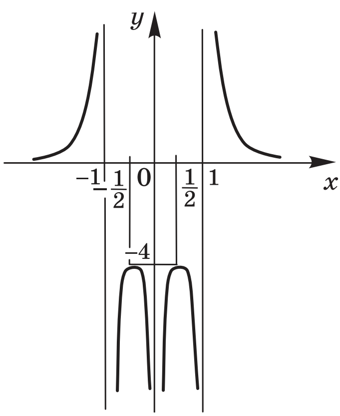


Рис. 37

6) Функция чётная, $y = 2 + \frac{7}{x-4}$ при $x > 0$. График изображён на рисунке 35. 7) $y = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$. График симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, изображён на рисунке 36. 8) Функция чётная, $y = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{x(x-1)}$ при $x > 0$. График изображён на рисунке 37. **769.** 1) Записать неравенство в следующем виде: $\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}{\left(x-\frac{2}{5}\right)(x-1)} < 0$. При решении этого неравенства методом интервалов учесть, что $\frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{2}{5}$, так как $\frac{1}{6} > \frac{4}{25}$. 2) Преобразовать исходное неравенство к виду $\frac{\left(x+\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)}{(x+3)(x-4)} > 0$. 3) Исходное неравенство можно записать в виде $\frac{(x^2-4)(x^2+1)}{(x^2+9)(x^2-1)} > 0$, откуда $\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)} > 0$.

4) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = x^2(x - 5) - (x - 5) = (x - 5)(x^2 - 1)$, $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2(x + 2) - 9(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 9)$. Поэтому исходное неравенство можно записать в виде $\frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(x+3)(x+2)(x-3)} < 0$. 5) Если $x < 2$, то неравенство является неверным. Если $2 \leqslant x \leqslant 4$, то неравенство можно записать в виде $x^2 - x - 6 \geqslant 0$. Если $x > 4$, то неравенство преобразуется к виду $(x - 1)(x - 6) \leqslant 0$. 6) Число $x = -1$ не является решением неравенства, а при $x \neq -1$ исходное неравенство можно записать так: $|x - 3| < 1$. **770.** 1) Неравенство имеет смысл, если $|x| \leqslant 1$, и его можно последовательно преобразовать так: $\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}$, $x^2 > \frac{3}{4}$, $|x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) Неравенство имеет смысл, если $|x| \leqslant 2$, и его можно преобразовать к виду $5x^2 + 8x > 0$. 3) Значения x, такие, что $x \leqslant -4$, не являются решениями неравенства. Если $x \geqslant -4$ и $x^2 - 6x \geqslant 0$, то неравенство можно последовательно преобразовать так: $x^2 - 6x < (8 + 2x)^2$, $(3x + 32) \times$ $\times (x + 2) > 0$. 4) Если $x \geqslant \frac{2}{3}$, то исходное неравенство является верным для x, таких, что $9x^2 - 9x - 4 \leqslant 0$. Если $x < \frac{2}{3}$ и $9x^2 - 9x - 4 \leqslant 0$, т. е. при $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, то исходное неравенство можно заменить каждым из неравенств $(2 - 3x)^2 < 4 + 9x - 9x^2$, $x(6x - 7) < 0$. 5) Неравенство имеет смысл при $x < -\frac{3}{2}$ и при $x > \frac{1}{3}$. При $x < -\frac{3}{2}$ неравенство является верным, а при $x > \frac{1}{3}$ его можно заменить каждым из неравенств $\sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}} < 2$, $\frac{2x+3}{3x-1} < 4$, $\left(x - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$. 6) Неравенство имеет смысл при всех x, таких, что $x \geqslant -3$, $x \neq 1$. Если $x \in [-3; 1)$, то исходное неравенство можно заменить каждым из неравенств $3\sqrt{x + 3} > x + 5$, $9(x + 3) > (x + 5)^2$, $(x + 2)(x - 1) < 0$. Если $x > 1$, то исходное неравенство преобразуется к виду $(x + 2)(x - 1) > 0$. **771.** По свойствам прогрессий искомые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ (x + 2)(z + 7) = (y + 2)^2, \\ x + y + z = 24. \end{cases}$$

Исключив из этой системы x и y, получим уравнение $z^2 - 11z - 26 = 0$.

772. Искомые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ xz = y^2, \\ (x - 1) + (z - 9) = 2(y - 3), \end{cases}$$

откуда следует, что $x^2 - 20x + 64 = 0$. **773.** Искомые числа x, y, z, t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xz = y^2, \\ y + t = 2z, \\ x + t = 21, \\ y + z = 18, \end{cases}$$

откуда следует, что $4y^2 - 69y + 270 = 0$, $y_1 = 6$, $y_2 = \frac{45}{4}$.
774. Нужно доказать, что

$$\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \qquad (1)$$

если $b - a = c - b = d$, т. е. $c - a = 2d$ (d — разность исходной арифметической прогрессии). Если $d = 0$, то $a = b = c$ и равенство (1) является верным. Если $d \neq 0$, то правая часть (1) равна $\frac{\sqrt{c} + \sqrt{b}}{c - b} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d} = A$.

Левая часть (1) также равна A, так как $\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{2(\sqrt{c} - \sqrt{a})}{c - a} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d}$. **775.** Если d — разность арифметической прогрессии, S — левая часть равенства и $d \neq 0$, то

$$S = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d},$$

так как $a_k - a_{k-1} = d$ при $k = 2, 3, \ldots, n$. Правую часть равенства можно преобразовать так:

$$\frac{n - 1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = \frac{(n - 1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}.$$

776. Пусть d — разность арифметической прогрессии. 1) Тогда из равенства $S_n = S_m$ следует, что

$$a_1 + \frac{d}{2}(n + m + 1) = 0, \qquad (1)$$

так как $n \neq m$ (при $n = m$ задача не имеет смысла). С другой стороны, $S_{m+n} = \left(a_1 + \frac{m + n - 1}{2} \cdot d\right)(m + n)$ и из (1) следует, что $S_{m+n} = 0$. 2) Из равенства $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ следует, что $\frac{2a_1 + d(m - 1)}{2a_1 + d(n - 1)} = \frac{m}{n}$ или

$$2a_1(n - m) = d(n - m). \qquad (2)$$

Если $n = m$, то равенство $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ является верным. Если $n \neq m$, то из (2) следует, что $2a_1 = d$, и тогда $\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + d(m-1)}{a_1 + d(n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}$. 3) $S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $a_{n+1} + a_{n+3} = 2a_{n+2}$.

4) $\frac{a_k + a_{2k+n}}{2} = a_{n+k}$. (3)

Полагая в (3) $k = 1, 2, ..., n$ и складывая соответствующие равенства, получаем $\frac{S_n + S_{3n} - S_{2n}}{2} = S_{2n} - S_n$. **777.** 1) $S_{n+k} = S_n + q^n(b_1 + b_1q + ... + b_1 \cdot q^{k-1}) = S_n + q^nS_k$, где b_1 — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии. 2) $S_{2n} - S_n = q^nS_n$, $S_{3n} - S_{2n} = q^{2n}S_n$. **778.** $S_n(1 - x) = 1 + x + ... + x^n - (n + 1)x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - (n + 1)x^{n+1}$.

779. $S_n = 6 + 66 + ... + \underbrace{666...6}_{n \text{ цифр}} = \frac{6}{9}\left(9 + 99 + ... + \underbrace{999...9}_{n \text{ цифр}}\right) = \frac{2}{3}(10 + 10^2 + ... + 10^n - n)$. **780.** 1) $x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = ... = a^{k-2}(x_2 - x_1)$, т. е.

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Полагая в (1) $k = 2, 3, ..., n$ и складывая соответствующие равенства, получаем $x_n - x_1 = (x_2 - x_1)(1 + a + a^2 + ... + a^{n-2}) = ((a - 1)x_1 + b)\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$, если $a \neq 1$. 2) $S_n = x_1 + a(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}) + (n - 1)b = x_1 + a(S_n - x_n) + (n - 1)b$. **781.** Если $z_n = x_n - x_{n-1}$, то $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} + 1$, т. е. $z_{n+1} = z_n + 1$, откуда

$$z_n = z_2 + n - 2. \qquad (1)$$

Используя (1) и равенство $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_2 - x_1) + x_1$, получаем $x_n = z_n + z_{n-1} + ... + z_2 + x_1 = (n - 1)z_2 + (n - 2) + (n - 3) + ... + 2 + 1 + x_1 = (n - 1)(x_2 - x_1) + x_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. **782.** Из условий задачи следует, что $|a_n| = 1$ при любом n. Кроме того, $a_5 = a_1a_2 = 1$, $a_6 = a_2a_3 = 1$, $a_7 = a_3a_4 = -1$, $a_8 = a_4a_5 = -1$. Докажем, что

$$a_n = a_{n-15}, \; n \geqslant 20. \qquad (1)$$

Используя формулу $a_k = a_{k-4}a_{k-3}$ ($k \in \boldsymbol{N}$), получаем $a_n = a_{n-3}a_{n-4} = a_{n-6}a_{n-7}a_{n-7}a_{n-8} = a_{n-6}a_{n-8} = a_{n-9} \times a_{n-10}a_{n-11}a_{n-12} = a_{n-12}a_{n-13}a_{n-10}a_{n-11}a_{n-12} = a_{n-10} \times a_{n-11}a_{n-13} = a_{n-13}a_{n-14}a_{n-11}a_{n-13} = a_{n-11}a_{n-14} =$

$= a_{n-14}a_{n-15}a_{n-14} = a_{n-15}$, так как $a_k^2 = 1$ $(k \in N)$. Полагая в (1) $n = 2000$ и учитывая, что $2000 = 15 \cdot 133 + 5$, получим $a_{2000} = a_5 = 1$. **783.** Исходное равенство запишем в виде

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}) \tag{1}$$

и обозначим $y = x_k - \alpha x_{k-1}$. Тогда получим $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-2}y_2$,

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-2}y_2. \tag{2}$$

Если $z_n = \frac{x_n}{\beta^{n-1}}$, то равенство (2) примет вид $z_n = \frac{\alpha}{\beta}z_{n-1} + \frac{y_2}{\beta}$.

Используя результат задачи **780**, получаем $z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 +$ $+ \frac{z_2}{\beta} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}$. Остаётся выразить z_n через x_n, z_1 и y_2 через x_1 и x_2. **784.** Если s — расстояние от A до B, u — собственная скорость катера, v — скорость течения реки, то $\frac{s}{u+v} = a$, $\frac{s}{u-v} = b$, откуда $\frac{u}{s} + \frac{v}{s} = \frac{1}{a}$, $\frac{u}{s} - \frac{v}{s} = \frac{1}{b}$. Искомое время равно $\frac{s}{v}$. **785.** Введём обозначения s км — расстояние от A до B; u, v, w км/ч — скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста соответственно; t ч — время от начала движения мотоциклиста, через которое все трое оказались на одинаковом расстоянии от пункта A. По первому условию задачи должно выполняться равенство

$$wt = v(t + 0{,}5) = u(t + 2{,}5), \tag{1}$$

а по второму условию — равенство

$$\frac{s}{u} - \frac{s}{w} = 3{,}5. \tag{2}$$

В задаче требуется найти время $T = \frac{s}{u} - \frac{s}{v} - 2$. Из равенства (1) следует, что

$$\frac{s}{wt} = \frac{s}{v(t+0{,}5)} = \frac{s}{u(t+2{,}5)}. \tag{3}$$

Введём обозначения: $\frac{s}{u} = x$, $\frac{s}{v} = y$, $\frac{s}{w} = z$. Тогда система уравнений (2), (3) примет вид

$$\begin{cases} x - z = 3{,}5, \\ \frac{z}{t} = \frac{y}{t+0{,}5} = \frac{x}{t+2{,}5}. \end{cases} \tag{4}$$

Из уравнений $x - z = 3{,}5$, $\frac{z}{t} = \frac{x}{t+2{,}5}$ получаем $x = \frac{7}{5}(t +$ $+ 2{,}5)$. Из уравнения $\frac{y}{t+0{,}5} = \frac{x}{t+2{,}5}$ получаем $y = \frac{7}{5}(t + 0{,}5)$, поэтому $x - y = \frac{14}{5}$, $T = \frac{14}{5} - 2$, $T = \frac{4}{5}$ ч, т. е. $T = 48$ мин.

786. Если x и y — масса меди и масса цинка в сплаве, то $\begin{cases} x - y = 640, \\ x + y - \frac{6}{7}x - \frac{3}{5}y = 200. \end{cases}$ Отсюда найдём массу сплава $x + y$. **787.** Если v — скорость пешехода, S — путь AB, x — время от начала движения до встречи велосипедиста и пешехода, то $xv + x3v = s$, т. е. $\frac{S}{v} = 4x$, $\frac{S}{v} - \frac{2(S - xv)}{3v} = 2$. Отсюда найдём искомое время x. **788.** *1-й способ*. При движении пловца как по течению реки, так и против течения его собственная скорость равна скорости пловца в стоячей воде. Поэтому время, необходимое пловцу для того, чтобы после поворота догнать лодку, равно времени, в течение которого пловец с момента встречи плыл против течения, т. е. равно $2m$ мин. За это время лодка прошла путь s м. Поэтому скорость течения реки, равная скорости пустой лодки, есть $\frac{s}{2m}$ м/мин. *2-й способ*. Если x — скорость течения реки (скорость лодки), v — скорость пловца в стоячей воде, то $\frac{s - mx}{x} = \frac{s + m(v - x)}{v + x}$. Относительно воды пловец проплыл после встречи с лодкой такое же расстояние, как и после поворота до момента, когда он догнал лодку. Поэтому от момента встречи с лодкой до момента, когда пловец догнал лодку, прошло $2t$ мин. За это время лодка прошла s м, поэтому скорость течения реки равна $\frac{s}{2t}$ м/мин.
789. Пусть x км — расстояние, которое прошёл пешеход по равнине, y км — расстояние, которое прошёл пешеход в гору, z км — расстояние, которое прошёл под гору пешеход на пути от A до B. Тогда $y + z = 11{,}5 - x$. На путь от A до B и обратно пешеход затратил $\frac{2x}{4} + \frac{y + z}{3} + \frac{y + z}{5} = 6$, т. е. 6 ч, поэтому $\frac{x}{2} + \frac{11{,}5 - x}{3} + \frac{11{,}5 - x}{6} = 6$, откуда $x = 4$ км.
790. Если x, y и z — скорости первого пешехода, второго пешехода и туриста соответственно, то $z = 2{,}5y$, $x \cdot \frac{1}{3} = z \cdot \frac{1}{4} = \frac{2{,}5y}{4}$, откуда найдём $\frac{x}{y}$. **791.** Пусть S — путь AB, x и y — скорости первого и второго пешеходов соответственно, C — место встречи пешеходов. Тогда $AC = \frac{S}{2} + \frac{1}{2} = \frac{S + 1}{2}$, $BC = \frac{S - 1}{2x}$, $\frac{S + 1}{2} = \frac{S - 1}{2y}$, откуда

$$\frac{S+1}{S-1}=\frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Кроме того, $\frac{S-1}{2x}=\frac{3}{4}$, $\frac{S+1}{2y}=\frac{4}{3}$, откуда

$$\frac{16}{9}\cdot\frac{S-1}{S+1}=\frac{x}{y}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдём s. **792.** Если v — скорость пешехода на подъёме, x — путь AB, то $\begin{cases}\frac{x}{v}+\frac{s-x}{v+a}=t,\\ \frac{s-x}{v}+\frac{x}{v+a}=\frac{t}{2}.\end{cases}$ Сложив уравнения этой системы, получим уравнение, которое можно записать в следующем виде: $3tv^2+(3at-4s)v-2sa=0$. **793.** Если u, v, w — скорости первого, второго и третьего велосипедистов соответственно, τ — время от начала движения первого велосипедиста до того момента, когда его догнал третий велосипедист, то $w=\frac{2}{3}v$, $u\tau=w(\tau-1)=\frac{3}{2}v(\tau-1)$, $u(\tau+2)=v(\tau-1)$, откуда следует, что $\frac{\tau}{\tau+2}=\frac{3(\tau-1)}{2(\tau+1)}$, $\tau=2$. Искомая величина $\frac{u}{w}=\frac{\tau-1}{\tau}=\frac{1}{2}$. **794.** Если v — объём раствора в колбе, x — процент соли, содержащейся в растворе, то $\frac{v\cdot\frac{x}{100}}{v-\frac{v}{10}}=\frac{x+3}{100}$, откуда $x=27\,\%$.

795. Если x — количество кубических метров древесины, которые должна была заготовить бригада по плану, t — число рабочих дней по плану, то $\begin{cases}xt=216,\\ 3x+(x+8)(t-4)=232,\end{cases}$ откуда найдём x. **796.** Если v — скорость поезда по расписанию, то $\frac{60}{v}+\frac{1}{12}+\frac{60}{v+10}=\frac{120}{v}$, откуда найдём v. **797.** Пусть s — расстояние от A до B, t_0 и t_1 — время (в часах) прохождения пути AB соответственно автобусом и катером, t_2 — время, за которое катер проходит путь от B до A. Тогда $\begin{cases}\frac{5}{9}t_0=t_1+\frac{4}{9}t_2,\\ \frac{9}{8}t_0=t_1+t_2+\frac{7}{8}t_1,\\ t_0=t_1+\frac{4}{15}.\end{cases}$ Из этой системы найдём $t_0=\frac{2}{5}$ ч, $t_1=\frac{2}{15}$ ч, $t_2=\frac{1}{5}$ ч. Автобус прибывает в пункт A, выполнив чётное число рейсов (m рейсов от A до B и m рейсов

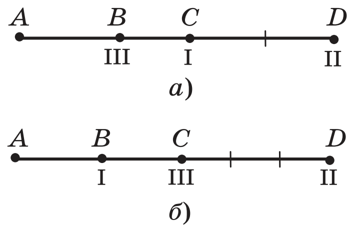


Рис. 38

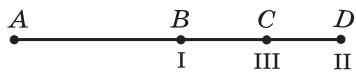


Рис. 39

от B до A), и затрачивает при этом время $2mt_0$. Возвращаясь в пункт A, катер также делает чётное число $2n$ рейсов и затрачивает время $nt_1 + nt_2$. Автобус и катер одновременно могут оказаться в пункте A только в том случае, если найдутся натуральные числа m и n, такие, что $2mt_0 = n(t_1 + t_2)$, т. е. $\frac{4}{5}m = \frac{1}{3}n$, или $n = \frac{12}{5}m$. Наименьшее возможное целое $n = 12$, и тогда $m = 5$, а одновременно автобус и катер попадут в пункт A первый раз, затратив время $2mt_0 = n(t_0 + t_1) = 4$ ч. **798.** Пусть v — скорость k-го автомобиля ($k = 1, 2, 3$) в км/ч. Так как на равном расстоянии от первого и второго третий автомобиль оказался позже, чем в первом положении (ближе к первому), то $v_1 < v_2 < v_3$. Возможны два варианта первого расположения автомобилей (через час после старта первого), указанные на рисунке 38. На равном расстоянии от первых двух третий автомобиль может оказаться лишь в одном положении (рис. 39). Обозначим через x искомое время (в часах). Тогда для варианта, указанного на рисунке 38, *а*, имеем

$$v_2(x + 1) - v_3 = 3(v_1(x + 1) - v_3), \qquad (1)$$

а для ситуации на рисунке 38, *б* получаем

$$v_2(x + 1) - v_3 = 3(v_3 - v_1(x + 1)). \qquad (2)$$

Из рисунка 39 следует, что

$$(v_1 + v_2)\left(x + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}v_3. \qquad (3)$$

Кроме того, по условиям задачи

$$\frac{7}{4}v_1 = \left(\frac{7}{4} - x\right)v_3. \qquad (4)$$

Задача сводится к решению систем (1), (3), (4) и (2), (3), (4). Рассмотрим первую из этих систем, записав её в виде

$$\begin{cases} 2v_3 = (x + 1)(3v_1 - v_2), & (5) \\ 8v_3 = (3x + 4)(v_1 + v_2), & (6) \\ (7 - 4x)v_3 = 7v_1. & (7) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнение (6) на уравнение (5), получаем $4(x + 1)(3v_1 - v_2) = (3x + 4)(v_1 + v_2)$ или

$$v_1(9x + 8) = (7x + 8)v_2. \qquad (8)$$

Аналогично, разделив уравнение (5) на уравнение (7), преобразуем полученное уравнение к виду

$$(12x^2 - 9x - 7)v_1 = (4x^2 - 3x - 7)v_2. \qquad (9)$$

Наконец, разделив (9) на (8), получим уравнение, которое можно записать так: $24x^2 + 14x - 17 = 0$, откуда $x = \frac{\sqrt{457} - 7}{24}$. Аналогично из системы уравнений (2), (3), (4) найдём $x = 1$. **799.** Пусть C — место встречи велосипедиста с первым пешеходом (рис. 40), $AC = x$, $AB = s$, D — место, где велосипедист догнал второго пешехода, v — скорость велосипедиста, w — скорость каждого из пешеходов. Тогда $BC = s - x$, $CD = 1{,}2v$,

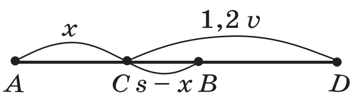


Рис. 40

$$\frac{s}{v} = 0{,}5, \qquad (1)$$

а искомое время $t = \frac{x}{v}$. Из условий задачи следует, что

$$\frac{x}{v} = \frac{s - x}{w}, \qquad (2)$$

$$\frac{x}{v} + 1{,}2 = \frac{1{,}2v + x - s}{w}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (1) получаем

$$\frac{t}{0{,}5 - t} = \frac{v}{w}, \qquad (4)$$

и из уравнений (3) и (1) находим

$$t + 1{,}2 = \frac{(1{,}2 + t - 0{,}5)v}{w}. \qquad (5)$$

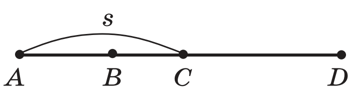


Рис. 41

Наконец, из уравнений (4) и (5) следует, что $\frac{t + 1{,}2}{t + 0{,}7} = \frac{t}{0{,}5 - t}$, откуда $t = 0{,}3$. **800.** Пусть C — место, где мотоциклист догнал велосипедиста (рис. 41), v и w — скорости мотоциклиста и велосипедиста соответственно, D — место, где оказался бы велосипедист в случае, когда мотоциклист выезжает из A и прибывает в B. Тогда $DB = b$, $BC = a$ и из условий задачи следует, что $\frac{S + a}{v} = \frac{a}{w}$, $\frac{S}{v} = \frac{S - b}{w}$, откуда получаем $\frac{S + a}{a} = \frac{S}{S - b}$. **801.** Если u и v — скорости автобуса и автомобиля соответственно, $AB = S$, то

$$\begin{cases} 42(u + v) = S, & (1) \\ 154(v - u) = S. & (2) \end{cases}$$

Пусть t и τ — время, которое затрачивают на путь S автобус и автомобиль соответственно. Тогда $t = \frac{S}{u}$, $\tau = \frac{S}{v}$ и из системы (1), (2) следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{42}, \\ \dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{154}, \end{cases}$$

откуда находим $\tau = 66$, $t = \dfrac{231}{2}$ мин. В пункт A автобус и автомобиль прибывают, сделав $2m$ и $2n + 1$ рейсов соответственно (рейс — поездка из одного пункта в другой). Участники движения окажутся одновременно в пункте A, если $2mt = (2n + 1)\tau$, где $m \in N$, $n \in N$. Следовательно, $m = \dfrac{2(2n+1)}{7}$. Так как 2 и 7 взаимно простые числа, то число $2n + 1$ должно делиться на 7. При этом наименьшее n равно 3, и тогда $m = 2$. Искомое время $2mt = 462$ мин.

802. Пусть $AB = S_1$, $BC = S_2$, x — собственная скорость буксира на участке AB, v — скорость течения реки. По условиям задачи составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{v+x} + \dfrac{S_2}{v+\frac{5}{3}x} = 4, & (1) \\ \dfrac{S_1+S_2}{2x-v} = 4, & (2) \\ \dfrac{S_2}{\frac{5}{3}x - v} = 3. & (3) \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{v}{S_1} = y_1$, $\dfrac{x}{S_1} = z_1$, $\dfrac{v}{S_2} = y_2$, $\dfrac{x}{S_2} = z_2$.

Тогда система (1)—(3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y_1+z_1} + \dfrac{1}{y_2+\frac{5}{3}z_2} = 4, & (4) \\ \dfrac{1}{2z_1-y_1} + \dfrac{1}{2z_2-y_2} = 4, & (5) \\ \dfrac{1}{\frac{5}{3}z_2 - y_2} = 3, & (6) \end{cases}$$

где

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}. \qquad (7)$$

В задаче требуется найти величину $t = \dfrac{s_1}{v+x} = \dfrac{1}{y_1+z_1}$. Из уравнения (6) следует, что

$$z_2 = \frac{1+3y_2}{5}, \qquad (8)$$

и поэтому уравнения (7), (4), (5) можно с помощью равенства (8) записать в виде

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{5y_2}{1+3y_2}, \tag{9}$$

$$2z_1 - y_1 = \frac{2+y_2}{1+3y_2}, \tag{10}$$

$$y_1 + z_1 = \frac{6y_2+1}{24y_2+1}. \tag{11}$$

Разделив равенство (10) на равенство (11) почленно и воспользовавшись равенством (9), получим

$$\frac{2 - \dfrac{y_1}{z_1}}{\dfrac{y_1}{z_1} + 1} = \frac{2+y_2}{1+8y_2} = \frac{(2+y_2)(24y_2+1)}{(3+y_2)(6y_2+1)},$$

откуда $84y_2^2 + 5y_2 - 1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{12}$, а из равенства (11) следует, что $y_1 + z_1 = \frac{1}{2}$, и поэтому $t = 2$ ч.

Оглавление

3f5fec97-be89-11e5-9b98-0050569c7d18

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

Методические рекомендации

9 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. Н. Сорокина, И. В. Рекман*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Техническое редактирование
и компьютерная вёрстка *О. Ю. Мызниковой*
Корректор *А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД №05824 от 12.09.01. Подписано в печать 01.06.16. Формат $60 \times 90\,{}^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура SchoolBook. Уч.-изд. л. 9,18. Тираж 50 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в типографии «Onebook» ООО «Сам Полиграфист».
129090, Москва, Протопоповский пер., 6. Тел.: +7(495) 545-37-10.
E-mail: indo@onebook.ru
Сайт: www.onebook.ru