МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10

класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику
А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

2-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21
Б94

Пособие содержит примерное планирование учебного материала, методические рекомендации к каждому параграфу, комментарии к упражнениям и контрольные работы.

Учебное издание

Буцко Елена Владимировна
Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
Алгебра и начала математического анализа
10 класс

Углублённый уровень

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Дата подписания к использованию 15.02.2023.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-108884-7

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках алгебры и начал математического анализа в 10 классе.

В разделе **«Примерное поурочное планирование учебного материала»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы.

Раздел **«Методические рекомендации по организации учебной деятельности»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для домашней работы указаны из учебника «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка, и др.; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Самостоятельные и контрольные работы. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.). Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности.

Материал, рассмотренный в главе 6 учебника, не является обязательным для изучения. Он может быть использован для формирования элективного курса, проведения факультативных занятий и организации проектной работы. Также материал этой главы, может быть предложен для самостоятельного изучения некоторым (наиболее подготовленным) учащимся.

Технологические карты являются эффективной помощью учителю при организации учебной деятельности, при этом нужно учитывать, что выполнение объёма заданий на уроке и дома должно корректироваться учителем в зависимости уровня математической подготовки учащихся.

Раздел **«Контрольные работы»** состоит из 9 контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа содержит 4 варианта. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** представлены методы контроля в учебном процессе.

В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.

В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование учебного материала

I вариант: 4 часа в неделю, всего 140 часов,
II вариант: 5 часов в неделю, всего 175 часов

Номер параграфа	Номер урока		Содержание учебного материала	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
Глава 1. Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях				**20**	**23**
1	1–2	1–2	Множества, операции над множествами	2	2
2	3–4	3–4	Конечные и бесконечные множества	2	2
3	5–6	5–7	Высказывания и операции над ними	2	3
4	7–8	8–9	Предикаты. Операции над предикатами. Виды теорем	2	2
	9	10	Контрольная работа № 1	1	1
5	10–12	11–13	Функция и её свойства	3	3
6	13–14	14–15	Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований	2	2
7	15–16	16–18	Обратная функция	2	3
8	17–19	19–22	Метод интервалов	3	4

Продолжение

Номер параграфа	Номер урока		Название параграфа	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
	20	23	Контрольная работа № 2	1	1
Глава 2. Степенная функция				**21**	**26**
9	21	24	Степенная функция с натуральным показателем	1	1
10	22	25	Степенная функция с целым показателем	1	1
11	23–25	26–29	Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$	3	4
12	26–28	30–33	Свойства корня n-й степени	3	4
	29	34	Контрольная работа № 3	1	1
13	30–31	35–36	Степень с рациональным показателем и её свойства	2	2
14	32–34	37–40	Иррациональные уравнения	3	4
15	35–37	41–44	Различные приёмы решения иррациональных уравнений и их систем	3	4
16	38–40	45–48	Иррациональные неравенства	3	4
	41	49	Контрольная работа № 4	1	1

Глава 3. Тригонометрические функции				**31**	**35**
17	42–43	50–51	Радианная мера угла	2	2
18	44–45	52–53	Тригонометрические функции числового аргумента	2	2
19	46–47	54–55	Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций	2	2
20	48–49	56–57	Периодические функции	2	2
21	50–51	58–60	Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$	2	3
22	52–53	61–63	Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	2	3
	54	64	Контрольная работа № 5	1	1
23	55–57	65–68	Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	3	4
24	58–60	69–71	Формулы сложения	3	3
25	61–62	72–73	Формулы приведения	2	2
26	63–67	74–78	Формулы двойного, тройного и половинного углов	5	5
27	68–71	79–83	Формулы для преобразования суммы, разности и произведения тригонометрических функций	4	5
	72	84	Контрольная работа № 6	1	1

Окончание

Номер параграфа	Номер урока		Название параграфа	Количество часов	
	I вариант	II вариант		I вариант	II вариант
Глава 4. Тригонометрические уравнения и неравенства				**24**	**32**
28	73–75	85–88	Уравнение $\cos x = b$	3	4
29	76–77	89–91	Уравнение $\sin x = b$	2	3
30	78	92–93	Уравнения $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$	1	2
31	79–82	94–98	Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$	4	5
32	83–86	99–103	Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим	4	5
33	87–90	104–108	Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители. Применение ограниченности тригонометрических функций	4	5
34	91–92	109–111	О равносильных переходах при решении тригонометрических уравнений	2	3
35	93–95	112–115	Тригонометрические неравенства	3	4
	96	116	Контрольная работа № 7	1	1
Глава 5. Производная и её применение				**33**	**42**

36	97–98	117–119	Определение предела функции в точке и функции, непрерывной в точке	2	3
37	99	120	Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции	1	1
38	100–102	121–124	Понятие производной	3	4
39	103–106	125–129	Правила вычисления производных	4	5
40	107–110	130–134	Уравнение касательной	4	5
	111	135	Контрольная работа № 8	1	1
41	112–115	136–140	Признаки возрастания и убывания функции	4	5
42	116–119	141–145	Точки экстремума функции	4	5
43	120–123	146–150	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	4	5
44	124–125	151–153	Вторая производная. Понятие выпуклости функции	2	3
45	126–128	154–157	Построение графиков функций	3	4
	129	158	Контрольная работа № 9	1	1
Повторение и систематизация учебного материала				**11**	**17**
	130–139	159–174	Повторение и систематизация учебного материала за курс алгебры и начал математического анализа	10	16
	140	175	Итоговая контрольная работа	1	1

Методические рекомендации по организации учебной деятельности

Глава 1. Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях

§ 1. Множества. Операции над множествами

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятиями множества, элемента множества, подмножества, собственного подмножества; находить пересечение, объединение, разность множеств, иллюстрировать результат этих операций с помощью диаграмм Эйлера.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями множества, элемента множества, подмножества, собственного подмножества; находить пересечение, объединение, разность множеств, иллюстрировать результат этих операций с помощью диаграмм Эйлера.

Основные понятия

Множество, элемент множества, характеристическое свойство, подмножество, диаграммы Эйлера, собственное подмножество, пересечение, объединение множеств, разность множеств.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7			1.3, 1.8

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 2	1.9, 1.10, 1.11, 1.13, 1.15, 1.17, 1.18, 1.19	1.21	Самостоятельная работа № 1: № 1(2, 4, 6), 2, 3, 4	1.12, 1.14, 1.16, 1.20

Методические комментарии

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Определение этого понятия не даётся. Здесь можно провести параллель с такими геометрическими фигурами, как точка, прямая, плоскость.

Учащиеся на интуитивном уровне хорошо воспринимают понятие множества. Здесь важно привести много примеров.

Для того чтобы учащиеся быстрее усвоили теоретико-множественную символику, примеры должны быть разнообразными.

Пустое множество — объект достаточно абстрактный. Поэтому в этом случае важно привести несколько примеров.

С самого начала важно обратить внимание учащихся на то, что слово «множество» не является синонимом слова «много». Следует предложить учащимся самостоятельно привести из окружающего мира примеры множеств, состоящих из одного элемента, и множеств, являющихся пустыми, задав эти множества с помощью характеристических свойств.

Понятия равных множеств и пустого множества будут далее использованы для введения понятия равносильных уравнений и неравенств.

В параграфе рассматриваются два способа задания множеств: с помощью перечисления элементов и с помощью характеристического свойства. Важно, чтобы учащиеся понимали, в каких случаях удобно пользоваться каждым из этих способов. В данном параграфе ещё не рассматриваются понятия «конечное» и «бесконечное» множество, но в результате рассмотрения примеров этого параграфа учащиеся на интуитивном уровне могут самостоятельно прийти к выводу, что бесконечное множество можно задать только характеристическим свойством.

Следует обратить внимание учащихся на разницу в записях $(a; b)$ и $\{a, b\}$. Запись $(a; b)$ представляет собой упорядоченную пару, в которой важно, на каком месте находится каждый из элементов, а запись $\{a, b\}$ — множество, в котором порядок записи элементов не имеет значения.

При формировании у учащихся навыков задания множества с помощью записи $A = \{ x \mid \ldots \}$ надо обратить внимание на то, что в качестве элемента x может выступать элемент любой природы, например одно число, упорядоченная пара чисел и т. п. Показательной в этом отношении является запись множества точек плоскости, представляющих собой график некоторого уравнения либо некоторой функции.

Диаграммы Эйлера являются очень удобным инструментарием для работы с множествами любой природы. Учащиеся уже знакомы с этим инструментарием: с его помощью в предыдущих классах демонстрировалась соотношения между множествами изучаемых объектов. В качестве повторения и систематизации знаний можно предложить учащимся изобразить такие соотношения, а также описать эти соотношения с помощью терминов из теории множеств. При изучении данного параграфа следует предложить те объекты, для изображения которых достаточно соотношения «быть подмножеством»; при изучении следующего параграфа — объекты, требующие использования пересечения и объединения множеств, например классификацию треугольников, четырёхугольников и т. п.

Целесообразно привести достаточное количество примеров, мотивирующих необходимость введения операций пересечения, объединения, разности множеств.

Важно обратить внимание на связь между операцией пересечения и поиском решений системы уравнений; связь между операцией объединения и поиском решения совокупности уравнений.

Понятие системы уравнений знакомо учащимся и на наглядном уровне имеет достаточную мотивацию для его введения. Понятие совокупности уравнений не настолько наглядно. До изучения квадратичных неравенств можно привести не так много примеров, показывающих целесообразность введения этого понятия. Кроме примера уравнения, в котором произведение нескольких множителей равно нулю, можно привести примеры уравнений с модулем, таких как $|x - 5| = 4$.

Обобщение операций пересечения и объединения для трёх и более множеств воспринимается учащимися несколько сложнее, чем для двух множеств. Здесь существенную помощь в разъяснении могут оказать диаграммы Эйлера.

При построении диаграмм Эйлера следует уделить внимание тому, чтобы взаимное расположение кругов соответствовало сюжету задачи. Так, учащиеся должны правильно располагать круг, изображающий подмножество, полностью внутри круга-множества; в зависимости от того, является ли пустым пересечение множеств, рисовать пересекающиеся или непересекающиеся круги и т. д.

Комментарии к упражнениям

№ 1.2. 1) $A = B$; 3) $A \neq B$, поскольку элементами множества являются упорядоченные пары.
№ 1.3. 1) $A \neq B$, поскольку элементом множества A является число 1, а элементом множества B является одноэлементное множество $\{1\}$.
№ 1.18. Пустое множество.
№ 1.20. Пустое множество.

§ 2. Конечные и бесконечные множества

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: владеть понятиями: конечное и бесконечное множества, количество элементов конечного множества, взаимно однозначное соответствие, сравнение бесконечных множеств, равномощные множества, счётные множества; формировать умение обосновывать формулу включения-исключения, применять её для решения задач. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные***: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями: конечное и бесконечное множество, количество элементов конечного множества, взаимно однозначное соответствие, сравнение бесконечных множеств, равномощные множества, счётные множества; обосновать формулу включения-исключения, применять её для решения задач.
Основные понятия	Конечное множество, количество элементов конечного множества, бесконечное множество, сравнение бесконечных множеств, формула включения-исключения, взаимно однозначное соответствие, равномощное множество, счётное множество.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	2.1, 2.3, 2.4, 2.6			2.2, 2.5
Урок 2	2.7, 2.8, 2.10, 2.12, 2.14	2.15, 2.17	Самостоятельная работа № 2: № 2, 4	2.9, 2.11, 2.13

Методические комментарии

В первую очередь следует сформировать у учащихся представление о том, что о количестве элементов множества и всех понятиях, в которых оно применяется, можно говорить только по отношению к конечным множествам.

Формулу включения-исключения достаточно легко объяснить учащимся с помощью диаграмм Эйлера. Чуть сложнее учащиеся воспримут применение этой формулы для любого количества множеств.

При рассмотрении понятия «взаимно однозначное соответствие» следует обратить внимание учащихся на то, что в определении отсутствует ограничение на конечность или бесконечность множества. Следовательно, оно применимо к любым множествам, и конечным, и бесконечным. Благодаря этому установление взаимно однозначного соответствия является мощным инструментом сравнения «размера» множеств.

В параграфе рассмотрено установление взаимно однозначного соответствия между одним конечным множеством и собственным подмножеством другого конечного множества, на основании чего становится возможным сделать вывод о том, в каком из множеств больше элементов.

Следует обратить внимание на то, что сравнение количества элементов двух множеств с помощью взаимно однозначного соответствия принципиально отличается от сравнения непосредственным подсчётом количества элементов двух множеств.

Большинство задач этого параграфа, начиная со среднего уровня сложности, являются комбинаторными. Следует уделить внимание тому, чтобы учащиеся:

• во-первых, правильно формировали математическую модель перебора всех возможных вариантов для ситуации, описанной в задаче;

• во-вторых, при установлении взаимно однозначного соответствия доказывали, что при предложенном ими алгоритме соответствие является действительно взаимно однозначным.

В параграфе фактически даётся определение бесконечного множества как множества, равномощного своему собственному подмножеству. Учащимся следует разъяснить, почему именно это свойство можно положить в основу определения — никакое конечное множество таким свойством не обладает.

При рассмотрении последовательности простых чисел можно напомнить учащимся, что в 6 классе была рассмотрена идея доказательства того, что множество простых чисел является бесконечным.

Необходимо, чтобы учащиеся поняли: чтобы показать равномощность двух множеств, достаточно установить между ними взаимно однозначное соответствие.

Особое значение имеет геометрический пример параграфа. Он показывает, как формально строгие логические рассуждения могут войти в противоречие с интуитивно-наглядными представлениями о свойствах геометрических фигур.

Комментарии к упражнениям

№ 2.7. Поскольку все элементы первого множества дают разные остатки при делении на 3, то между данными множествами установлено взаимно однозначное соответствие.

№ 2.8. Если каждую цифру пятизначного числа, все цифры которого чётны, увеличить на 1, то получим пятизначное число, все цифры которого нечётны. Но, например, число 11 111 с помощью такой операции получить нельзя.

№ 2.9. Если в числе, все цифры которого записаны в порядке возрастания, поменять порядок следования цифр на противоположный, то получим число второго вида. Однако с помощью такой операции получить число, последняя цифра которого равна нулю, нельзя.

№ 2.10. Каждому четырёхугольнику поставим в соответствие точку пересечения его диагоналей. Каждой точке пересечения двух диагоналей данного n-угольника поставим в соответствие четырёхугольник, вершины которого — концы данных двух диагоналей.

№ 2.15. Пусть A — это множество учащихся, решивших только первую задачу, B — множество учащихся, решивших только вторую задачу, C — множество учащихся, решивших только третью задачу. Запишем формулу включения-исключения для трёх множеств: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$. По условию $n(A \cup B \cup C) = 46$, $n(A \cap B) = 11$, $n(B \cap C) = 8$, $n(C \cap A) = 5$,

$n(A \cap B \cap C) = 2$. Отсюда $n(A) + n(B) + n(C) = 68$. Если бы каждую задачу решили меньше половины всех участников, то левая часть последнего равенства не превосходила 66. Получили противоречие.

§ 3. Высказывания и операции над ними

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: владеть основными понятиями математической логики; формировать умения проводить элементарные операции над высказываниями, строить таблицы истинности для простейших логических выражений.

Личностные: формировать умения представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.

Планируемые результаты

Учащийся овладеет основными понятиями математической логики, научится проводить элементарные операции над высказываниями, строить таблицы истинности для простейших логических выражений.

Основные понятия

Математическая логика, истинные утверждения, ложные утверждения, высказывание, функция истинности, конъюнкция, логическая операция, таблица истинности, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание, логическое выражение, логически эквивалентные высказывания, выражения тождественно истинные, закон исключения третьего.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	3.1, 3.2, 3.3			3.4
Урок 2	3.5, 3.7, 3.9, 3.11, 3.13	3.15	Самостоятельная работа № 3: № 1, 2, 3	3.6, 3.8, 3.10, 3.12, 3.14, 3.16

Методические комментарии

С понятием истинного и ложного высказывания учащиеся ознакомились в 6 классе. Учащиеся должны усвоить, что не всякое предложение русского языка является высказыванием. Здесь важно привести много примеров как высказываний, так и предложений, не являющихся высказываниями.

Вводя операции над высказываниями, учащиеся должны понимать, что эти понятия формализуют то, что мы используем в обыденной речи, строя истинные и ложные высказывания. Каждая логическая операция имеет свой естественный и понятный аналог.

Следует провести аналогию между операциями над высказываниями и операциями над множествами. При необходимости можно задействовать диаграммы Эйлера.

Особое место среди операций над высказываниями занимает импликация. Эта операция в каком-то смысле не согласуется с повседневным оптом построения умозаключений. Поэтому следует остановиться более подробно на случае, когда в импликации условие является ложным высказыванием. Определённые разъяснения есть и в тексте параграфа.

Введение операций над высказываниями сопровождается построением таблиц истинности. Эта конструкция является очень удобным аппаратом для установления истинности сложного высказывания.

Говоря о логических выражениях, следует проводить аналог с алгебраическими выражениями.

Учащиеся должны понять, почему тавтологии занимают особое место в математической логике. Здесь может оказаться полезным сравнение тавтологии с тождеством.

Связь между логическими операциями и электрическими схемами может служить хорошим примером применения законов логики в практической деятельности человека.

Комментарии к упражнениям

№ 3.13, 3.14. Следует воспользоваться построением таблиц истинности для соответствующих логических выражений.

§ 4. Предикаты. Операции над предикатами. Виды теорем

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: владеть понятием предиката; формировать умения разъяснять смысл операций над предикатами, стро-

ить высказывания с помощью кванторов общности и существования, распознавать виды теорем.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки.

Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.

Планируемые результаты Учащийся овладеет понятием предиката, научится разъяснять смысл операций над предикатами, строить высказывания с помощью кванторов общности и существования, распознавать виды теорем.

Основные понятия Предикат, равносильные предикаты, тождественно истинный предикат, тождественно ложный предикат, конъюнкция предикатов, дизъюнкция предикатов, импликация предикатов, эквивалентность предиката, отрицание предиката, квантор общности, квантор существования, условие теоремы, вывод теоремы, взаимно обратные теоремы, прямая, обратная теорема, достаточное условие, необходимое условие, противоположные теоремы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	4.1, 4.2, 4.4, 4.5			4.3, 4.6
Урок 2	4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14		Самостоятельная работа № 4: № 2, 3. 4	4.8, 4.15

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять различие между предикатами и высказываниями, а также, с помощью какой операции предикат превращается в высказывание.

Вводя операции над предикатами, следует придавать этим формальным действиям конкретное содержание, связывая их с ранее изученными объектами. Для этого хорошими примерами являются системы и совокупности уравнений, понятия равносильности уравнений и уравнений-следствий.

Вводя кванторы общности и существования, следует приводить много примеров высказываний вида «для любого» и «существует». Учащиеся должны понимать, почему навешивание квантора на предикат превращает его в высказывание. Следует привести примеры, когда кванторы общности и существования позволяют формулировать определения в более компактной форме.

Начиная разговор о видах теорем, в первую очередь следует разъяснить учащимся, что теорема — это не предикат, а высказывание, причём истинное. Это легче понять, показав, что теорема имеет структуру высказывания вида $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ или $(\exists x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. Далее на примерах известных теорем показать, как формируются из данной теоремы ещё три новых вида, а затем обобщить примеры формальными высказываниями вида $(\forall x \in M)\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$, $(\forall x \in M)\ B(x) \Rightarrow A(x)$, $(\forall x \in M)\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$, $(\forall x \in M)\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$. Также на примерах следует показать, как равносильность теорем определённого вида применяется в доказательствах.

Комментарии к упражнениям

№ 4.4. Для облегчения решения следует изобразить области истинности данных предикатов на координатной прямой.

№ 4.6. Для того чтобы понять, почему ответом является множество $\boldsymbol{R}$, следует обратить внимание учащихся на то, что областью истинности первого предиката является пустое множество, которое является подмножеством любого множества.

№ 4.11. Доказательство равносильности одноместных предикатов такое же, как и доказательство равносильности двух уравнений (неравенств): надо показать, что произвольный элемент области истинности одного предиката принадлежит области истинности другого предиката, и наоборот.

Контрольная работа № 1.

§ 5. Функция и её свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: систематизировать основные сведения о функциях, формировать умение находить область определения функции, область значений функции, нули функции,

промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически, исследовать функцию на чётность и нечётность.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умения соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты Учащийся научится находить область определения функции, область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения функции для функций, заданных графически и аналитически, исследовать функцию на чётность и нечётность.

Основные понятия Функция, функциональная зависимость, область определения функции, область значений функции, сюръекция, взаимно однозначное соответствие, биекция, функция Дирихле, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции, чётная функция, нечётная функция, свойства чётной функции, свойства нечётной функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	5.1, 5.3, 5.5, 5.6,			5.2, 5.4, 5.7
Урок 2	5.8, 5.10, 5.12, 5.14			5.9, 5.11, 5.13
Урок 3	5.15, 5.17, 5.19, 5.21, 5.23, 5.25	5.27, 5.28	Самостоятельная работа № 5: № 1, 2 (1), 3 (2), 4	5.16, 5.18, 5.20, 5.22, 5.24, 5.26

Методические комментарии

Сведения, приведённые в этом параграфе, не новы для учащихся. В классе с углублённым изучением математики следует сделать акцент на использовании теоретико-множественного подхода при определении функции. При повторении следует обратить особое внимание на понятия области определения и области значений функции, а также на запись этих множеств с помощью числовых промежутков и их объединения.

Важным новым материалом в этом параграфе является определение взаимно однозначного отображения одного множества на другое. Поскольку далее это понятие будет широко использоваться, например при введении понятия обратной функции, при доказательстве равномощности множеств, то учащиеся должны хорошо его усвоить.

В качестве примеров функций, заданных описательно, в параграфе приводится ряд функций, которые широко используются в математике и программировании: функция Дирихле, «целая часть числа», «дробная часть числа», «знак числа».

При введении нового понятия «сложная функция» следует обратить внимание учащихся на порядок выполнения действий при вычислении значений такой функции. Умение построить «дерево» алгоритма, по которому находится значение сложной функции, будет необходимо для решения задач, например, на построение графика сложной функции, на вычисление производной сложной функции и т. п.

Говоря о понятии наибольшего и наименьшего значений функции, важно подчеркнуть, что эти характеристики непременно надо связывать с некоторым множеством. Обозначения типа $\max f(x)$ или $\min f(x)$, в которых не указано соответствующее множество, являются некорректными.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в определении наибольшего и наименьшего значений функции фигурируют нестрогие неравенства $f(x_0) \geqslant f(x)$ и $f(x_0) \leqslant f(x)$. Замена этих неравенств строгими привела бы к тому, что многие функции перестали достигать наибольших (наименьших) значений. Например, функция $f(x) = x^2$ на множестве $M = [-1;\ 1]$ своего наибольшего значения, равного 1, не достигала бы, потому что $f(1) = f(-1) = 1$. Для наглядности следует сопроводить изложение примерами графиков функций. Также в качестве иллюстрации желательно привести примеры функций, являющихся константами на некотором промежутке.

В учебнике приняты такие определения чётной и нечётной функций, в которых в явном виде не указано, что область определения функции должна быть симметричной относительно начала координат. Этот факт следует из того, что равенство $f(-x) = f(x)$ (либо $f(-x) = -f(x)$) выполняется для любого x из области определения функции.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно показать, что функция $f(x) = 0$, $D(f) = \boldsymbol{R}$ — единственная функция, одновременно являющаяся и чётной, и нечётной.

Комментарии к упражнениям

№ 5.19. Пусть $f(0) = a$. Поскольку f — нечётная функция, то $f(-0) = -a$. Но $f(-0) = f(0)$. Получим, что $f(0) = a$ и $f(0) = -a$, т. е. $a = -a$. Отсюда $a = 0$.

№ 5.21. Заметим, что если число $x_0 \neq 0$ является нулём чётной функции, то число $-x_0$ также является её нулём. Следовательно, все нули чётной функции, не равные 0, можно разбить на пары, а значит, таких нулей — чётное количество. Единственная возможность, при которой количество нулей чётной функции будет нечётным, — это наличие нуля функции $x_0 = 0$. Значит, $f(0) = 0$.

№ 5.28. Воспользовавшись неравенством $|a| - |b| \leqslant |a - b|$, получаем, что $|x + 1| - |x| \leqslant 1$. Вместе с тем $\sqrt{x^4 + 1} \geqslant 1$.

№ 5.29. Имеем: $|x + 1| + |x + 2| \geqslant 3$, а $\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$.

§ 6. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения строить графики функций $y = f(kx)$ и $y = f(kx + a) + b$, $y = f(|x|) + b$ и $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$. ***Личностные***: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные***: формировать умения соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится строить графики функций $y = f(kx)$ и $y = f(kx + a) + b$, $y = f(|x|) + b$ и $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$.

Основные понятия

Построение графика функции $y = f(kx)$, сжатие графика функции $y = f(x)$ в k раз к оси ординат, растяжение графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз к оси ординат, построение графика функции $y = f(-x)$, симметрия относительно оси ординат, построение графика функции $y = f(|x|)$, построение графика функции $y = |f(x)|$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	6.1, 6.3, 6.5			6.2, 6.4, 6.6
Урок 2	6.7, 6.9, 6.11, 6.13, 6.15	6.17	Самостоятельная работа № 6: № 1 (1), 2 (2), 3	6.8, 6.10, 6.12, 6.14, 6.16

Методические комментарии

Правила построения графиков функций, сформулированные в параграфе, основаны на том, что между точками графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(kx)$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Построение графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, можно разделить на два этапа: построение графика функции $y = f(|k|\,x)$, а затем построение графика функции $y = f(-|k|\,x)$ с использованием симметрии относительно оси ординат. Соответствующие этапы построения следует проиллюстрировать рисунками.

При построении графика функции $y = f(kx + b)$ учащиеся допускают наиболее распространённую ошибку: строят график функции $y = f(kx)$, а затем выполняют его параллельный перенос на $|b|$ единиц вдоль оси абсцисс. В параграфе рассмотрен пример 1, который помогает профилактике ошибок подобного рода.

Существуют две основные схемы построения графика функции $y = f(kx + b)$:

1) $y = f(x) \to y = f(x + b) \to y = f(kx + b)$;

2) $y = f(x) \to y = f(kx) \to y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$.

Описание построения графика функции $y = f(|x|)$ на основании определения модуля достаточно громоздко. Поэтому целесообразно, один раз подробно разобрав идею этого метода с учащимися, далее опираться на построение этого графика с помощью симметрии относительно оси ординат.

Аналогично, для графика функции $y = |f(x)|$ более рациональным является использование симметрии относительно оси абсцисс.

Учащиеся должны понимать и уметь обосновывать, почему для преобразования симметрии выбирается именно данная полуплоскость и каким образом определяется характер преобразования. В частности, целесообразно рассмотреть и обосновать тот факт, что при построении графика $y = |f(x)|$ используется весь график функции $y = f(x)$, а при построении графика $y = f(|x|)$ часть графика функции $y = f(x)$, находящаяся в полуплоскости $x < 0$, игнорируется.

Очень важно обратить внимание на то, что алгоритмы построения графиков функций $y = f(k|x| + b)$ и $y = f(|kx + b|)$ совершенно разные.

Приёмы построений графиков функций, изученные в этом параграфе, значительно расширяют класс функций, графики которых можно построить. Это, в свою очередь, позволяет более широко использовать графические приёмы при решении различных задач. Иллюстрацией к сказанному является пример 5 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 6.5, 6.6. Целесообразно оформить решение этих задач так, как показано в примерах 1 и 2 параграфа.
№ 6.14. Обратите внимание учащихся на то, что алгоритмы построения графиков функций задач 1) и 2) различны.
№ 6.15—6.18. Следует воспользоваться графической интерпретацией. Также решению этих задач поможет разобранный в параграфе пример 5.

§ 7. Обратная функция

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение.

	Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями обратимой функции, взаимно обратных функций; применять свойства взаимно обратных функций; находить функцию, обратную данной.
Основные понятия	Обратимая функция, взаимно обратные функции, свойства взаимно обратных функций, обратная функция.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	7.1, 7.2, 7.4, 7.6			7.3, 7.5, 7.7
Урок 2	7.8, 7.10, 7.11, 7.13, 7.15, 7.17	7.18	Самостоятельная работа № 7: № 1, 2, 3, 4	7.9, 7.12, 7.14, 7.16

Методические комментарии

Этот материал является традиционно сложным для учащихся.

При отработке определения обратимой функции следует предложить учащимся привести примеры как обратимых функций, так и функций, не являющихся обратимыми.

В теореме 7.1 сформулировано достаточное условие обратимости. Заметим, что монотонность функции не является необходимым условием (пример, иллюстрирующий это, приведён на рис. 7.4).

При формировании понятия взаимно обратных функций учащиеся должны в первую очередь понять, что если в упорядоченных парах вида $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, f — обратимая функция, поменять компоненты местами, т. е. получить упорядоченные пары вида $(y_0; x_0)$, то тем самым будет получена функция, обратная данной.

Определение, приведённое в тексте параграфа, формализует смену мест компонентов упорядоченных пар.

Замена (перестановка) компонентов упорядоченных пар также помогает разъяснить, почему при поиске функции, обратной данной, следует независимую переменную выражать через зависимую. Для того чтобы переход к традиционным обозначениям зависимой и независимой переменных воспринимался учащимися естественно, можно предложить им выполнить следующие упражнения: задайте описательно функции, которые заданы следующими формулами: $a = \frac{b+1}{2}$, $m = \frac{n+1}{2}$.

Теорему 7.3 можно сопроводить более наглядными разъяснениями: преобразование симметрии графика монотонной функции относительно прямой $y = x$ не меняет характер монотонности функции.

Комментарии к упражнениям

№ 7.14. Воспользуйтесь следствием из теоремы 7.4.
№ 7.16. Воспользуйтесь идеей решения примера 2 параграфа.

§ 8. Метод интервалов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение решать неравенства методом интервалов. ***Личностные***: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные***: формировать умение развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать неравенства методом интервалов.
Основные понятия	Непрерывная кривая, непрерывная в каждой точке области определения функция, разрыв функции в точке, теорема о непрерывной функции на промежутке, метод интервалов, теорема о непрерывности функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	8.1, 8.3, 8.5			8.2, 8.4, 8.6

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	8.7, 8.9, 8.11, 8.12, 8.14			8.8, 8.10, 8.13, 8.15
Урок 3	8.16, 8.18, 8.20, 8.22		Самостоятельная работа № 8: № 1,2	8.17, 8.19, 8.21

Методические комментарии

На этом этапе изучения математики учащиеся ещё не обладают достаточной теоретической базой для обоснования метода интервалов. Однако факты и понятия, лежащие в основе этого метода, интуитивно понятны и наглядно очевидны. Сказанное в первую очередь относится к понятию непрерывности функции и содержанию теоремы 8.1.

Обоснование метода интервалов с помощью следствия из первой теоремы Больцано-Коши позволяет решать достаточно широкий класс неравенств, не только сводящихся к исследованию знака выражения вида $(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, что благодаря методу интервалов задача о решении неравенства перестаёт носить автономный характер. Вопрос лишь сводится к тому, можно ли найти корни соответствующего уравнения.

Особое внимание следует уделить решению нестрогих неравенств. Совет о том, что при решении неравенств вида $f(x) \geqslant 0$ следует переходить к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) = 0, \end{array}\right.$ может уберечь от потери решений.

Комментарии к упражнениям

№ 8.9 (4), 8.10 (2), 8.11 (4), 8.14 (2), 8.15 (2), 8.17 (1). При решении этих задач типичной ошибкой является потеря решения, равного значению переменной, обращающему левую часть неравенства в нуль.

Контрольная работа № 2

Глава 2. Степенная функция

§ 9. Степенная функция с натуральным показателем

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач. ***Личностные***: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные***: формировать умение определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать степенную функцию с натуральным показателем, строить график степенной функции с натуральным показателем, применять её свойства при решении задач.
Основные понятия	Степенная функция с натуральным показателем, свойства степенной функции с чётным показателем, свойства степенной функции с нечётным показателем.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	9.1, 9.3, 9.5, 9.7, 9.9, 9.10, 9.12	9.14	Самостоятельная работа № 9: № 1, 2 (2), 3	9.2, 9.4, 9.6, 9.8, 9.11, 9.13

Методические комментарии

Поскольку учащиеся знакомы с частными видами этой функции, то им хорошо понятно, почему при исследовании функции $y = x^n$, $n \in N$, надо отдельно рассматривать два случая: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

Следует разъяснить учащимся: на основании того, что выражение x^{2k}, $k \in \boldsymbol{Z}$, принимает только неотрицательные значения, ещё не следует делать вывод, что областью значений степенной функции $y = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, являются все неотрицательные числа. Соответствующее замечание можно сделать и при поиске области значений функции $y = x^{2k+1}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

При исследовании свойств функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, для случая, когда n — нечётное натуральное число, показатель степени представлен в виде $n = 2k + 1$. Это означает, что доказательство не рассматривает случая $n = 1$, т. е. функции $y = x$. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса следует либо сослаться на свойства этой функции, изученные в предыдущих классах, либо проверить самостоятельно, что свойства, которые далее доказываются для случая $n = 2k + 1$, выполняются для случая $n = 1$.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить, как по отношению друг к другу расположены графики функций $y = x^n$, $x > 0$, при различных натуральных значениях n. Однако иллюстративное сопровождение этого материала имеет определённые трудности.

Используя лишь тетрадный лист в клетку, сложно увидеть разницу, например, между графиками функций $y = x^3$ и $y = x^5$. Здесь может помочь традиционный метод — построение графика на миллиметровой бумаге — либо более современный — использование соответствующих компьютерных программ. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса на уроке информатики можно использовать построение графиков по точкам на основании таблицы, созданной в *Word* или редакторе таблиц; с использованием специализированных математических пакетов.

Учащимся со склонностью к изучению информатики можно предложить самостоятельно начать разработку программы для построения графиков на экране компьютера, которую по мере изучения аппарата исследования функций они смогут развивать и совершенствовать.

Комментарии к упражнениям

№ 9.1, 9.2. При решении этих задач учащиеся должны апеллировать к чётности (нечётности) соответствующей функции, а также использовать её характер монотонности.

№ 9.10 (1). Рассмотрите функцию $f(x) = x^{11} + x^3$. Она является возрастающей. Значит, данное уравнение имеет не более одого корня.

№ 9.15. Перепишите уравнение в виде $\frac{9}{x^{15}} + \frac{2}{x^{11}} = 11$ и выполните замену $\frac{1}{x} = t$.

§ 10. Степенная функция с целым показателем

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения распознавать степенную функцию с целым показателем, строить график степенной функции с целым показателем, применять её свойства при решении задач. ***Личностные***: формировать умение объективно оценивать свой труд. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится распознавать степенную функцию с целым показателем, строить график степенной функции с целым показателем, применять её свойства при решении задач.
Основные понятия	Степенная функция с целым показателем, свойства степенной функции с целым показателем.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	10.1, 10.3, 10.4, 10.6, 10.8	10.10	Самостоятельная работа № 10: № 1, 2 (2), 3 (2), 4	10.2, 10.5, 10.7, 10.9

Методические комментарии

После изучения материала предыдущего параграфа свойства степенной функции с целым показателем воспринимаются, как правило, без затруднений. Сложности могут возникнуть при рассмотрении асимптотического поведения графика функции. В связи с этим целесообразно повторить с учащимися свойства и график функции $y = \frac{1}{x}$.

Нередко учащиеся, описывая характер монотонности функции $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$, $k \in N$, ошибочно считают, что данная функция является убывающей. На самом деле эта функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Для профилактики этой ошибки следует повторить определение возрастающей (убывающей) функции, подчеркнув, что соотношение между значениями функции должно выполняться при любых значениях аргумента. То, что это соотношение для данной функции выполняется не всегда, следует проиллюстрировать, выбрав два значения аргумента разного знака.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить, как по отношению друг к другу расположены графики функций $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, при различных значениях n. При иллюстративном сопровождении этого материала следует учесть те же трудности, что и для функции $y = x^n$, и использовать методы, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Комментарии к упражнениям

№ 10.1, 10.2. При решении этих задач учащиеся должны апеллировать к чётности (нечётности) соответствующей функции, а также использовать её характер монотонности.

№ 10.4, 10.5. Эти задачи служат закреплению понимания учащимися того, что значение 0^0 не определено.

№ 10.4 (1). Искомым графиком является прямая $y = 1$ с «выколотой» точкой $(2; 1)$.

№ 10.5 (2). Графиком уравнения является вся координатная плоскость, за исключением двух прямых $y = 2$ и $x = -1$.

§ 11. Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.
	Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.
	Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями корня n-й степени, арифметического корня n-й степени, распознавать и строить график функции у = $\sqrt[3]{x}$, где $n > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$.
Основные понятия	Корень n-й степени, знак корня n-й степени, радикал, подкоренное выражение, кубический корень, арифметический корень n-й степени.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	11.1, 11.3, 11.5, 11.7			11.2, 11.4, 11.6, 11.8
Урок 2	11.9, 11.11, 11.13, 11.14, 11.16, 11.18			11.10, 11.12, 11.15, 11.17, 11.19
Урок 3	11.20, 11.22, 11.24, 11.26, 11.28, 11.30	11.32	Самостоятельная работа № 11: № 1, 2 (2), 3 (1), 4 (1)	11.21, 11.23, 11.25, 11.27, 11.29, 11.31

Методические комментарии

Материал этого параграфа обобщает и расширяется понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить указанные понятия.

После введения определения корня n-й степени отрабатывается понятия корня нечётной степени. Это понятие воспринимается учащимися легче, чем понятие корня чётной степени, по двум причинам: 1) корень нечётной степени существует из любого числа и принимает только одно значение; 2) для корня нечётной степени существует обозначение.

При изучении понятия «квадратный корень» необходимость введения понятия арифметического квадратного корня мотивировалась тем, что квадратный корень из неотрицательного числа принимает два различных значения. Необходимость введения арифметического корня чётной степени также мотивируется существованием двух корней чётной степени, поэтому разница между арифметическим корнем и корнем для чётной степени является достаточно наглядной.

Однако учащиеся должны понимать, что арифметический корень рассматривается для любого натурального $n > 1$, независимо от чётности числа n.

Следует обратить внимание учащихся на то, что запись $\sqrt[2n]{a}$, $n \in N$, используется только для обозначения арифметического корня. Запись $\sqrt[2n+1]{a}$, $n \in N$, может быть использована как для обозначения арифметического корня, когда $a \geqslant 0$, так и для обозначения корня нечётной степени.

Как и при изучении степенной функции с целым показателем, для функции $y = \sqrt[n]{x}$ отдельно рассматриваются случаи, когда n — чётное число и когда n — нечётное.

Исследование свойств и построение графиков функций $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = \sqrt[2k]{x}$ основаны на том, что эти функции являются обратными соответственно к функциям $y = x^{2k+1}$ и $y = x^{2k}$, где $x \geqslant 0$. Поэтому при изучении этой темы целесообразно повторить свойства взаимно обратных функций и свойства степенной функции с натуральным показателем.

В разобранном примере параграфа рассматривается решение иррациональных неравенств. Метод решения основан на характере монотонности функции $y = \sqrt[n]{x}$. Этот пример и аналогичные задачи параграфа носят пропедевтический характер по отношению к теме «Иррациональные неравенства».

Комментарии к упражнениям

№ 11.9, 11.10. Учащимся интуитивно понятно, как сравнить корни. Однако они должны понимать, что сравнение этих чисел основано на том, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ является возрастающей.

№ 11.16 (1). Для того чтобы избежать появления постороннего корня, следует записать систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{array}\right. \\ x + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса решение этого примера можно обобщить, записав, что уравнение $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Здесь же целесообразно провести профилактику распространённой ошибки: обнаружив, что

$f(x) = 0$, учащиеся считают значение x корнем уравнения, не обращая внимания на знак подкоренного выражения при этом значении x.

№ 11.18 (1). Областью определения данной функции является одноэлементное множество $\{1\}$.

№ 11.27. Функция $y = \sqrt[3]{x-9} + \sqrt[4]{x+6}$ — возрастающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня.

№ 11.31. Воспользуйтесь неравенством $\sqrt[4]{14} < \sqrt[4]{16}$.

№ 11.33. Воспользуйтесь тем, что функции $f(x) = \dfrac{x^3+2}{3}$ и $g(x) = \sqrt[3]{3x-2}$ — взаимно обратные и возрастающие. А дальше примените теорему 7.4.

§ 12. Свойства корня n-й степени

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовывать выражения, содержащие корни n-й степени.

Личностные: развивать познавательный интерес к математике.

Метапредметные: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать свойства корня n-й степени, применять эти свойства для решения задач, преобразовывать выражения, содержащие корни n-й степени.

Основные понятия

Свойства корня n-й степени.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	12.1, 12.3, 12.5, 12.7, 12.9			12.2, 12.4, 12.6, 12.8, 12.10

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	12.11, 12.13, 12.15, 12.17, 12.19, 12.21		Самостоятельная работа № 12: № 1, 2 (1, 2), 3, 4, 5 (1, 2)	12.12, 12.14, 12.16, 12.18, 12.20, 12.22
Урок 3	12.24, 12.26, 12.28, 12.30, 12.32, 12.34	12.23, 12.35, 12.36	Самостоятельная работа № 13: № 1, 2 (1), 3 (1, 3, 5), 4 (1, 3, 5)	12.25, 12.27, 12.29, 12.31, 12.33

Методические комментарии

Теоремы 12.1–12.4 обобщают известные теоремы о свойствах арифметических квадратных корней. Поэтому перед изучением этого параграфа целесообразно повторить свойства арифметических квадратных корней.

Наряду с теоремами 9.2 и 9.3 можно рассмотреть следующий факт. Если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{-a}\sqrt[2k]{-b}$, $k \in \boldsymbol{N}$; если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}$.

Наибольшее количество ошибок учащиеся допускают при вынесении множителя из-под знака корня и особенно при внесении множителя под знак корня. Этим видам задач следует уделить особое внимание.

Учащиеся не всегда понимают (по крайней мере, это не кажется им естественным), почему при вынесении множителя-переменной из-под знака корня перед этой переменной может появится знак «минус». Это надо разъяснить отдельно.

Чаще всего учащиеся делают ошибки при упрощении выражений вида $\sqrt[2n]{-a^{2n+1}}$. Здесь важно подчеркнуть, что в таких случаях множеством допустимых значений переменной являются все неположительные числа.

Ещё одним сложным типом задач для учащихся является преобразование выражений вида $a\sqrt[2n]{b}$ с внесением под корень переменной a. Учащиеся должны понять, что необходимо рассматривать два случая: $a < 0$ и $a \geqslant 0$.

Надо дать возможность учащимся самостоятельно выбрать способ оформления примеров на упрощение выражений: по действиям или цепочкой.

Особое внимание следует уделить примеру 5 параграфа. Он формирует математическую культуру и учит аккуратному отношению к тексту теорем.

Комментарии к упражнениям

№ 12.19 (4). Учащиеся нередко задают вопрос: в чём смысл ограничения $x \neq 0$? Дело в том, что если $x = 0$, то переменная y может принимать любые значения. Если $x \neq 0$, то $y \geqslant 0$. Поэтому выражение $|xy|\sqrt[6]{y}$, записанное в ответе, существует.

№ 12.24 (1). $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{(\sqrt{10}-3)^2}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} =$

$= \sqrt[6]{19-6\sqrt{10}}\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}} = \sqrt[6]{19^2-360} = \sqrt[6]{1} = 1.$

№ 12.36. С приёмом решения этого примера учащиеся встречаются не так часто. Здесь гораздо удобнее решить более общую задачу, чем пытаться доказать равенство для конкретного количества радикалов.

Контрольная работа № 3

§ 13. Степень с рациональным показателем и её свойства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свойства степени с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем. ***Личностные***: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием. ***Метапредметные***: формировать умения устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием степени с рациональным показателем, доказывать и применять свойства

степени с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем.

Основные понятия

Степень с рациональным показателем, степенная функция с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	13.1, 13.3, 13.5, 13.7, 13.9, 13.11			13.2, 13.4, 13.6, 13.8, 13.10, 13.12
Урок 2	13.13, 13.14, 13.15, 13.17, 13.19, 13.21, 13.23	13.25, 13.26	Самостоятельная работа № 14: № 1, 2 (2), 3, 4, 5	13.16, 13.18, 13.20, 13.22, 13.24

Методические комментарии

Текст параграфа начинается с повторения основных сведений о степени числа с натуральным и целым показателями. Это сделано не только с целью повторения и закрепления соответствующего материала, но и для того, чтобы определённым образом мотивировать определение степени с рациональным показателем.

Абзац перед определением степени с рациональным показателем учащиеся не должны воспринимать как доказательство того, что $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Важно добиться от учащихся понимания того, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ при $a < 0$ не определено.

Немало ошибок возникает из-за того, что учащиеся отождествляют функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$. Однако эти функции разные, поскольку у них разная область определения. Профилактикой подобной ошибки служит пример, рассмотренный в параграфе.

Поскольку свойства степени с рациональным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем, то теоремы 13.1–13.4 не вызывают затруднений.

Комментарии к упражнениям

№ 13.7, 13.8. Учащиеся должны понимать, почему в условии указано, что переменная принимает только положительные значения.

§ 14. Иррациональные уравнения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение решать иррациональные уравнения методом следствий и методом равносильных переходов. ***Личностные***: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории. ***Метапредметные***: формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать иррациональные уравнения методом следствий и методом равносильных переходов.
Основные понятия	Возведение обеих частей уравнения в нечётную степень, иррациональное уравнение, возведение обеих частей уравнения в чётную степень, теоремы о равносильных переходах.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	14.1, 14.3, 14.5			14.2, 14.4, 14.6
Урок 2	14.7, 14.8, 14.10			14.9, 14.11
Урок 3	14.12, 14.14, 14.16, 14.18	14.20	Самостоятельная работа № 15: № 1 (1, 3, 5)	14.13, 14.15, 14.17, 14.19

Методические комментарии

В начале параграфа повторяются основные сведения о решении уравнений методом следствий и методом равносильных переходов. Следует обратить внимание учащихся на диаграммы, изображённые на рисунках 14.1 и 14.2.

Чаще всего иррациональные уравнения решаются возведением обеих частей в одну и ту же степень. Если эта степень нечётная, то при таком преобразовании проблем не возникает, поскольку полученное уравнение равносильно исходному. Учащиеся должны усвоить, что возведение обеих частей уравнения в чётную степень может привести к появлению посторонних корней. В этом случае иррациональные уравнения решаются методом следствий: переходят от данного уравнения к его следствию, а затем посторонние корни выявляют в результате проверки. Теоремы 14.3 и 14.4 являются обоснованием выше сказанного.

Теоремы 14.5—14.7 являются теоретическим обоснованием метода равносильных переходов. Примеры 6 и 7 параграфа иллюстрируют применение теоремы 14.7.

Теорему 14.7 также удобно представить в такой форме: уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, для любого $x \in M$ равносильно системе $\begin{cases} (f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, \\ x \in M. \end{cases}$

Учащиеся нередко задают вопрос о том, каким методом лучше решать иррациональные уравнения: методом следствий или методом равносильных переходов. Однозначного ответа на этот вопрос нет. Например, если корни уравнения-следствия «удобные» для проверки, то метод следствий вполне приемлем. Каждый из указанных методов имеет недостатки. Так, если поиск множества M, на котором осуществляется равносильный переход, затруднён, то метод равносильных переходов может оказаться неприемлемым.

Комментарии к упражнениям

№ 14.5 (3). Имеем: $(x+2)\sqrt{x^2 - x - 20} - 6(x+2) = 0$; $(x+2)(\sqrt{x^2 - x - 20} - 6) = 0$. В этом месте учащиеся допускают распространённую ошибку: считают, что совокупность $\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - x - 20} = 6 \end{array}\right.$ равносильна данному уравнению. Эта ошибка приводит к появлению постороннего корня $x = -2$. На самом деле исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - x - 20} = 6, \end{array}\right. \\ x^2 - x - 20 \geqslant 0. \end{cases}$$

№ 14.14 (1). Имеем: $\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}+\sqrt{x-2-6\sqrt{x-2}+9}=6;$ $\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2}=6;$ $\left|\sqrt{x-2}-1\right|+\left|\sqrt{x-2}-3\right|=6.$ Пусть $\sqrt{x-2}=t.$ Тогда остаётся решить уравнение $|t-1|+|t-3|=6,$ где $t \geqslant 0.$

№ 14.16, 14.17. Идея решения этих уравнений показана в примере § 8.

§ 15. Различные приёмы решения иррациональных уравнений и их систем

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение решать иррациональные уравнения методом замены переменной и с использованием свойств функций, которые задают левая и правая части уравнений.

Личностные: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории.

Метапредметные: формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать иррациональные уравнения методом замены переменной и с использованием свойств функций, которые задают левая и правая части уравнений.

Основные понятия

Метод замены переменной, использование свойств функций, которые задают левая и правая части уравнений.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	15.1, 15.3			15.2, 15.4
Урок 2	15.5, 15.7, 15.8, 15.10, 15.11			15.6, 15.9, 15.12
Урок 3	15.13, 15.15, 15.17, 15.19	15.21	Самостоятельная работа № 16: № 1 (1, 2, 4)	15.14, 15.16, 15.18, 15.20

Методические комментарии

Параграф состоит из примеров решения задач. Метод замены переменной знаком учащимся. Примеры 1 и 2 параграфа иллюстрируют этот метод применительно к иррациональным уравнениям. Уравнение из примера 3 параграфа представляет собой однородное уравнение второй степени относительно выражений x и $\sqrt{x+1}$. Отсюда становится понятным, почему, разделив обе части уравнения на x^2, мы сводим данное уравнение к квадратному.

Пример 5 примечателен тем, что в методе замены участвуют сразу две переменные.

В примере 6 показано решение иррационального уравнения методом следствий. Следствие возникает в результате умножения обеих частей уравнения на выражение с переменной. Посторонние корни уравнения-следствия должны быть выявлены в результате проверки.

Комментарии к упражнениям

№ 15.7. Это уравнение можно решить методом замены переменной: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=t$. Однако это уравнение также можно решить, применяя свойства функций, которые задаются левой правой частями уравнения. Одна из этих функций возрастающая, другая — убывающая. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Легко заметить, что этим корнем является число 1.

№ 15.11. Разделив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному.

№ 15.22. Умножьте обе части уравнения на выражение $\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2-x+1}$.

§ 16. Иррациональные неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение решать иррациональные неравенства. ***Личностные***: формировать умения представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты Учащийся научится решать иррациональные неравенства.

Основные понятия Теоремы о равносильных преобразованиях неравенств.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	16.1, 16.3			16.2, 16.4
Урок 2	16.5, 16.7, 16.9			16.6, 16.8, 16.10
Урок 3	16.11, 16.13, 16.15		Самостоятельная работа № 17: № 1, 2	16.12, 16.14, 16.16

Методические комментарии

В начале параграфа повторяются основные сведения о решении неравенств методом равносильных переходов. Важно подчеркнуть, что для решения неравенств метод следствий неприемлем, поскольку невозможно подвергнуть проветке бесконечное множество решений.

Учащимся надо разъяснить, почему неравенства следует решать методом равносильных переходов. Целесообразно подчеркнуть, что для уравнений, имеющих конечное число решений, применимы два метода: метод равносильных переходов и метод следствий. В отличие от этого, решением неравенства, как правило, является бесконечное множество чисел, которые, естественно, подвергнуть проверке невозможно.

В параграфе предложено доказать теоремы 16.4–16.6 самостоятельно. Но несмотря на то что доказательство этих теорем аналогично доказательству теорем такого рода, этот процесс обязательно следует проконтролировать.

Теорема 16.4 воспринимается учащимися легко. Однако в теоремах 16.5 и 16.6 учащимся трудно воспринять, что, изменив знак неравенства в теореме 16.5, мы получаем принципиально иную формулировку теоремы 16.6. Помочь пониманию могут такие наводящие вопросы:

«На основании какого неравенства что мы можем сказать о знаке значений функции $g(x)$?» (при изучении теоремы 16.5);

«Какие числа всегда меньше, чем значение любого квадратного корня?» (при изучении теоремы 16.6).

В теореме 16.6 следует уделить особое внимание формированию первой системы совокупности. Здесь может помочь устное решение уравнений типа $-\sqrt{x} > -1$, $\sqrt{x} \geqslant -3$, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Комментарии к упражнениям

16.7, 16.8. Эти неравенства можно решить методом интервалов. Отметить на координатной прямой нули функции, которую задаёт выражение, стоящее в левой части неравенства. Также отметить на координатной прямой множество, являющееся областью определения данного неравенства. Получим промежутки знакопостоянства рассматриваемой функции. Далее пробными точками исследуем знак каждого промежутка.

16.14. Воспользуйтесь тем, что функция $y = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x^3+8}$ является возрастающей.

Контрольная работа № 3

Глава 3. Тригонометрические функции

§ 17. Радианная мера угла

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения выражать радианную меру угла в градусной мере и наоборот, устанавливать соответствие между точками единичной окружности и углами поворота.

Личностные: формировать умение объективно оценивать труд одноклассников.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится выражать радианную меру угла в градусной мере и наоборот, устанавливать соответствие между точками единичной окружности и углами поворота.

Основные понятия

Радиан, радианная мера угла, длина дуги окружности радиуса R, содержащей α радиан.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	17.1, 17.3, 17.4, 17.6, 17.8, 17.10			17.2, 17.5, 17.7, 17.9, 17.11
Урок 2	17.12, 17.13, 17.15, 17.17, 17.19, 17.20		Самостоятельная работа № 18: № 1, 2, 3, 4 (1), 5 (1)	17.14, 17.16, 17.18, 17.21

Методические комментарии

Учащиеся нелегко воспринимают введение новой единицы измерения угла — радиан. Это, скорее всего, связано с тем, что сложно мотивировать причины перехода к новой мере угла. Сначала формируется лишь формальное знание.

Желательно, чтобы учащиеся запомнили данные таблицы, приведённой на с. 129 учебника.

В этом параграфе описательно вводится понятие угла поворота. Учащиеся с затруднениями воспринимают то, что с углом связаны величины, большие 360°, и даже отрицательные величины. Поэтому в первую очередь следует разъяснить учащимся, что угол поворота — это не геометрическая фигура.

Учащиеся также должны понимать, что соответствие между точками единичной окружности и углами поворотов не является взаимно однозначным. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно при обсуждении этого вопроса подвести их к выводу, что зависимость точки единичной окружности (а следовательно, и её координат) от угла поворота является функциональной, а зависимость угла поворота от точки единичной окружности — нет. Такой вывод будет пропедевтическим подходом к введению понятия тригонометрических функций.

Запись множества углов поворота, соответствующих данной точке единичной окружности, носит важный пропедевтический характер, поскольку является базой для решения тригонометрических уравнений. Поэтому следует уделить особое внимание тому, чтобы учащиеся хорошо освоили этот вид деятельности.

Комментарии к упражнениям

№ 17.17, 17.18. Надо, чтобы учащиеся записывали формулу, задающую множество углов поворота. Можно показать, что разные формулы могут задавать одно и то же множество углов поворота.
№ 17.20, 17.21. Искомое множество легко записать с помощью графической интерпретации на единичной окружности.

§ 18. Тригонометрические функции числового аргумента

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями тригонометрических функций числового аргумента, находить область определения и область значений тригонометрических функций. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умения определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать.

Планируемые результаты — Учащийся научится оперировать понятиями тригонометрических функций числового аргумента, находить область определения и область значений тригонометрических функций.

Основные понятия — Косинус угла поворота, синус угла поворота, тангенс угла поворота, котангенс угла поворота, тригонометрические функции, ось тангенсов, ось котангенсов.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	18.1, 18.3, 18.5, 18.7, 18.9			18.2, 18.4, 18.6, 18.8, 18.10
Урок 2	18.11, 18.13, 18.15, 18.17		Самостоятельная работа № 19: № 1, 2 (1), 3 (1, 2)	18.12, 18.14, 18.16, 18.18

Методические комментарии

Перед изучением материала этого параграфа следует повторить соответствующий материал о тригонометрических функциях, изученный в курсах геометрии 8 и 9 классов.

После введения определения синуса и косинуса углов поворота следует разъяснить учащимся, что новое определение не противоречит ранее введённым определениям, а лишь их обобщает.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить учащимся, что в предыдущем материале курса геометрии аргументами тригонометрических функций были величины углов, выраженные в градусах. На данный момент тригонометрические функции рассматриваются как числовые функции, причём их аргумент выражен в радианах. Поэтому, начиная с этого момента, в задачах курса алгебры и курса геометрии допускается использование как радианной, так и градусной меры углов, однако следует обращать особое внимание на то, какая именно мера используется, и в случае необходимости выполнять перевод одной меры в другую. Это разъяснение особенно важно при применении калькуляторов различных моделей с различными функциональными возможностями. Показательным в этом отношении является стандартный калькулятор Windows: в режиме «обычный» кнопки для вычисления значений тригонометрических функций отсутствуют (следовательно, отсутствует возможность применения тригонометрических функций без явного указания единицы измерения аргумента), а в режиме «инженерный» на панели калькулятора присутствует указание на используемую единицу измерения аргумента.

В параграфе рассматриваются первоначальные свойства тригонометрических функций — область определения и область значений. При этом области значения тригонометрических функций находятся исходя из геометрических интерпретаций. В частности, для тангенса и котангенса вводятся понятия «ось тангенсов» и «ось котангенсов». В дальнейшем учащиеся ещё не один раз будут обращаться к единичной окружности и осям тангенсов и котангенсов для выявления и других свойств тригонометрических функций.

Особое внимание следует уделить задаче 2 примера 3 параграфа. Понимание, почему данное выражение не достигает наибольшего и наименьшего значений, в дальнейшем поможет избежать многих ошибок, которые часто делают учащиеся.

Комментарии к упражнениям

№ 18.7, 18.8, 18.17, 18.18. Результаты, полученные в этих задачах, будут применяться в дальнейшем. Кроме того, эти задачи имеют важное пропедевтическое значение.

№ 18.11, 18.12. Рассмотрите разность сравниваемых выражений.

§ 19. Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения находить знаки значений тригонометрических функций, исследовать тригонометрические функции на чётность и нечётность. ***Личностные***: формировать независимость суждений.

	Метапредметные: формировать умения самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится находить знаки значений тригонометрических функций, исследовать тригонометрические функции на чётность и нечётность.
Основные понятия	Угол I (II, III, IV) четверти, знаки синуса в каждой из четвертей, знаки косинуса в каждой из четвертей, знаки тангенса в каждой из четвертей, знаки котангенса в каждой из четвертей, чётность и нечётность тригонометрических функций.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	19.1, 19.3, 19.5			19.2, 19.4, 19.6
Урок 2	19.7, 19.9, 19.11, 19.13		Самостоятельная работа № 20: № 1, 2, 3, 4	19.8, 19.10, 19.12, 19.14

Методические комментарии

Схемы, изображённые на рисунках 19.1 и 19.2 учебника, легко воспринимаются, дают наглядное обоснование для определения знаков тригонометрических функций и легко запоминаются.

Исследованию тригонометрических функций на чётность помогает рисунок 19.3 учебника.

При исследовании на чётность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ учащиеся должны понимать, почему их область определения симметрична относительно начала координат.

Комментарии к упражнениям

№ 19.13 (3), 19.14 (3). Область определения этих функций не является симметричной относительно начала координат, поэтому эти функции не являются ни чётными, ни нечётными.

§ 20. Периодические функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятием периодической функции, находить период тригонометрической функции, доказывать свойства периодических функций.

Личностные: формировать умение объективно оценивать свой труд.

Метапредметные: развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием периодической функции, находить период тригонометрической функции, доказывать свойства периодических функций.

Основные понятия

Периодическая функция, период функции, главный период функции, соизмеримые числа, несоизмеримые числа, свойства периодических функций, период функции $y = \sin x$, период функции $y = \cos x$, период функции $y = \operatorname{tg} x$, период функции $y = \operatorname{ctg} x$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	20.1, 20.3, 20.5, 20.7, 20.8			20.2, 20.4, 20.6, 20.9
Урок 2	20.10, 20.12, 20.14, 20.16, 20.18, 20.20	20.11, 20.21, 20.23	Самостоятельная работа № 21: № 1 (1, 2), 2 (рис. a), 3 (1), 4, 5	20.13, 20.15, 20.17, 20.19

Методические комментарии

Понятие периодичности как свойство функции учащимся интуитивно понятно. Однако следует уделить достаточно внимания работе над определением периодической функции. В частности, учащимся следует разъяснить, почему в определении недостаточно ограничиться равенством $f(x) = f(x + T)$.

Важно после определения периодической функции привести примеры периодических функций, не являющихся тригонометрическими. Здесь могут оказать помощь графический и описательный способы задания функции. Хорошим примером является функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x), функция Дирихле и функция константа.

Теоремы 20.1—20.3 раскрывают основные свойства периодических функций.

Следует мотивировать учащимся целесообразность введения понятия главного периода функции. Важно, чтобы учащиеся понимали, что не любая периодическая функция имеет главный период.

При доказательстве теоремы 20.4 надо подробно разъяснить учащимся, почему в равенстве $\sin(x + T) = \sin x$ можно вместо x подставить значение $x = -\frac{T}{2}$.

Теорема 20.5 показывает, как, зная главный период функции, найти все другие её периоды.

Теорема 20.6 применяется для поиска периода функции, состоящей из несколько периодических функций. Примеры 3 и 4 параграфа показывают, как применять эту теорему. Функция, рассматриваемая в примере 4 параграфа, представляет собой сумму периодических функций. Понятно, что метод поиска периода не изменится, если в конструкции функции будут задействованы другие арифметические действия.

Комментарии к упражнениям

№ 20.11. Предположим, что данная функция является периодической. Рассмотрите два значения аргумента, отличающиеся на период. Поскольку данная функция является монотонной, то в этих точках функция принимает разные значения. С другой стороны в силу периодичности значения функции в этих точках равны.

№ 20.12, 20.13. Воспользуйтесь методом, описанным в примере 4 параграфа.

№ 20.16. Найдите главные периоды данных функций. По условию их отношение равно рациональному числу $\frac{m}{n}$. Перепишите полученное равенство так, чтобы все слагаемые с иррациональными коэффициентами находились в одной части равенства.

§ 21. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение применять свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. ***Личностные***: формировать независимость суждений. ***Метапредметные***: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.
Планируемые результаты	Учащийся научится применять свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.
Основные понятия	Синусоида, свойства функции $y = \sin x$, косинусоида, свойства функции $y = \cos x$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	21.1, 21.3, 21.5, 21.7			21.2, 21.4, 21.6, 21.8
Урок 2	21.9, 21.11, 21.13, 21.16, 21.18	21.14, 21.20	Самостоятельная работа № 22: № 1, 2, 3 (2), 4 (1)	21.10, 21.12, 21.15, 21.17, 21.19

Методические комментарии

В начале параграфа описывается общая схема исследования тригонометрической функции.

Исследование свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ строится на наглядных соображениях с использованием единичной окружности. Такой подход вполне оправдан тем, что он доступен большинству учащихся и легко ими усваивается.

В зависимости от оснащённости математического кабинета следует иллюстрировать графики тригонометрических функций с помощью таблиц или компьютерной техники. Следует развивать подход, принятый для построения межпредметных связей: рекомендовать учащимся строить графики тригонометрических функций с помощью табличного редактора, специальных математических пакетов, а учащимся, склонным к изучению программирования, — создавать собственные программы построения графиков.

В таблице на с. 160—161 приведены свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с учётом их периодичности.

Перед рассмотрением примера 2 следует повторить правила построения графиков функций $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$ с помощью графика функции $y = f(x)$.

Комментарии к упражнениям

№ 21.16 (1). При построении графика функции следует учесть, что область определения данной функции накладывает ограничение $\sin x \geqslant 0$.

№ 21.16 (3). Областью определения данной функции является множество $\{\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

№ 21.13 (3). Областью определения данной функции является множество $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

№ 21.20. Имеем: $a^2 - x^2 = 2\pi n$. Графиком левой части уравнения является окружность с центром в начале координат радиуса $|a|$. Графиком правой части является система параллельных прямых.

§ 22. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение применять свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. ***Личностные***: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится применять свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.
Основные понятия	Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	22.1, 22.3, 22.5			22.2, 22.4, 22.6
Урок 2	22.7, 22.8, 22.10		Самостоятельная работа № 23: № 1, 2, 3 (1)	22.9, 22.11

Методические комментарии

Следует разъяснить учащимся, почему промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ является наиболее удобным для исследования свойств функции $y = \operatorname{tg} x$, а промежуток $(0; \pi)$ — для исследования свойств функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Использование осей тангенса и котангенса позволяет сделать исследование свойств функций наглядным и доступным.

В таблице на с. 167 приведены свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ с учётом их периодичности.

При построении графиков функций следует обратить внимание на их асимптотическое поведение. В частности, при переходе от построения графиков вручную к построению графиков с помощью компьютера следует обратить особое внимание учащихся на такие аспекты: 1) для корректной работы программ не следует предлагать в качестве значений аргумента те значения, при которых функции не определены; 2) следует обратить внимание на адекватное отображение поведения функций при приближении к асимптоте. Именно данные функции позволяют продемонстрировать учащимся, что реализация работы с рядом математических объектов с помощью компьютерных средств требует особой обработки некоторых их особенностей. Желательно, чтобы обсуждение этой тематики вызвало и обратную связь: послужило формированию у учащихся потребности при решении математических задач уделять особое внимание «существованию» объектов, о которых идёт речь в задаче: области определения уравнений и функций, применимости методов и т. п.

Комментарии к упражнениям

№ 22.8 (3). Областью определения данной функции является множество $\{\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

№ 22.9 (3). Областью определения данной функции является множество $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Контрольная работа № 5

§ 23. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение выводить и применять соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. ***Личностные***: развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач. ***Метапредметные***: формировать умения устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
Основные понятия	Основное тригонометрическое тождество, соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	23.1, 23.3, 23.5			23.2, 23.4, 23.6
Урок 2	23.7, 23.9, 23.11			23.8, 23.10, 23.12
Урок 3	23.13, 23.15, 23.17, 23.19		Самостоятельная работа № 24: № 1, 2, 3 (2), 4	23.14, 23.16, 23.18, 23.20

Методические комментарии

Формулы, изучаемые в этом параграфе, знакомы учащимся из курса геометрии 9 класса. Отличие заключается лишь в том, что эти формулы обобщаются для произвольных допустимых значений аргумента.

Учащиеся должны понимать, что первые три тождества связывают квадраты значений тригонометрических функций. Поэтому знание значения одной из функций позволяет найти лишь модуль значения другой функции. Ответ в таких задачах можно найти однозначно только при наличии дополнительных условий, например, знания того, в какой координатной четверти находится аргумент функции.

Комментарии к упражнениям

№ 23.9 (1). Можно предложить два способа решения этой задачи.
I способ. Из условия следует, что $\cos\alpha = 3\sin\alpha$. Тогда данную дробь можно записать в виде: $\frac{\sin\alpha - 3\sin\alpha}{\sin\alpha + 3\sin\alpha}$.
II способ. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$. Получим: $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$.
№ 23.11 (1), 23.12 (1). Воспользуйтесь идеей решения примера 2 параграфа.
№ 23.15, 23.16. С помощью замены сведите исследование к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратного трёхчлена на определённом промежутке.

§ 24. Формулы сложения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение выводить и применять формулы сложения. ***Личностные***: развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач. ***Метапредметные***: формировать умения устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы сложения.

Основные понятия Косинус разности, косинус суммы, синус разности, синус суммы, тангенс разности, тангенс суммы.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	24.1, 24.3, 24.5, 24.7			24.2, 24.4, 24.6, 24.8
Урок 2	24.9, 24.11, 24.13, 24.15, 24.17, 24.19			24.10, 24.12, 24.14, 24.16, 24.18, 24.20,
Урок 3	24.21, 24.23, 24.25, 24.27, 24.29, 24.30, 24.34, 24.36	24.32, 24.38, 24.39	Самостоятельная работа № 25: № 1, 2, 4, 5	24.22, 24.24, 24.26, 24.28, 24.31, 24.35, 24.37

Методические комментарии

Доказательство формулы косинуса разности основано на неожиданной для учащихся идее — применении скалярного произведения векторов. Поэтому перед изучением этой темы целесообразно повторить соответствующий теоретический материал из курса геометрии 9 класса.

Заметим, что доказательство формулы косинуса разности проведено не только для случая, когда $0 < \alpha - \beta \leqslant \pi$. Рассмотрение других случаев проиллюстрировано на рисунках 24.2—24.5. С целью формирования математической культуры учащихся следует обратить внимание на то, что данное доказательство рассматривает все возможные ситуации, следовательно, является полным.

Обязательно следует обратить внимание учащихся на то, что левые и правые части формул тангенса суммы и тангенса разности имеют разные области определения. В правой части равенства появляется ограничение $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, которого нет в левой части равенства.

Комментарии к упражнениям

№ 24.23, 24.24. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса эти примеры можно обобщить, рассмотрев выражение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, и показать, как это выражение преобразовать в произведение.

№ 24.32 (2). Имеем: $y = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$. Из графика функции $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$ следует исключить точки, абсциссы которых равны $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

№ 24.36. Для данных значений углов выполняются неравенства $\sin\alpha < 1$ и $\sin\beta < 1$. Умножьте обе части первого неравенства на $\cos\alpha$, а обе части второго неравенства на $\cos\beta$.

§ 25. Формулы приведения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение выводить и применять формулы приведения.

Личностные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Метапредметные: формировать умения корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять формулы приведения.

Основные понятия

Формулы приведения для синуса, формулы приведения для косинуса, формулы приведения для тангенса, формулы приведения для котангенса, правила применения формул приведения.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	25.1, 25.3, 25.5			25.2, 25.4, 25.6
Урок 2	25.7, 25.8, 25.10		Самостоятельная работа № 26: № 1, 2, 3 (1), 4	25.9, 25.11

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, для каких целей применяют формулы приведения. Важно, чтобы они усвоили, что вычисление значения тригонометрической функции любого аргумента можно свести к вычислению значения тригонометрической функции острого угла.

Тут следует заметить, что ещё несколько десятилетий назад необходимость такого подхода можно было мотивировать тем, что достаточно составить таблицы значений тригонометрических функций только для диапазона от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Сейчас, при широкой доступности вычислительной техники, необходимость в использовании таблиц отпала, поэтому этот аргумент более не является для учащихся весомым. В связи с этим для мотивации введения данных формул следует обратиться к историческому аспекту.

Все формулы приведения доказываются по аналогии — с использованием формул сложения, поэтому все их доказывать нецелесообразно.

В классе с высоким уровне математической подготовки можно также рассмотреть в качестве отдельной задачи наглядное доказательство некоторых из формул для синуса и косинуса с помощью единичной окружности и определений этих функций.

Следует выделить достаточно учебного времени для отработки применения правил, приведённых в параграфе.

Комментарии к упражнениям

№ 25.5 (1). Воспользовавшись формулой $\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, получаем, что $\operatorname{ctg}5° = \operatorname{tg}85°$, $\operatorname{ctg}15° = \operatorname{tg}75°$, $\operatorname{ctg}25° = \operatorname{tg}65°$, $\operatorname{ctg}35° = \operatorname{tg}55°$. Отдельно следует заметить, что $\operatorname{ctg}45° = 1$. Поэтому искомое значение выражения равно 1.

№ 25.8. Поскольку $\cos^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{3\pi}{8}$ и $\cos^2\frac{3\pi}{11} = \cos^2\frac{6\pi}{22} = \sin^2\frac{5\pi}{22}$, то искомое значение выражения равно 2.

§ 26. Формулы двойного, тройного и половинного углов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение выводить и применять формулы двойного угла, тройного угла и половинного угла.

	Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.
	Метапредметные: формировать умение устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится выводить и применять формулы двойного угла, тройного угла и половинного угла.
Основные понятия	Формулы двойного угла, формула косинуса двойного угла, формула синуса двойного угла, формула тангенса двойного угла, формулы понижения степени, формулы тройного аргумента, формула синуса тройного аргумента, формула косинуса тройного аргумента, формулы половинного аргумента, формула косинуса половинного угла, формула синуса половинного угла, формула тангенса половинного угла.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	26.1, 26.3, 26.5, 26.7			26.2, 26.4, 26.6, 26.8
Урок 2	26.9, 26.11, 26.13, 26.15, 26.16			26.10, 26.12, 26.14, 26.17
Урок 3	26.18, 26.20, 26.22, 26.24, 26.26, 26.27			26.19, 26.21, 26.23, 26.25, 26.28
Урок 4	26.29, 26.31, 26.32, 26.33, 26.35, 26.37	26.39		26.30, 26.34, 26.36, 26.38
Урок 5	26.41, 26.43, 26.45, 26.47, 26.48	26.50	Самостоятельная работа № 27: № 1 (2), 2 (1), 3 (1), 4 (2), 5	26.42, 26.44, 26.46, 26.49

Методические комментарии

Учащиеся должны усвоить, что формулы двойного и половинного углов можно применять не только для углов вида 2α и $\frac{\alpha}{2}$ соответственно. Следует объяснить, что эти формулы применимы к любым углам вида $k\alpha$, где $\alpha \neq 0$, поскольку любой из таких углов можно представить в виде $2 \cdot \frac{k}{2}\alpha$ и $\frac{2k\alpha}{2}$ соответственно. Например, $\sin k\alpha = 2\sin\frac{k}{2}\alpha\cos\frac{k}{2}\alpha$, $\cos k\alpha = \cos^2\frac{k}{2}\alpha - \sin^2\frac{k}{2}\alpha$.

Для лучшего понимания этого утверждения можно устно решить несколько примеров на представление в нужном виде углов, например 3α, $\frac{\alpha}{3}$ и т. п.

Можно в качестве отдельного упражнения проверить, какие из этих формул применимы для случая $\alpha = 0$, и сделать вывод о том, какие из этих формул можно формально применять без учёта ограничений на величины углов, а для каких следует отдельно рассматривать эти ограничения.

Из формулы косинуса двойного угла получен ряд важных следствий, которые в дальнейшем будут иметь самостоятельное значение для решения тригонометрических уравнений.

Следует обратить внимание учащихся на то, что формулы половинного аргумента, приведённые на с. 188, не позволяют однозначно выразить тригонометрическую функцию.

Также следует обратить внимание учащихся на то, что в формулах, выражающих $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, левые и правые части имеют разные области определения.

Комментарии к упражнениям

№ 26.33 (1). Имеем: $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \sin 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}$.

№ 26.38. Имеем: $\frac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha + 4\cos\alpha + 2}{1 + \cos 2\alpha - 4\cos\alpha + 2} = \frac{2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 2}{2\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 2} = \frac{(\cos\alpha + 1)^2}{(\cos\alpha - 1)^2} = \operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$.

№ 26.49. Воспользуйтесь равенством $\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$.

§ 27. Формулы для преобразования суммы, разности и произведения тригонометрических функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения выводить и применять формулы суммы и разности тригонометрических функций, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять формулы суммы и разности тригонометрических функций, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Основные понятия

Формула суммы синусов, формула разности синусов, формула суммы косинусов, формула разности косинусов, формула суммы тангенсов, формула разности тангенсов, формула суммы котангенсов, формула разности котангенсов, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	27.1, 27.3, 27.5			27.2, 27.4, 27.6
Урок 2	27.7, 27.9, 27.11, 27.13			27.8, 27.10, 27.12, 27.14
Урок 3	27.15, 27.16, 27.19	27.17		27.18, 27.20
Урок 4	27.21, 27.23, 27.26, 27.28	27.24	Самостоятельная работа № 28: № 1 (1, 3), 2, 3	27.22, 27.27, 27.29

Методические комментарии

Учащиеся должны понимать, что замена $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ возможна потому, что для любых значений α и β всегда можно найти такие x и y, что система уравнений $\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta \end{cases}$ имеет решение. Для доказательства этого факта можно предложить учащимся решить эту систему методом сложения.

Учащимся надо показать, что изученные формулы позволяют преобразовывать в произведение сумму и разность не только одноимённых тригонометрических функций (синусов или косинусов), но также и разноимённых, т. е. выражения вида $\sin\alpha + \cos\beta$, $\sin\alpha - \cos\beta$ и т. п. Такие выражения с помощью формул приведения сводятся к сумме или разности одноимённых функций.

Важно, чтобы учащиеся научились пользоваться таким приёмом: для использования формул преобразования тригонометрических функций имеющаяся в выражениях константа может быть представлена в виде значения тригонометрической функции угла-константы. Например: $\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$. Следует обратить внимание учащихся на то, что этот приём широко используется при преобразованиях тригонометрических выражений, причём функцию, которая подставляется вместо константы, надо выбрать исходя из того, какую формулу удобнее всего применить в данном случае. Можно предложить учащимся представить константу $\sqrt{3}$ в виде значения всех четырёх тригонометрических функций и посмотреть, какой вид при этом приобретёт данный пример.

Комментарии к упражнениям

№ 27.3, 27.4. Условия этих задач требуют дополнительных комментариев учителя, разъясняющих, какой смысл для выражений такого типа имеет задача «преобразовать в произведение». Следует не ограничиваться чисто формальными действиями (например, вынесением за скобки множителя 2), а подойти к задаче с точки зрения применения тригонометрических формул.

№ 27.11 (1). $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

№ 27.20. Умножьте и разделите левую часть равенства на $2\sin\frac{\pi}{19}$.

№ 27.25. Умножьте и разделите левую часть равенства на $2\sin\frac{\pi}{n}$.

Контрольная работа № 6

Глава 4. Тригонометрические уравнения и неравенства

§ 28. Уравнение $\cos x = b$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием арккосинуса, решать уравнения вида $\cos x = b$.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием арккосинуса, решать уравнения вида $\cos x = b$.

Основные понятия

Арккосинус, формула корней уравнения $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$, формула корней уравнения $\cos x = 0$, формула корней уравнения $\cos x = 1$, формула корней уравнения $\cos x = -1$.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	28.1, 28.3, 28.5			28.2, 28.4, 28.6
Урок 2	28.7, 28.9, 28.11			28.8, 28.10, 28.12
Урок 3	28.13, 28.15, 28.17		Самостоятельная работа № 29: № 1 (1, 3), 2, 3	28.14, 28.16, 28.18

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, что уравнение вида $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$ имеет бесконечно много корней, а при $|b| > 1$ это уравнение корней не имеет.

При необходимости, кроме примера решения уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, можно продемонстрировать решение других уравнений, например при $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а также при отрицательных значениях b. Если учащиеся поймут, как решается уравнение $\cos x = b$ для частных случаев, то переход к общему случаю, как правило, проблем не вызывает.

Наибольшие трудности в материале этого параграфа вызывает понимание определения арккосинуса. Отработке этого понятия следует уделить значительное время, рассмотреть достаточное количество примеров.

При решении уравнений вида $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ не следует использовать формулу корней уравнения $\cos x = b$. Для того чтобы учащиеся самостоятельно пришли к этому выводу и осознанно запомнили решения этих уравнений, можно вернуться к рассмотрению единичной окружности.

Комментарии к упражнениям

№ 28.5 (3), 28.6 (1). Можно дать учащимся такой совет: воспользовавшись чётностью функции $y = \cos x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными.

№ 28.13. Заметим, что число $\frac{7\pi}{3}$ является третьим в порядке возрастания корнем данного уравнения.

№ 28.15, 28.16. Воспользуйтесь идеей решения примера 2 параграфа.

№ 28.17. Данное уравнение на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень $\frac{7\pi}{6}$. Тогда для выполнения условия задачи надо потребовать, чтобы уравнение $x - a = 0$ не имело корней на указанном промежутке или имело корень, равный $\frac{7\pi}{6}$.

§ 29. Уравнение $\sin x = b$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение оперировать понятием арксинуса, решать уравнения вида $\sin x = b$.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Планируемые результаты — Учащийся научится оперировать понятием арксинуса, решать уравнения вида $\sin x = b$.

Основные понятия — Арксинус, формула корней уравнения $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$, формула корней уравнения $\sin x = 0$, формула корней уравнения $\sin x = 1$, формула корней уравнения $\sin x = -1$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	29.1, 29.3, 29.5			29.2, 29.4, 29.6
Урок 2	29.7, 29.9, 29.11, 29.13, 29.15	29.17	Самостоятельная работа № 30: № 1 (1, 2), 2, 3	29.8, 29.10, 29.12, 29.14, 29.16

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понять, что уравнение вида $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$ имеет бесконечно много корней, а при $|b| > 1$ это уравнение корней не имеет.

При необходимости, кроме примера решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, можно продемонстрировать решение других уравнений, например при $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а также при отрицательных значениях b. Если учащиеся поймут, как решается уравнение $\sin x = b$ для частных случаев, то переход к общему случаю, как правило, проблем не вызывает.

После того как при изучении предыдущего параграфа учащиеся усвоили определение арккосинуса, понимание определения арксинуса должно вызвать гораздо меньше затруднений. Тем не менее отработке этого понятия следует уделить значительное время, рассмотреть достаточное количество примеров.

Следует обратить внимание учащихся, что определения арксинуса и арккосинуса схожи, однако принципиальное различие заключается в границах промежутка, которому принадлежит значение арксинуса (арккосинуса). В сильном классе можно, пользуясь графиками соответствующих тригонометрических функций, обсудить, из каких соображений выбраны именно эти промежутки. Учащиеся должны обратить внимание на то, что в обоих промежутках присутствует значение 0; каждый промежуток представляет собой значения функции синус (косинус) для промежутка значений аргумента длиной в полпериода, на котором функция возрастает (убывает); выбранный промежуток «ближе всего» прилегает к нулю, а следовательно, полученные значения арксинуса (арккосинуса) наиболее удобны для вычислений.

При решении уравнений вида $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ не следует использовать формулу корней уравнения $\sin x = b$. Для того чтобы учащиеся самостоятельно пришли к этому выводу и осознанно запомнили решения этих уравнений, можно вернуться к рассмотрению единичной окружности.

Формула корней уравнения $\sin x = b$ воспринимается учащимися более тяжело, чем формула корней уравнения $\cos x = b$, из-за записи $(-1)^k$. Хотя в дальнейшем учащиеся будут легко применять эту формулу, на данном этапе следует уделить особое внимание пониманию её сущности, особенно переходу от двух наглядно понятных формул $x = \alpha + 2\pi n$ и $x = \pi - \alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, к сокращённой форме записи $x = (-1)^k\alpha + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Комментарии к упражнениям

№ 29.5 (3), 29.6 (1). Можно дать учащимся такой совет: воспользовавшись нечётностью функции $y = \sin x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными. Этот же приём рекомендовалось использовать при решении задач 28.5 (3), 28.6 (1) предыдущего параграфа, поэтому желательно, чтобы учащиеся сами пришли к выводу о возможности его использования и для данных задач.

№ 29.13. Надо записать в порядке возрастания четыре корня данного уравнения, каждый из которых не меньше $-\frac{\pi}{2}$.

№ 29.15, 29.16. Надо построить график функции $y = \sin x$ на каждом из промежутков, указанных в условии. Затем исследовать количество точек пересечения полученной кривой с горизонтальными прямыми.

№ 29.17, 29.18. Следует воспользоваться идеей решения примера 3 параграфа.

§ 30. Уравнения $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$

Технологическая карта урока

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятиями арктангенса и арккотангенса, решать уравнения вида $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: развивать понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями арктангенса и арккотангенса, решать уравнения вида $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$.

Основные понятия

Арктангенс, формула корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$, арккотангенс, формула корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	30.1, 30.3, 30.5, 30.7	30.9, 30.11	Самостоятельная работа № 31: № 1 (1, 2), 2, 3	30.2, 30.4, 30.6, 30.8

Методические комментарии

Методика изложения материала данного параграфа такая же, как и для двух предыдущих параграфов. Поэтому желательно придерживаться ранее изложенных методических рекомендаций, в частности, для того чтобы учащиеся осознавали единый подход к введению понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса и соответственно — к решению простейших тригонометрических уравнений (а в дальнейшем — функций, обратных тригонометрическим, и методам решения тригонометрических неравенств).

Однако следует заострить внимание учащихся на различиях в определениях. Особо следует обратить внимание на промежутки, которым принадлежат значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, и их запись с круглыми либо квадратными скобками. В сильном классе можно обсудить с учащимися, почему для арксинуса и арккосинуса промежутки включают в себя числа, их ограничивающие, а для арктангенса и арккотангенса — не включают.

Комментарии к упражнениям

№ 30.5 (2), 30.6 (2). Можно дать учащимся такой совет: воспользовавшись нечётностью функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, записать данные уравнения так, чтобы коэффициенты, стоящие при переменной x, были положительными. Этот же приём рекомендовалось использовать при решении задач 28.5 (3), 28.6 (1), 29.5 (3), 29.6 (1), поэтому желательно, чтобы учащиеся сами пришли к выводу о возможности его использования.
№ 30.11, 30.12. Следует воспользоваться идеей решения примера 2 параграфа.

§ 31. Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения строить графики обратных тригонометрических функций, применять свойства обратных тригонометрических функций при решении задач.

Личностные: формировать умение объективно оценивать свой труд.

Метапредметные: развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится строить графики обратных тригонометрических функций, применять свойства обратных тригонометрических функций при решении задач.

Основные понятия

Функция $y = \arccos x$, функция $y = \arcsin x$, функция $y = \operatorname{arctg} x$, функция $y = \operatorname{arcctg} x$, свойства обратных тригонометрических функций.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	31.1, 31.3, 31.5, 31.7			31.2, 31.4, 31.6, 31.8

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	31.9, 31.11, 31.13, 31.15, 31.17	31.19		31.10, 31.12, 31.14, 31.16, 31.18
Урок 3	31.21, 31.23, 31.25, 31.27, 31.29	31.31		31.22, 31.24, 31.26, 31.28, 31.30
Урок 4	31.33, 31.35, 31.37, 31.40, 31.42, 31.44	31.38, 31.46	Самостоятельная работа № 32: № 1 (1, 2), 2, 3 (1), 4 (2, 4)	31.34, 31.36, 31.39, 31.41, 31.43, 31.45

Методические комментарии

Материал этого параграфа является традиционно сложным для учащихся. Во многом он основан на свойствах взаимно обратных функций. Поэтому перед изучением этого параграфа следует повторить соответствующий материал.

Целый ряд тождеств этого параграфа получен за счёт равенства $g(f(x)) = x$, где f и g — взаимно обратные функции. Это равенство выполняется для всех $x \in D(f)$. Учащиеся часто забывают учитывать последнее ограничение. Например, в тождестве $\cos(\arccos x) = x$ учащиеся не учитывают, что оно выполняется только для $x \in [-1; 1]$.

Графическая интерпретация равенства $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ позволяет учащимся лучше понять и запомнить это тождество. При необходимости можно аналогичным способом проиллюстрировать тождество $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Не следует требовать от учащихся, чтобы они заучивали содержание таблиц со свойствами функций $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ приведённые в параграфе. Все эти свойства можно «извлечь» из эскиза графика соответствующей функции. В свою очередь, графики этих функций строятся на основании графиков тригонометрических функций. Поэтому может оказаться целесообразным повторить с учащимися графики и основные свойства тригонометрических функций и продемонстрировать, как с помощью цепочки «тригонометрическая функция и её свойства — обратная тригонометрическая функция — её свойства» вывести свойства, содержащиеся в таблице. Это будет способствовать более осознанному усвоению и систематизации материала этой главы.

Комментарии к упражнениям

№ 31.5, 31.6. Чтобы решение этих задач было полным, учащиеся должны указать значения аргументов, при которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

№ 31.18 (1). Поскольку $\sqrt{x} \geqslant 0$ для любого $x \in [0; +\infty)$, то $0 \leqslant \arccos\sqrt{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда $2 \leqslant \arccos\sqrt{x} + 2 \leqslant \frac{\pi}{2} + 2$. Заметим, что $\arccos 0 + 2 = \frac{\pi}{2} + 2$ и $\arccos\sqrt{1} + 2 = 2$. Поэтому $\max\limits_{[0;1]}(\arccos\sqrt{x} + 2) = \frac{\pi}{2} + 2$ и $\min\limits_{[0;1]}(\arccos\sqrt{x} + 2) =$ $= 2$.

№ 31.27 (1). Заметим, что уравнение $4x - 9 = x^2 - 5x + 5$ является следствием данного уравнения. Для того чтобы обеспечить равносильный переход, надо добавить ограничение $|4x - 9| \leqslant 1$.

№ 31.40 (3). Заметим, что равенство $\arcsin(\sin 3) = 3$ является неверным, поскольку число 3 не входит в область значений арксинуса. На самом деле имеют место такие равенства: $\arcsin(\sin 3) =$ $= \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$.

§ 32. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения решать тригонометрические уравнения методом замены переменной, однородные тригонометрические уравнения. ***Личностные***: развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные***: формировать умения осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать тригонометрические уравнения методом замены переменной, тригонометрические однородные уравнения.

Основные понятия	Простейшие тригонометрические уравнения, однородное тригонометрическое уравнение n-й степени.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	32.1, 32.3			32.2, 32.4
Урок 2	32.5, 32.7, 32.9	32.11		32.6, 32.8, 32.10
Урок 3	32.13, 32.15, 32.17, 32.19, 32.21			32.14, 32.16, 32.18, 32.20, 32.22
Урок 4	32.23, 32.25, 32.27, 32.31, 32.33	32.29, 32.35	Самостоятельная работа № 33: № 1 (1, 3, 6)	32.24, 32.26, 32.28, 32.32, 32.34

Методические комментарии

Решение уравнений этого параграфа основано на методе замены переменной. Поэтому целесообразно перед изучением этой темы повторить метод замены переменной при решении алгебраических уравнений.

Большая часть параграфа посвящена однородным тригонометрическим уравнениям первой и второй степеней.

При решении однородного тригонометрического уравнения приходится делить обе части уравнения на выражение, содержащее переменную. Следует разъяснить учащимся, что такое действие можно производить лишь тогда, когда корни делителя не являются корнями данного уравнения. Например, деление обеих частей уравнения $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$ на $\cos^2 x$ приводит к потере решений вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Комментарии к упражнениям

№ 32.17 (1). Сделайте замену $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = t$. Тогда $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x = t^2 - 2$.
№ 32.21, 32.22. Воспользуйтесь формулой тройного аргумента.
№ 32.23 (3). Выразите $\sin^3 x$ и $\cos^3 x$ через другие тригонометрические выражения в формулх тройного аргумента.
№ 32.27. Сделайте замену $\sin x + \cos x = t$.

№ 32.29 (1). Сделайте замену $\sin x + \cos x = t$.
№ 32.33, 32.34. Воспользуйтесь идеей решения примера § 7.

§ 33. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители. Применение ограниченности тригонометрических функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители, применять ограниченность тригонометрических функций.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты

Учащийся научится решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители, применять ограниченность тригонометрических функций.

Основные понятия

Метод разложения на множители.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	33.1, 33.3, 33.5			33.2, 33.4, 33.6
Урок 2	33.7, 33.9, 33.11, 33.13			33.8, 33.10, 33.12, 33.14
Урок 3	33.15, 33.17, 33.19, 33.21, 33.23	33.25		33.16, 33.18, 33.20, 33.22, 33.24
Урок 4	33.27, 33.29, 33.31, 33.33	33.35	Самостоятельная работа № 34: № 1 (1, 3, 5)	33.28, 33.30, 33.32, 33.34

Методические комментарии

При решении тригонометрических уравнений часто приходится переходить к совокупности, состоящей из нескольких тригонометрических уравнений. Нередко учащиеся задают вопрос: «Надо ли при записи решений каждого уравнения совокупности использовать разные буквы для обозначения целочисленного параметра или можно использовать одну и ту же букву?» Следует разъяснить учащимся, что поскольку речь идёт о совокупности, то приемлемой является каждая из вышеуказанных форм записи ответа.

Нередко при решении тригонометрических уравнений ответом является объединение нескольких множеств, имеющих непустое пересечение. В этом случае не следует требовать от учащихся находить объединение множеств, в которых есть одинаковые элементы.

Поскольку функции синус и косинус являются ограниченными, то нередко для уравнения $f(x) = g(x)$ может оказаться результативной следующая идея. Если $f(x) \leqslant A$ и $g(x) \geqslant A$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Комментарии к упражнениям

№ 33.17, 33.18. Воспользуйтесь идеей преобразования выражений вида $a\sin x + b\cos x$.

№ 33.21, 33.22. Воспользуйтесь ограниченностью тригонометрических функций.

§ 34. О равносильных переходах при решении тригонометрических уравнений

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: владеть основными причинами неравносильных переходов при решении тригонометрических уравнений, формировать умения решать тригонометрические уравнения, используя равносильные переходы. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты	Учащийся овладеет основными методами неравносильных переходов при решении тригонометрических уравнений, научится решать тригонометрические уравнения, используя равносильные переходы.
Основные понятия	Равносильные переходы при решении тригонометрических уравнений.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	34.1, 34.3			34.2, 34.4
Урок 2	34.5, 34.7, 34.9, 34.11		Самостоятельная работа № 35: № 1	34.6, 34.8, 34.10, 34.12

Методические комментарии

В параграфе исследуются основные причины изменения множества корней тригонометрического уравнения. Поскольку большинство тригонометрических уравнений, с которыми приходится встречаться учащимся, имеют бесконечно много корней, то метод следствий может оказаться малоэффективным. Действительно, подвергать проверке бесконечное множество корней, как правило, довольно тяжело. Поэтому параграф посвящён методу равносильных переходов.

В примерах рассматриваются две причины нарушения равносильности: 1) расширение области определения уравнения; 2) применение тригонометрических формул, левые и правые части которых имеют разные области определения.

Примеры, разобранные в параграфе, очень характерны и приемлемы для исследования поднятых выше проблем. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса некоторые из этих примеров можно предложить им разобрать самостоятельно.

Комментарии к упражнениям

№ 34.1, 34.2, 34.5, 34.6. Воспользуйтесь идеей решения примера 1 параграфа.

№ 34.7, 34.8. Воспользуйтесь идеей решения примера 2 параграфа.

№ 34.9, 34.10. Воспользуйтесь идеей решения примера 3 параграфа.
№ 34.1, 34.12. Воспользуйтесь идеей решения примеров 4 и 5 параграфа.

§ 35. Тригонометрические неравенства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение решать простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним. ***Личностные***: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные***: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.
Планируемые результаты	Учащийся научится решать простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
Основные понятия	Простейшие тригонометрические неравенства.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	35.1, 35.3,			35.2, 35.4
Урок 2	35.5, 35.7			35.6, 35.8
Урок 3	35.9, 35.11		Самостоятельная работа № 36: № 1	35.10, 35.12

Методические комментарии

Существует два приёма обучения решению простейших тригонометрических неравенств: с помощью графиков тригонометрических функций и с помощью интерпретации решений на единичной окружности. В учебнике реализован первый из этих приёмов. Такой выбор основан на том, что изображение решений с помощью графиков тригонометрических функций более наглядно и вызывает меньше проблем у учащихся при записи ответа.

Также можно продемонстрировать учащимся использование единичной окружности.

Учащиеся должны понимать, что для анализа и записи решений достаточно исследовать поведение функции на промежутке длиной в период. Однако запись решения зависит от того, какой именно из промежутков такой длины рассматривается в процессе решения. Иными словами, одно и то же множество решений может быть записано в разных формах.

В примере 1 параграфа продемонстрированы различные возможные формы записи ответов тригонометрических неравенств.

Следует обратить внимание учащихся, что в примере 6 продемонстрирован метод решения тригонометрического неравенства с использованием тригонометрической окружности.

В примерах 7 и 8 показано, как можно решать тригонометрические неравенства методом интервалов. Следует подчеркнуть, что этот метод довольно универсальный и может быть использован во многих ситуациях.

Комментарии к упражнениям

№ 35.3 (3, 4, 6), 35.4 (3). При решении этих неравенств желательно, воспользовавшись чётностью (нечётностью) тригонометрических функций, записать неравенство так, чтобы коэффициент при переменной x стал положительным.

№ 35.5, 35.6. Воспользуйтесь единичной окружностью.

№ 35.11, 35.12. Воспользуйтесь методом интервалов.

Контрольная работа № 7

Глава 5. Производная и её применение

§ 36. Определение предела функции в точке и функции, непрерывной в точке

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения оперировать понятиями предела функции в точке, непрерывности функции в точке, доказывать и применять теоремы об арифметических действиях с пределами функций.

Личностные: развивать познавательный интерес к математике.

Метапредметные: формировать представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями предела функции в точке, непрерывности функции в точке, доказывать и применять теоремы об арифметических действиях с пределами функций.

Основные понятия

Предел функции в точке; функция, непрерывная в точке; теоремы об арифметических действиях с пределами функций; функция, непрерывная на множестве; непрерывная функция.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	36.1, 36.3			36.2, 36.4
Урок 2	36.5, 36.7, 36.9, 36.11, 36.13		Самостоятельная работа № 37: № 1, 2, 3	36.6, 36.8, 36.10, 36.12, 36.14

Методические комментарии

В начале параграфа понятие о пределе функции в точке вводится с помощью наглядной иллюстрации (рис. 36.1—36.3). Обратим внимание, что для первоначального ознакомления с понятием предела выбраны графики дифференцируемых функций, поэтому вопрос о существовании предела пока что у учащихся не возникает. Наглядное представление о пределе для таких функций формируется достаточно легко. При разъяснении этого понятия удобно пользоваться такими словосочетаниями: стремится к, становится всё меньше и меньше, всё меньше и меньше отличается от, как угодно близко подходит и т. д.

Важно, чтобы учащиеся поняли, что речь идёт не просто о пределе некоторой функции, а о пределе данной функции в данной конкретной точке. Показательным является пример, изображённый на рисунке 36.2, на основании которого можно сделать выводы, что в различных точках функция имеет различные пределы и что пределы функции в различных точках могут быть равными.

Следует обратить внимание на то, что функция, имеющая предел в некоторой точке, может быть вообще не определена в этой точке (рис. 36.4 учебника), иметь в этой точке значение функции, равное пределу функции в этой точке (рис. 36.1 и 36.8 учебника, функция f), и иметь в этой точке значение функции, отличающееся от предела функции в этой точке (рис. 36.8, функция g). Все эти три случая удовлетворяют определению.

Примеры, связанные с рисунком 36.3, показывают, что понятие предела функции в точке рассматривается не только для внутренних точек области определения. Но при этом можно подчеркнуть, что понятие предела функции в точке обязательно связано с некоторым промежутком из области определения функции, которому принадлежит рассматриваемая точка. Для изолированных точек понятие предела функции в точке не рассматривают.

Случаю, разобранному на рисунке 36.4 учебника, следует уделить особое внимание, потому что он является пропедевтическим подходом к рассмотрению функций, у которых предел в некоторой точке не совпадает со значением функции в этой точке, а далее на основании этого — к понятию непрерывной функции.

На рисунках 36.5—36.7 учебника приведены примеры функций, не имеющих предела в рассматриваемой точке. Причины, по которым эти функции не имеют предела, можно отнести к двум основным категориям:

- предел справа не равен пределу слева;
- значения функции в окрестностях рассматриваемой точки стремятся к бесконечности.

Эти ситуации легко описать с помощью указанных рисунков.

Обязательно следует рассмотреть различие между функциями, изображёнными на рисунках 36.7 и 36.8 учебника (функция g).

Представление понятия о непрерывной функции в точке x_0 с помощью свойства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ полностью соответствует наглядному представлению учащихся о непрерывной кривой как о линии, которую можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги.

После введения определения функции, непрерывной на множестве, следует вернуться к рисункам 36.5 и 36.7 и предложить учащимся определить, на каких множествах эти функции являются непрерывными.

Полезно начать составлять с учащимися диаграмму Эйлера, которая описывает соотношение множеств функций, имеющих предел в точке; непрерывных в точке; не принадлежащих ни к одному из этих множеств. В круги диаграммы следует заносить схематические изображения функций. Это следует обсудить с учащимися и сразу отобразить на диаграмме. В конце изучения параграфа диаграмма должна приобрести приблизительно такой вид, как показано на рисунке 1 (исследуемая точка обозначена на графиках красным цветом, график функции — синим).

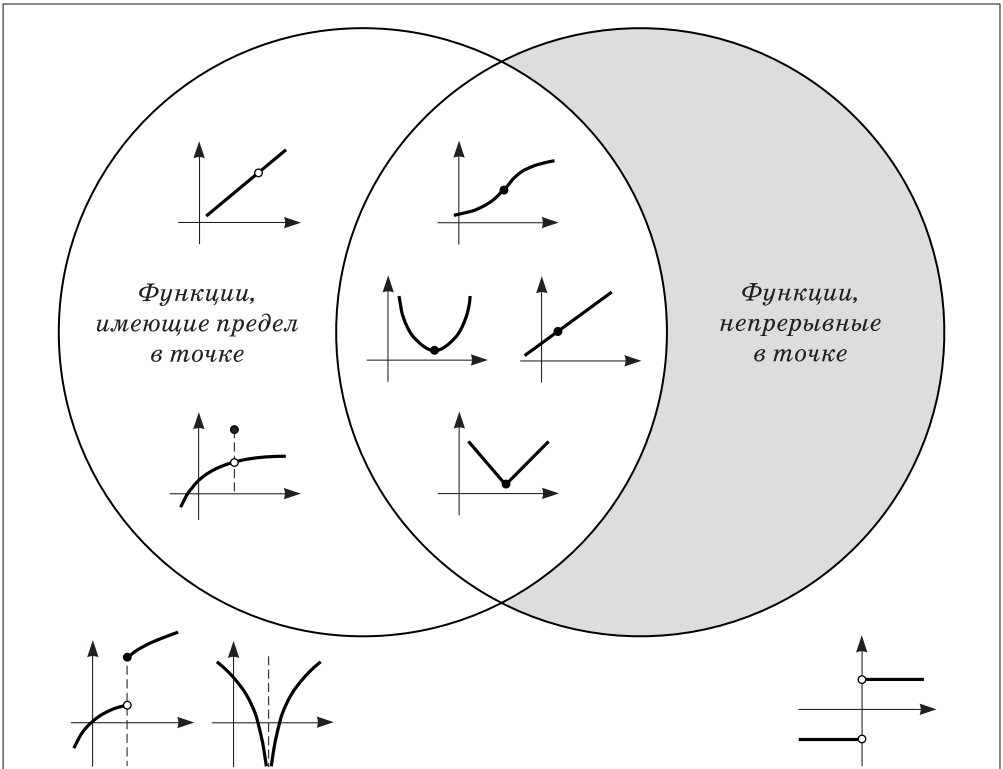

Рис. 1

Комментарии к упражнениям

№ 36.3. Важно, чтобы учащиеся понимали, что функции, графики которых изображены на рисунках *и*, *к*, имеют предел в рассматриваемой точке, но не являются непрерывными в ней.

№ 36.5, 36.6. Учащиеся должны с помощью графика выяснить, имеет ли функция предел в указанной точке, найти значение этого предела и найти значение функции в этой точке. Полученные значения сравнить, проверив выполнение равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§ 37. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Технологическая карта урока

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение оперировать понятием приращения функции в точке, касательной к графику функции. ***Личностные***: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные***: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями приращения функции в точке, касательной к графику функции.
Основные понятия	Приращение аргумента функции в точке, приращение функции в точке, закон движения, мгновенная скорость, касательная к графику функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	37.1, 37.3, 37.5, 37.7	37.9	Самостоятельная работа № 38: № 1, 2, 3	37.2, 37.4, 37.6, 37.8

Методические комментарии

В начале изучения параграфа целесообразно предложить учащимся привести несколько примеров того, когда для исследования ситуации следует найти разность значений функции в двух точках. Желательно обратить внимание на те примеры, в которых эти точки будут находиться достаточно близко друг к другу. После введения понятий приращения аргумента и приращения функции в точке следует разобрать, какое смысловое значение в рассматриваемых примерах несут эти понятия.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, какое значение имеет содержание сноски на с. 278. Благодаря этой сноске в дальнейшем понятие производной рассматривается в тех точках области определения функции, которые не являются изолированными.

Пример 1 данного параграфа учащиеся воспринимают как чисто теоретический, пока что они не видят его практического применения.

Рассмотреть задачу о мгновенной скорости поможет обращение к спидометру автомобиля, который показывает (с некоторой точностью, но этим можно пренебречь) именно мгновенную скорость автомобиля в данный момент.

При рассмотрении задачи о касательной к графику функции в первую очередь надо добиться от учащихся понимания того, чем определение касательной к графику функции отличается от определения касательной к окружности. Для примера можно взять функцию синус и рассмотреть касательные к синусоиде в различных её точках. Следует подчеркнуть, что нас интересует поведение касательной в окрестностях исследуемой точки и не интересует, пересекает ли эта прямая график этой же функции ещё в какой-то точке. Также можно продемонстрировать с помощью графика функции, что наличие одной общей точки у прямой и кривой не является ни необходимым, ни достаточным условием существования касательной к графику функции в данной точке.

В конце изучения параграфа следует сделать вывод о том, что хотя задачи о мгновенной скорости и о касательной к графику функции описывают совершенно разные процессы, они имеют общую математическую модель. Следует подчеркнуть удобство этой модели для исследования процессов.

Комментарии к упражнениям

№ 37.7, 37.8. При решении этих задач следует воспользоваться схемой, описанной в параграфе, в той части, которая относится к задаче о мгновенной скорости.

№ 37.9, 37.10. При решении этих задач следует воспользоваться схемой, которая описана в решении примера 2 параграфа.

§ 38. Понятие производной

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение. ***Личностные***: формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные***: формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности, группировать.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение.
Основные понятия	Производная функции в точке, геометрический смысл производной, механический смысл производной, дифференцируемая в точке функция, производная функции, дифференцируемая на множестве функция, дифференцируемая функция, дифференцирование.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	38.1, 38.2, 38.4, 38.6			38.3, 38.5, 38.7
Урок 2	38.8, 38.10, 38.12, 38.14, 38.15			38.9, 38.11, 38.13, 38.16
Урок 3	38.17, 38.19, 38.20, 38.22, 38.23	38.25	Самостоятельная работа № 39: № 1, 2 (1), 3, 4, 5	38.18, 38.21, 38.24

Методические комментарии

Сопоставив определение производной и задачи о мгновенной скорости и о касательной к графику функции, рассмотренные в предыдущем параграфе, учащиеся должны осознать механический и геометрический смысл производной. Этому во многом будет способствовать пример 1, разобранный в параграфе.

Схема вычисления производной функции в точке, рассмотренная в этом параграфе, основана на определении производной. Она достаточно трудоёмка, однако учащиеся всё же должны её освоить и решить некоторое количество задач. В частности, полезным является вывод формул для вычисления производных линейной функции и функций $y = x^2$ и $y = x^3$ на основании определения, приведённый в примерах этого параграфа. При этом механический и геометрический смысл производной придаёт этим задачам менее формальный характер.

Очевидно, что понятия производной и предела функции в точке тесно связаны между собой. При этом каждая функция, имеющая производную в точке, имеет предел в этой точке; однако не каждая функция, имеющая предел в этой точке, является дифференцируемой в данной точке. Для того чтобы учащиеся лучше осознали это различие, целесообразно вернуться к рассмотрению рисунков 38.4–38.8.

Теорема 38.1 показывает связь между непрерывностью функции в точке и дифференцируемостью в этой точке. Наглядно эту связь иллюстрирует диаграмма, изображенная на рисунке 38.5.

Если при изучении § 38 учитель начал составлять с учащимися диаграмму Эйлера, которая описывает соотношение множества функций, имеющих предел в точке, и множества функций, непрерывных в точке, то при изучении данного параграфа следует дополнить диаграмму кругом «дифференцируемые в точке» и пересмотреть классификацию функций, уже нанесённых на диаграмму.

В данном параграфе приведены формулы для вычисления производныхдля большинства функций, которые были изучены ранее в школьном курсе алгебры. Для части из них приведён вывод формул на основании определения производной, остальные принимаются без доказательства. Учащиеся должны запомнить эти формулы и уметь их применять.

Для решения большинства задач данного параграфа, требующих вычисления значения производной, надо пользоваться именно этими формулами. Если в задаче предусмотрено нахождение производной с помощью определения, то в формулировке задачи это указано явно.

Комментарии к упражнениям

№ 38.6, 38.7. Вначале следует воспользоваться формулами нахождения производной, а затем найти значение функции (полученной производной) в заданной точке.

№ 38.12, 38.12. Эти задачи имеют особое значение для усвоения учащимися геометрического смысла производной.

№ 38.14. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно предложить им обобщить эту задачу, сделав вывод о связи характера монотонности функции со знаком её производной.

№ 38.19. Следует установить с помощью графика, какой угол, тупой или острый, образует касательная к графику, проведённая в указанной точке.

§ 39. Правила вычисления производных

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение применять формулы производной суммы, произведения, частного.

Личностные: формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности, о её значимости для развития цивилизации

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации, в других дисциплинах.

Планируемые результаты

Учащийся научится применять формулы производной суммы, произведения, частного, сложной функции.

Основные понятия

Производная суммы, производная произведения, производная частного, производная сложной функции.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	39.1, 39.3, 39.5			39.2, 39.4, 39.6
Урок 2	39.7, 39.9, 39.11, 39.12			39.8, 39.10, 39.13

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	39.14, 39.16, 39.18, 39.21, 39.23	39.19		39.15, 39.17, 39.20, 39.22
Урок 4	39.24, 39.26, 39.29	39.27, 39.31	Самостоятельная работа № 40: № 1 (1–4), 2	39.25, 39.28, 39.30

Методические комментарии

Вывод формул (правил вычисления производных), изучаемых в этом параграфе, основывается на материале из курса математического анализа, который не изучается в школе. Поэтому в учебнике приводится лишь схематический ход доказательств. Однако и он может оказаться достаточно сложным для части учащихся. Поэтому не следует требовать от учащихся запоминания этой теоретической части. Достаточно того, чтобы учащиеся освоили формулы и научились их применять.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, какое значение имеет содержание сноски на с. 295. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и определены соответственно на промежутках $(-\infty; x_0]$ и $[x_0; \infty)$, то теоремы 39.1–39.4 выполняться не будут.

Если требуется найти значение производной функции в конкретной точке, то алгоритм действий должен быть таков: сначала с помощью изученных формул вычислить производную и максимально упростить формулу и лишь затем подставлять в неё значение аргумента. Учащиеся часто допускают ошибки, сразу же подставляя значение аргумента и вычисляя производную в некоторой точке, а затем подставляя полученное значение в качестве аргумента для следующих вычислений. Для профилактики ошибок следует также разобрать с учащимися задачу 39.18.

Применение формулы производной сложной функции требует умения учащихся «увидеть» структуру сложной функции и представить функцию в виде $f(g(h(\dots(x)\dots)$, где f, g, h, ... — известные учащимся функции, для которых они умеют находить производные.

Опыт показывает, что учащиеся чаще всего ошибаются при вычислении производной сложной функции. Для профилактики ошибок целесообразно подробно разобрать с учащимися решение всех задач из примера 2 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 39.16. Следует обратить внимание учащихся на то, что данная сложная функция имеет структуру $y = f(g(h((x))$.
№ 39.19—39.23. Перед решением этих задач следует повторить с учащимися механический смысл производной.
№ 39.24, 39.25. Раскройте модули. Получите функцию, заданную кусочно-аналитически. Найдите производные функции на каждом из полученных промежутков.

§ 40. Уравнение касательной

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение составлять уравнение касательной проведённой к графику функции в точке с заданной абсциссой.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: развивать мотивы и интерес к познавательной деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится составлять уравнение касательной проведённой к графику функции в точке с заданной абсциссой.

Основные понятия

Уравнение касательной.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	40.1, 40.3			40.2, 40.4
Урок 2	40.5, 40.7, 40.9, 40.11, 40.13			40.6, 40.8, 40.10, 40.12, 40.14

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	40.15, 40.17, 40.19, 40.21, 40.23	40.25		40.16, 40.18, 40.20, 40.22, 40.24
Урок 4	40.27, 40.29, 40.31		Самостоятельная работа № 41: № 1, 2, 3	40.28, 40.30, 40.32

Методические комментарии

Учащиеся должны усвоить, что об уравнении касательной к графику функции в некоторой точке может идти речь только тогда, когда функция является дифференцируемой в данной точке. Для обоснования этого можно вернуться к примерам функций, не дифференцируемых в точке, приведённым в § 35.

Следует обратить внимание учащихся на трактовку понятия «касательная» как крайнего положения секущей. Следовательно, касательная не обязательно должна располагаться с одной стороны от графика функции, как это требуется для касательных к линиям в курсе геометрии. Желательно привести пример графика такой функции (рис. 2). Также можно найти уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке x_0 и затем сделать соответствующий рисунок.

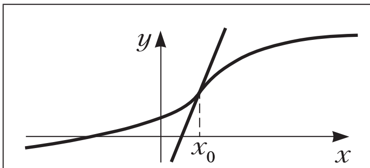

Рис. 2

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить, какую невертикальную прямую называют касательной к графику функции: прямую с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, называют касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Изученный в параграфе теоретический материал позволяет записывать уравнение касательной к графику функции в точке с известной абсциссой. Поэтому в ряде задач к этому параграфу требуется сначала найти абсциссу некоторой точки и лишь затем искать производную в этой точке.

Комментарии к упражнениям

№ 39.15, 39.16. Условие задачи позволяет легко найти угловой коэффициент касательной.
№ 39.17. На графике данной функции найдите точку, касательная в которой имеет угловой коэффициент, равный 12.
№ 39.19. Найдите координаты точек, в которых указанная касательная пересекает координатные оси.
№ 39.29. Достаточно найти все значения параметра a, при которых уравнение $2x + a = \sqrt{4x - 1}$ имеет единственное решение.

Контрольная работа № 8

§ 41. Признаки возрастания и убывания функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения доказывать и применять теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа, находить промежутки возрастания и убывания функции, используя признаки возрастания и убывания функции.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать и применять теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа, находить промежутки возрастания и убывания функции, используя признаки возрастания и убывания функции.

Основные понятия

Теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, признак постоянства функции, признак возрастания функции, признак убывания функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	41.1, 41.3			41.2, 41.4

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	41.5, 41.6, 41.8, 41.10, 41.12, 41.14			41.7, 41.9, 41.11, 41.13, 41.15
Урок 3	41.16, 41.18, 41.20, 41.22			41.17, 41.19, 41.21, 41.23
Урок 4	41.24, 41.27, 41.29, 41.31	41.25	Самостоятельная работа № 42: № 1 (1, 2), 2, 3, 4	41.26, 41.28, 41.30

Методические комментарии

В параграфе связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции разъясняется на интуитивно-наглядном уровне с использованием в первую очередь геометрической интерпретации. Теоремы данного параграфа (признаки постоянства, возрастания и убывания функции) приводятся без доказательств.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции позволяет находить промежутки монотонности функции в зависимости от знака производной на этих промежутках. Все выводы теорем 41.1—41.3 также подкрепляются с помощью механического смысла производной.

Целесообразно перед изучением этой темы повторить метод интервалов для решения неравенств.

Важной частью решения задачи на поиск промежутков монотонности функции является правильная запись ответа. Из курса алгебры 9 класса учащиеся знают, что в ответ следует включать тот промежуток возрастания (убывания) функции, который не содержится в другом промежутке монотонности. Например, из курса математического анализа известно, что если функция возрастает (убывает) на промежутке $(-\infty; x_0)$ и непрерывна в точке x_0, то эта функция также возрастает (убывает) на промежутке $(-\infty; x_0]$. В примере 1 параграфа разъясняется, когда концы промежутков монотонности следует включать в ответ.

В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса можно разъяснить им, что теоремы, обратные признакам возрастания (убывания) функции, неверны. Например, функция $y = x^3$ является возрастающей, однако её производная принимает неотрицательные значения (а не «положительные»). Также функция может быть возрастающей (убывающей) на некотором промежутке I, но при этом не быть дифференцируемой во всех точках этого промежутка (см., например, рис. 42.10 учебника).

Комментарии к упражнениям

№ 41.6. На рисунке 38.10 учебника изображён график дифференцируемой функции, возрастающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывающей на промежутке $[0; \infty)$. Следовательно, на указанных промежутках производная принимает соответственно положительные и отрицательные значения, причём в точке $x = 0$ производная равна нулю. Значит, искомому ответу удовлетворяет рисунок 38.11, *б* учебника.
№ 41.8. На первом графике видно, что на промежутке $(-1; 1)$ производная принимает отрицательные значения. Также функция дифференцируема в точках -1 и 1, а значит, непрерывна в этих точках. Поэтому рассматриваемая функция убывает на промежутке $[-1; 1]$.
№ 41.22. Рассмотрите функцию $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$. Поскольку эта функция чётная, то достаточно рассмотреть случай, когда $x \geqslant 0$. Докажите, что эта функция возрастает на $[0; \infty)$.
№ 41.24. Левая часть данного уравнения задаёт возрастающую функцию, правая — убывающую. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня.

§ 42. Точки экстремума функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятиями окрестности точки, точек экстремума (максимума и минимума) функции, критических точек функции; применять необходимое условие экстремума функции, применять признак точки максимума функции и признак точки минимума. ***Личностные***: формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями окрестности точки, точек экстремума (максимума и минимума) функции, критических точек функции; применять необходимое условие экстремума функции, применять признак точки максимума функции и признак точки минимума.
Основные понятия	Окрестность точки, точка максимума, точка минимума, точка экстремума, необходимое условие экстремума функции, критическая точка, признак точки максимума функции, признак точки минимума.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополни-тельные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	42.1, 42.3, 42.4, 42.5, 42.6			42.2, 42.7
Урок 2	42.8, 42.10, 42.12, 42.14, 42.16			42.9, 42.11, 42.13, 42.15, 42.17
Урок 3	42.18, 42.19, 42.20, 42.22, 42.24			42.21, 42.23, 42.25
Урок 4	42.26, 42.27, 42.29, 42.31	42.33	Самостоятельная работа № 43: № 1, 2, 3	42.28, 42.30, 42.32

Методические комментарии

При изучении понятия окрестности точки следует обратить внимание, что окрестность не обязана быть симметричной относительно точки.

Надо подчеркнуть, что по определению окрестность — это открытый промежуток. Следовательно, точка x_0 не может быть «концом» промежутка-окрестности, с обеих сторон от точки x_0 должны иметься точки, принадлежащие окрестности. Именно на этих особенностях окрестности далее основывается определение точек экстремума и их отличие от точек, в которых функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Точка экстремума функции не может быть изолированной точкой области её определения.

При изучении определения критической точки следует подчеркнуть, что критическая точка принадлежит области определения функции, причём является её внутренней точкой.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в определениях точек минимума и максимума функции используется знак нестрогого неравенства. Здесь надо рассмотреть с учащимися рисунок 42.7 и подчеркнуть, что именно нестрогие неравенства в определениях позволяют трактовать каждую точку промежутка $(x_1; x_2)$ и как точку максимума, и как точку минимума одновременно.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что теорема 42.1 является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума.

Теоремы 42.2 и 42.3 применимы только для того случая, когда исследуемая функция дифференцируема в некоторой окрестности исследуемой точки, в том числе и в самой точке. Последнее условие является избыточным. Можно было бы ограничиться требованием непрерывности функции в исследуемой точке. Поскольку учащиеся не владеют аппаратом исследования функции в данной точке на непрерывность, то предлагаемые достаточные условия существования точек экстремума являются приемлемыми.

Теоремы 42.2 и 42.3, помимо формального доказательства, также разъясняются с помощью очевидных наглядных соображений. Вообще, постоянная апелляция к рисункам является характерной чертой изложения материала в данном учебнике.

Следует обратить внимание на корректное использование учащимися терминологии. Точка экстремума, критическая точка, точки максимума и минимума — это всё абсциссы точек графика, а не сами эти точки.

Комментарии к упражнениям

№ 42.3. Рисунки 42.20 (*в*, *г*) иллюстрируют, что в точке экстремума функция не обязательно является непрерывной.

№ 42.5. При решении этой задачи следует руководствоваться исключительно наглядными соображениями.

№ 42.6, 42.7, 42.10, 42.14, 42.15. Схема оформления решения этих задач показана в разобранном примере параграфа.

№ 42.22, 42.23. Производной данной функции является квадратичная функция. Для выполнения условия задачи следует потребовать, чтобы эта квадратичная функция имела только один нуль, т. е. дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена должен быть равен нулю.

§ 43. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение находить наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций на отрезке.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умения осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.

Планируемые результаты

Учащийся научится находить наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций на отрезке.

Основные понятия

Точка локального максимума, точка локального минимума.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	43.1, 43.3, 43.5			43.2, 43.4, 43.6
Урок 2	43.7, 43.9, 43.11, 43.13			43.8, 43.10, 43.12, 43.14
Урок 3	43.15, 43.17, 43.19, 43.21	43.20		43.16, 43.18, 43.22
Урок 4	43.23, 43.24, 43.26, 43.28, 43.31	43.20, 43.29	Самостоятельная работа № 44: № 1, 2	43.25, 43.27, 43.32

Методические комментарии

Понятия наибольшего и наименьшего значений функций следует обсудить с учащимися, указав на то, что эти значения определяются и для всей области определения, и для отдельных промежутков. Следует привести примеры функций, для которых наибольшего (наименьшего) значения на всей области определения функция не достигает (например, $y = x,\ y = \frac{1}{x}$). После этого учащиеся будут считать естественным переход к поиску наибольшего (наименьшего) значения функции на некотором промежутке.

В учебнике рассматривается задача поиска наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на закрытом промежутке. Такое ограничение сделано для того, чтобы как можно больше упростить для учащихся алгоритм поиска этих значений, оставив, впрочем, его основные необходимые элементы: необходимость анализировать значения функции на концах промежутка и в критических точках, а также возможность без дополнительного анализа использовать признаки минимума и максимума функции. За счёт того, что выбран закрытый промежуток, исключается необходимость отдельно анализировать поведение функции в критической точке, исследуя её на экстремум.

Учитывая эти ограничения, алгоритм поиска наибольшего (наименьшего) значения функции достаточно прозрачен и доступен. Поэтому в задачах данного параграфа особое внимание следует уделить корректному составлению математической модели описанной ситуации и правильному определению набора критических точек.

Комментарии к упражнениям

№ 43.11—43.19. В этих задачах следует обратить внимание на условия задачи, согласно которым надо определять исследуемый промежуток и включать или не включать в рассмотрение конечные точки этого промежутка.

№ 43.31, 43.32. Исследуйте на наибольшее и наименьшее значения функции, которые задают левая и правая части уравнения на области определения уравнения.

§ 44. Вторая производная. Понятие выпуклости функции

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умения оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение.

Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

Метапредметные: формировать умения сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, моделировать выбор способов деятельности, группировать.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием производной функции в точке, находить производную функции в точке, используя определение.

Основные понятия Вторая производная функции в точке, дважды дифференцируемая в точке функция, вторая производная функции, дважды дифференцируемая на множестве функция, дважды дифференцируемая функция, признак выпуклости функции вниз, признак выпуклости функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	44.1, 44.3, 44.4			44.2, 44.5
Урок 2	44.6, 44.7, 44.9, 44.11, 44.13	44.15	Самостоятельная работа № 45: № 1, 2, 3	44.8, 44.10, 44.12, 44.14

Методические комментарии

Для того чтобы понятие второй производной не носило формальный характер, следует сразу познакомить учащихся с механическим смыслом второй производной.

Понятие выпуклости функции вводится только для дифференцируемых функций. В этом случае свойство выпуклости приобретает более наглядный характер. В учебнике не используется термин «вогнутость». Наш опыт показал, что разные ученики терминам выпуклость и вогнутость придают разное наглядное содержание, и как следствие возникает путаница. Термины выпуклость вверх и выпуклость вниз имеют однозначную наглядную трактовку.

Исследуя движение касательной по графику выпуклой вверх (вниз) функции, легко проследить, как с понятием выпуклости связан знак второй производной. Поэтому теоремы 44.1 и 44.2 не носят формальный характер.

При введении понятия точки перегиба указывается на то, что в этой точке проведена касательная. Следовательно, в параграфе понятие точки перегиба вводится только для функции, дифференцированной в этой точке. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся класса в качестве интересного примера можно обратиться к функции $y = \sqrt[3]{x}$. Здесь можно обратить внимание на то, что в точке $x = 0$ функция не имеет конечной производной, и если смягчить условие дифференцируемости на наличие конечной или бесконечной производной, то точку $x = 0$ тоже можно считать точкой перегиба функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Комментарии к упражнениям

№ 44.7, 44.8. Следует оформлять так, как пример § 2.

§ 45. Построение графиков функций

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные***: формировать умение строить графики функций с помощью методов математического анализа для исследования функций. ***Личностные***: развивать познавательный интерес к математике. ***Метапредметные***: формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Планируемые результаты	Учащийся научится строить графики функций с помощью методов математического анализа для исследования функций.
Основные понятия	План исследования свойств функции.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	45.1			45.2

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 2	45.3			45.4
Урок 3	45.5, 45.7		Самостоятельная работа № 46: № 1, 2	45.6, 45.8

Методические комментарии

Материал этого параграфа подводит итог приёмам и методам исследования функций, изученным в данной главе. Приведённый план исследования функции и построения её графика основан на том, что учащимся классов с базовым уровнем изучения математики в заданиях на построение графиков будут предложены функции, не требующие более сложного аппарата их исследования (исследования на выпуклость, наличие асимптот и т. п.). Все упражнения к параграфу подобраны так, что учащийся может реализовывать план построения, не пропуская отдельных его пунктов. Учащиеся должны хорошо усвоить этот план и уметь строить по нему графики функций. Понятия горизонтальной и вертикальной асимптот графика вводятся наглядно, на примере построения конкретной функции. Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно пришли к выводу, что поиск асимптот может быть включён в пункт 7 плана («Выявить другие особенности функции»).

Также в параграфе на наглядно-интуитивном уровне вводится понятие предела функции на бесконечности, а также бесконечно малой (большой) функции в точке. Тем, кто хочет узнать больше об этих понятиях, предложено участвовать в соответствующем проекте.

Комментарии к упражнениям

№ 45.3, 45.4. Следует воспользоваться схемой исследования на горизонтальные и вертикальные асимптоты, показанной в примере 2 параграфа.

Контрольная работа № 9

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Множества и логика

Вариант 1

1. Какие из приведённых утверждений являются верными:
   1) $\{\varnothing\} \subset \{a, b, c\}$;
   2) $c \subset \{a, b, c\}$;
   3) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$;
   4) $\varnothing \subset \{a\}$?
2. Даны множества: $A = \{-4, 0, 5, 7\}$, $B = \{0, 6, 8\}$, $C = \{-4, 1, 2\}$. Найдите множество:
   1) $A \cup B$;
   2) $A \cap C$;
   3) $A \setminus B$.

   С помощью диаграммы Эйлера изобразите соотношение между множествами A, B и C.
3. Курсы, предлагающие обучение английскому и французскому языкам, посещают 65 человек. Известно, что 20 человек изучают оба языка. Докажите, что один из языков изучают не менее 43 человек.
4. Составьте таблицу истинности для логического выражения:
   1) $\overline{A} \wedge B$;
   2) $\overline{A \vee \overline{B}}$;
   3) $(A \vee B) \Rightarrow \overline{C}$.
5. Пусть f — функция истинности, A и B некоторые высказывания. Найдите $f(A)$, если $f(\overline{B} \vee A) = 1$ и $f(B) = 1$.
6. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $A(x) \equiv \{x < 11\}$, $B(x) \equiv \{x < -2\}$. Укажите область истинности предиката:
   1) $A(x) \wedge B(x)$;
   2) $A(x) \vee B(x)$;
   3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.
7. Замените знак «*» на один из кванторов $\forall$ или $\exists$ так, чтобы полученное высказывание было истинным:
   1) $(*x \in \boldsymbol{R})\, x^2 + 9 \geqslant 6x$;
   2) $(*n \in \boldsymbol{N})\, (5n + 1) \vdots 7$.

Вариант 2

1. Какие из приведённых утверждений являются верными:
1) $\varnothing \subset \{a, b\}$;
2) $b \subset \{a, b, c\}$;
3) $\{\varnothing\} \subset \{a, b, c\}$;
4) $\{c\} \subset \{a, b, c\}$?

2. Даны множества: $A = \{-2, 1, 3, 12\}$, $B = \{2, 3, 10\}$, $C = \{-2, 1, 12\}$. Найдите множество:
1) $A \bigcup C$;
2) $A \bigcap B$;
3) $A \setminus C$.
С помощью диаграммы Эйлера изобразите соотношение между множествами A, B и C.

3. В олимпиадах по математике и по физике приняли участие в общей сложности 76 человек. Известно, что в обеих олимпиадах принимали участие 15 человек. Докажите, что в одной из олимпиад прияли участие не менее 46 человек.

4. Составьте таблицу истинности для логического выражения:
1) $\overline{A} \Rightarrow B$;
2) $\overline{A \wedge \overline{\overline{B}}}$;
3) $(\overline{A} \wedge B) \Leftrightarrow C$.

5. Пусть f — функция истинности, A и B некоторые высказывания. Найдите $f(B)$, если $f(\overline{A} \vee B) = 0$ и $f(A) = 0$.

6. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $A(x) \equiv \{x > -3\}$, $B(x) \equiv \{x > 10\}$. Укажите область истинности предиката:
1) $A(x) \wedge B(x)$;
2) $A(x) \vee B(x)$;
3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

7. Замените знак «*» на один из кванторов $\forall$ или $\exists$ так, чтобы полученное высказывание было истинным:
1) $(*x \in \boldsymbol{R})\, x^2 + 1 \leqslant 2x$;
2) $(*n \in \boldsymbol{N})\, (32n + 8) \vdots 4$.

Вариант 3

1. Какие из приведённых утверждений являются верными:
   1) $\{c, b\} \subset \{a, b, c\}$;
   2) $\varnothing \subset \{a, c\}$;
   3) $a \subset \{a, b\}$;
   4) $\{\varnothing\} \subset \{a, c\}$?
2. Даны множества: $A = \{-5, 6, 11\}$, $B = \{-2, 6, 7, 14\}$, $C = \{-5, 6, 7\}$. Найдите множество:
   1) $A \cup C$;
   2) $B \cap C$;
   3) $B \setminus A$.
   С помощью диаграммы Эйлера изобразите соотношение между множествами A, B и C.
3. В соревнованиях по бегу и прыжкам в длину приняли участие в общей сложности 55 человек. Известно, что в обоих видах спорта соревновались 12 человек. Докажите, что в одном из видов соревновалось не менее 34 человек.
4. Составьте таблицу истинности для логического выражения:
   1) $\overline{B} \Leftrightarrow A$;
   2) $\overline{B \wedge \overline{\overline{A}}}$;
   3) $(\overline{A} \vee B) \Rightarrow C$.
5. Пусть f — функция истинности, A и B некоторые высказывания. Найдите $f(A)$, если $f(\overline{A} \Rightarrow B) = 1$ и $f(B) = 0$.
6. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $A(x) \equiv \{x < 4\}$, $B(x) \equiv \{x < -4\}$. Укажите область истинности предиката:
   1) $A(x) \wedge B(x)$;
   2) $A(x) \vee B(x)$;
   3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.
7. Замените знак «*» на один из кванторов $\forall$ или $\exists$ так, чтобы полученное высказывание было истинным:
   1) $(*x \in \boldsymbol{R})\ x^2 + 25 \geqslant 10x$;
   2) $(*n \in \boldsymbol{N})\ (4n + 3) \vdots 5$.

Вариант 4

1. Какие из приведённых утверждений являются верными:

1) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$;
2) $\{b, c\} \subset \{a, b, c\}$;
3) $a \subset \{a, b\}$;
4) $\{\varnothing\} \subset \{b\}$?

2. Даны множества: $A = \{-3, 4, 8\}$, $B = \{0, 4, 10\}$, $C = \{-3, 0, 4, 8, 10\}$. Найдите множество:

1) $A \bigcup C$;
2) $B \bigcap C$;
3) $A \setminus B$.

С помощью диаграммы Эйлера изобразите соотношение между множествами A, B и C.

3. В спортивную школу, в которой есть только футбольная и баскетбольная секции, посещают 72 человека. Известно, что обе секции посещают 17 человек. Докажите, что в одной из секций занимаются не менее 45 человек.

4. Составьте таблицу истинности для логического выражения:

1) $\overline{A} \vee \overline{B}$;
2) $A \Rightarrow \overline{B}$;
3) $(A \wedge \overline{B}) \Leftrightarrow \overline{C}$.

5. Пусть f — функция истинности, A и B некоторые высказывания. Найдите $f(A)$, если $f(A \Rightarrow \overline{B}) = 0$ и $f(B) = 1$.

6. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $A(x) \equiv \{x > -12\}$, $B(x) \equiv \{x > 7\}$. Укажите область истинности предиката:

1) $A(x) \wedge B(x)$;
2) $A(x) \vee B(x)$;
3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

7. Замените знак «*» на один из кванторов $\forall$ или $\exists$ так, чтобы полученное высказывание было истинным:

1) $(*x \in \boldsymbol{R})\, x^2 + 16 \leqslant 8x$;
2) $(*n \in \boldsymbol{N})\, (9n + 15) \,\vdots\, 3$.

Контрольная работа № 2

Тема. Повторение и расширение сведений о функции

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 4x$ на промежутке $[0; 3]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 8}$;

2) $y = \dfrac{|x+5| + |x-5|}{x^2}$.

3. Найдите функцию, обратную к функции $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2|x| - 3} - 1$.

5. Найдите область значений функции $y = 9x + \dfrac{1}{x}$.

6. На рисунке 3 изображена часть графика чётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-5; 5]$.

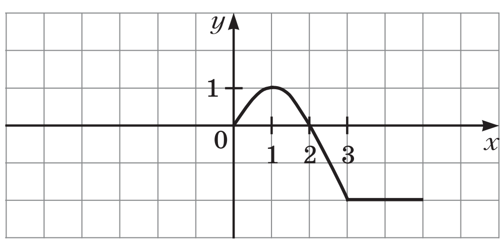

Рис. 3

7. Решите неравенство:

1) $(x-2)(x+6)(x-4) > 0$;

2) $(3-x)(x-4)(x-9)^2 \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{13}{x^2 - 2x} \leqslant 0$.

4) $(x^2 - 9)\sqrt{x-1} \geqslant 0$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 4x$ на промежутке $[-3; 0]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{5x^2}{x^2 - 7}$;

2) $y = \dfrac{|x+3| - |x-3|}{x^2}$.

3. Найдите функцию, обратную к функции $y = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}|x| - 1} - 3$.

5. Найдите область значений функции $y = x + \dfrac{16}{x}$.

6. На рисунке 4 изображена часть графика нечётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 6]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-6; 6]$.

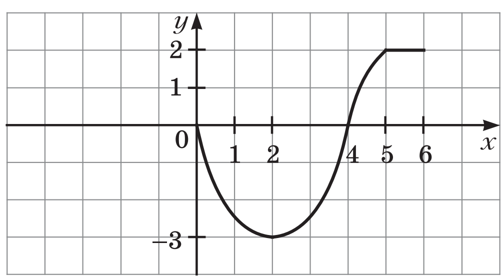

Рис. 4

7. Решите неравенство:

1) $(x+2)(x-8)(x+5) < 0$;

2) $(x+2)^2(x-3)(4-x) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} \leqslant 0$.

4) $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} \geqslant 0$.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 6x$ на промежутке $[-4; 0]$.

2. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{8x}{x^2 - 14}$;

2) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}{x^2}$.

3. Найдите функцию, обратную к функции $y = \dfrac{4x + 1}{x - 2}$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2|x| - 5} - 1$.

5. Найдите область значений функции $y = 49x + \dfrac{1}{x}$.

6. На рисунке 5 изображена часть графика чётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-4; 4]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-4; 4]$.

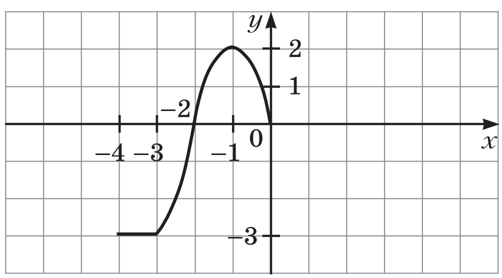

Рис. 5

7. Решите неравенство:

1) $(x + 7)(x - 1)(x + 8) < 0$;

2) $(x - 1)^2(5 - x)(x - 6) \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{x - 4} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{22}{x^2 - 4x} \leqslant 0$.

4) $(x^2 - 16)\sqrt{x + 3} \geqslant 0$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 6x$ на промежутке $[0; 5]$.
2. Исследуйте на чётность функцию:

   1) $y = \dfrac{7x^5}{x^2 - 10}$;

   2) $y = \dfrac{\sqrt{6-x} - \sqrt{6+x}}{x}$.
3. Найдите функцию, обратную к функции $y = \dfrac{3x+5}{x-1}$.
4. Постройте график функции $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}|x| - 3} - 2$.
5. Найдите область значений функции $y = x + \dfrac{25}{x}$.
6. На рисунке 6 изображена часть графика нечётной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-5; 5]$.

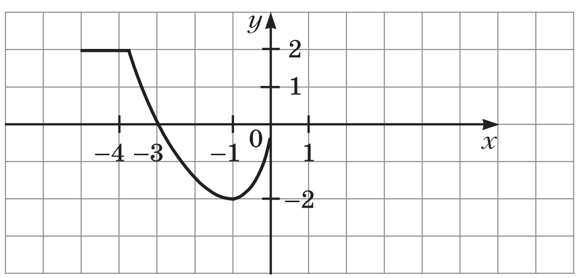

Рис. 6

7. Решите неравенство:

   1) $(x+2)(x-8)(x+5) < 0$;

   2) $(x+5)^2(x-6)(8-x) \geqslant 0$;

   3) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} \leqslant 0$.

   4) $(x^2 - 36)\sqrt{x+4} \geqslant 0$.

Контрольная работа № 3

Тема. Степенная функция.
Корень n-й степени и его свойства

Вариант 1

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{16}$. Сравните:
1) $f(5{,}6)$ и $f(2{,}4)$;
2) $f(-2{,}8)$ и $f(-7{,}3)$;
3) $f(4{,}5)$ и $f(-4{,}5)$;
4) $f(0{,}3)$ и $f(-0{,}8)$.

2. Найдите значение выражения:
1) $\sqrt[4]{2^{12} \cdot 5^8}$;
2) $\dfrac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$.

3. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:
1) $f(-3) > f(1)$;
2) $f(-4) < f(1)$;
3) $f(5) < f(-6)$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-4}$ на промежутке $[2; 4]$.

5. Упростите выражение:
1) $\sqrt[18]{a^3}$;
2) $\sqrt[3]{m^2 \sqrt[4]{m}}$;
3) $\sqrt[8]{a^8}$, если $a \geqslant 0$;
4) $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, если $a \leqslant 1$.

6. Постройте график функции $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{x-2}\right)^4$.

7. Внесите множитель под знак корня:
1) $(a-1)\sqrt[4]{a-2}$;
2) $(2-b)\sqrt[6]{b}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{8}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} - \dfrac{\sqrt[4]{x}+3}{\sqrt[4]{x}+1}\right) : \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$.

9. Докажите, что значение выражения $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ является целым числом.

Вариант 2

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{18}$. Сравните:

1) $f(3{,}6)$ и $f(1{,}8)$;
2) $f(-1{,}7)$ и $f(-2{,}5)$;
3) $f(-5{,}4)$ и $f(5{,}4)$;
4) $f(0{,}9)$ и $f(-0{,}2)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[6]{3^{12} \cdot 2^{18}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$.

3. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:

1) $f(-5) < f(2)$;
2) $f(-7) > f(4)$;
3) $f(-9) > f(-1)$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-3}$ на промежутке $[-3; -1]$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[28]{a^7}$;

2) $\sqrt[5]{b^3 \sqrt[4]{b^3}}$;

3) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m \leqslant 0$;

4) $\sqrt[10]{(x-2)^{10}}$, если $x \geqslant 2$.

6. Постройте график функции $y = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{x-3}\right)^6$.

7. Внесите множитель под знак корня:

1) $(x-3)\sqrt[8]{x-4}$;

2) $(5-y)\sqrt[4]{y}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+6}{\sqrt[6]{x}+2} - \dfrac{\sqrt[6]{x}+2}{\sqrt[6]{x}-2} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}-4}\right) : \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}-4}$.

9. Докажите, что значение выражения $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$ является целым числом.

Вариант 3

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:
   1) $f(2{,}4)$ и $f(3{,}6)$;
   2) $f(-2{,}5)$ и $f(-3{,}1)$;
   3) $f(-4{,}7)$ и $f(4{,}7)$;
   4) $f(0{,}8)$ и $f(-0{,}6)$.
2. Найдите значение выражения:
   1) $\sqrt[8]{5^{24} \cdot 2^{16}}$;
   2) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{729}}$.
3. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:
   1) $f(2) < f(-4)$;
   2) $f(3) > f(-8)$;
   3) $f(-2) < f(-10)$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-5}$ на промежутке $[2; 3]$.
5. Упростите выражение:
   1) $\sqrt[35]{x^5}$;
   2) $\sqrt[7]{a^4 \sqrt[3]{a^2}}$;
   3) $\sqrt[10]{c^{10}}$, если $c \geqslant 0$;
   4) $\sqrt[12]{(y-7)^{12}}$, если $y \leqslant 7$.
6. Постройте график функции $y = \left(\sqrt[4]{x+2}\right)^4 + \left(\sqrt[6]{x-1}\right)^6$.
7. Внесите множитель под знак корня:
   1) $(4-a)\sqrt[6]{a-5}$;
   2) $(x+1)\sqrt[4]{x+4}$.
8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[8]{x}+12}{\sqrt[8]{x}+4} - \dfrac{\sqrt[8]{x}+4}{\sqrt[8]{x}-4} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}-16}\right) : \dfrac{15}{\sqrt[4]{x}-16}$.
9. Докажите, что значение выражения $\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}} + \sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}$ является целым числом.

Вариант 4

1. Функция задана формулой $f(x) = x^{22}$. Сравните:

1) $f(7{,}7)$ и $f(2{,}9)$;
2) $f(-1{,}9)$ и $f(-2{,}4)$;
3) $f(-6{,}2)$ и $f(6{,}2)$;
4) $f(-0{,}1)$ и $f(0{,}6)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[10]{5^{20} \cdot 2^{30}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$.

3. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:

1) $f(-12) < f(3)$;
2) $f(4) < f(-7)$;
3) $f(-7) > f(-3)$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-6}$ на промежутке $[-2; -1]$.

5. Упростите выражение:

1) $\sqrt[36]{b^9}$;

2) $\sqrt[4]{a^5 \sqrt[3]{a}}$;

3) $\sqrt[12]{z^{12}}$, если $z \leqslant 0$;

4) $\sqrt[8]{(x+3)^8}$, если $x \geqslant -3$.

6. Постройте график функции $y = \left(\sqrt[8]{x+3}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{x-5}\right)^6$.

7. Внесите множитель под знак корня:

1) $(2-a)\sqrt[4]{a-7}$;

2) $(y+2)\sqrt[10]{y+6}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[10]{x}+3}{\sqrt[10]{x}-3} - \dfrac{\sqrt[10]{x}+9}{\sqrt[10]{x}+3} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}-9}\right) : \dfrac{8}{\sqrt[5]{x}-9}$.

9. Докажите, что значение выражения $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ является целым числом.

Контрольная работа № 4

Тема. Степень с рациональным показателем и её свойства. Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = \left((x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}$.

2. Упростите выражение:

1) $a^{-\frac{3}{7}}a^{\frac{5}{14}}$;

2) $a^{\frac{7}{15}} : a^{\frac{1}{6}}$;

3) $(a^{-0,8})^4 \cdot (a^{-1,4})^{-2} : (a^{0,4})^{-6}$;

4) $\left(a^{\frac{5}{18}}b^{\frac{10}{27}}\right)^{\frac{9}{5}}$.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+8} = x$;

2) $\sqrt{x-2}\sqrt{x-4} = 2x-4$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m-3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}-3}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-4} + 2\sqrt[4]{x-4} = 35$;

2) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$;

3) $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{7+x} = 2$.

6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{8x+9} < x$;

2) $\sqrt{7+x} \geqslant 5-x$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = \left((x-5)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$.

2. Упростите выражение:

1) $c^{-\frac{3}{8}}c^{\frac{5}{16}}$;

2) $c^{\frac{5}{8}} : c^{\frac{1}{6}}$;

3) $(c^{0,6})^6 \cdot (c^{0,4})^{-7} : (c^{-1,6})^{-3}$;

4) $\left(b^{\frac{7}{30}}c^{\frac{3}{10}}\right)^{\frac{10}{21}}$.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+48} = -x$;

2) $\sqrt{x-1}\sqrt{x-3} = 3x-3$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x+7x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}+7}$;

2) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}$;

3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}+3m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}+6m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}}+9n^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{x-2} = 20$;

2) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{2-x} = 2$;

3) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{25+x} = 4$.

6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{7x+8} < x$;

2) $\sqrt{3+x} \geqslant 3-x$.

Вариант 3

1. Постройте график функции $y = \left((x+4)^{-\frac{1}{4}}\right)^{-8}$.

2. Упростите выражение:

1) $a^{-\frac{4}{9}}a^{\frac{7}{18}}$;

2) $a^{\frac{5}{12}} : a^{\frac{1}{8}}$;

3) $(a^{-0,6})^3 \cdot (a^{-1,2})^{-4} : (a^{0,5})^{-3}$;

4) $\left(a^{\frac{7}{36}}b^{\frac{21}{30}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x+10} = x$;

2) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = 4x+8$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-11a^{\frac{4}{7}}}{a^{\frac{3}{7}}-11}$;

2) $\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{10}}+y^{\frac{1}{10}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1} = 6$;

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{12-x} = 1$;

3) $\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{x+5} = 4$.

6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{10x+11} < x$;

2) $\sqrt{6-x} \geqslant 6+x$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $y = \left((x+1)^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$.

2. Упростите выражение:

1) $a^{-\frac{5}{6}}a^{\frac{19}{24}}$;

2) $c^{\frac{5}{9}} : c^{\frac{1}{12}}$;

3) $(c^{-0,8})^4 \cdot (c^{1,3})^{-5} : (c^{-2,4})^{-2}$;

4) $\left(m^{\frac{5}{24}}n^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{8}{15}}$.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4x+45} = -x$;

2) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = 2x+6$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{b+10b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{5}{9}}+11}$;

2) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{12}}+4x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}+8x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{12}}+16y^{\frac{1}{6}}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-8}+3\sqrt[4]{x-8} = 18$;

2) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x} = 2$;

3) $\sqrt[3]{6-x}+\sqrt[3]{29+x} = 5$.

6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{6x+7} < x$;

2) $\sqrt{8-x} \geqslant x+4$.

Контрольная работа № 5

Тема. Тригонометрические функции и их свойства

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$;

2) $\cos(-690°)$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 124° \cos 203° \operatorname{tg}(-280°)$;

2) $\sin\frac{7\pi}{10}\cos\frac{13\pi}{12}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^2 + 4\cos x$;

2) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 - \sin x}$.

4. Найдите период функции $y = \sin 3x + \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\sin\frac{10\pi}{9}$ и $\sin\frac{12\pi}{11}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{(2 + \sin^2 x)\cos x}{\cos x}$.

7. Постройте график функции $f(x) = |\cos 3x|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

8. Постройте график функции $y = \sqrt{\sin x - 1} + 2$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

   1) $\operatorname{ctg}\dfrac{25\pi}{6}$;

   2) $\sin(-1035°)$.

2. Определите знак значения выражения:

   1) $\cos 156° \sin(-350°) \operatorname{ctg} 230°$;

   2) $\cos\dfrac{13\pi}{15}\operatorname{ctg}\dfrac{23\pi}{18}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

   1) $f(x) = x^3 - 5\sin x$;

   2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \cos x}$.

4. Найдите период функции $y = \cos 2x + \operatorname{tg}\dfrac{5x}{2}$.

5. Сравните значения выражений:

   1) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{8\pi}{9}$;

   2) $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{20}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{11}\right)$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{(4 - \cos^2 x)\sin x}{\sin x}$.

7. Постройте график функции $f(x) = \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

8. Постройте график функции $y = \sqrt{\cos x - 1} - 2$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\dfrac{19\pi}{3}$;

2) $\cos(-675°)$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 221° \cos 176° \operatorname{tg}(-260°)$;

2) $\sin\dfrac{8\pi}{11}\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{9}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^3 - 4\operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$.

4. Найдите период функции $y = \sin 4x + \operatorname{ctg}\dfrac{3x}{2}$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\cos\dfrac{17\pi}{16}$ и $\cos\dfrac{19\pi}{18}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{8\pi}{17}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{7\pi}{15}\right)$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{(5 - \sin^2 x)\cos x}{\cos x}$.

7. Постройте график функции $f(x) = \left|\cos\dfrac{1}{3}x\right|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

8. Постройте график функции $y = \sqrt{\sin x - 1} - 3$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{4}$;

2) $\sin(-1020^\circ)$.

2. Определите знак значения выражения:

1) $\sin 189^\circ \cos(-170^\circ) \operatorname{ctg} 250^\circ$;

2) $\cos\frac{12\pi}{19} \operatorname{tg}\frac{20\pi}{13}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^4 - 5\operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

4. Найдите период функции $y = \cos 5x + \operatorname{tg}\frac{4x}{3}$.

5. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{16}$ и $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$;

2) $\cos\left(-\frac{10\pi}{19}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{(3+\cos^2 x)\sin x}{\sin x}$.

7. Постройте график функции $f(x) = |\sin 3x|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

8. Постройте график функции $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1$.

Контрольная работа № 6

Тема. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы сложения и их следствия

Вариант 1

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 8\alpha \operatorname{ctg} 8\alpha - \dfrac{\cos^2 6\alpha - 1}{1 - \sin^2 6\alpha}$;

2) $\sin\beta \cos 4\beta + \cos\beta \sin 4\beta$;

3) $\dfrac{\sin 6\alpha}{2\sin 3\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}$;

5) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(\pi - 6\alpha)$;

6) $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$.

2. Дано: $\cos\alpha = -\dfrac{7}{25}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha} = \operatorname{tg} 8\alpha$;

2) $\operatorname{ctg} 4\beta \cos 2\beta + \sin 2\beta = \dfrac{1}{2\sin 2\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = -\sin 4\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

5. Найдите значение выражения $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 9\alpha \operatorname{ctg} 9\alpha - \dfrac{\sin^2 6\alpha - 1}{1 - \cos^2 6\alpha}$;

2) $\cos 6\varphi \cos 4\varphi - \sin 6\varphi \sin 4\varphi$;

3) $\dfrac{2\cos 4\alpha}{\sin 8\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

6) $2\cos 4\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha$.

2. Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\sin\beta = -0{,}8$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg} 5\alpha} = \operatorname{tg} 10\alpha$;

2) $\cos 3\beta - \operatorname{ctg} 6\beta \sin 3\beta = \dfrac{1}{2\cos 3\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + 5\alpha)\right)}{1 + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)} = \sin 4\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $7\cos^2\alpha - 5\sin^2\alpha$.

5. Найдите значение выражения $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$.

Вариант 3

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha - \dfrac{1-\cos^2 9\alpha}{\sin^2 9\alpha - 1}$;

2) $\sin 6\beta \cos 2\beta - \cos 6\beta \sin 2\beta$;

3) $\dfrac{\sin 14\alpha}{2\cos 7\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$;

5) $\sin(2\pi - 7\alpha) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 7\alpha\right)$;

6) $2\sin 4\alpha \sin 5\alpha + \cos 9\alpha$.

2. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\cos\beta = \dfrac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} 3\alpha} - \dfrac{1}{1-\operatorname{tg} 3\alpha} = -\operatorname{tg} 6\alpha$;

2) $\sin 5\beta \operatorname{ctg} 10\beta - \cos 5\beta = -\dfrac{1}{2\cos 5\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 6\alpha\right) - \cos(\pi + 4\alpha)\right)\left(\sin(\pi - 6\alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)}{1 + \cos(2\pi + 10\alpha)} = \sin 2\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3\cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha$.

5. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{3x}{2}}$.

Вариант 4

1. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha - \dfrac{1-\sin^2 5\alpha}{\cos^2 5\alpha - 1}$;

2) $\cos 7\varphi \cos 2\varphi + \sin 7\varphi \sin 2\varphi$;

3) $\dfrac{2\sin 5\alpha}{\sin 10\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 9\alpha - \cos 3\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + 5\alpha\right) - \operatorname{ctg}(2\pi - 5\alpha)$;

6) $2\cos 10\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha$.

2. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta = -\dfrac{24}{25}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin(\alpha - \beta)$.

3. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - 1} - \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha + 1} = -\operatorname{tg} 4\alpha$;

2) $\sin 4\beta + \operatorname{ctg} 8\beta \cos 4\beta = \dfrac{1}{2\sin 4\beta}$;

3) $\dfrac{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 7\alpha\right) - \cos(\pi - 3\alpha)\right)\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 7\alpha\right) + \sin(2\pi + 3\alpha)\right)}{1 - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)} = \sin 10\alpha$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $6\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha$.

5. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ$.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 3x}{1 + \operatorname{tg}^2 3x}$.

Контрольная работа № 7

Тема. Тригонометрические уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнение:

1) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;

2) $2\sin^2 x + 1{,}5\sin 2x - 3\cos^2 x = 1$;

3) $\sin 8x + \sin 10x + \cos x = 0$;

4) $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{\cos 3x} = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sin x \operatorname{tg} 2x > 0$.

3. Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos 6x$.

4. Вычислите $\sin\left(\arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x - 11\cos x - 1 = 0$;

2) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 2$;

3) $\cos 5x - \cos 7x + \sin x = 0$;

4) $\dfrac{\sin 2x + \sin 6x}{\sin 2x} = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\left(6x + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant -\sqrt{3}$;

2) $\cos x \operatorname{tg} 2x < 0$.

3. Решите уравнение $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\sin x$.

4. Вычислите $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{5}\right)$.

Вариант 3

1. Решите уравнение:

1) $6\cos^2 x + 13\sin x - 8 = 0$;

2) $4\cos^2 x + 2{,}5\sin 2x - 3\sin^2 x = 3$;

3) $\sin 5x + \sin 3x - \cos x = 0$;

4) $\dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 4x} = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin x(\operatorname{tg} 2x + 1) > 0$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 7x$.

4. Вычислите $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{8}\right)$.

Вариант 4

1. Решите уравнение:

1) $5\sin^2 x - 14\cos x - 2 = 0$;

2) $5\sin^2 x - 2\sin 2x + 7\cos^2 x = 4$;

3) $\cos 7x - \cos 9x + \sin x = 0$;

4) $\dfrac{\cos 9x + \cos x}{\cos 3x} = 0$.

2. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\left(6x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant \sqrt{3}$;

2) $\cos x(\operatorname{ctg} 2x - 1) < 0$.

3. Решите уравнение $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos x$.

4. Вычислите $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$.

Контрольная работа № 8

Тема. Производная. Уравнение касательной

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 7x^6 - \frac{x^4}{4} + 5x^2 - 6$;

2) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

4) $f(x) = \sin^3 5x$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

4. Найдите производную данной функции $y = x|x - 3|$ в точках $x = 1$ и $x = 4$.

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 - x\sqrt{3}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол $30°$.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 3x - 8$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5x + 1$.

7. В какой точке графика функции $y = x^2 - 4x + 6$ надо провести касательную, чтобы она проходила через точку с координатами $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$?

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 8x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 4$;

2) $f(x) = (3 - 4x)\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$;

4) $f(x) = \cos^4 2x$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 2t + 4$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 2$ с.

4. Найдите производную данной функции $y = (x - 1)|x + 2|$ в точках $x = -3$ и $x = 2$.

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 + 4x\sqrt{3}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол $60°$.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 6$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x - 8$.

7. В какой точке графика функции $y = x^2 - 6x + 12$ надо провести касательную, чтобы она проходила через точку с координатами $(2; 0)$?

Вариант 3

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 6x^4 - \frac{x^2}{2} - 7x + 10;$

2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x};$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x};$

4) $f(x) = \operatorname{tg}^5 3x.$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 3t - 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 5$ с.

4. Найдите производную данной функции $y = (x + 4)|x - 6|$ в точках $x = 2$ и $x = 7$.

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = 3x^2 + 7x$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол $45°$.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 5$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x + 2$.

7. В какой точке графика функции $y = x^2 + 2x + 8$ надо провести касательную, чтобы она проходила через точку с координатами $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$?

Вариант 4

1. Найдите производную функции:

1) $f(x) = 4x^8 - \dfrac{x^5}{5} + 2x^2 - 3;$

2) $f(x) = (5 - 3x)\sqrt{x};$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x};$

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^5 7x.$

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

3. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 4t^2 - 2t + 1$ (перемещение s измеряется в метрах, время t — в секундах). Найдите скорость её движения в момент времени $t_0 = 4$ с.

4. Найдите производную данной функции $y = (x + 4)|x - 5|$ в точках $x = -1$ и $x = 6$.

5. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = 5x^2 - 5x$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол $135°$.

6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$.

7. В какой точке графика функции $y = x^2 + 4x + 14$ надо провести касательную, чтобы она проходила через точку с координатами $\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$?

Контрольная работа № 9

Тема. Применение производной

Вариант 1

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
   1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$;
   3) $f(x) = \sin x + \cos 2x$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2|x - 1| - 5x$ на промежутке $[-2; 2]$.
3. Представьте число 60 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
4. Исследуйте функцию $f(x) = 3x - x^3$ и постройте её график.
5. При каких значениях a функция $f(x) = \dfrac{(a+1)x^3}{3} - (a+1)x^2 + 3x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
   1) $f(x) = 4 + 9x + 3x^2 - x^3$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
   3) $f(x) = \sin x - \cos 2x$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2|x + 2| - 7x$ на промежутке $[-3; 2]$.
3. Представьте число 36 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.
4. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ и постройте её график.
5. При каких значениях a функция $f(x) = \dfrac{(a+2)x^3}{3} + (a+2)x^2 - 4x$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 3

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
   1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 3$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$;
   3) $f(x) = \cos 2x - \cos x$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2|x+1| - 16x$ на промежутке $[-2; 3]$.
3. Представьте число 20 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
4. Исследуйте функцию $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$ и постройте её график.
5. При каких значениях a функция $f(x) = \dfrac{(a-2)x^3}{3} + (a-2)x^2 + 5x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

Вариант 4

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
   1) $f(x) = 1 + 72x + 3x^2 - 2x^3$;
   2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25x}{x + 2}$;
   3) $f(x) = \cos 2x + \cos x$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2|x-2| - 7x$ на промежутке $[-2; 4]$.
3. Представьте число 48 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.
4. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$ и постройте её график.
5. При каких значениях a функция $f(x) = \dfrac{(a-1)x^3}{3} + (a-1)x^2 - 6x$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Стандарта является оценка образовательных достижений обучающихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по алгебре и началам анализа направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным **объектом** оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность *основ гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации,* в том числе готовность к *выбору направления профильного образования;*

3) сформированность *социальных компетенций,* включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным **объектом** оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и внеучебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным **объектом** оценки **предметных результатов** по математике в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по математике являются: *стартовое, текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить: уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности обучающихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля.

Методы контроля в учебном процессе по математике

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения обучающимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по математике, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по математике;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность учащихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении математике использовать средства ИКТ можно:

- на уроках математики;
- во внеурочной деятельности;
- в учебно-исследовательской и проектной деятельности;
- при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики, учитель может *использовать следующие средства ИКТ*: *мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур*, *готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.). В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока (Приложение 1), на котором используются ИКТ.*

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют *поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.*

Использование средств ИКТ при обучении математике способствует:

- *повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса;*
- *расширению возможностей использования источников информации;*
- *созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения;*
- *повышению эффективности анализов результатов обучения.*

Применение средств ИКТ в обучении математике формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

• использовать калькулятор для вычислений;

• осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;

• создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;

• создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;

• создавать графические объекты;

• осуществлять поиск информации в Интернете;

• соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Приложение 1

Технологическая карта урока № ___

Тема урока	______________________________
Тип урока	______________________________
Формируемые результаты	Предметные: ______________________ Личностные: ______________________ Метапредметные: ______________________
Планируемые результаты	______________________________ ______________________________
Основные понятия	______________________________ ______________________________
Средства ИКТ, используемые на уроке	______________________________ ______________________________ ______________________________
Программное обеспечение	______________________________ ______________________________
Образовательные интернет-ресурсы	______________________________ ______________________________ ______________________________

Организационная структура урока

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы проведения урока</th><th rowspan="2">Форма организации УД</th><th colspan="3">Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов</th><th>Средства ИКТ</th></tr>
<tr><th>Учебник</th><th>Рабочая тетрадь</th><th>Дидактические материалы</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="6">1. Организационный этап</td></tr>
<tr><td colspan="6">2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td>3. Актуализация знаний</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Изучение нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Первичное закрепление нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Итоги урока</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Информация о домашнем задании</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, обучающиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках математики направлена:

- на повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;
- развитие коммуникативных умений;
- формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;
- формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по математике обучающийся научится:

- анализировать фрагменты работ учёных-математиков;
- описывать историю математических открытий;
- оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;
- представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;
- рассматривать практические приложения математических знаний;
- применять математические знания в быту и в технике;
- анализировать связь математики с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать прежде всего качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектирования учебной деятельности. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности

(рекомендации для учителя)

Название проекта	________________
Цели проекта	________________
Планируемые результаты	Предметные: ________________
	Личностные: ________________
	Метапредметные: ________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта	________________
Виды деятельности учащихся	________________ ________________
Форма организации	________________
Продолжительность выполнения	________________ ________________
Результат (продукт) деятельности	________________ ________________

План реализации проекта

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: опроса, наблюдения,	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует.

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
	изучения документации и т. д.		Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью детей

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа ______________________________

Параметры	Само-оценка*	Взаимо-оценка*	Оценка учителя*	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
Итоговый балл				

* Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание