Н. Е. Фёдорова
М. В. Ткачёва

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10—11

классы

Методические рекомендации к учебнику Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, Н. Е. Фёдоровой и др.

Н. Е. Фёдорова
М. В. Ткачёва

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10—11

классы

Методические рекомендации к учебнику Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, Н. Е. Фёдоровой и др.

5-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21
Ф33

Книга содержит методические рекомендации учителям, преподающим алгебру и начала математического анализа в 10—11 классах по учебнику авторов Ш. А. Алимова и др. Пособие написано в соответствии с концепцией обучения алгебре и началам математического анализа по этому учебнику, а также в соответствии с его содержанием и структурой. В нём даны как общие, так и конкретные советы по изучению каждой темы.

Учебное издание

Фёдорова Надежда Евгеньевна
Ткачёва Мария Владимировна

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа
10—11 классы

Методические рекомендации к учебнику Ш. А. Алимова,
Ю. М. Колягина, Н. Е. Фёдоровой и др.

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Подписано в печать 15.02.2023.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-108882-3

Предисловие

Данные методические рекомендации предназначены учителям, работающим по учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы» авторов Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунина.

Данный курс алгебры и начал математического анализа для 10—11 классов организован вокруг основных содержательных линий:

— числовой (действительные числа, степень с действительным показателем, логарифмы чисел, тригонометрические числовые выражения);

— функциональной (показательная, логарифмическая, степенная и тригонометрические функции, исследование функции с помощью производной, первообразная функции);

— уравнений и неравенств (показательные, логарифмические, иррациональные, тригонометрические уравнения и неравенства);

— преобразований (выражений, содержащих степени, логарифмы, тригонометрические функции).

Основные методические особенности курса алгебры и начал анализа заключаются в следующем:

1. Элементарные функции изучаются элементарными методами (без использования производной).

2. Числовая линия и линия преобразований развиваются параллельно с функциональной, но опережая её по времени изучения. Так, например, изучению логарифмической функции предшествует изучение понятия логарифма числа и свойств логарифмов, преобразования логарифмических выражений, решение элементарных логарифмических уравнений. Аналогичный подход при введении конкретного класса функций был использован и в курсе алгебры 7—9 классов.

3. При изложении курса широко используются графические средства наглядности.

4. Впервые в явном виде вводится понятие равносильности уравнений и неравенств, поскольку в этом возникает необходимость.

5. Новые математические понятия, когда это возможно, вводятся после рассмотрения прикладных задач, мотивирующих необходимость их появления.

6. Система упражнений позволяет учителю без проблем организовать уровневую дифференциацию обучения по каждой теме.

7. Система самостоятельных и контрольных работ в электронном приложении к учебнику способствует развитию навыков самоконтроля и коррекции полученных знаний.

8. Теоретический материал излагается доступным языком, что способствует самостоятельному изучению его старшеклассниками.

9. Акцент в преподавании по рассматриваемому учебнику делается на практическое применение приобретённых знаний.

Основным в курсе алгебры 10 класса является изучение элементарных функций и связанное с ним решение уравнений и неравенств.

В 11 классе обобщаются знания учащихся по всем содержательным линиям курса алгебры средней школы. Происходит дальнейшее развитие функциональной линии. Формируются навыки исследования различных функций с помощью производной, знакомство с понятием первообразной и интеграла. Развиваются полученные в основной школе представления о комбинаторике, элементах теории вероятности и статистики.

В данном методическом пособии приводятся рекомендации к изучению материала учебника: основные характеристики содержания и цели изучения каждой главы и каждого параграфа; расставляются акценты в изучении теоретического материала; описываются возможные подходы к изучению новой темы; приводятся тексты самостоятельных работ, рекомендации по записи решения отдельных задач, в том числе задач повышенной трудности; даются возможные варианты распределения теоретического материала и упражнений по урокам.

Поурочное планирование материала параграфов предложено в пособии из расчёта использования минимального количества времени на освоение темы (по варианту 1 примерного поурочного планирования). В таблицах распределения учебного материала по урокам задачный материал для учащихся классов углублённого уровня размещён в последнем столбце без распределения по урокам (остаётся на усмотрение учителя).

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность добавления материалов, созданных учителем;
- инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
- удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

10 класс
Глава I. Действительные числа

В этой главе расширяются и систематизируются известные учащимся из курса алгебры основной школы сведения о числах и действиях над ними, об извлечении корня из чисел и возведении чисел в степень, а также пополняются сведения о прогрессиях. Вопросы, рассмотренные в этой главе, будут широко использоваться в дальнейшем при решении уравнений и неравенств, изучении свойств функции.

Необходимость расширения множества натуральных чисел до множества целых, рациональных, действительных и, наконец, комплексных чисел мотивируется возможностью выполнять действия, обратные сложению, умножению и возведению в степень, а значит, возможностью решать уравнения $x + a = b$, $xa = b$, $x^a = b$.

Постепенное расширение числовых множеств осуществляется так, чтобы сохранялись основные свойства действий сложения и умножения (коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности). Это даёт возможность существенно не менять практику вычислений.

Отметим, что действие возведения в степень не обладает свойством коммутативности ($2^3 \neq 3^2$) и потому существуют два действия, ему обратных: извлечение корня и логарифмирование.

Напомним, что каждое рациональное число можно представить в виде либо обыкновенной дроби, либо бесконечной периодической десятичной дроби.

Рассмотренный в начале главы способ обращения бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную обосновывается свойствами сходящихся числовых рядов, в частности нахождением суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Например, обратим дробь 0,3(2) в обыкновенную.

Пусть $x = 0{,}3(2)$, т. е.

$$x = 0{,}3 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^n} + \ldots .$$

Найдём разность $100x - 10x$:

$$\begin{array}{rl} & 100x = (30 + 2) + \dfrac{2}{10} + \ldots + \dfrac{2}{10^{n-2}} + \ldots \\ - & \\ & 10x = 3 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \ldots + \dfrac{2}{10^{n-1}} + \ldots \\ \hline & 90x = 29, \end{array}$$

откуда $x = \dfrac{29}{90}$.

Обратим теперь дробь 0,(7) в обыкновенную другим способом.

Последовательность $\frac{7}{10}, \frac{7}{10^2}, \frac{7}{10^3}, \ldots$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, у которой $b_1 = \frac{7}{10}$, $q = \frac{1}{10}$. Поэтому

$$S = 0,(7) = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Напомним, что *иррациональным* числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь. Например, дробь 0,2525525552..., в записи которой количество цифр 5 между соседними двойками каждый раз увеличивается на одну, — пример иррационального числа.

Доказано, что числа π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ (квадратные корни из натуральных чисел, не являющихся квадратами натуральных чисел) являются иррациональными числами. В школьном курсе это только постулируется. Иногда лишь доказывается, что, например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Приведём это доказательство.

● Предположим, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, т. е. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая положительная дробь. Тогда должно выполняться равенство $\frac{m^2}{n^2} = 2$, но числа m и n не имеют общих делителей, и поэтому $\frac{m^2}{n^2}$ — несократимая дробь, не равная целому числу, т. е. $\frac{m^2}{n^2} \neq 2$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ○

Действия над иррациональными числами строго не определяются, а заменяются действиями над их приближёнными значениями — рациональными числами.

В итоге делается вывод, что действительные числа — это числа рациональные и иррациональные, т. е. множество всех десятичных дробей.

В связи с рассмотрением последовательных рациональных приближений иррационального числа на интуитивном уровне вводится понятие предела последовательности с записью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Предел используется при выводе формулы суммы бесконечно убывающей

геометрической прогрессии. Например, считается что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} (1-q^n) = 1$ при $q = \frac{1}{2}$ и т. д.

Арифметический корень $\sqrt[n]{a}$ натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a и его свойства излагаются традиционно. Корень нечётной степени $\sqrt[2k+1]{a}$ из отрицательного числа a определяется формулой $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$, поэтому его свойства получаются из свойств арифметического корня. Например, $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt[3]{-2} = (-\sqrt[3]{4})\cdot(-\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{8} = 2.$ В дальнейшем обозначение корня нечётной степени используется для обозначения функции, обратной к функции $y = x^{2k+1}$.

Расширение понятия степени проводится последовательно в зависимости от её показателя (натурального, целого, рационального, действительного). Оно осуществляется так, чтобы сохранились все основные свойства степени с натуральным показателем. Это возможно лишь тогда, когда основание степени положительно. Например, степень с дробным показателем определяется так: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$, m — целое число, n — натуральное число, $n \geq 2$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь.

Иногда (в других книгах) степень с рациональным нецелым показателем определяют и для отрицательного основания. Но тогда может оказаться, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не имеет смысла и для него не выполняются некоторые свойства степени. Так, нельзя определять степень числа $a < 0$ с дробным показателем $\frac{m}{n}$ формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, так как при нечётном m и чётном n выражение $\sqrt[n]{a^m}$ не имеет смысла (например, $\sqrt{(-3)^3}$). Также нельзя считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, так как $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ и должно выполняться равенство $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}}$, но $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2.$

Степень с иррациональным показателем поясняется на конкретном примере $3^{\sqrt{2}}$ как последовательность её рациональных приближений $3^{1,4}$; $3^{1,41}$; ... . Здесь же формулируются свойства степени с действительным показателем, которые будут использоваться при решении уравнений, неравенств и исследовании функций.

Предметные цели изучения главы:

— развитие понятия действительного числа как результата выстраивания научной теории действительных чисел на основе понятия предела числовой последовательности;

— формирование понятия степени с действительным показателем как основы для изучения степенной, показательной и логарифмической функций;

— формирование умений решать задачи, опираясь на изученные теоремы и следствия.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность в процессе обобщения, систематизации и расширения знаний, полученных в основной школе;

— формирование умений грамотно и точно излагать свою точку зрения как устно, так и письменно, грамотно используя язык математики.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню науки;

— формирование основ самовоспитания в процессе выполнения работ разного уровня сложности;

— развитие способности и готовности вести диалог с другими людьми в процессе совместной деятельности.

В результате изучения главы I учащиеся должны знать все определения, свойства и формулы, относящиеся к действительным числам, геометрической прогрессии, корню натуральной степени и степени с действительным показателем, а также уметь решать упражнения типа **93—105** и из рубрики «Проверь себя!». Учащиеся классов с углублённым изучением математики дополнительно должны уметь выполнять упражнения типа **108—114**.

§ 1. Целые и рациональные числа
§ 2. Действительные числа (3 / 4 ч)

Цель изучения параграфов — систематизация знаний учащихся о расширении множества чисел (от натуральных до действительных), о свойствах чисел; восстановление навыков действий с действительными числами; ознакомление с понятием предела последовательности; развитие умений пользоваться различными источниками информации.

Изучение материала этих параграфов можно провести по одному из двух следующих способов:

1) следуя логике его изложения в учебнике (на первом уроке рассмотреть теоретический и практический материал § 1, на втором уроке — материал § 2);

2) для представления единой картины о расширении понятия числа на первом уроке рассмотреть теоретическую часть обоих параграфов, перенося восстановление практических действий с различными числами (арифметические действия, обращение бесконечных периодических дробей в обыкновенные, извлечение корней, сравнение иррациональных чисел) на второй урок.

При изучении материала по второму из предложенных способов желательно, чтобы учащиеся сами принимали активное участие в восстановлении последовательности расширения множеств (классов) изучавшихся чисел и тех операций, которые приводили к потребности этого расширения. Этот процесс учитель может иллюстрировать на доске с помощью кругов Эйлера. Желательно, чтобы в ходе устного обсуждения темы учащиеся проговаривали определения каждого из видов чисел, например: «Рациональное число — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число»; «Натуральные числа — это числа счёта: 1, 2, 3, 4, ...» и т. д. Напомним, что введение в 8 классе понятия «действительные числа» было обусловлено невозможностью всегда выполнять операцию извлечения квадратного корня из числа на множестве неотрицательных рациональных чисел (множество рациональных чисел дополнялось множеством иррациональных чисел — бесконечными периодическими дробями). Повторяются обозначения латинскими буквами всех изученных множеств чисел: $\boldsymbol{N}$ — натуральные числа; $\boldsymbol{Z}$ — целые числа; $\boldsymbol{Q}$ — рациональные числа; $\boldsymbol{R}$ — действительные числа.

При рассмотрении действий с приближёнными значениями иррациональных чисел (с. 8) желательно вспомнить правила округления числа до определённого разряда, а также правила округления результатов сложения (вычитания) и умножения (деления) приближённых значений чисел.

В § 2 (с. 9) происходит первое знакомство с понятием предела числовой последовательности. Учитель не должен добиваться глубокого усвоения этого понятия даже в 11 классе, когда оно будет рассматриваться как основа для введения понятия производной, не следует пока и акцентировать внимание учащихся на символике, связанной с этим понятием. По итогам рассмотрения материала на с. 9 у учащихся должно лишь появиться представление о том, что между точками числовой прямой и всеми действительными числами существует взаимно-однозначное соответствие (термин «взаимно-однозначное соответствие» учитель не произносит), т. е. представление об отсутствии «пустот» на числовой прямой и о том, что каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой.

Распределение учебного материала по урокам:

Номера уроков	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные[1]
1	§ 1 до задачи 2; § 2 до с. 9	1, 2, 6, 7	2 (3)	4, 5, 11, 12, 109, 110, 1263, 1265, 1280
2	§ 1 задачи 2 и 3	3, 8—10	3 (3)	
3	§ 2	4, 93	В тексте пособия	

При наличии времени в конце второго урока учитель может провести проверочную самостоятельную работу[2].

1. Представить в виде бесконечной периодической дроби обыкновенную дробь $7\frac{3}{11}$ $\left[3\frac{2}{9}\right]$.

2. Какое из равенств:

$\left|4-2\sqrt{3}\right| = 4-2\sqrt{3}$ или $\left|4-2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}-4$

[$\left|4-3\sqrt{2}\right| = 4-3\sqrt{2}$ или $\left|4-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}-4$] — является верным?

В результате изучения § 1—2 все учащиеся должны знать определения натурального числа, целого числа, действительного числа, модуля числа; знать, что множество всех действительных чисел «заполняет» всю числовую прямую; уметь выполнять упражнения типа **2**, **3**, **7—10**, в классах с углублённым изучением упражнения типа **11**, **12**.

Дополнение. До постановки домашнего задания к уроку, на котором будет изучаться материал § 3, предлагаем учителю прочитать рекомендации к следующему параграфу.

§ 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — формирование представления о пределе числовой последовательности; обучение нахождению предела числовой последовательности, являющейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией; формирование умений самостоятельно находить необходимую информацию по теме, используя различные источники информации.

---

[1] Под дополнительными упражнениями здесь и далее учителю следует понимать упражнения, которые включаются в учебный процесс в классах углублённого уровня и распределяются по урокам на усмотрение учителя.

[2] Здесь и далее задания для II варианта самостоятельных и контрольных работ указываются в квадратных скобках.

Накануне изучения данного параграфа полезно в домашнее задание включить повторение знакомого учащимся материала о геометрической, в частности бесконечно убывающей геометрической, прогрессии (с. 11—12 до задачи 1). На первом уроке в тетрадях учащихся должно быть зафиксировано следующее:

— краткая запись определения геометрической прогрессии и формула её общего члена;

— формула суммы n первых членов геометрической прогрессии;

— краткая запись определения бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

— примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий (отличных от приведённых в учебнике).

Эту работу можно включить и в домашнее задание, данное накануне, и объяснить цель этого задания — обучение конспектированию учебной и научной литературы.

Материал параграфа не носит принципиально нового характера (новой для учащихся будет лишь форма записи задачи нахождения пределов числовых последовательностей с использованием символа $\lim\limits_{n\to\infty}$), поэтому изложить его можно в форме лекции на первом уроке, а второй урок посвятить выполнению упражнений по теме.

При желании учитель может и на первом, и на втором уроке чередовать рассмотрение теоретического материала с демонстрацией его применения при выполнении практических заданий. При таком варианте изучения параграфа материал на уроках может быть рассмотрен следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3 до слов «На рисунке 4…» (с. 12)	13—16, 21	16 (3)	24—26
2	§ 3 от слов «На рисунке 4…» (с. 12) и до конца	17—20, 22, 23	19 (1), 20 (3)	

В результате изучения параграфа на примере бесконечно убывающей геометрической прогрессии все учащиеся должны получить представление о существовании сходящихся числовых последовательностей, научиться находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и с помощью формулы (4) обращать бесконечную периодическую дробь в обыкновенную, выполнять упражнения типа **17**, **19**, **20**; в классах углублённого уровня — типа **21**—**23**.

§ 4. Арифметический корень натуральной степени (3 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — обобщение знаний о корнях и арифметических корнях, полученных в 7—9 классах; подготовка к изучению понятия степени с действительным показателем; формирование умений продуктивно общаться в процессе совместной деятельности при изучении нового материала.

На уроке может быть использован справочный материал: «Квадраты чисел», «Натуральные степени числа 2», «Натуральные степени числа 3», «Формулы сокращённого умножения», «Модуль числа», «Свойства арифметического корня *n*-й степени».

В устной работе полезными могут оказаться следующие задания:

1. Возвести в квадрат числа:

$$0;\ 7;\ -\frac{3}{8};\ 1\frac{2}{3};\ 0{,}2;\ 0{,}6;\ -1{,}1;\ 0{,}08.$$

2. Представить в виде квадрата числа:

$$1;\ \frac{49}{16};\ 0{,}0001;\ 42^4;\ 1{,}5^6.$$

3. Представить в виде куба числа:

$$\frac{8}{27};\ -0{,}001;\ (-2)^6;\ (-2)^9;\ -2^3.$$

4. Упростить выражения:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2};\ \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2};\ \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Так же как и материал предыдущих параграфов (основой которых является знакомое учащимся содержание), теоретический материал § 4 может быть изложен полностью на первом уроке, а второй урок посвящён вычислению корней и применению свойств арифметических корней для преобразования выражений.

В классе углублённого уровня часть упражнений, например **34**, **35**, **37**, выполняется устно. Возможно чередование изучения небольших частей теоретического материала с рассмотрением его практического применения (такой подход рекомендуется осуществлять в классах с невысоким уровнем успеваемости или с детьми, отличающимися быстрой утомляемостью).

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать понятие арифметического корня *n*-й степени и его свойства, уметь выполнять действия с корнями в упражнениях типа **29**, **30**, **35**, **36**, **41—43**; в классах углублённого уровня — **47—49**. Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4 (до свойств арифметического корня); при наличии времени — свойство 1: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	27—32, 45, 33	30 (3), 33 (3)	46, 47, 50—54, 111 (1)
2—3	Свойства арифметического корня и их применение (до конца параграфа)	34—45, 51	37 (3), 44 (3, 5)	

§ 5. Степень с рациональным и действительным показателями (3 / 5 ч)

Цель изучения параграфа — восстановление навыков в действиях со степенями с рациональными показателями; расширение понятия степени до степени с действительным показателем; изучение свойств степени с действительным показателем; развитие умений самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы действий, осознавая важность данного материала для изучения функций элементарными методами и с помощью математического анализа.

Первый урок по теме можно начать с небольшой самостоятельной работы, которая поможет учителю выявить уровень восстановленных навыков учащихся в действиях с корнями и степенями, имеющими рациональные показатели:

1. Вычислить:

1) $\sqrt[5]{3^{15}}$; 2) $\sqrt{\frac{25}{121}} - \sqrt[3]{-27}$; 3) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[6]{16}$.

[1) $\sqrt[4]{2^{16}}$; 2) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{2\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}}$.]

2. Упростить выражение

$\sqrt[5]{5a}^{\,3} : \sqrt[5]{a^3}$, где $a > 0$ [$\sqrt[4]{b^9} : (\sqrt[4]{b})^5$, где $b > 0$].

При рассмотрении материала п. 1 следует акцентировать внимание учащихся на том, что от записи $\sqrt[n]{a^m}$ можно перейти к записи $a^{\frac{m}{n}}$ только

для $a > 0$, а также на том, что $0^{\frac{m}{n}} = 0$ по определению только при $\frac{m}{n} > 0$ (m — целое число, n — натуральное число). Учителю следует знать, что теоретический материал по этой теме детьми усваивается недостаточно.

Например, распространены на вступительных экзаменах в вузы следующие *ошибки абитуриентов*:

1) Уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 1$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

2) $\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$;

3) $0^{-\frac{1}{2}} = 0$; 4) $0^0 = 1$; 5) $0^0 = 0$.

В ходе изучения параграфа и при выполнении упражнений необходимо: вспомнить, что $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a > 0$, n — целое число; повторить формулы сокращённого умножения и вынесение за скобки общего множителя.

При изучении п. 1 учитель сам определяет (в зависимости от подготовленности класса), следует ли перед выполнением упражнений на применение того или иного свойства степени разбирать решение аналогичной задачи из текста параграфа. В классе углублённого уровня можно часть упражнений (например, из номеров **57—59**) выполнять устно.

При изучении п. 2 подчёркивается, что определение степени с действительным показателем таково, что все свойства, сформулированные для степени с рациональным показателем (с. 25), переносятся на степень с действительным показателем. Поэтому можно их не записывать дополнительно ни на доске, ни в тетрадях. Свойство (1) степени с действительным показателем (сформулированное, но не доказанное, на с. 29) желательно проиллюстрировать конкретными примерами:

$$1{,}01^2 = 1{,}0001 > 1;\ 1{,}21^{\frac{1}{2}} = 1{,}1 > 1 \text{ и т. п.}$$

Доказательства теоремы и следствий из неё учитель либо проводит на доске, либо разбирает их с учащимися по тексту учебника. При этом после рассмотрения как теоремы, так и следствий необходимо проиллюстрировать их применение на конкретных примерах: после доказательства теоремы разобрать задачу 7, после рассмотрения следствия 1 — задачу 8, следствия 2 — задачу 9, следствия 3 — задачу 10.

Воспроизведение доказательств теоремы и следствий из неё не следует требовать от всех учащихся.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, п. 1 до задачи 5*	55—56	61(3), 64(5)	67, 76—81, 90 и 91 (после рассмотрения задачи 5 текста параграфа), 82—83, 86—89
2—3	§ 5, п. 2	68—75, 84, 85	70(3), 72(3), 73(5), 84(3)	

К концу изучения параграфа все учащиеся должны:

1) знать свойства степени с действительным показателем и уметь их применять при выполнении упражнений типа **57—60**, **62**, **69**, **70**;

2) знать свойства (1), теорему и следствия из неё, сформулированные на с. 29—30, и уметь их применять при выполнении упражнений типа **72**, **73**, **75**, **84** (1, 2). В классе углублённого уровня упражнения типа **64**, **66**, **67**, **68**, **85**, **86**, **90**, **91**.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

На этом уроке совершенствуются умения в применении свойств степени с действительным показателем. При ответах у доски следует требовать от учащихся обоснований выполняемых действий (ссылок на конкретные свойства).

Желательно на этом уроке вывесить для обозрения таблицы со всеми изученными свойствами степени с действительным показателем (теорема и следствия из неё также являются свойствами степени).

Практические задания учитель выбирает из «Упражнений к главе I» (с. 35—38); задания «Проверь себя!» могут быть использованы для самостоятельной работы учащихся в классе или дома.

На этом уроке может быть использован справочный и задачный материал «Дидактических материалов» на с. 37—41; материал из электронного приложения к учебнику.

Глава II. Степенная функция

Напомним, что первое знакомство со степенной функцией произошло ещё в основной школе. При рассмотрении степенной функции учащиеся познакомились с такими понятиями, как область определения и множество значений функции, аналитический признак монотонности функции, чётность и нечётность функции. Было выявлено, что степенная функция $y = x^r$, где r — заданное число, определена для тех значений x, при которых выражение x^r имеет смысл. Свойства и графики степенной функции рассматривались на примерах простейших функций: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ и др. Были также рассмотрены примеры простейших иррациональных уравнений.

Изучение степенной функции продолжается в старших классах. Изучать в общем виде степенную функцию $y = x^p$, где p — заданное действительное число, достаточно сложно. При основании $x > 0$ вопрос решается просто: если показатель степени положителен, то значение функции равно значению степени; если показатель степени отрицателен, то значение функции находится после перехода к положительному показателю; если показатель степени равен нулю, то значение функции равно единице. Например, $3^2 = 9$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $3^0 = 1$.

Однако основание степени x^p может быть и числом отрицательным. Для таких значений x свойства степенной функции зависят от того, каким числом является показатель p. Отметим, что в этом случае степенная функция существует только тогда, когда показатель — целое число.

Если основание степени равно нулю, то степень определена только для положительного показателя.

Рассмотрение свойств степенных функций и их графиков проводится поэтапно, в зависимости от того, каким числом является показатель: 1) чётным натуральным числом; 2) нечётным натуральным числом; 3) числом, противоположным чётному; 4) числом, противоположным нечётному; 5) положительным нецелым числом; 6) отрицательным нецелым числом.

Обоснования свойств степенной функции в этой главе не проводятся, они следуют из свойств степени с действительным показателем, рассмотренных в первой главе. Например, возрастание функции $y = x^p$ на промежутке $x > 0$, где p — положительное нецелое число, следует из свойства: «Если $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^p < x_2^p$ ».

В этой же главе рассматриваются функции, называемые взаимно обратными. Важно обратить внимание на то, что не всякая функция имеет обратную; обратную функцию имеет только обратимая, т. е. такая, которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между областью определения и множеством значений.

У взаимно обратных функций области определения и множества значений «меняются местами», а отсюда следует, что их графики симметричны относительно прямой $y = x$. По этой же причине для нахождения функции, обратной данной, выражают из данной формулы x через y, а затем в найденной формуле меняют обозначения. Заметим, что не для всякой обратимой функции, рассматриваемой в школе, учащиеся могут найти формулу для обратной функции. Например, учащиеся не смогут решить уравнение $y = x^3 + x$ относительно x, поэтому не смогут найти функцию, обратную функции $y = x^3 + x$.

Рассмотрение равносильности уравнений возникает в связи с предстоящим изучением иррациональных уравнений. В ходе их решения переходят к уравнению-следствию, которое может иметь, помимо корней данного уравнения, и посторонние корни. Так, уравнение $\sqrt{x+2} = x$ имеет один корень $x = 2$, а уравнение-следствие $x + 2 = x^2$ имеет два корня $x = -1$ и $x = 2$.

Выявление приобретённых посторонних корней осуществляется проверкой найденных значений. В то же время при решении уравнений важно не потерять корни. Потеря корней может, например, произойти при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Например, если уравнение $(x + 2)(x - 2) = 7(x - 2)$ разделить на $x - 2$, то будет потерян корень $x = 2$.

Основным методом решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень с целью перехода к рациональному уравнению-следствию данного.

С помощью графиков решается вопрос о наличии корней и их числе, а также о нахождении приближённых корней, если аналитически решить уравнение трудно.

Иррациональные неравенства не являются обязательными для изучения всеми учащимися. В учебнике рассмотрены лишь простые примеры неравенств, содержащих неизвестное под знаком только квадратного корня, причём сначала такие, как $\sqrt{x-2} > 3$, а затем $\sqrt{x-2} > x$. Основным способом их решения является сведение их к системе рациональных неравенств, равносильной данному неравенству (одно из неравенств выражает условие существования корня).

Предметные цели изучения главы:

— введение понятия степенной функции; изучение её свойств аналитическими и графическими методами;

— изучение понятия обратной функции; обобщение понятия обратной функции с использованием ранее изученных зависимостей; формирование умения аналитической записи функции, обратной данной, а также умения построения графика обратной функции;

— введение определений равносильных уравнений и уравнения-следствия;

— применение при решении уравнений, неравенств свойств равносильных преобразований;

— обучение решению иррациональных уравнений и простейших иррациональных неравенств.

Метапредметные цели изучения главы:

— обучение интерпретации явлений процессов, протекающих по степенной зависимости;

— развитие умений самостоятельно определять цели деятельности по изучению элементарных функций и их применению, использовать все возможные ресурсы для достижений поставленных целей;

— развитие критического мышления в процессе оценки и интерпретации информации, получаемой из различных источников;

— развитие умений взаимодействия в процессе поиска решения проблемы.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

— развитие стремлений к самостоятельной творческой деятельности;

— развитие стремления к самообразованию.

В результате изучения главы II все учащиеся должны знать свойства степенной функции во всех её разновидностях, определение и свойства взаимно обратных функций, определения равносильных уравнений и уравнения-следствия; понимать причины появления посторонних корней и потери корней, а также уметь решать упражнения типа **175—183** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно упражнения **184—187**, **189**.

§ 6. Степенная функция, её свойства и график (3 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство учащихся со свойствами и графиками различных (в зависимости от показателя степени) видов степенной функции; развитие навыков самостоятельного поиска методов решения практических задач.

До начала изучения материала параграфа полезно восстановить умение учащихся читать графики функций. С этой целью, например, по рисунку 1 можно задать следующие вопросы:

1) Какова область определения функции $y = f(x)$?

2) Каково множество значений функции $y = f(x)$?

3) Является ли функция чётной? нечётной?

4) На каких промежутках функция возрастает? убывает?

5) При каких значения x функция принимает значение, равное нулю? положительные значения? отрицательные значения?

6) Каково значение функции при $x = 0$? $x = 2$?

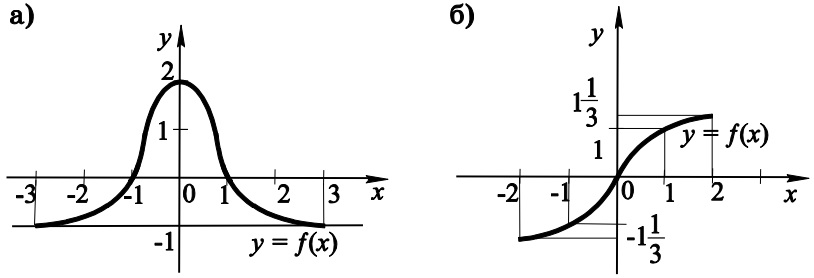


Рис. 1

При рассмотрении графиков функций на рисунке 1 полезно вспомнить и определения возрастания и убывания функции.

Материал желательно рассматривать в соответствии с логикой его изложения в параграфе. Желательно привлекать знания учащихся о свойствах и графиках, ранее изученных функций. Так, например, при рассмотрении п. 1 можно использовать изображение графика функции $y = x^2$ и при его анализе произвести перенос свойств этой функции на функцию $y = x^{2n}$, где n — натуральное число. Пункт 2 можно изучать при наличии изображения графика функции $y = x^3$; п. 3 — функции $y = \frac{1}{x^2}$; п. 4 — функции $y = \frac{1}{x}$; п. 5 — функции $y = \sqrt{x}$ $(y = x^{\frac{1}{2}})$. Следует использовать и рисунки 7—12 учебника. При обобщении свойств степенной функции подчёркивается, что графики всех рассматриваемых функций проходят через точку с координатами (1; 1). Поэтому построение графика степенной функции желательно начинать с построения на координатной плоскости этой точки.

Свойства функции не доказываются, но в классе углублённого уровня учитель может показать обоснование свойства возрастания (убывания) конкретной функции, опираясь на теоретический материал § 5.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6 до задачи 1	119, 120	Изобразить схематически график функции: 1) $y = x^{\frac{2}{7}}$ 2) $y = x^{\frac{7}{2}}$ 3) $y = x^{-\sqrt{3}}$	126—130
2—3	§ 6, задачи 1—3*	121—126	125 (5, 7)	

При выполнении упражнения **122** единицу следует представить в виде степени с нулевым показателем и основанием, равным основанию рассматриваемой степени. После этого сравнение степеней подвести под сравнение значений возрастающей или убывающей функции. Желательно убедиться в верном результате сравнения с помощью схематического изображения графика соответствующей функции.

Задачу 1 текста параграфа можно разобрать после выполнения упражнений **123** и **124**, а задачу 2 — до выполнения упражнения **125**. Упражнение **126** может быть полностью перенесено на домашнюю работу последнего урока по теме, так как оно может послужить основой для разговора о взаимно обратных функциях при изучении следующего параграфа в классах углублённого уровня.

В результате изучения этой темы все учащиеся должны уметь схематически строить график степенной функции в зависимости от принадлежности показателя степени (в аналитической записи рассматриваемой функции) к одному из рассмотренных в § 6 числовых множеств и перечислять её свойства; решать упражнения типа **121—125**, в классах углублённого уровня **127**, **128**; ДМ[1] § 6 № 55, 56.

§ 7. Взаимно обратные функции (1 / 1 ч)

Хотя материал параграфа согласно программе не является обязательным, желательно познакомить с ним всех учащихся. При этом не следует добиваться от всех учащихся умения находить функцию, обратную данной. Достаточно того, чтобы учащиеся, видя график функции, смогли

[1] Здесь и далее: ДМ § _ № _ означает, что задания берутся из пособия «Дидактические материалы, 10 (11 — в дальнейшем)» авт. М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва и др.

сказать, является ли эта функция обратимой, и знали, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Практика показывает, что большинство учащихся без особых усилий справляются с упражнениями типа **131—134**.

Степень глубины изложения материала в классах базового уровня учитель выбирает сам в зависимости от готовности класса к его восприятию.

Приложение. § 4. Дробно-линейная функция и её график (1 / 1 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление учащихся с дробно-линейной функцией; развитие навыков работы с дополнительной литературой по теме.

Материал параграфа не является принципиально новым для учащихся, поэтому начинается он с преобразования выражения, определяющего функцию. Выделение целой части в этом выражении приводит школьников к виду, знакомому ещё с основной школы: $y = A + \frac{B}{x - x_0}$.

Решения задач 1 и 2 на практике показывают приём построения графика функции и возможности её исследования по этому графику. Здесь школьники впервые встречаются с понятиями вертикальной и горизонтальной асимптот. Ученикам можно предложить поискать материал об асимптотах в различных источниках и с небольшим сообщением по этой теме выступить на одном из последних уроков по теме.

§ 8. Равносильные уравнения и неравенства (2 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятий равносильных уравнений и неравенств, а также уравнения-следствия; формирование у учащихся потребности при решении уравнений выполнять лишь те преобразования, которые не приводят к потере корней, а при решении неравенств осуществлять лишь равносильные преобразования; развитие умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать свою деятельность.

Материал этого параграфа является одним из самых важных в курсе алгебры как для формирования теоретической грамотности учащихся, так и для успешной их практической деятельности при решении самых разнообразных уравнений, неравенств и их систем.

Теоретический материал параграфа следует рассматривать неотрывно от практических иллюстраций вводимых понятий и представлений. К десятому классу у большинства учащихся уже сформированы зрелые

аналитико-синтетические мыслительные умения, поэтому полезно после рассмотрения текста параграфа сделать обобщённые выводы об известных учащимся равносильных преобразованиях уравнений и неравенств, активно привлекая к этой работе самих учащихся. В классе углублённого уровня эту работу можно провести устно, подчеркнув, что все уравнения, не имеющие корней, между собой равносильны. В классе базового уровня обобщение можно провести в ходе заполнения, например, следующей таблицы:

Преобразования, приводящие к равносильному уравнению (неравенству)	Примеры равносильных	
	уравнений	неравенств
Перенос членов уравнения (неравенства) из одной части в другую с противоположными знаками	$4x - 3 = 2x + 5$ и $4x - 2x = 5 + 3$	$x^2 > 1$ и $x^2 - 1 > 0$
Умножение или деление обеих частей уравнения (неравенства) на одно и то же число, отличное от нуля, или на выражение, имеющее постоянный знак при всех действительных значениях неизвестного	$\frac{x^2}{4} = 1$ и $x^2 = 4$	$2x \geq 6$ и $x \geq 3$; $-2x \geq 6$ и $x \leq -3$;
	$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ и $x^2 - 4 = 0$	$\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$
Замена части уравнения (неравенства) тождественно равным ему выражением	$x^2 + 3x = 0$ и $x(x + 3) = 0$	$x^2 + 2x + 2 > 0$ и $(x + 1)^2 + 1 > 0$; $\sqrt{x^2} - 3 = 2$ и $\lvert x \rvert - 3 = 2$

Понятие уравнения-следствия вводится после рассмотрения уравнения (например, $\sqrt{x} = x - 2$), в ходе решения которого обе его части возводятся в квадрат и в результате получается уравнение ($x^2 - 5x + 4 = 0$), имеющее, помимо корня исходного уравнения ($x = 4$), ещё один корень ($x = 1$), который называют *посторонним*. В параграфе рассматриваются два вида преобразований уравнений, в результате которых могут появиться посторонние корни: возведение в квадрат обеих частей уравнения и умножение их на выражение, содержащее неизвестное. Учитель должен быть готов к вопросу учащихся о том, всегда ли эти преобразования приводят к приобретению посторонних корней. Можно привести примеры уравнений, при решении которых этого не происходит. Например, если обе части уравнения $\frac{x-3}{x-2} = 0$ умножить на $x - 2$, получится уравнение $x - 3 = 0$, равносильное исходному; если обе части уравнения $\sqrt{x-1} = 2$ возвести в квадрат, то полученное уравнение $x - 1 = 4$ также будет равно-

сильно исходному. Однако *возможность* появления посторонних корней при выполнении преобразований этих двух видов *обязывает* выполнять проверку полученных корней.

Учащиеся должны понять, что любое уравнение *B*, равносильное уравнению *A*, можно считать и следствием уравнения *A*. Тогда особое практическое значение приобретает содержание первого абзаца на с. 56 учебника: «При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего».

Действительно, в реальном учебном процессе в основном только сильные учащиеся всегда могут контролировать наличие или отсутствие в цепочке преобразований уравнений таких видов преобразований, которые могут привести к приобретению посторонних корней. Обычно только такие учащиеся уверенно могут говорить о том, что, например, все сделанные ими преобразования были равносильными, поэтому все полученные корни являются корнями исходного уравнения. Большинство же учащихся при решении уравнений, осуществляя переходы к уравнениям-следствиям (в частности, к равносильным уравнениям), следят за тем, чтобы не произошла потеря корня, а после нахождения корней последнего в цепочке преобразований уравнения делают проверку найденных корней, подставляя их в первое (исходное) уравнение.

Учитель вправе показать символы, которые учащиеся могут встретить в другой учебной литературе (или на занятиях подготовительных курсов в вуз), обозначающие переход от одного уравнения или неравенства к равносильному ($\Leftrightarrow$), а также переход от уравнения к следствию ($\Rightarrow$).

Использовать эти знаки при решении школьных упражнений не рекомендуется: как показала практика, большинство слабых учащихся, не задумываясь, например, ставят в цепочке преобразований после каждого уравнения знак $\Leftrightarrow$ и в итоге не делают проверку полученных корней, зачастую включая в ответ и посторонние корни. Лучше приучать школьников в цепочке преобразований в уравнении фиксировать (например, с помощью восклицательного знака) то место, где было выполнено преобразование, которое *могло* привести к появлению посторонних корней, с тем чтобы не забывать сделать проверку всех найденных корней.

При решении неравенств следует подчеркнуть, что в большинстве случаев из-за невозможности проверки всех решений неравенства, полученного в результате преобразований исходного неравенства, необходимо пользоваться только равносильными преобразованиями (чтобы быть уверенным, что все решения последнего в цепочке преобразований неравенства или системы неравенств (системы высказываний) являются всеми решениями исходного неравенства).

В классе углублённого уровня и при наличии времени можно показать замену неравенства равносильной ему системой (например, неравен-

ство $\frac{x-7}{\sqrt{x+2}} \le 0$ равносильно системе $\begin{cases} x+2>0, \\ x-7 \le 0 \end{cases}$). Однако следует помнить, что аналогичные замены будут рассмотрены в учебнике при решении иррациональных и логарифмических неравенств.

Распределить учебный материал по урокам можно так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 8, п. 1	138, 139, 141—142, 175	139 (3), 141 (2), 142 (3)	144—150
2	§ 8, п. 2	140, 143, 176	Решить неравенства: 1) $x^4 - x^2 \ge 0$; 2) $\frac{x^2-4}{x+1} \le 0$	

Упражнения **139—141** выполняются по схеме: 1) решаются оба уравнения (неравенства); 2) сравниваются их множества корней (решений); 3) делается вывод о равносильности или неравносильности уравнений (неравенств) в упражнениях **139—140** или устанавливаются уравнения-следствия в упражнении **141**.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать, какие преобразования уравнений (неравенств) приводят к равносильным уравнениям (неравенствам), а какие — к уравнениям-следствиям; при решении уравнений выполнять преобразования, приводящие к уравнениям-следствиям, и не забывать делать проверку полученных корней; понимать, что при решении неравенства можно выполнять только равносильные преобразования; знать, что следует избегать деления обеих частей уравнения (неравенства) на выражение с неизвестным; справляться с выполнением упражнений типа **139—143**, в классах углублённого уровня — **144**, **146**.

§ 9. Иррациональные уравнения (2 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению иррациональных уравнений возведением обеих его частей в одну и ту же натуральную степень; формирование навыков познавательной рефлексии.

Начать первый урок можно с устного выполнения следующих заданий:

1. Среди пар уравнений найти пары равносильных уравнений:

1) $5x + 10 = 0$ и $x + 2 = 0$; 2) $x = 5$ и $x^2 = 25$;

3) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$ и $|x-1| = 3$; 4) $\sqrt{x} = -4$ и $x^2 + 1 = 0$.

2. Определить, какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $x^2 = 9$ и $x = -3$; 2) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

3) $\frac{x^2 - 3x}{x} = 0$ и $x^2 - 3x = 0$; 4) $\frac{x - 7}{x} = 0$ и $x - 7 = 0$.

Рассматривая задание **2** (4) из предложенных выше, учащиеся должны понять, что так как уравнения $\frac{x - 7}{x} = 0$ и $x - 7 = 0$ равносильны (оба имеют корень $x = 7$), то каждое из них является следствием другого.

После повторения понятия уравнения-следствия можно переходить к изучению материала параграфа, делая акцент на практическом применении сформулированного на с. 60 свойства иррациональных уравнений.

Говоря о том, что обе части уравнения можно неоднократно возводить в одинаковые натуральные степени (в задаче 1 это проделано дважды), следует отметить, что лучше стремиться к нахождению наиболее рациональных способов решения любых уравнений. Так, например, решая уравнения **154** (2) и **155** (1), можно до возведения обеих частей в квадрат выполнить равносильное преобразование — сгруппировать члены уравнения, не содержащие радикалов, в одной его части, а единственный радикал в другой. Это даст возможность обойтись единственным возведением обеих частей уравнения во вторую степень.

При рассмотрении задачи 4 текста параграфа можно поговорить о том, что так называемый *графический метод решения уравнений* фактически даёт лишь возможность высказать предположение о количестве корней уравнения, а также в ряде случаев найти их приближённые значения (для того чтобы убедиться, не является ли найденное таким способом приближённое значение x точным значением корня уравнения, нужно сделать проверку: найденное число подставить вместо x в исходное уравнение).

Распределение учебного материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 9 до задачи 4 (задачи 1—3 могут быть разобраны учащимися по учебнику самостоятельно)	151—155, 183	154(1, 3)	159, 161, 163, 164, 187; ДМ § 9 № 21
2	§ 9, от задачи 4	156—158, 160, 162, 178—179	158 (3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать, что при возведении в натуральную степень обеих частей уравнения получается уравнение-следствие; уметь решать иррациональные уравнения, аналогичные предложенным в упражнениях **152—155**; учащимся классов углублённого уровня дополнительно — **163**, **164**.

§ 10*. Иррациональные неравенства (0 / 2 ч)

При первом варианте изучения курса математики материал параграфа рассматривается лишь в случае наличия дополнительного времени. Учитель сам выбирает степень глубины усвоения материала и максимальный уровень сложности решаемых неравенств.

При втором варианте материал этого параграфа рассматривается с целью введения понятия иррационального неравенства, а также демонстрации применения следствия 3 (с. 30) о возведении в степень неравенств с положительными членами к решению иррациональных неравенств.

В классе углублённого уровня можно после рассмотрения решений задач параграфа вывести учащихся на теоретическое обобщение решения иррациональных неравенств, содержащих единственный корень второй степени:

1) Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

2) Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ заменяется решением двух систем (совокупностью двух систем):

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

После этого обобщения полезно записать в общем виде решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ так: $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$ Дополнительные задания по решению иррациональных неравенств, помимо **165—174**, **189—191**, можно найти в «Дидактических материалах» на с. 57—58.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2 / 2 ч)

На этих уроках можно напомнить учащимся, как расширялись их знания о степени и какими практическими действиями они овладели, начиная с момента изучения понятия степени с действительным показате-

лем (§ 4 и 5) и заканчивая рассмотрением степенной функции и её свойств (§ 6—9, 10*).

Свойства степенной функции при различных показателях повторяются с помощью обобщения свойств ранее известных функций (материал § 6). При этом активно используются эскизы графиков функции; выполняются упражнения, аналогичные упражнениям **175—177**, **184**.

Следует провести дифференциацию свойств степенных функций с дробными показателями и функций, в записи которых используется знак корня. Так, например, функции $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = \sqrt{x}$ имеют одинаковые свойства и графики (рис. 2), чего нельзя сказать о функциях $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 3). В результате этой работы нужно уметь выполнить упражнения типа **179**.

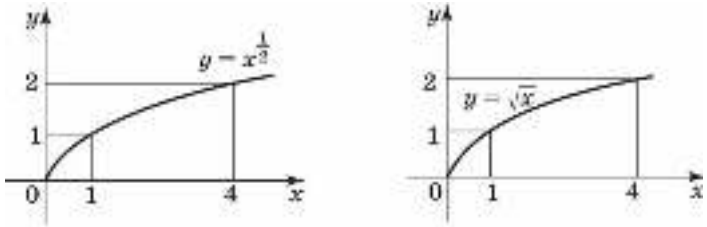


Рис. 2

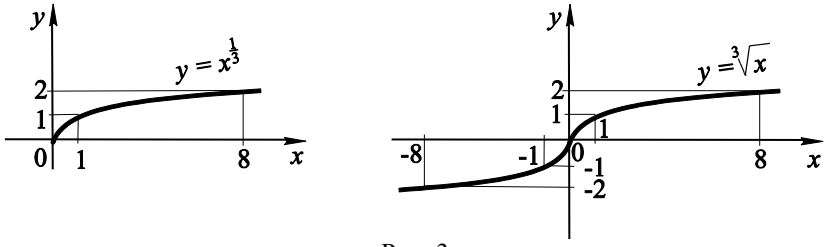


Рис. 3

Хотя понятия обратимой функции и обратной функции у большинства учащихся на уровне представлений не вызывают затруднений, не следует всё же со всеми учащимися отрабатывать эти понятия при выполнении упражнений типа **180—181**.

Значительное внимание на этих уроках необходимо уделить понятию равносильности (уравнений и неравенств), понятию уравнения-следствия (решая упражнения типа **182**) и алгоритму практических дейст-

вий при решении различных уравнений типа **1143** (1), **1146**, **183**, **187** и неравенств типа **1206**, **1205** (3), **167**, **189**.

Знание поведения графика и свойств степенной функции при различных показателях степени позволяет учащимся определять количество корней достаточно сложных уравнений. Например, выполняя в одной системе координат эскизы графиков функций — левой и правой частей уравнения, учащиеся понимают, что уравнение $x^{\frac{1}{3}} = x^2 - 1$ имеет один корень (рис. 4), а уравнение $x^{\frac{1}{3}} = (x-1)^2$ — два корня (рис. 5).

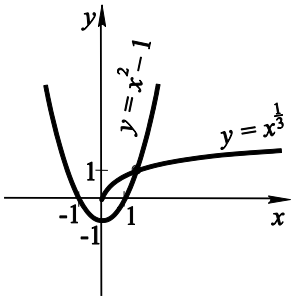


Рис. 4

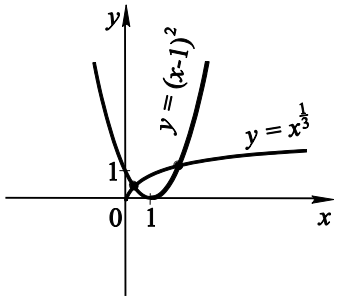


Рис. 5

На этих уроках можно выполнить самостоятельную работу с проверкой в классе, в которой нужно решить иррациональные уравнения (если изучался § 10, то и неравенства):

1. $\sqrt{x+11}+1=x$ [$\sqrt{x+10}+2=x$].

2. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$ [$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}=2$].

3*. $\sqrt{x-2}<5$ [$\sqrt{x-3}<2$].

4*. $\sqrt{x-2}\le x-2$ [$\sqrt{x+4}\le x+4$].

Ответы.

1. $x = 5$ [$x = 6$].

2. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ [$x_1 = 0$, $x_2 = 4$].

3*. $2 \le x < 27$ [$3 \le x < 7$].

4*. $x = 2$, $x \ge 3$ [$x = -4$, $x \ge -3$].

В результате этих уроков все учащиеся должны уверенно выполнять задания, аналогичные предложенным в рубрике «Проверь себя!».

Сильным учащимся можно предложить упражнения **1381**, **1398**, **1399** из раздела «Задачи для внеклассной работы»; из «Дидактических материалов», гл. II, «Задания для интересующихся математикой».

Глава III. Показательная функция

В этой главе рассматриваются свойства показательной функции и их применение к решению показательных уравнений, неравенств и их систем; кратко рассмотрены приложения показательной функции к описанию различных физических процессов.

В предыдущей главе была изучена степенная функция, с помощью которой могут быть описаны многие физические процессы, для которых характерно возрастание или убывание. Например, масса шара описывается степенной функцией его радиуса $m(R) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Однако в физике и технике существуют процессы, в которых рост или убывание идёт существенно быстрее, чем в тех, которые описываются степенной функцией. Эти процессы описываются показательной функцией. Например, радиоактивный распад вещества описывается показательной функцией $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Рост или убывание показательной функции называют экспоненциальным.

В 11 классе учащиеся узнают, что скорость возрастания (убывания) любой функции определяется её производной. Например, скорость возрастания линейной функции постоянна, квадратичной функции линейна.

Свойства показательной функции $y = a^x$ полностью следуют из свойств степени с действительным показателем. Например, возрастание функции $y = a^x$, если $a > 1$, следует из свойства степени: «Если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$ при $a > 1$».

Эскиз графика показательной функции легко строится с помощью её основных свойств: область определения — вся числовая прямая, множество значений — положительные числа, возрастает (или убывает), принимает значение 1 при $x = 0$. Для более точного построения графика функции полезно составлять таблицу её значений при некоторых значениях x.

Решение простейших показательных уравнений $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, основано на свойстве степени: «Если $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$». Например, решая уравнение $2^x = 8$, получаем $2^x = 2^3$, откуда $x = 3$. То, что решение уравнения закончено (оно имеет единственный корень $x = 3$), следует из свойства монотонности показательной функции: «Если $x < 3$, то $2^x < 2^3$, а если $x > 3$, то $2^x > 2^3$». Попутно получается, что решениями неравенства $2^x < 8$ является промежуток $x < 3$, а неравенства $2^x > 8$ — промежуток $x > 3$.

Решение большинства показательных уравнений и неравенств сводится к решению простейших. Решение уравнения $a^x = b$ и неравенств $a^x < b$ и $a^x > b$ нередко осуществляется логарифмированием; оно будет рассмотрено в следующей главе. Например, решая уравнение $2^x = 3$, нахо-

дим $x = \log_2 3$; решая неравенство $2^x > 3$, находим $x > \log_2 3$ (по свойству возрастания логарифмической функции с основанием 2).

Так как в ходе решения предлагаемых в учебнике показательных уравнений равносильность не нарушается, то проверка найденных корней необязательна. В этой главе системы уравнений и неравенств решаются с помощью равносильных преобразований: подстановкой, сложением или умножением, заменой переменных и т. д.

Предметные цели изучения главы:

— введение понятия показательной функции; изучение свойств и построение графика показательной функции;

— обучение решению показательных уравнений (неравенств, систем уравнений и неравенств) аналитическими и графическими способами.

Метапредметные цели изучения главы:

— моделирование явлений и процессов, протекающих по экспоненциальной зависимости, с помощью формул и графиков показательной функции;

— исследование реальных процессов и явлений с помощью свойств показательной функции.

Личностные цели изучения главы:

— развитие аналитических способностей;

— развитие исследовательских умений, необходимых в освоении будущих творческих профессий;

— совершенствование культуры вычислительных и графических действий.

В результате изучения главы III все учащиеся должны знать определение и свойства показательной функции, уметь строить её график и выполнять упражнения типа **246—254**, **262** и из рубрики «Проверь себя!»; классы углублённого уровня дополнительно выполнять упражнения типа **255—257**, **259**, **260**.

§ 11. Показательная функция, её свойства и график (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия показательной функции; демонстрация применения знаний о свойствах показательной функции к решению прикладных задач.

Для обоснования свойств показательной функции необходимо знание материала главы I учебника о свойствах степени. Поэтому повторение этих свойств, компактно сформулированных на с. 72, можно провести в ходе устного выполнения следующих упражнений:

1. Представить в виде степени числа $a > 0$:

1) $a^3 a^{-5} a^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{3\sqrt{2}} : a^{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a}{a^{\frac{2}{3}}}$;

4) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 5) $(a^6)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-2}$.

2. Найти значение выражения:

1) $\frac{(2\pi)^7}{2^8\pi^7}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^{-4} \cdot 3^5$.

3. Сравнить с единицей:

1) $1,3^{\sqrt{3}}$; 2) $0,7^{-5}$.

4. Сравнить:

1) $0,9^7$ и $0,9^6$; 2) $\pi^{\frac{1}{2}}$ и $\pi^{\frac{1}{3}}$.

Полезно повторить с учащимися определение свойств функции по её графику. С этой целью можно, например, по графику функции на рисунке 6 найти:

1) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

2) координаты точки пересечения графика с осью ординат;

3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;

4) промежутки возрастания (убывания) функции.

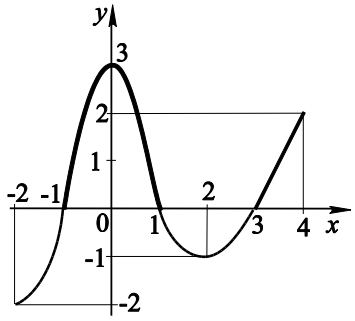


Рис. 6

Введение понятия показательной функции, обоснование её свойств, построение графиков и исследование поведения графиков, их особые точки рассматриваются в последовательности, предложенной в учебнике. После этого решается задача 1, а первые два абзаца параграфа на с. 74 и задача 2* рассматриваются совместно (при отсутствии у учащихся микрокалькуляторов они принимают на веру расчёты, предложенные в учебнике). Несмотря на относительную сложность формулы (10), желательно всех учащихся познакомить с фабулой и результатом решения задачи 2* (можно предложить познакомиться с этой задачей самостоятельно дома).

Материал параграфа по урокам может быть распределён следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 11, с. 72—74	192—196	194(3), 195 (3)	201—207; ДМ § 11 № 22
2	§ 11, с. 75	197—200	198 (3), 200 (3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны строить по точкам графики конкретных показательных функций, а также строить эскиз графика показательной функции $y = a^x$ в зависимости от значения основания a и пользоваться свойствами показательной функции при выполнении упражнений типа **195—200**. В классах углублённого уровня дополнительно — **201**, **205—207**.

§ 12. Показательные уравнения (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — овладение основными способами решения показательных уравнений.

Так как в основе решений показательных уравнений и неравенств лежит знание свойств степени и свойств показательной функции, полезно в начале каждого урока при изучении материала этого и следующего параграфов организовывать повторение свойств. Делать это можно, например, с помощью следующих упражнений:

1. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = 7{,}3^x$; 2) $y = 0{,}6^x$; 3) $y = 0{,}2^{-x}$; 4) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$.

Замечание. В заданиях 3 и 4 учащиеся должны до ответа на вопрос представить функцию в следующем виде:

3) $y = \left(\frac{1}{0{,}2}\right)^x$, т. е. $y = 5^x$; 4) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

2. Записать данную функцию в виде показательной:

1) $y = 3^x \cdot 4^x$; 2) $y = \frac{6^x}{2^x}$; 3) $y = 5^{2x}$; 4) $y = \frac{4^{3x}}{2^{5x}}$.

3. Сравнить:

1) $\left(\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(\frac{7}{4}\right)^{5,1}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{-7}$;

3) $(\pi - 1)^{-2}$ и $(\pi - 1)^{-3}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{2}^{\,\frac{1}{3}}$.

4. Представить числа:

1) 1; 32; $\frac{1}{64}$; 0,25 в виде степени числа 2;

2) $\frac{1}{3}$; 81; $\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ в виде степени числа 3.

5. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 2$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$.

6. Найти область определения функции:

1) $y = 56^x$; 2) $y = 56^{-x}$; 3) $y = 2^{\sqrt{x}}$; 4) $y = 6^{\frac{1}{x+1}}$.

7. Проверить, является ли число 5 корнем уравнения

$$2^{x-3} = x - 1.$$

8. Решить уравнение:

1) $5^x = 1$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$; 3) $5^x = -5$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$.

До введения понятия показательного уравнения и решения различных уравнений, сводящихся к элементарным показательным, желательно систематизировать знания учащихся об общих известных им подходах к решению уравнений (к приведению данного уравнения к виду, алгоритм решения которого известен). Можно вспомнить, какие преобразования приводят уравнения к равносильным. Сделать это можно в ходе решения, например, следующих уравнений:

1) $x^2 + 3x = \frac{2}{3}x + 2$; 2) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

3) $x^3 + x^2 - 12x = 0$; 4) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Можно вспомнить и приёмы, приводящие к уравнениям-следствиям, но так как при решении показательных уравнений чаще всего выполняются преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, фокусировать внимание на таких преобразованиях на этих уроках не следует.

Можно упомянуть и о графическом способе решения уравнений, но ему будет уделено особое внимание при изучении следующего параграфа.

После обобщения преобразований, которыми учащиеся умеют пользоваться и которые приводят к равносильным уравнениям, более осознанным будет разбор решений задач параграфа. Так учащиеся будут видеть, что задачи 1 и 2 решаются с использованием замены левой и правой частей уравнения выражениями, тождественно им равными (на основе знаний свойств степени). В задаче 3 раскладывается на множители левая часть уравнения. В задаче 4 обе части уравнения делятся на одно и то же выражение, принимающее значение, отличное от нуля при всех действительных значениях x. В задаче 5 члены уравнения переносятся из одной части в другую, после чего удобно становится обе части уравнения рас-

кладывать на множители, а затем делить их на одно и то же выражение ($5^{x-2} > 0$ при любом x). В задаче 6 применяется замена обозначения. Задачи 7 и 8, более сложные для многих учащихся по технике решения, с теоретической точки зрения — самые простые из рассмотренных, так как без предварительных преобразований на основе свойства равенства степеней с одинаковым основанием (большим нуля и не равным 1) данные уравнения сразу заменяются уравнениями, приводящими к квадратным.

Распределение материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 12 до задачи 6	208—212	210 (3) $3^{x+2} + 3^{x-1} - 3^x = 25$	218—227; ДМ § 12 № 12
2	§ 12 задачи 6—8	213—217	213 (3), 215 (3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться решать уравнения типа **210—213**, используя тождественные преобразования выражений на основе свойств степени; с помощью разложения на множители выражений, содержащих степени, применяя способ замены неизвестной степени новым неизвестным. В классах углублённого уровня дополнительно — **221—223**.

§ 13. Показательные неравенства (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения решать показательные неравенства на основе свойства монотонности показательной функции.

Так как при решении показательных неравенств используются приёмы преобразования выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства, аналогичные тем, которые использовались и при решении показательных уравнений, урок можно начать со следующей проверочной самостоятельной работы на 15 мин, в которой нужно решить уравнения:

1. $0{,}3^{3-2x} = 0{,}09$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} = 9\right]$.

2. $3^{x-2} - 3^{x-3} = 2$ $[4^{x-2} + 4^{x-1} = 5]$.

3. $8^x = 3^x$ $[6^x = 7^x]$.

4. $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ $[9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0]$.

До рассмотрения материала параграфа полезно устно выполнить задания, аналогичные упражнению **195**, а также устно решить неравенства типа

$$2^x > 0,\ 2^x > 1;\ \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < 0\ .$$

Основным в § 13 является материал до задачи 5. Рассмотрение задачи 5, скорее всего, не вызовет у учащихся затруднений, и естественным будет решение неравенств $\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$ с помощью построенных графиков (рис. 37). После разбора задачи 5 желательно обратить внимание учащихся на тот факт, что когда решается уравнение $f(x) = g(x)$, где $y = f(x)$ — убывающая, а $y = g(x)$ — возрастающая на одном и том же промежутке функции, и находится на этом промежутке корень уравнения, то этот корень будет единственным (на этом промежутке). Этот факт учащиеся будут наблюдать при решении упражнений **230**.

При решении уравнений в упражнениях **230** и **237** желательно ставить вопросы и о решении соответствующих неравенств, а графические решения неравенств в упражнении **236** следует начинать с графических решений соответствующих уравнений.

Материал параграфа с учётом анализа самостоятельной работы учащихся на первом уроке по решению показательных уравнений может быть распределён по урокам так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Повторение свойств показательной функции; § 13 до задачи 4	228, 229	228 (5)	231— 239
2	§ 13, задачи 4, 5, 6*	$4^x + 2^{x+1} - 80 < 0$, 230, 236	$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 < 0$, 230 (3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны справляться с решением неравенств типа **229**, в классах углублённого уровня дополнительно — **231**, **236**.

§ 14. Системы показательных уравнений и неравенств (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению показательных систем уравнений; знакомство с решением систем, содержащих показательные неравенства.

В первых двух задачах параграфа предложенные системы уравнений решаются способом подстановки, причём в задаче 2 предварительно осуществляется замена обозначений. Можно рассмотреть ещё, например, систему уравнений $\begin{cases} 5\cdot 2^x + 3^x = 13, \\ 7\cdot 2^x - 3^x = 11, \end{cases}$ которая легко решается способом сложения. В задаче 3* демонстрируется приём почленного умножения уравнений системы, в результате можно перейти от показательного уравнения к линейному $x + 2y = 5$, после чего решить систему проще.

После рассмотрения задачи 4 учащимся следует сообщить, что при решении систем, содержащих и уравнение, и неравенство, часто проще бывает решить сначала уравнение системы, а затем найденные значения корней подставить для проверки в неравенство. Однако, когда неравенство системы показательное (как в задаче 4 и упражнениях **244**, **245**), его лучше предварительно упростить (заменить равносильным непоказательным) или даже решить.

В начале первого урока можно выполнить следующие задания:

1. Решить уравнение: 1) $5^x = 0{,}2$; 2) $25^x = 5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 1$.

2. Решить неравенство: 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^7$; 2) $\pi^{10} \geq \pi^{2x}$.

3. С помощью графиков функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \frac{x}{2}$ (рис. 7) решить неравенство: 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{x}{2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{x}{2}$.

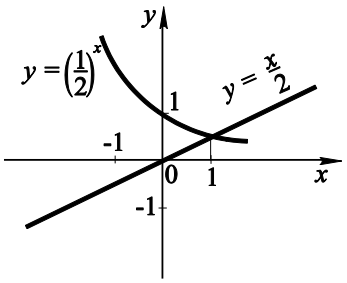


Рис. 7

4. Решить двумя способами систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

В конце второго урока можно провести самостоятельную работу (с проверкой в классе) на 15 мин:

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9} \le 1 \quad \left[(\sqrt{3})^{4-x^2} \ge 1\right].$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3^{x-3y} = 27 \end{cases}\right].$$

Распределение материала параграфа по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 14 до задачи 4	240—242	240 (3)	243—245
2	§ 14, задачи 4 и 5*	244, $\begin{cases} 0,6^{4x} = 0,6^{2x+5}, \\ 2^{3x-1} > 4 \end{cases}$	Проверочная самостоятельная работа	

К концу изучения параграфа все учащиеся должны научиться решать системы показательных уравнений типа **240—242** и иметь представление о способах решения систем, содержащих показательное неравенство. В классах углублённого уровня — **243**.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 1 ч)

На последнем перед контрольной работой уроке обобщаются знания о степени, показательной функции и её свойствах. Сделать это можно при сравнении значений функции, решении показательных уравнений, неравенств и их систем. Выполняются по выбору учителя «Упражнения к главе III». Рекомендуется использовать справочный и задачный материал из «Дидактических материалов», гл. III, с. 77—82.

На этом уроке может быть рассмотрено и степенно-показательное уравнение, в ходе решения которого повторяются и свойства степени. Например, может быть решено уравнение $(x + 2)^{x^2 + 7x + 10} = 1$.

Предложим пример записи решения:

1) $x + 2 = 1$, откуда $x = -1$;

2) $\begin{cases} x+2>0, \\ x^2+7x+10=0, \end{cases}$

откуда $x = -5$;

3) $\begin{cases} x+2=-1, \\ x^2+7x+10=2k, \end{cases}$

где $k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = -3$.

О т в е т. $x_1 = -1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -3$.

Глава IV. Логарифмическая функция

До этой главы в курсе алгебры изучались такие функции, вычисление значений которых сводилось к четырём арифметическим действиям и возведению в степень. Для вычисления значений логарифмической функции нужно уметь находить логарифмы чисел, т. е. выполнять новое для учащихся действие — логарифмирование. До появления компьютеров логарифмы широко использовались для выполнения вычислений и детально изучались в школе. Теперь же их роль стала вспомогательной, а изучение в школе не столь подробным.

Знакомство с логарифмами чисел и их свойствами для многих учащихся достаточно сложно. Поэтому полезны подробные и наглядные объяснения. Обычно логарифм определяется как показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить данное число: $3 = \log_2 8$, так как $2^3 = 8$. Следует обратить внимание на то, что $3 = \log_2 8$ является корнем уравнения $2^x = 8$, а поэтому $2^{\log_2 8} = 8$. Таким образом, получается основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Это равенство является краткой символической записью определения логарифма.

Доказательство свойств логарифма опирается на его определение. Так как, например, по определению логарифма $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$, то, перемножая эти равенства и используя свойство умножения степеней, получаем $a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc$, $a^{\log_a b + \log_a c} = bc$. Последнее равенство показывает, что $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$, отсюда и следует свойство логарифма произведения $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

На практике рассматриваются логарифмы по различным основаниям, в частности по основанию 10 ($\lg b$ — десятичный логарифм) и по основанию e ($\ln b$ — натуральный логарифм), отсюда возникает необходимость формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1.$$

Так как на микрокалькуляторе есть клавиши lg и ln, то для вычисления логарифма по основаниям, отличным от 10 и e, нужно использовать формулу перехода.

В настоящее время логарифмы широко используются в финансовых операциях, в частности для вычисления сложных процентов, определяющих прибыль от вкладов в сбербанке. В учебнике рассматривается одна из таких задач.

Свойства логарифмической функции будут активно использоваться при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Напомним, что рассмотрение квадратных уравнений в основной школе предшествовало изучению квадратичной функции, так как её свойства не были нужны для решения уравнений. Вместе с тем решения квадратных неравенств рассматривались после изучения квадратичной функции, так как её свойства были нужны для решения неравенств.

Изучение свойств логарифмической функции проходит совместно с решениями уравнений и неравенств. Например, при решении уравнения $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$ получаются корни $x = \pm 3$. Корень $x = -3$ посторонний, так как при этом значении x функция, стоящая в левой части уравнения, не определена. При решении, например, неравенства $\log_2 x > 3$ используется свойство возрастания функции $y = \log_2 x$.

Отметим, что многие свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, следуют из свойств показательной функции $y = a^x$, так как эти функции являются взаимно обратными. Их можно было бы изучать совместно. Однако связь между взаимно обратными функциями в школе детально не рассматривается, и поэтому они изучаются раздельно.

При решении логарифмических уравнений и неравенств выполняются различные их преобразования. При этом часто нарушается равносильность. Поэтому при решении логарифмических уравнений необходима проверка найденных корней, а при решении логарифмических неравенств нужно следить за тем, чтобы равносильность не нарушалась, так как проверку решения неравенства осуществить сложно, а в ряде случаев невозможно.

Например, при решении неравенства $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) < 3$ получается равносильная ему система $\begin{cases} x^2 - 1 < 8, \\ x > 1. \end{cases}$ Решая её, находим $1 < x < 3$.

Эскиз графика логарифмической функции, как и показательной, легко строится с помощью её основных свойств: область определения — положительные числа; множество значений — все действительные числа; функция возрастает или убывает; всегда принимает значение 0 при $x = 1$. Для более точного построения графика полезно составить таблицу некоторых её значений.

Логарифмические уравнения и неравенства не определяются, хотя каждое из них содержит неизвестное под знаком логарифма.

П р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— введение понятия логарифма числа и изучение свойств логарифмов;

— применение свойств логарифмов и основного логарифмического тождества для упрощения логарифмических выражений и вычислений;

— введение понятий десятичных и натуральных логарифмов;

— применение формулы перехода логарифма к другому основанию для вычисления логарифмов чисел с любыми основаниями;

— введение понятия логарифмической функции; изучение свойства логарифмической функции и построение её графика;

— обучение решению логарифмических уравнений, неравенств и их систем аналитическими и графическими методами; нахождение точных и приближённых значений корней уравнений.

Метапредметные цели изучения главы:

— расширение вычислительного аппарата за счёт применения свойств логарифмов;

— обучение модулированию реальных процессов, протекающих по законам экспоненциальной зависимости, и исследованию созданных моделей с помощью аппарата логарифмирования;

— осознание взаимосвязи математики со всеми предметами естественного и гуманитарного циклов.

Личностные цели изучения главы:

— совершенствование вычислительной культуры;

— расширение средств и методов преобразований символьного языка;

— совершенствование навыков работы с вычислительной техникой.

В результате изучения главы IV все учащиеся должны знать определение и свойства логарифма числа, определение и свойства логарифмической функции, уметь строить её график и выполнять упражнения типа **368—383**, а также из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно уметь выполнять упражнения типа **384—389**, **392**, **393**, **396**.

§ 15. Логарифмы (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия логарифма числа; знакомство с применением основного логарифмического тождества к вычислениям и решению простейших логарифмических уравнений.

В устную работу до введения понятия логарифма, помимо задач 1 и 2, можно включить и следующие:

1. Решить уравнение:

1) $2^x = 8$; 2) $2^x = \frac{1}{4}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$; 4) $2^x = 1$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$; 6) $2^x = -2$.

2. С помощью графика функции $y = 2^x$ (рис. 8) найти приближённые значения корней уравнения:

1) $2^x = \frac{2}{3}$; 2) $2^x = 3$; 3) $2^x = 6$.

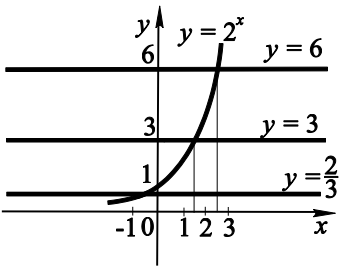


Рис. 8

После введения понятия логарифма стоит вернуться к рисунку 8 и отметить абсциссы точек пересечения графика функции $y = 2^x$ с прямыми $y = \frac{2}{3}$, $y = 3$, $y = 6$. Это $x = \log_2 \frac{2}{3}$, $x = \log_2 3$, $x = \log_2 6$.

Задания для проверочной самостоятельной работы (15 мин) могут быть следующими:

1. Вычислить:

1) $\log_5 5$ $[\log_4 4]$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ $\left[\log_4 \frac{1}{64}\right]$;

3) $10^{2\log_{10} 9}$ $[5^{3\log_5 4}]$; 4) $5^{2+\log_5 3}$ $[12^{1+\log_{12} 7}]$.

2. Выяснить, при каком значении x имеет смысл выражение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(7 - x) \qquad [\log_{0,3}(5 - x)].$$

3. Решить уравнение:

1) $\log_3(x + 1) = 4$ $[\log_4(x - 5) = 3]$;

2) $\log_x 81 = 4$ $[\log_x 32 = 5]$.

Материал параграфа изучается в соответствии с его изложением в учебнике и по урокам может быть распределён так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 15 (до задачи 5), исторические сведения	266—276	272, 273, 276 (3)	279—289; ДМ § 15 № 44
2	§ 15 задачи 5 и 6	277, 278	Проверочная самостоятельная работа	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение логарифма числа и основное логарифмическое тождество, а также справляться с упражнениями типа **272—278**. В классах углублённого уровня дополнительно — **279**, **280**, **285—287**.

§ 16. Свойства логарифмов (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — изучение основных свойств логарифмов и формирование умений их применения для преобразований логарифмических выражений.

Для понимания доказательств свойств логарифмов необходимы знания основного логарифмического тождества и действий со степенями. Активизировать эти знания можно, например, с помощью следующих упражнений:

1. Представить в виде степени:

1) $a^2 \cdot a^3$; 2) $(a^6)^2$; 3) $a^{12} : a^4$; 4) $\dfrac{a^8 \cdot a^{-3}}{a^{-5}}$.

2. Вычислить:

1) $7^{\log_7 8}$; 2) $7^{1+\log_7 8}$; 3) $7^{2\cdot\log_7 8}$; 4) $8^{\log_2 5}$.

3. Заполнить пропуски:

1) $3 = 4^{\square}$; 2) $\dfrac{1}{6} = 3^{\square}$.

4. Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 2$; 2) $\log_6 x = -2$; 3) $\log_6 x = \dfrac{1}{2}$.

Рекомендуется после обоснования каждого из свойств демонстрировать его применение в ходе рассмотрения примеров в конце с. 95 и выполнения соответствующих упражнений типа **290—292**.

Распределение материала параграфа по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 16	290—293	291 (3), 292 (3)	297—300; ДМ § 16 № 11
2		294—296	Зная, что $\log_3 a = 14$, найти: 1) $\log_2(8a)$; 2) $\log_2 a^3$	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться применять свойства логарифмов при выполнении упражнений типа **293**. В классах углублённого уровня дополнительно — **296**.

§ 17. Десятичные и натуральные логарифмы (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятий десятичного и натурального логарифмов; обучение применению формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

Введение десятичных и натуральных логарифмов школьники воспринимают прагматически, как «удобные» в вычислениях и записях логарифмы. Учитель может использовать при введении этих понятий сведения из истории их появления. Возможно рассмотрение примеров упрощения вычислений с помощью десятичных логарифмов при работе с числами, записанными в стандартном виде. Полезно сообщить, что в 11 классе при изучении основ дифференциального и интегрального исчисления учащиеся познакомятся с уникальными особенностями функции $y = e^x$.

Введение формулы перехода обосновывается потребностями практики. Следует подчеркнуть, что формула (1) выражает одно из основных свойств логарифмов. Доказывается её справедливость на основании свойства логарифма степени, которое в начале урока желательно повторить (одновременно и с другими свойствами), например, в ходе выполнения упражнений на вычисление значений выражений:

1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$; 2) $\log_{10} 5 - \log_{10} 50$;

3) $\log_{10} 10^8$; 4) $\log_{10} 0{,}01$.

При выполнении упражнения **305** (3) учащиеся найдут, что $\log_2 7 = \dfrac{1}{\log_7 2}$, после чего можно записать в общем виде частный случай формулы (1) так: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

В случае отсутствия у большинства учащихся микрокалькуляторов с клавишами lg и ln учитель всё равно должен в классе рассмотреть и задачу 1 параграфа, и упражнения **301—304**. При этом на своём калькуляторе учитель показывает процесс нахождения логарифмов (при выполнении упражнений **301—302**); обязывает учащихся при выполнении заданий **303—304** самостоятельно выражать данные логарифмы через десятичные или натуральные, после чего либо сообщает результаты вычислений, проведённые на своём микрокалькуляторе, либо предлагает проводить эти вычисления различным учащимся.

Материал параграфа на уроках может быть рассмотрен следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 17 до задачи 2, исторические сведения*	301—306	304 (3), 305 (3)	312—317, ДМ § 17 № 22—24
2	§ 17, задачи 2, 3*	307—311	309, 307 (5)	

В конце второго урока может быть проведена проверочная самостоятельная работа на 10—15 мин по материалу § 16—17:

1. Вычислить:

1) $\log_2 13 - \log_2 1\frac{5}{8}$ $[\log_{0,1}5 + \log_{0,1}2]$;

2) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$ $\left[\log_3 \frac{1}{6} - \log_3 40,5\right]$;

3) $\log_{15}\sqrt{225}$ $\left[\log_{13}\sqrt[5]{169}\right]$.

2. Зная, что lg 2 ≈ 0,301, а lg 5 ≈ 0,699, найти $\log_2 \sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,01. [Зная, что lg3 ≈ 0,477, а lg 5 ≈ 0,699, найти $\log_3 \sqrt{5}$ с точностью до 0,01.]

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться выполнять задания типа **305**, **307**. В классах углублённого уровня дополнительно — **312**, **313**.

§ 18. Логарифмическая функция, её свойства и график (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — обоснование свойств логарифмической функции и построение её графика; демонстрация применения свойств логарифмической функции при сравнении значений выражений и решении простейших логарифмических уравнений и неравенств.

Если на предыдущем уроке проводилась проверочная с а м о с т о я т е л ь н а я работа по свойствам логарифмов, то урок можно начать с анализа её результатов и закрепить навыки в использовании этих свойств в ходе выполнения, например, следующих з а д а н и й:

1. Вычислить $\dfrac{\log_9 45 + \log_9 1{,}8}{\log_9 \sqrt[3]{81}}$.

2. Решить уравнение $\log_3 x = 3\log_3 2 + 4\log_9 5$.

До рассмотрения материала параграфа (аналитического обоснования свойств логарифмической функции) стоит повторить свойства степени, основное логарифмическое тождество, определения возрастающей и убывающей функций с помощью, например, следующих у с т н ы х упражнений:

1. Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $0{,}3^x$; 2) $\log_{0,3} x$; 3) $\log_3 x^2$; 4) $\log_x 15$; 5) $\log_{|x|} 15$.

2. Найти y, если:

1) $\ln y = 1$; 2) $\lg y = 0$; 3) $\ln y = \dfrac{1}{2}$; 4) $\lg y = -2$.

3. Записать каждое из чисел 0; 1; –1; 2; $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$ в виде логарифма по основанию 5.

4. Решить уравнение:

1) $10^x = 1000$; 2) $e^x = \dfrac{1}{e}$; 3) $2^x = 3$; 4) $10^x = 7$.

5. Решить неравенство:

1) $6^x > 6^{-3}$; 2) $0{,}1^x \geq 0{,}1^{\sqrt{2}}$; 3) $10^{\lg x} > -15$;

4) $e^{\ln x} < e^{\ln 0,3}$; 5) $10^{\lg x} > 10^{\lg 2}$; 6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} < 2$.

6. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция $y = f(x)$ на некотором интервале, если для любых $x_1 > x_2$ из этого интервала:

1) $f(x_1) < f(x_2)$; 2) $f(x_1) > f(x_2)$.

Изучение материала желательно проводить в соответствии с изложением его в учебнике. Тот факт, что функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) взаимно обратны, иллюстрируется графически (с помощью рисунка 42).

После объяснения теоретического материала, в зависимости от возможностей учащихся, учитель вправе требовать от них выполнения упражнений **318—321** с опорой на сформулированные свойства логарифмической функции либо без привлечения графической иллюстрации, либо прибегая к ней (в таком случае используются эскизы графиков, аналогич-

ные построенным на рисунке 39). Практика показывает, что графические образы способствуют пониманию и запоминанию свойств функции.

Материал параграфа может быть распределён по урокам следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 18 (до теоремы)	318—323	323 (3, 4)	329—335; ДМ § 18 № 30, 31
2	§ 18 (теорема и весь последующий материал параграфа)	324—328	327 (5), решить неравенство: 1) $\log_{0,9} x > 1$; 2) $\log_7 x \leq 0$	

В классе базового уровня изучение свойств логарифмической функции можно провести не в полном соответствии с текстом параграфа. Объяснение материала можно начать с построения по точкам в разных системах координат графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Опираясь на определение логарифма и вид графиков, выявить области определения функций и множества их значений, убедиться в том, что графики проходят через точку (1; 0), сделать выводы о монотонности каждой из функций, определить промежутки знакопостоянства. Затем можно перенести наблюдения за свойствами логарифмических функций $y = \log_a x$ двух видов: при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, используя при этом рисунок 39. При таком подходе свойства 3 и 4 не доказываются, а после их выявления проговариваются, например, таким образом: «При $a > 1$ большему значению (положительного) x соответствует большее значение $\log_a x$». При этом учащимся в тетрадях желательно делать краткие записи формулировок свойства и теоремы. Важно сделать и краткие записи утверждений, сформулированных после свойства 3, так как на их основе будут в дальнейшем решаться логарифмические неравенства. На данном этапе обучения, оформление решений уравнений и неравенств, следует выполнять подробно, как это сделано в параграфе при решении задач 1—3.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь применять свойства логарифмической функции при выполнении упражнений типа **318—321**, **324—325**. В классах углублённого уровня дополнительно — **331—332**.

§ 19. Логарифмические уравнения (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения решать различные логарифмические уравнения и их системы с использованием свойств логарифмов и общих методов решения уравнений.

Общие подходы к решению уравнений (действия с членами и частями уравнения, замена обозначения, разложение на множители части уравнения, метод подстановки при решении систем) можно специально не повторять, они отрабатываются в ходе решения конкретных уравнений.

До рассмотрения решений задач параграфа желательно повторить понятие уравнения-следствия, определение логарифма и его свойства, а также теоремы предыдущего параграфа о равенстве логарифмов с одинаковыми основаниями. Этому повторению будут способствовать и следующие задания:

1. Решить уравнение:

1) $2^x = 32$; 2) $2^x = 0{,}5$; 3) $2^x = 7$;

4) $2^x = -2$; 5) $2^{\log_2 9} = x + 1$.

2. Вычислить:

1) $\log_2 48 - \log_2 3$; 2) $\log_6 4 + \log_6 \frac{1}{24}$; 3) $\log_5 \sqrt[4]{125}$.

3. Решить уравнение:

1) $\log_{\frac{2}{3}} x = -2$; 2) $\log_x 9 = 2$;

3) $\log_x 1 = 0$; 4) $\log_8 \log_3 x = 0$;

5) $\log_5 (2x - 1) = \log_5 7$; 6) $\log_3 x^2 = \log_3 4$;

7) $2 \log_3 x = \log_3 4$.

4. Выяснить, какое из данных уравнений является следствием другого:

1) уравнения из упражнения **336**;

2) $\log_3 x^2 = \log_3 4$ и $2 \log_3 x = \log_3 4$.

Материал параграфа по урокам может быть распределён следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 19, задачи 1—3	337—339	338 (3)	343—346; ДМ § 19 № 25—30
2	§ 19, задачи 4—7	340—342	341 (3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны справляться с решением логарифмических уравнений, аналогичных предложенным в упражнениях **337—340**. В классах углублённого уровня дополнительно — **343—345**.

§ 20. Логарифмические неравенства (2 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению логарифмических неравенств на основании свойств логарифмической функции.

Первый урок по теме можно начать с повторения свойств логарифмической функции и устного выполнения следующих упражнений:

1. Записать:

1) число 1; 0; –1; 3; $\frac{1}{3}$ в виде логарифма по основанию 2;

2) число –3; –1; 0; $\frac{1}{2}$; 1 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$.

2. Найти область определения функции:

1) $y = \lg(x + 1)$; 2) $y = \log_5(3 - x)$;

3) $y = \ln x^2$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)$.

3. С помощью графика функции $y = \log_2 x$ (рис. 9) решить неравенство:

1) $\log_2 x > 0$; 2) $\log_2 x \geq 1$; 3) $\log_2 x \leq 0$; 4) $\log_2 x < 1$.

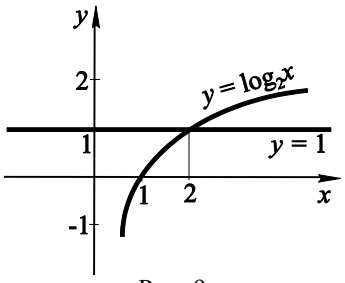


Рис. 9

4. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = \log_\pi x$; 2) $y = \lg x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$.

5. Среди соотношений $x < 3$, $x > 3$, $0 < x < 3$ выбрать удовлетворяющее неравенству:

1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_5 x < \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 3$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 3$.

Решение логарифмических неравенств можно оформлять двумя способами: либо с помощью перехода к неравенству, решение которого совмещается с найденной областью определения исходного неравенства (как это сделано в задаче 1 текста параграфа); либо с помощью перехода к равносильной системе (как это сделано в задачах 2 и 3*). Практика показывает, что меньше ошибок при решении неравенств учащиеся допускают, записывая вместо исходного неравенства равносильную ему систему. В ряде случаев после записи системы становится очевидным, какое из её неравенств можно исключить.

Например, неравенство $\log_2(x^2 - 5x + 7) > 0$ равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x^2 - 5x + 7 > 1, \end{cases}$ так как $0 = \log_2 1$ и $2 > 1$. Очевидно, что решение этой системы совпадает с решением неравенства $x^2 - 5x + 7 > 1$, т. е. неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ (его решения $x < 2$ и $x > 3$). Решать же первое неравенство системы, обусловленное областью определения исходного неравенства, в данном случае бесполезная трата времени.

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы (в классе)	дополнительные
1	§ 20 до задачи 2	354—356	355 (3)	358, 360—367; ДМ § 20 № 33, 34, 37, 38
2	§ 20, задачи 2 и 3*	357, 359	1) $\log_{2,6}(x^2 - 3x - 9) > 0$; 2) $\log_4(x - 2) + \log_4(x - 8) < 2$	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны справляться с решением неравенств типа **356**, **357**. В классах углублённого уровня дополнительно — **359**, **360**.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2 / 2 ч)

На этих уроках повторяются свойства логарифмов и логарифмической функции, их применение при вычислении числовых значений логарифмических выражений, сравнении значений логарифмической функции, решении логарифмических уравнений и неравенств. Выполняются упражнения к главе IV.

Сильным учащимся могут быть предложены задания из «Дидактических материалов»: задания для подготовки к экзамену в школе, а также задания для интересующихся математикой.

Глава V. Тригонометрические формулы

Раздел школьного курса математики, называемый тригонометрией, неоднократно претерпевал изменения как по содержанию, так и по времени его изучения. Так, в прошлом тригонометрия была даже самостоятельным учебным предметом; в школе рассматривалась и тригонометрическая форма комплексного числа. В недавнем прошлом тригонометрия была искусственно распределена между курсами алгебры и геометрии основной школы и курсом алгебры и начал анализа в старших классах. Сейчас возвращается прежний разумный порядок её изучения: в основной школе изучается тригонометрия треугольника, а в средней школе тригонометрия составляет целостный раздел курса алгебры и начал анализа (в данном учебнике она так и представлена).

В школьной тригонометрии можно условно выделить три основных вопроса: тригонометрическая форма записи действительного числа и её свойства; рассмотрение преобразований тригонометрических выражений (включая решение уравнений) по формулам как алгебраическим, так и собственно тригонометрическим и, наконец, тригонометрические функции (прямые и иногда обратные).

Первая проблема тесно связана с определением синуса, косинуса и тангенса угла или действительного числа. В основной школе они определялись для углов треугольника, измеряемых в градусах (градусом называется угол, равный $\frac{1}{180}$ доли развёрнутого угла). Исторически такое измерение углов было связано с шестидесятеричной системой исчисления и использовалось в астрономии.

Измерение углов в радианах тесно связано с движением точки по окружности. Если радиус окружности равен единице, а угол рассматривается как мера вращения, то за единицу измерения берётся центральный угол, длина дуги которого равна радиусу, т. е. единице. Термин «радиан» происходит от латинского слова *radius* — луч, спица колеса.

Так как между точками числовой прямой и точками единичной окружности существует однозначное соответствие, то каждому действительному числу можно сопоставить координаты точки единичной окружности, т. е. её косинус и синус. Например, числу π ставится в соответствие точка с координатами ($\cos\pi$; $\sin\pi$), т. е. точка (–1; 0).

Наименование «радиан» обычно опускают. Тем самым действительные числа, если это нужно, могут быть представлены в тригонометрической форме. Например, число 1 может быть представлено как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$ или $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, где α — любое действительное число. Это оказывается удобным при преобразованиях различных выражений, решении уравнений и записи некоторых формул геометрии и математического анализа.

Например, длина дуги окружности радиуса R в α радиан равна αR; один из замечательных пределов $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$, где x выражен в радианной мере.

Рассматривая определения синуса и косинуса действительного числа α, естественно рассмотреть самые простые уравнения, в которых требуется найти число α, если синус или косинус его известен, например уравнения $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ и т. п. Поскольку для обозначения неизвестного по традиции используется буква x, то эти уравнения записывают как обычно: $\sin x = 0$, $\cos x = 1$ и т. п. Решение этих уравнений легко найти с помощью единичной окружности. Так, решить уравнение $\sin x = 0$ означает установить, какие точки окружности имеют ординаты, равные нулю. На окружности имеются две такие точки: (1; 0) и (–1; 0), а также все точки, полученные из найденных поворотом на углы, кратные 2π, т. е. $x = 0 + 2\pi k$ и $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Объединяя эти равенства в одно, получаем $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Возможность выявления знаков синуса, косинуса и тангенса по четвертям является следствием симметрии точек единичной окружности относительно осей координат. Например, равенство $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ следует из симметрии точек, соответствующих числам α и –α относительно оси Ox.

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же числа или угла следует из тригонометрической формы записи действительного числа и определения синуса и косинуса как координаты точки единичной окружности. Так, основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ есть не что иное, как тригонометрическая форма записи уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$. Равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ является тождеством, так как любая точка (cos α; sin α) принадлежит единичной окружности. Равенство $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ является выражением в тригонометрической форме свойства взаимно обратных чисел $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$ и определения тангенса и котангенса. Равенство $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ также является тождеством, но только на множестве $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, так как знаменатель дроби не может быть равен нулю. К таким же тождествам на множестве принадлежат формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ и т. д.

Вспомним, что при изучении степеней чисел рассматривались и свойства $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$, $a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$. Аналогичные свойства справедливы и для синуса, косинуса и тангенса. Эти свойства называют формулами сложения. Практически они выражают зависимость между координатами суммы или разности двух чисел α и β через координаты чисел α и β.

Обычно формулы сложения доказываются для косинуса суммы или разности, все остальные формулы сложения получаются как следствия.

Существуют различные способы вывода формул сложения. В учебнике приводится способ, опирающийся на свойства поворота на угол $\alpha + \beta$ как последовательное выполнение поворотов на углы α и β и на свойство сохранения расстояния между точками при повороте.

Формулы сложения являются центральными формулами тригонометрии, так как все другие можно получить как следствия: формулы двойного и половинного углов, формулы приведения, преобразования суммы и разности в произведение. Например, формула тангенса двойного угла следует из формулы тангенса суммы, формула тангенса половинного угла следует из формулы тангенса двойного угла. Заметим, что через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ представляются $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ в виде выражений, не содержащих корней.

Предметные цели изучения главы:

— развитие представлений о способах описания явлений реального мира на математическом языке, в частности в терминах тригонометрии;

— формирование представлений о понятиях тригонометрии как математических моделях, позволяющих описывать процессы, изучаемые физикой, экономикой и другими науками;

— дальнейшее развитие понятия действительного числа посредством представления в тригонометрической форме;

— формирование умений определять и исследовать свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса действительного числа, используя однозначное соответствие между точками числовой прямой и точками окружности;

— обучение применению тригонометрических тождеств при вычислениях, преобразованиях тригонометрических выражений, решении простейших тригонометрических уравнений, используя при этом доказательные рассуждения.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умений самостоятельно определять цели деятельности по усвоению и применению знаний тригонометрии как математические модели реальной действительности;

— формирование навыков учебно-исследовательской деятельности, готовности к поиску решения практических задач;

— развитие умений ориентироваться в различных источниках информации.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

— развитие готовности учащихся к самостоятельной творческой деятельности;

— формирование навыков сотрудничества в процессе учебной деятельности.

В результате изучения главы V все учащиеся должны знать определения синуса, косинуса и тангенса и основные формулы, выражающие зависимость между ними, а также уметь выполнять упражнения типа **546—556** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно — **558—560**.

§ 21. Радианная мера угла (1 / 1 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с соответствием между точками прямой и окружности, формирование понятия радиана; развитие умений самостоятельно корректировать свою деятельность.

Для многих учащихся традиционно сложным является установление соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Методический приём «наматывания» нити, изображающей числовую прямую, на окружность единичного радиуса призван помочь учащимся осознать, что каждой точке прямой найдётся соответствующая точка на окружности. Таким образом, каждому действительному числу найдётся место на окружности, причём каждой точке окружности будет соответствовать бесконечное множество чисел. Более подробно об установлении соответствия между действительным числом и точками окружности учащиеся будут говорить на следующем уроке. Сейчас важно, чтобы учащиеся поняли, что новая мера угла как раз и помогает установить такое соответствие.

Знакомство с новой единицей измерения углов опирается на известную из курса геометрии теорему о том, что мера дуги окружности равна мере центрального угла, опирающегося на эту дугу. Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1 окружности, меру дуги PM_1 естественно принять за 1, так же как и меру центрального угла POM_1, который на неё опирается.

Важно обратить внимание учащихся на то, что в определении угла в 1 радиан речь идёт об окружности произвольного радиуса и длине дуги, равной этому радиусу. Целесообразно предложить школьникам самостоятельно пояснить, почему для определения угла в 1 радиан длина радиуса не имеет значения. Изображение двух или трёх концентрических окружностей, радиус одной из которых равен 1, предотвратит ошибки в формировании понятия радианной меры угла.

Не следует требовать заучивания формул перевода радиан в градусы и обратно. Желательно, чтобы учащиеся поняли их смысл и запомнили радианные меры часто встречающихся углов. На самом деле для практического использования при переводе углов из одной меры в другую достаточно запомнить соотношение π рад = 180° и при необходимости составлять пропорции, записывая их так:

1) π рад – 180°,

x рад – 30°,

откуда $x = \frac{\pi \cdot 30°}{180°} = \frac{\pi}{6}$;

2) π рад – 180°,

$\frac{\pi}{3}$ рад – x°,

откуда $x° = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$.

Поэтому решение задач 1 и 2 текста параграфа можно записать ещё и в таком виде. Решение упражнений **407** и **408** учащиеся могут записывать любым удобным способом.

Решение задач 3 и 4, в которых демонстрируется удобство применения радианной меры угла для нахождения длины дуги окружности и площади кругового сектора, рекомендуется предложить учащимся рассмотреть по ходу самостоятельной работы с учебником. Применение результатов решения этих задач можно продемонстрировать, например, при заполнении первых двух столбцов таблицы в упражнении **415**.

Если класс имеет недостаточную математическую подготовку, после изучения задач 3 и 4 с помощью учителя можно решить только задачу **410**.

Упражнение **408** (4—6) способствует преодолению ложного представления о том, что мера угла, выраженная в радианах, есть число, кратное числу π или $\frac{\pi}{2}$, поэтому желательно выполнить его на уроке. С этой же целью полезно выполнить такое, например, упражнение:

Сравнить углы α и β, выраженные в радианах, если:

1) $\alpha = 2\pi$, $\beta = 6{,}3$;

2) $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, $\beta = 4{,}75$.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение радиана и уметь переводить радианную меру угла в градусы и обратно при выполнении таких упражнений, как **407**, **408**. В классах углублённого уровня дополнительно — **412**, **413**.

§ 22. Поворот точки вокруг начала координат (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — формирование понятия поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α и обучение нахождению положения точки окружности, соответствующей данному действительному числу; формирование навыков применения различных методов познания в ходе решения проблем.

При изучении материала параграфа учащиеся продолжают знакомиться с окружностью как местом расположения точек, соответствующих действительным числам.

Но теперь эта окружность помещается на координатную плоскость так, что центр окружности совпадает с началом координат. Так как радиус окружности равен 1, её называют единичной. Важно, чтобы учащиеся не воспринимали единичную окружность как нечто новое: это та же окружность, что рассматривалась на прошлом уроке, и на ней мы пытались расположить действительные числа. Координатная плоскость поможет найти место каждого действительного числа на окружности. Приём, выбранный для определения такого места, — поворот точки вокруг начала координат — вполне согласуется с наглядными представлениями о «наматывании» числовой оси на окружность.

Формирование понятия поворота точки единичной окружности должно идти без торопливости, строго в соответствии с текстом параграфа и активным использованием рисунков 47—55 учебника, которые можно продублировать на технических аудио-визуальных средствах обучения.

Прежде чем вводить понятие поворота точки вокруг начала координат, целесообразно повторить материал предыдущего параграфа, используя следующие у п р а ж н е н и я:

1. Найти радианную меру угла 30°; 45°; 60°; 90°; 135°.

2. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

1) Построить угол с вершиной в начале координат, если одна из его сторон совпадает с положительным направлением оси Ox, а угол имеет радианную меру π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$.

2) Установить, где приблизительно находится точка B дуги AB, если $A(1; 0)$, а длина дуги равна 1; 2; 3; 4; 5.

3) Найти радианную меру угла, опирающегося на каждую из дуг, перечисленных в задании 2.

Естественно, возникает вопрос: что это за угол, радианная мера которого равна 4; 5? Вводится понятие поворота точки вокруг начала координат. Здесь необходимо обратить внимание учащихся на то, что, говоря об угле, мера которого больше π рад, мы не вступаем в противоречие с определением угла, известным из курса геометрии: имеется в виду, что угол поворота не геометрическая фигура, а мера угла.

Примеры 1—4 поворотов на с. 122 учебника можно дополнить следующими:

5) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол 3,5 радиана получается точка, которая расположена в III четверти: $\pi < 3{,}5 < \frac{3}{2}\pi$.

6) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол 7 радиан точка совершит полный оборот, т. е. пройдёт путь $2\pi \approx 6{,}28$ радиана, и ещё продвинется по

дуге, длина которой меньше чем $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ радиана, таким образом, она окажется в I четверти. В этой же четверти будет расположена точка, которая прошла путь 13,1 радиана, так как она совершила два полных оборота и путь, меньший четверти оборота (меньше $\frac{\pi}{2}$).

Подобные примеры полезны для усвоения последующего материала, связанного с определением и изучением свойств тригонометрических функций.

Упражнение **416** (1—3) может быть выполнено устно. А для выполнения задания **416** (4—6) рекомендуется сделать рисунок, что позволит использовать знания из курса планиметрии и затем применить результат при выполнении упражнения **422**.

Запись упражнений **417—422** на доске должна сопровождаться устным пояснением, в какую сторону и на какую длину был совершён поворот. В тетрадях достаточно делать рисунки, аналогичные рисункам 47—55 учебника. Например, упражнение **420** (2) может быть записано так:

$\alpha = -\frac{7}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - 3\pi$, M (0; 1) (рис. 10).

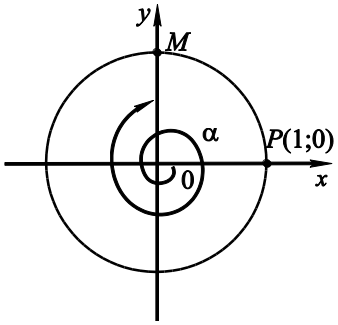


Рис. 10

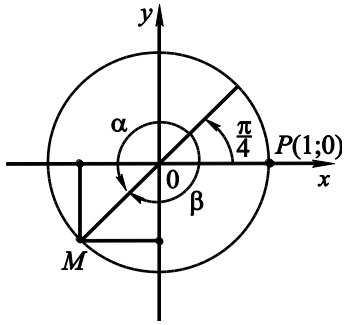


Рис. 11

422. 2) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi = 1\frac{1}{4}\pi$; $\beta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (рис. 11).

На втором уроке можно провести самостоятельную работу на 10 мин:

1. Привести примеры трёх чисел (углов поворота) α,

если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, где $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ $\left[\alpha_0 = -\frac{\pi}{3}\right]$.

2. Точка M единичной окружности получена в результате поворота точки $P(1; 0)$ на угол α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\pi - \alpha$; 2) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 3) $\alpha - \pi$?

[1) $\pi + \alpha$; 2) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 3) $\alpha - \frac{\pi}{2}$?]

3. Точка M единичной окружности получена в результате поворота точки $P(1; 0)$ на угол α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. В какой четверти расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\pi - \alpha$; 2) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 3) $\alpha - \pi$?

[1) $\pi + \alpha$; 2) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 3) $\alpha - \frac{\pi}{2}$?]

Пояснений к выполнению заданий требовать не следует, достаточно кратких ответов на каждый вопрос.

Материал параграфа целесообразно изучать так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 22	417—419	418 (1, 2)	427, 428
2		416, 420, 422—426 (5—8)	423 (2, 3)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **417**, **419**, **420**, **423**, **424**. В классах углублённого уровня дополнительно — **427**, **428**.

§ 23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла (числа); обучение их нахождению для чисел вида $\frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; ознакомление с применением определений синуса и косинуса при решении простейших тригонометрических уравнений; развитие умений ясно и точно излагать свою точку зрения.

Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса вводятся для произвольного угла, однако необходимо обратить внимание учащихся на то, что произвольный угол выражается действительным числом радиан. Поэтому можно говорить об определениях синуса, косинуса, тангенса, котангенса числа, а в дальнейшем и о тригонометрических функциях числового аргумента. Полезно по ходу уроков пользоваться и тем и другим термином, подчёркивая, что они равноправны.

С помощью рисунка 56 учебника при введении определений синуса и косинуса необходимо предостеречь учащихся от сопоставления синуса и косинуса с длинами отрезков, выделенных цветом на осях координат. Чтобы предупредить подобные ошибки, рекомендуется рассмотреть рисунки (рис. 12, 13), на которых значения абсциссы и ординаты точек отрицательны.

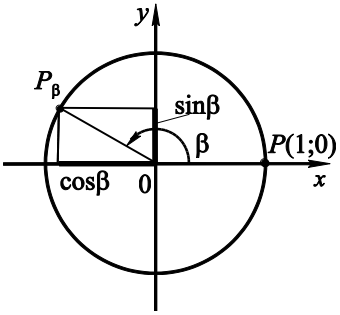


Рис. 12

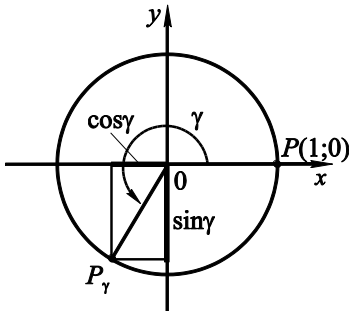


Рис. 13

С помощью единичной окружности находятся значения тригонометрических функций углов, кратных $\frac{\pi}{2}$, и по значениям синуса и косинуса, равным ±1 и 0, отыскиваются соответствующие значения аргумента.

Для формирования понятий синуса и косинуса числа полезными являются такие упражнения, как **429** (5—7).

Упражнения **430**—**433** рекомендуется выполнять, используя единичную окружность, чтобы учащиеся вновь и вновь находили положение точки и определяли её координаты.

Прежде чем решать уравнения (упражнение **435**), можно вернуться к заданию **429** (1—4) и выполнить его на готовом рисунке единичной окружности.

На данном этапе обучения решение уравнений рассматривается только для закрепления определений синуса и косинуса числа. В дальнейшем умение решать уравнения $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$, $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ позволит значительно расширить систему упражнений при изучении формул тригонометрии.

Прежде чем вводить определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, полезно повторить известный из курса планиметрии материал с помощью у п р а ж н е н и й:

1. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла:

$$30°;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{4};\ 120°.$$

2. Дать определение синуса, косинуса, тангенса, острого угла прямоугольного треугольника (перед выполнением упражнения **434** показать, как согласуется это определение с тем, что сформулировано для любого угла).

Кроме того, желательно у с т н о ответить на вопросы:

1. Назвать хотя бы один угол, на который нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку:

$$A(-1;\ 0),\ B(1;\ 0),\ C(0;\ -1),\ D(0;\ 1),\ E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Определить четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

$$2;\ 3{,}7;\ 5;\ -2;\ -3{,}7;\ -5.$$

3. Сравнить числа:

$$\frac{\pi}{2}\ \text{и}\ 1{,}9;\ 2\pi\ \text{и}\ 4;\ -\frac{3}{2}\pi\ \text{и}\ -4.$$

4. Верно ли высказывание: «Координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол 6 радиан, имеют разные знаки»?

Изучение материала параграфа можно распределить следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Определения синуса и косинуса, задачи 1—5	429—432, 437	429 (2, 3), 430 (3, 4)	437—439
2	Определение тангенса, задачи 6—7	433—436; ДМ § 23 № 25—30	435 (3, 4)	

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а все учащиеся должны знать определения синуса, косинуса, тангенса и уметь выполнять такие упражнения, как **429**, **431**, **434**, **436**. В классах углублённого уровня дополнительно — **437**, **439**.

§ 24. Знаки синуса, косинуса и тангенса (1 / 1 ч)

Цель изучения параграфа — обучение нахождению знаков значений синуса, косинуса, тангенса числа; развитие умений самостоятельно ставить цель и контролировать свою деятельность.

Приступая к изучению материала параграфа, стоит убедиться в том, что учащиеся хорошо понимают, как располагаются на единичной окружности точки, соответствующие различным действительным числам, и знают определения синуса, косинуса, тангенса угла. С этой целью можно провести самостоятельную работу, которую желательно проверить в классе, после чего приступать к изучению нового материала.

1. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi$; 2) $\operatorname{tg}\pi + \sin\frac{3\pi}{2}$.

[1) $\sin\pi + \cos\frac{\pi}{2}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{tg}2\pi$.]

2. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α, если:

1) $\alpha = \frac{3\pi}{7}$; 2) $\alpha = \frac{5}{4}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{14\pi}{3}$; 4) $\alpha = 367°$?

[1) $\alpha = \frac{2\pi}{5}$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{8}$; 3) $\alpha = -\frac{10\pi}{3}$; 4) $\alpha = 380°$?]

3. Какие знаки имеют абсцисса и ордината точки, полученной при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{7\pi}{3}$ $\left[\frac{3\pi}{5}\right]$?

В качестве подготовки к изучению нового материала можно использовать и упражнения **442**, **443**.

Наибольшие трудности у учащихся вызывает определение знака тригонометрической функции, если угол выражен рациональным числом, как в упражнении **448**.

448. 2) Так как $a = 3$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ ($\pi \approx 3{,}14$), то числу a соответствует точка во II четверти, поэтому $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$.

Перед решением упражнения **449** полезно выполнить задание **443**, тогда упражнение **449** можно записать так:

449. 3) $\cos(\alpha - \pi) < 0$, так как точки, соответствующие числам $\alpha - \pi$, расположены в III четверти.

Упражнения на уроке могут быть распределены так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 24	444—448, 451, 453	444 (3, 6), 445 (3, 6), 446 (3, 6)	454, 455, 452; ДМ § 24 № 22—26

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь определять знаки синуса, косинуса, тангенса числа при выполнении таких упражнений, как **444** (1—3), **445** (1—3), **446** (1—3). В классах углублённого уровня дополнительно — **453**, **454**.

§ 25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — вывод формул зависимости между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла (числа); обучение применению этих формул для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса числа по заданному значению одного из них; развитие умений взаимодействовать в процессе изучения нового материала.

Центральное место в теме занимает основное тригонометрическое тождество. Его использование значительно упрощает преобразование тригонометрических выражений, играет важную роль в решении уравнений.

На уроках, посвящённых изучению данного параграфа, основное внимание уделяется применению тождества для вычисления значений синуса, косинуса и тангенса одного и того же числа. Осознанному восприятию тождества способствует упражнение **457**, которое желательно выполнить сразу после доказательства тождества. Упражнение легко выполняется устно, однако полезно зафиксировать в тетрадях решение одного из заданий, например, в такой форме:

457. 3) Так как $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$, то $\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^2 = \frac{3}{25} + \frac{23}{25} = \frac{26}{25} \neq 1$, т. е. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \neq 1$.

Ответ. Не могут.

Затем полезно выполнить несколько упражнений на узнавание основного тригонометрического тождества, например:

1. Найти значение выражения:

1) $\sin^2 m + \cos^2 m$; 2) $\cos^2 x + \sin^2 x$;

3) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha$; 4) $\sin^2(x + y) + \cos^2(x + y)$.

2. Выразить число 1 через угол α, если:

1) $\alpha = 3x$; 2) $\alpha = \frac{x}{2}$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Закреплению умений решать задачи, подобные задачам 1 и 2 текста параграфа, способствуют упражнения **458—460**. Выполнение последнего полезно сопровождать изображением единичной окружности, что облегчит рассуждения и будет служить формированию потребности применять окружность для решения самых разных задач.

460. 3) Если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ либо $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ (рис. 14).

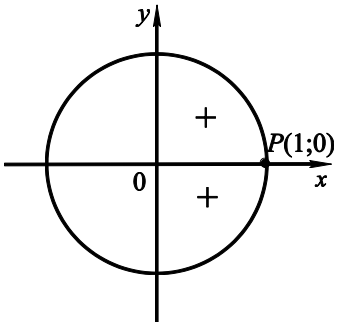


Рис. 14

$\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$,

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$,

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, если $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Равенства, связывающие tg α и ctg α, tg α и cos α, важны для учащихся: это для них первые тригонометрические равенства, справедливые не для всех действительных чисел. Термин «тождество» пока не употребляется: на данном этапе формулы применяются только для вычислений.

Вывод формул tg α ctg α = 1, tg α = $\frac{1}{\text{ctg}\ \alpha}$, ctg α = $\frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$ очень прост. Главную трудность составляет выяснение множества, на котором эти равенства выполняются. Поэтому вновь особую роль играет рисунок: отметив точки, в которых не существует tg α, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, затем ctg α, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 15), учащиеся убеждаются в том, что равенство tg α ctg α = 1 не может выполняться для тех значений числа α, которые кратны $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

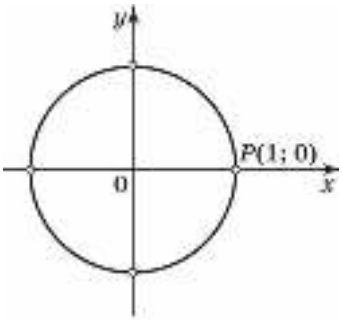


Рис. 15

Подобные рассуждения не стоит игнорировать, так как они являются пропедевтикой к выбору ответов при решении уравнений.

В качестве у п р а ж н е н и й для актуализации знаний можно предложить, например, такие:

1. Найти абсциссы точек, принадлежащих окружности с центром в начале координат и радиусом 1, если эти точки имеют ординату 0,8.

2. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 1$. Принадлежат ли ей точки

$$A\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right),\ B(0{,}3;\ 0{,}7),\ C\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)?$$

3. Определить знаки значений

$$\sin 190°,\ \cos 275°,\ \text{tg}\ \frac{5}{6}\pi,\ \sin\ \frac{7}{6}\pi,\ \cos\ \frac{1}{3},\ \text{tg}\ 6.$$

4. Сравнить значения выражений:

sin 3,8 и sin 0,25; cos 2,1 и cos 0,75.

Материал параграфа по урокам можно распределить по-разному. Один вариант: на п е р в о м уроке изучить весь теоретический материал и

начать выполнять упражнения, на в т о р о м уроке решать упражнения к параграфу. Другой вариант приведён в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Основное тригонометрическое тождество, задачи 1 и 2	456—458, 459 (1, 2), 460	459 (5, 6)	464, 463; ДМ § 25 № 15—18, 8, 9
2	Равенства (4—7), задачи 3—6	459 (3, 4), 461—462	459 (7, 8)	

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а все учащиеся должны знать основное тригонометрическое тождество и равенство $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$ и уметь применять их при выполнении таких упражнений, как **459**. В классах углублённого уровня — **462**.

§ 26. Тригонометрические тождества (2 / 3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — ознакомление с понятием тождества как равенства, справедливого для всех допустимых значений букв; обучение доказательству тождеств с использованием изученных формул; формирование умений выбирать успешные стратегии в различных ситуациях.

Впервые в 10 классе с понятием тождества как равенства, справедливого не для любого действительного числа, учащиеся встретились при изучении основного логарифмического тождества. Однако задач на доказательство тождеств перед школьниками не ставилось, т. е. им не приходилось доказывать справедливость равенства, выполняя преобразования с использованием формул, которые верны лишь при допустимых значениях букв.

Уже первая задача параграфа поставлена так, чтобы можно было на её примере познакомить учащихся с рассуждениями, которые используются для доказательства тождеств, если выполняемые преобразования верны при определённых значениях α.

Несмотря на то что в учебнике сразу же оговаривается, что при доказательстве тождеств допустимые значения букв не устанавливают, если этого не требуется в условии задачи, полезно при выполнении одного-двух упражнений на каждом уроке устно обсуждать, при каких значениях α верны выполненные преобразования (например, при решении упражнений **465** (3, 4), **469**, **470**). Достаточно, чтобы учащиеся могли привести

примеры выражений, которые не могут обращаться в нуль. Рекомендуется анализировать текст задания и намечать возможные пути решения, выбирая оптимальный. Полезно выполнять преобразования, если это возможно, различными способами, используя разные формулы.

Различные способы доказательства тождеств, которые приводятся в учебнике, полезно показать на одной и той же задаче. Например, задачу 4 можно предложить учащимся решить ещё и нахождением разности левой и правой частей, и приведением левой части к виду правой.

Различными способами целесообразно провести доказательство, например, таких тождеств: **465** (3, 5), **470** (6, 7). Упражнения **465** (5) и **470** (6) можно выполнить и записать, например, так:

465. 5) I с п о с о б. Докажем, что разность левой и правой частей равна 0:

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}-(1-\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=0.$$

I I с п о с о б. Преобразуем левую часть так, чтобы она была равна правой:

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

I I I с п о с о б. Преобразуем отдельно левую и правую части:

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha,\ 1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha,$$

470. 6) I с п о с о б. Докажем, что разность левой и правой частей равна 0:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=0.$$

I I с п о с о б. Преобразуем левую часть, для чего умножим числитель и знаменатель дроби левой части тождества на sin α. (sin α ≠ 0) $1-\cos\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, — допустимые значения (рис. 16).

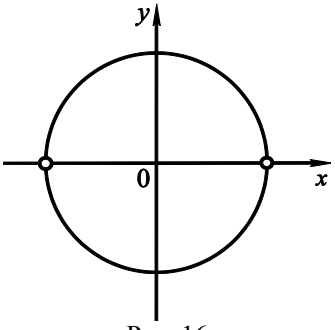


Рис. 16

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Рекомендуется систематически решать уравнения, которые обычно приводятся в конце системы упражнений к параграфу. Они не сложны, но позволяют активно использовать изучаемые формулы, и их решение является пропедевтикой к изучению следующей главы.

На уроках полезно устно выполнять упражнения такого, например, типа:

1. Упростить выражение:

1) $(\sin x + \cos x)^2$; 2) $(1 - \cos^2 x) - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$; 4) $\sin x \operatorname{ctg} x$.

2. Могут ли числа α и β быть одновременно синусом и косинусом одного и того же числа:

1) $\alpha = -1$, $\beta = 0{,}1$; 2) $\alpha = 1$, $\beta = 1$;

3) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$; 4) $\alpha = -0{,}8$, $\beta = -0{,}6$?

На одном из уроков желательно провести небольшую самостоятельную работу, проверяющую усвоение материала первых параграфов главы. Можно использовать такой, например, тест с выбором ответа:

1. Дано: $a = \cos 270°$. Найти значение a.

1) $a = 0$; 2) $a = 1$; 3) $a = -1$; 4) $a = \frac{1}{2}$.

2. Найти значение выражения $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти четверть, в которой расположен угол α, если $\sin\alpha > 0$, а $\cos\alpha < 0$.

1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

4. Среди заданных чисел найти положительное.

1) $\sin 1$; 2) $\cos(-3)$; 3) $\operatorname{tg} 2$; 4) $\operatorname{ctg} 5$.

5. Среди пар чисел найти такую, в которой одно из чисел — значение $\sin\alpha$, а другое — значение $\cos\alpha$.

1) 1 и –1; 2) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1 и 1,1; 4) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

6. Среди заданных чисел *a* найти такое, которое равно sin α, если $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ и $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1) $a = -\frac{\sqrt{7}}{3}$; 2) $a = \frac{\sqrt{7}}{3}$; 3) $a = \frac{7}{9}$; 4) $a = -\frac{7}{9}$.

7. Упростить выражение: $(\sin^2\alpha - 1) : \cos^2\alpha$.

1) $\sin^2\alpha$; 2) 1; 3) –1; 4) $\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

Материал параграфа по урокам можно распределить следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Задачи 1 и 2	465, 466, 467 (1, 2), 469	465 (4, 6), 466 (1, 2)	471—474; ДМ § 26 № 9—12
2	Задачи 3—5	467 (3, 4), 468, 470 (1—3)	468	
3	Материал всего параграфа	470 (4—8)	Тест	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение тождества и уметь применять способы доказательства тождеств при выполнении таких упражнений, как **465**, **466**. В классах углублённого уровня дополнительно — **470**, **474**.

§ 27. Синус, косинус и тангенс углов α и –α (1 / 1 ч)

Цель изучения параграфа — обучение сведению вычислений значений синуса, косинуса, тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов; развитие умений самостоятельно контролировать и корректировать свою деятельность.

Для вывода формул (1)—(3), которые в дальнейшем используются при исследовании функций на чётность и нечётность, достаточно воспользоваться рисунком 64 учебника.

Обучение применению формул при вычислениях и преобразованиях должно стать основным на уроке. Однако не стоит пренебрегать возможностью использовать формулы при решении уравнений. Решение простейших уравнений желательно сопровождать иллюстрацией решения на единичной окружности до тех пор, пока учащиеся не перестанут допускать ошибки в записи ответа. Решение упражнения **480** (3) можно записать, например, так:

480. 3) $\cos(-2x) = 1$, $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 17).

О т в е т. $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

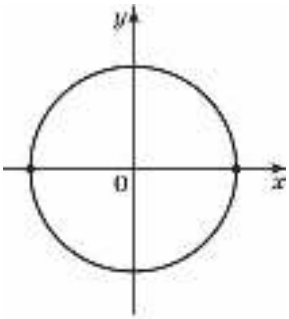


Рис. 17

Распределение материала на уроке:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 27	475, 476, 478, 480 (1—4)	475 (5), 476 (1, 2)	477, 479, 480 (5, 6)

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а все учащиеся должны знать формулы (1)—(3) и уметь их применять при выполнении упражнений типа **475**, **476** (1, 2). В классах углублённого уровня дополнительно — **477**.

§ 28. Формулы сложения (2 / 3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — обучение применению формул сложения при вычислениях и выполнении преобразований тригонометрических выражений; развитие навыков успешной исследовательской деятельности.

Теорема, которая доказывается в параграфе, как уже указывалось выше, является центральной теоремой главы. Все остальные формулы представляют собой следствия этой теоремы. Отсюда вытекает значи-

мость материала параграфа для последующего изучения всего курса тригонометрии.

Доказательство теоремы опирается на формулу расстояния между двумя точками. Вспомнить формулу и подготовить учащихся к доказательству теоремы можно с помощью решения такой з а д а ч и:

Найти расстояние между точками A и B единичной окружности, соответствующими числам $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

► $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

$A\left(\cos\frac{\pi}{3};\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right);\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (рис. 18).

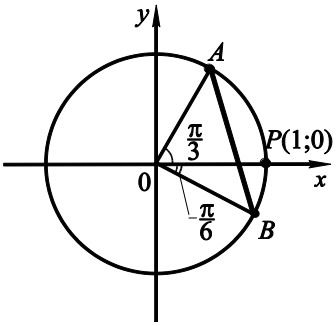


Рис. 18

$$AB^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,$$

$AB = \sqrt{2}$. ◁

Полезно также предварительно повторить основное тригонометрическое тождество при различной записи угла, например найти значение выражения:

1) $\sin^2\beta + \cos^2\beta$; 2) $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$.

Умение доказывать теорему не является обязательным для всех учащихся, но разобрать доказательство со всем классом желательно. Если времени недостаточно, можно, используя рисунок 65, который постепенно воспроизводится посредством технических и аудио-визуальных средств обучения, пояснить принцип доказательства, записывая в тетради его план:

1. Построить точки: M_α поворотом точки M_0 на угол α; $M_{-\beta}$ поворотом точки M_0 на угол $(-\beta)$; $M_{\alpha+\beta}$ поворотом точки M_0 на угол $(\alpha + \beta)$. Записать координаты этих точек.

2. Доказать равенство треугольников $M_{-\beta}OM_\alpha$ и $M_0OM_{\alpha+\beta}$.

3. Записать формулы расстояния между точками:

1) $M_{-\beta}$ и M_{α}; 2) M_0 и $M_{\alpha+\beta}$.

4. Выполнить преобразование и показать, что

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Все остальные формулы, которые вытекают из формулы (1), доказываются либо заменой β на –β (как при выводе формул (2), (6)), либо использованием значения $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2}$ (задача 3). В задачах 1, 2, 4, 5 приводятся примеры применения формул (1)—(6), а в задаче 6* выводится формула тангенса суммы (необходимо выяснить, понимают ли учащиеся, при каких значениях α и β данное равенство верно).

На последнем из уроков, отведённых на изучение материала параграфа, можно провести самостоятельную работу (20 мин) на проверку усвоения материала этого и предыдущих параграфов, например, такого содержания:

1. Какой знак имеет sin α, если $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\alpha = 1140°$?

[Какой знак имеет cos α, если $\alpha = \frac{7}{8}\pi$, $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$, $\alpha = 920°$?]

2. Вычислить:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) sin 67°cos 23° + cos 67° sin 23°.

[1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}(-\pi)$;

2) cos 52° cos 38° – sin 52° sin 38°.]

3. Доказать тождество

$$\left(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$$

$$\left[\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1\right].$$

---

4. Решить уравнение

$$\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\cos 2x = -1$$

$$[\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x = -1].$$

Распределение материала параграфа по урокам может быть таким:

Один вариант: на первом уроке прочитать лекцию по всему материалу параграфа и показать примеры применения формул из упражнений **494** (1) и **491** (3, 4); второй урок провести как практикум. В этом

случае останется время на решение и несколько более сложных упражнений (**488**—**497**, **563**, **564**).

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать формулы (1), (2), (5), (6) и уметь их применять при выполнении упражнений типа **481**, **482**, **485**. В классах углублённого уровня дополнительно — **494**, **496**, **497**.

§ 29. Синус, косинус и тангенс двойного угла (1 / 2 ч)
§ 30*. Синус, косинус и тангенс половинного угла (1 / 2 ч)

Цель изучения параграфов — ознакомление учащихся со следствиями теоремы сложения; обучение применению формул двойного угла при преобразованиях тригонометрических выражений, в частности при выводе формул половинного угла; развитие умений продуктивно общаться в процессе совместной деятельности.

Материал параграфов очень важен для продолжения изучения тригонометрии: все формулы, которые выводятся по ходу его изучения, часто применяются при решении тригонометрических уравнений, а в дальнейшем и при исследовании функций.

Вывод формул двойного угла (§ 29) не составит труда, поэтому можно предложить учащимся либо вывести эти формулы самостоятельно, либо прочитать по учебнику. Желательно показать на доске вывод формул (5) и (6) из § 30*, так как приём почленного сложения равенств не часто используется в курсе алгебры. Формулу (7) из § 30* легко вывести с помощью учебника самим ученикам. Применение формул (8)—(10) позволяет упростить решение некоторых уравнений, однако со всеми учащимися класса их можно не изучать, оставив для самостоятельной работы учащимся, интересующимся математикой.

Упражнения обязательного уровня к обоим параграфам в основном вычислительного характера, на прямое применение формул. Упражнения **503**—**505**, **515**, **516** очень полезны, так как по ходу их решения повторяется предыдущий материал.

Желательно обратить внимание учащихся на простое задание **506** (1, 2), которое полезно предложить выполнить самостоятельно, а затем обсудить полученные результаты.

506. 1) I способ. $2\cos 40° \cos 50° = 2\cos (90° - 50°) \cos 50° = 2\sin 50° \cos 50° = \sin 100°$.

II способ. $2\cos 40° \cos 50° = 2\cos 40° \cos (90° - 40°) = 2\cos 40° \sin 40° = \sin 80°$.

У кого же верный ответ? Для обоснования того, что $\sin 100° = \sin 80°$, можно воспользоваться иллюстрацией и напомнить, как построить точки, соответствующие углам $\alpha = 80°$, $\beta = 100°$ на единичной окружности, показать общую ординату точек M_α и M_β (рис. 19).

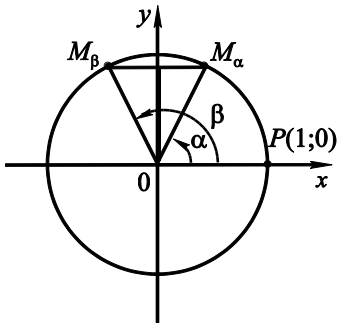


Рис. 19

Упражнение **508** показывает, как понизить степень выражения, что в дальнейшем поможет при решении уравнений.

Выполняя упражнение **510** (5), можно в качестве дополнительного вопроса предложить найти допустимые значения α.

Из упражнений к § 30* желательно рассмотреть упражнение **518**, так как при его выполнении применяются все остальные формулы, изучаемые в обоих параграфах.

На заключительном уроке в классе углублённого уровня выполнить упражнения **510** (4) и **519** (4) (по вариантам) и обязательно рассмотреть возможные пути их решений.

Выполняя упражнение **510**(4), учащиеся обычно пользуются формулами двойного угла.

510. 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot \mathrm{ctg}\alpha =$

$$=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot \mathrm{ctg}\alpha =$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}\cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1.$$

К выполнению упражнения **519** (4) опыт подсказывает подойти иначе, используя формулы половинного угла.

519. 4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha.$

Формулы синуса и косинуса половинного угла полезно использовать и в виде формул (3) и (4), и в виде формул (5) и (6).

На всех уроках необходимо решать уравнения. Постепенно усложняются тригонометрические преобразования, которые в результате приводят к уравнениям вида $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$, $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Но теперь начинает работать метод решения уравнений разложением на множители, и в ответе получается не два корня, а две серии корней. Полезно на одном-двух уравнениях (в классе и дома) проиллюстрировать расположение корней на единичной окружности, что в дальнейшем при решении уравнений поможет объединению серий корней в одну, когда это возможно.

В качестве у с т н ы х упражнений на уроках можно использовать следующие:

1. Закончить запись формулы двойного угла:

1) $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha$ _____;

2) $\sin 5\alpha = 2 \sin \frac{5}{2}\alpha$ _____.

2. Выразить $\cos^2 3\alpha$ через $\cos 6\alpha$.

3. Решить уравнение:

1) $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1$; 2) $2\sin 2{,}5x \cos 2{,}5x = 0$.

Материал параграфов по урокам можно распределить следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Вывод формул $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, задачи 1—3	498—504, 508	502, 508 (1, 2)	511, 512, 521—523; ДМ § 29 № 22—25; § 30 № 18—20
2	Вывод формулы $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, задачи 4, 5. Вывод формул (5)—(7) § 30*, задачи 1—3	505—506, 512—514, 515 (1), 516 (2)	507, 517 (1, 2)	
3	Задача 4 § 30*	509, 510 (4, 5), 512, 518 (1, 4)	515 (3), 518 (6), 519 (1)	

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф о в все учащиеся должны знать формулы двойного угла и уметь использовать их при выполнении упражнений **500**, **503—505**; пользуясь справочным материалом, выполнять упражнения **514**, **517**. В классах углублённого уровня дополнительно — **511**, **512**, **520**.

§ 31. Формулы приведения (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению правила, позволяющего заменить синус, косинус, тангенс, котангенс любого числа соответственно синусом, косинусом, тангенсом или котангенсом числа α, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Изучение материала параграфа рекомендуется начать с исторической справки об использовании таблиц тригонометрических функций для вычислений на практике и повторения поворота точки вокруг начала координат, например, с помощью следующих упражнений:

1. Синусы каких углов равны синусу угла 30° (рис. 20)?

2. Косинусы каких углов равны косинусу угла 120° (рис. 21)?

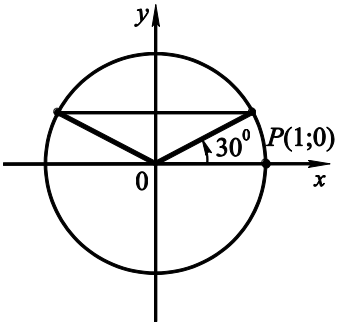


Рис. 20

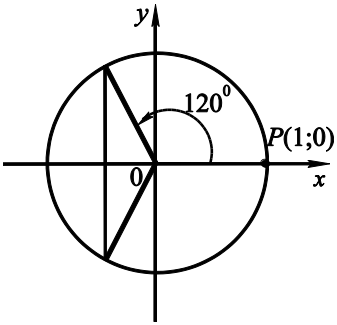


Рис. 21

3. На какой угол повернули точку *P* (1; 0), чтобы получить точку *M* (рис. 22)? Сравнить значения синуса и косинуса чисел, соответствующих точкам *A* и *M*.

4. Сравнить синусы и косинусы углов α и β (рис. 23).

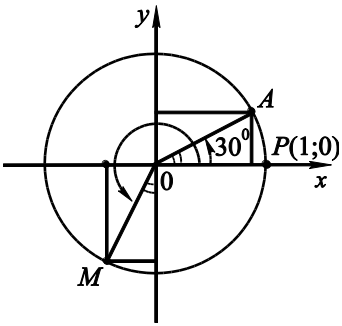


Рис. 22

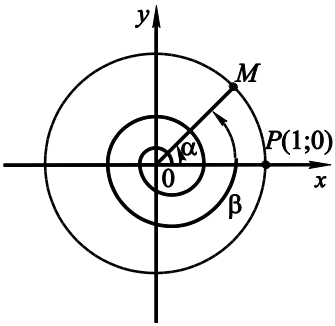


Рис. 23

Затем рассмотреть решение задачи 1, которое мотивирует необходимость появления формул, упрощающих нахождение синуса и косинуса углов, заданных «большими числами». Действительно, равенства (1) и (2), которые появились в ходе решения задачи 1, подводят к мысли о существовании и других равенств, упрощающих вычисления, например равенства (3) из § 28. Вывод формул (5) и (6) рекомендуется предложить учащимся сделать самостоятельно, например, по вариантам:

I вариант

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; 2) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$;

3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; 4) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

II вариант

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$; 2) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$; 4) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$.

На доске в это время можно доказать тождества:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Все формулы (3), (5), (6) должны быть на доске или плакате. Обратите внимание учащихся на то, что все равенства справедливы при любых значениях α. Выполнить часть упражнения **524**, затем обратиться к учебнику: рассмотреть задачу 2 и выполнить упражнения, например, **525** (1, 2, 5, 6), **526** (3, 5).

Теперь можно поставить проблему нахождения соответствующих формул приведения для tg α и ctg α, разобрать задачи 3 и 4 (с учителем или по учебнику самостоятельно) и поучиться применять формулы при выполнении упражнений **524** (6, 8), **525** (3, 7), **526** (7, 8).

Добавив полученные формулы к тем, что уже есть на доске ((3), (5), (6)), попытаться вместе выяснить, от чего зависит знак левой части и изменение или неизменность названия функции.

Затем прочитать правило на с. 159 и научиться его применять, например, при выполнении одного примера из каждого упражнения **530**, **531**.

Необходимо, чтобы учащиеся понимали, что формулы приведения справедливы для любого значения α, хотя для определения знака исходной функции при запоминании формул считается, что α — угол I четверти.

При выполнении упражнений к параграфу и в дальнейшем следует продолжать обучение учащихся выявлению различных путей решения.

Упражнение **532**(1) можно решать так:

I способ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0.$$

II способ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0.$$

Можно преобразовать $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ и искать другие пути.

В конце второго урока рекомендуется провести самостоятельную работу (15 мин).

1. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}8$;

2) $\sin 210° - \cos 120° + \operatorname{tg} 225°$.

[1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$;

2) $\operatorname{tg} 150° - \cos 780° + \sin 330°$.]

2. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-\sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1}\quad\left[\frac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}\right].$$

Материал параграфа по урокам можно распределить так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Весь материал параграфа	524 (1—7), 526, 530, 531	526 (2, 4, 6, 7), 535 (3, 4)	535, 536; ДМ § 31 № 10—11
2		527, 529, 532 (1, 3), 533 (1—2), 535; ДМ с. 139, № 54—56	В тексте	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь использовать формулы приведения при выполнении таких упражнений, как **525**, **526**. В классах углублённого уровня дополнительно — **530**, **533**.

§ 32. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов (1 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению формул суммы и разности синусов (косинусов) при вычислениях и разложении на множители; развитие умений самостоятельно определять цели в различных ситуациях.

Формулы, которые выводятся в этом параграфе, часто используются при решении тригонометрических уравнений, поэтому важно, чтобы учащиеся могли их применять в разных ситуациях (задачи 2—3, упражнения **537**, **539**, **542**).

Ход решения задачи 1 параграфа мотивирует необходимость появления формулы, упрощающей вычисления. С той же целью можно использовать упражнение **537** (1, 2). Эти же задачи подсказывают приём, который используется при выводе формулы (1). Формулы (3) и (4), как и предлагается в тексте учебника, полезно вывести учащимся самостоятельно дома и проверить на следующем уроке в классе.

В задаче 2 показывается важный приём разложения на множители: находится множитель, который после вынесения за скобки позволит оставить в скобках такое слагаемое, что его можно представить как синус или косинус некоторого угла. Закрепляется умение применять этот приём при выполнении упражнения **539**.

Доказательство тождеств позволяет продолжить работу по развитию мышления учащихся: многие упражнения могут быть выполнены разными способами. Очень показательно упражнение **542** (1). В ходе его вы-

полнения можно повторить различные формулы и различные способы доказательства тождеств.

542. 1) I с п о с о б. Преобразуем левую часть:

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= \underline{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) +} \underline{\sin 2\alpha} =$$

$$= \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$$

$$= 2\cos\frac{2\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\alpha}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь учащиеся продолжают учиться понижать степень выражения и находить полусумму и полуразность углов.

I I с п о с о б. Преобразуем правую часть:

$$\underline{\sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 2\alpha \cos\frac{\pi}{4} + \sin 2\alpha \sin\frac{\pi}{4}\right) =} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin 2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha.$$

I I I с п о с о б. Преобразовать левую и правую части к одинаковому виду (достаточно выполнить преобразования, которые в I и II способах приводят к подчёркнутому выражению).

На этих уроках полезно у с т н о выполнять такие, например, у п р а ж н е н и я:

1. Представить в виде суммы синусов выражение:

1) $\frac{1}{2} + \sin\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$; 3) $\sqrt{3} + 2\sin\alpha$.

2. Выразить $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ через синус или косинус 2α.

3. Разложить на множители:

1) $1 - \cos 2\alpha - \sin\alpha$;

2) $1 + \cos 2\alpha - \cos\alpha$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha}{2}$.

Материал параграфа по урокам можно распределить следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 32	537—541, 542 (1, 3), 543	538 (3, 5), 539 (4), 540 (2)	544, 545; ДМ § 32 № 20—22, 27—29

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь применять формулы (1)—(4) при выполнении упражнений типа **538**, **540**. В классах углублённого уровня дополнительно — **541**, **542**.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

На уроке обобщения и систематизации знаний рекомендуется не только повторить все формулы, которые изучались в главе, но обязательно вспомнить допустимые значения букв в каждом отдельном случае. Полезно использовать первый форзац учебника, где все формулы представлены в системе: формулы, связывающие тригонометрические функции одного аргумента, затем суммы аргументов, откуда следуют формулы двойного и половинного аргумента, формулы разложения на множители суммы и разности одноимённых функций разных аргументов.

Полезно выполнить в классе упражнения типа **546**, **547**, **552**, **555**, **560**, **561**, **564**; задания для интересующихся математикой из «Дидактических материалов», а также решить следующие уравнения:

1. $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

2. $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 1$.

3. $2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x + \sin 8x = 0$.

Дополнительно выполнить упражнения **565**, **567**, задания для подготовки к экзаменам из «Дидактических материалов». Самостоятельно — **549**, **550**, **556**, **559** (по одному заданию).

Глава VI. Тригонометрические уравнения

Как и при решении алгебраических, показательных и логарифмических уравнений, решение тригонометрических уравнений путём различных преобразований сводится к решению простейших: $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. При их решении получаются бесконечные множества корней, которые выражаются формулами, позволяющими находить конкретные значения. Например, корнями уравнения $\operatorname{tg} x = a$ являются числа $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; при $n = 0$ получим корень $x = \operatorname{arctg} a$ в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Для обозначения корней простейших тригонометрических уравнений используются специальные термины и символы: $\arccos a$, $\arcsin a$ и $\operatorname{arctg} a$. Например, запись $\operatorname{arctg} a$ (арктангенс a) означает: корень уравнения $\operatorname{tg} x = a$, заключённый в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

В учебнике рассмотрение простейших уравнений начинается с уравнения $\cos x = a$, так как формула его корней проще, чем формула корней уравнения $\sin x = a$ (для них используется необычный для учащихся указатель знака $(-1)^n$).

Решение более сложных тригонометрических уравнений, когда выполняются алгебраические и тригонометрические преобразования, сводится к решению простейших.

Следует иметь в виду, что выполняемые преобразования должны осуществляться переходом от данного уравнения к равносильному ему на заданном множестве. Например, уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$ на множестве $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, равносильно уравнениям $(\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; отметим, что $\frac{\pi}{4} + \pi k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ни при каких целых k и n.

Типология тригонометрических уравнений весьма разнообразна. В учебнике рассматриваются три типа: сводящиеся к квадратным, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$ и уравнения, решаемые разложением на множители. В основе решения уравнений первого и третьего типов лежат алгебраические преобразования; при решении уравнений второго типа показан также способ введения вспомогательного угла.

Глава завершается рассмотрением простейших тригонометрических неравенств, которые решаются с помощью единичной окружности, где устанавливается множество точек, координаты которых определяются данным неравенством. Например, неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяют

точки окружности, заключённые в промежутках $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Предметные цели изучения главы:

— введение понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса угла; вывод формул корней простейших тригонометрических уравнений;

— обучение решению тригонометрических уравнений: линейных относительно синуса, косинуса, тангенса числа; сводящихся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного; сводящихся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители;

— знакомство с решением простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Метапредметные цели изучения главы:

— формирование приёмов перехода от аналитической к графической модели и обратно;

— совершенствование приёмов точных и приближённых вычислений;

— знакомство с математическим толкованием понятия периодичности, имеющего важное мировоззренческое значение;

— развитие алгоритмического и логического мышления.

Личностные цели изучения главы:

— совершенствование навыков самоконтроля;

— развитие вычислительной и алгоритмической культуры;

— развитие творческой инициативы, самокритичности.

В результате изучения главы VI все учащиеся должны знать формулы корней простейших тригонометрических уравнений, приёмы решения рассмотренных типов уравнений и выполнять упражнения **655—665** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно — **666**, **669**, **671**, **685**.

§ 33. Уравнение cos $x = a$ (3 /3 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием арккосинуса числа, обучение решению простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение cos $x = a$ рассматривается первым в ряду простейших уравнений, в связи с тем что формула его корней достаточно просто записывается и легко поясняется исходя из наглядных представлений. Трудность заключается в формировании понятия числа arccos a и выражения arccos $(-a)$ через arccos a.

Актуализацию знаний можно провести с помощью, например, таких упражнений:

1. Найти координаты точки M, лежащей на пересечении единичной окружности и одной из сторон угла POM, если $\angle POM = \frac{\pi}{3}$ (рис. 24).

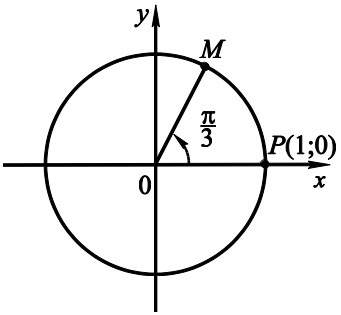


Рис. 24

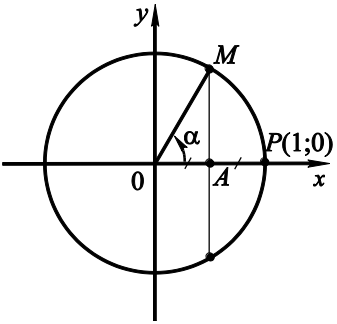


Рис. 25

2. На единичной окружности дана точка M, абсцисса которой равна $\frac{1}{2}$ (рис. 25). Найти:

1) ординату точки M; 2) меру угла POM.

3. Абсцисса точки M единичной окружности равна $\frac{1}{2}$ (рис. 26).

1) Найти координаты точки N.

2) Назвать меры каких-нибудь трёх углов поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг точки $O(0;\ 0)$, в результате которых получена точка M; точка N.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку P, чтобы получить точку M; точка N.

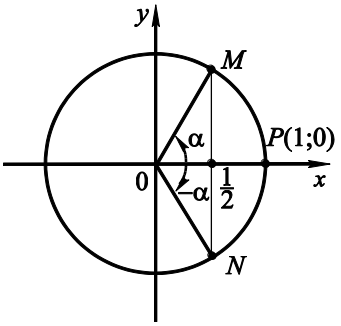


Рис. 26

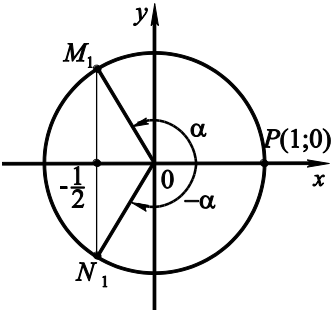


Рис. 27

4. Абсцисса точки M_1 единичной окружности (рис. 27) равна $-\frac{1}{2}$.

1) Найти координаты точки N_1.

2) Назвать меры каких-нибудь трёх углов поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг точки $O(0;\ 0)$, в результате которых получена точка M_1; точка N_1.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку P, чтобы получить точку M_1; точку N_1.

Последние задания в упражнениях 3 и 4 позволяют поставить задачу составления и решения уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$, с рассмотрения которых и начинается изучение материала параграфа.

Ход решения задач 1 и 2 даёт возможность учителю показать, что уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ (или $\cos x = -\frac{1}{2}$) является моделью задачи о нахождении всех углов поворота, соответствующих точке с абсциссой $\frac{1}{2}$ (или $-\frac{1}{2}$). Следовательно, аналогично можно сформулировать задачу, моделью которой станет уравнение $\cos x = a$. Отсюда более прозрачным для учащихся становится определение арккосинуса числа. Ищется угол поворота, в результате которого получается точка единичной окружности с абсциссой a, следовательно, $\arccos a$ — угол (может быть выражен в радианах и градусах) из отрезка $[0;\ \pi]$ (поэтому это число и обозначается обычно α), $|a|$ не может быть больше 1, т. е. $a \in [-1;\ 1]$.

Рисунок 70 учебника желательно воспроизвести на плакате и использовать как при введении определения арккосинуса, так и на последующих уроках. В частности, с помощью этого рисунка можно попросить учащихся проиллюстрировать ответы на в о п р о с ы.

1. Имеет ли смысл выражение $\arccos \frac{3}{4}$; $\arccos(-0{,}7)$; $\arccos \frac{4}{3}$?

2. Может ли $\arccos a$ принимать значение, равное $\frac{\pi}{7}$; $-\frac{12}{13}\pi$; $\frac{13}{12}\pi$?

Выполняя задание **568**, желательно требовать от учащихся подробного обоснования ответа со ссылкой на определение арккосинуса числа.

568. 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0;\ 1]$, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — число из промежутка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Задания **579—584** позволяют глубже изучить понятие арккосинуса числа, что не является обязательным для всех учащихся. Однако уравнение **579**(1) можно решить со всем классом.

579. 1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

$2x - 3 = \cos\frac{\pi}{3}$, $2x - 3 = \frac{1}{2}$, $x = 1{,}75$.

О т в е т. $x = 1{,}75$.

Вывод формулы (2) корней уравнения $\cos x = a$ учащиеся могут сделать самостоятельно с помощью рисунка 70 учебника и рассуждений, аналогичных приведённым в задачах 1 и 2.

Выполняя упражнение **572** (1, 2), полезно показать, что запись ответа может быть сделана в виде $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или, как в задаче 3, $\arccos\frac{3}{4}$ может быть вычислен с помощью микрокалькулятора (что не является обязательным).

Решение уравнений $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ рассматривалось при изучении предыдущей главы. Желательно, чтобы учащиеся использовали уже известные им формулы корней этих уравнений, но показать, что их можно решить по общим формулам, необходимо.

Рассуждения, приводящие к выводу формулы $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, можно предложить учащимся провести самостоятельно, заполняя пропуски в записи, которую можно сделать на карточках и раздать учащимся.

Докажем, что для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Обозначим $\arccos a = \alpha$.

По определению арккосинуса числа имеем:

1) _____ $\le \alpha \le$ _____;

2) $\cos\alpha =$ _____.

Тогда по свойствам неравенств

____ $\le -\alpha \le$ ____, откуда ____ $\le \pi - \alpha \le$ ____.

По формуле приведения

$$\cos(\pi - \alpha) = \_\_\_\_\_ = -a.$$

Следовательно, по определению арккосинуса числа

$$\arccos(-a) = \pi - \alpha = \pi - \arccos a.$$

Изучение материала параграфа можно распределить по урокам двумя способами:

о д и н вариант — на п е р в о м уроке разобрать весь материал параграфа, в т о р о й и т р е т и й уроки посвятить решению задач;

д р у г о й вариант отражён в таблице:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Задачи 1, 2, формула (1)	568—570, 575, 579	569 (3, 4), 570 (2, 3)	580—582, 583 (1), 584; ДМ § 33 № 30—32
2	Формула (2), задачи 3—5	571—574, 577, 578, 576 (1—4)	573 (3, 4); ДМ § 33 № 4, 13, 19, 21	

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а все учащиеся должны знать формулу корней уравнения $\cos x = a$ и уметь её применять при выполнении упражнений типа **571—573** (1, 2). В классах углублённого уровня дополнительно — **575**, **577**.

§ 34. Уравнение $\sin x = a$ (3 / 3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — ознакомление с понятием арксинуса числа, обучение решению уравнений, сводящихся к уравнению $\sin x = a$; развитие навыков самостоятельного разрешения проблем.

Как показывает опыт, решение уравнений $\sin x = a$ воспринимается учащимися с большими трудностями, чем $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, в силу того что формула корней уравнения запоминается хуже. Если учащиеся понимают, как осуществить запись корней с помощью двух формул, и применяют её, не стоит сразу принуждать их пользоваться общей формулой. К концу изучения темы они сами убедятся в удобстве формулы (4) и будут сознательно ею пользоваться.

Другая трудность в изучении темы аналогична той, которая преодолевалась по ходу изучения предыдущего параграфа: формирование понятия числа $\arcsin a$.

Актуализацию знаний можно провести с помощью, например, таких у п р а ж н е н и й:

1. Составить уравнение для решения следующей задачи: «Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0), чтобы получить точки A и B, имеющие одинаковые абсциссы, равные 0,7 (рис. 28)».

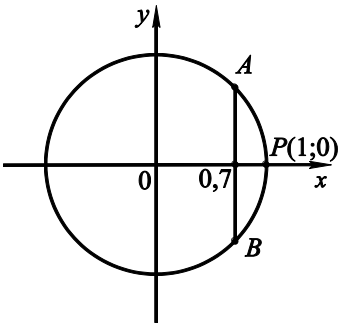


Рис. 28

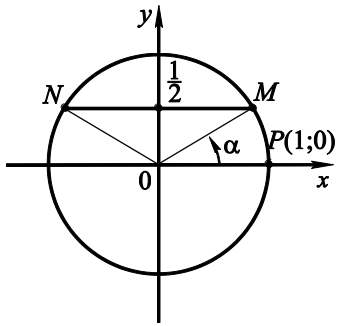


Рис. 29

2. Доказать, что:

1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$.

3. Объяснить, почему не существует числа a, такого, что $\arccos a = \frac{7}{6}\pi$, $\arccos\frac{6}{5} = x$.

4. Ордината точки M единичной окружности (рис. 29) равна $\frac{1}{2}$.

1) Найти координаты точки N. 2) Назвать меры каких-либо трёх углов поворота точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат, в результате которых получена точка M; точка N. 3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку M; точку N.

5. Ордината точки M единичной окружности (рис. 30) равна $-\frac{1}{2}$.

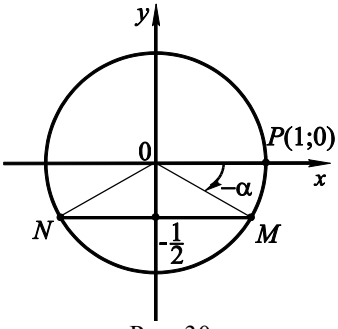


Рис. 30

1) Найти координаты точки N. 2) Назвать меры каких-либо трёх углов, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку M; точку N. 3) Записать все углы, на которые нуж-

но повернуть точку $P(1; 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку M; точку N.

Как и при изучении предыдущего параграфа, последнее задание в упражнениях 4 и 5 подводит учащихся к постановке задачи составления и решения уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, которые и рассматриваются в задачах 1 и 2 текста параграфа.

Уже в задаче 1 учащимся предлагается объединить две формулы корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ в одну и проверить, что при различных значениях n получается либо одна, либо другая формула из полученных ранее.

Полезно предложить учащимся, которым это интересно, самостоятельно показать переход от двух формул $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, к формуле $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k + 1),\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

При $n = 2k$ имеем формулу (1), при $n = 2k + 1$ имеем формулу (2).

Введение понятия арксинуса числа можно провести по аналогии с понятием арккосинуса, используя рисунки 70 и 74 учебника и следующие записи (все пропуски заполняются учениками по ходу рассуждений):

Найдём один из корней уравнения	
$\cos x = a$ (рис. 70)	$\sin x = a$ (рис. 74)
Назовём корень уравнения	
$\arccos a$	$\arcsin a$
Обозначим этот корень буквой α	
$\arccos a = \alpha$	_____ = α
Если $0 \le a \le 1$, то	Если _____ a _____, то
$\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 70, *а*)	α ∈ [_____) (рис. 74, *а*)
Если $-1 \le a \le 0$, то	Если _____ a _____, то
$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ (рис. 70, *б*)	α ∈ [_____) (рис. 74, *б*)
Следовательно,	
$\alpha \in [0; \pi]$	α ∈ [_____]

Значит,

$0 \le \arccos a \le \pi$	____ $\le \arcsin a \le$ ___

Так как при $|a| > 1$ уравнение

$\cos x = a$	$\sin x = a$

не имеет корней, то

$-1 \le a \le 1$	_____ $\le a \le$ _____

Таким образом,

$\arccos a = \alpha$, если	$\arcsin a = \alpha$, если
$\cos \alpha = a$ и $0 \le \alpha \le \pi$	$\sin \alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

Рисунок 74 может быть полезен учащимся и для иллюстрации ответов на в о п р о с ы:

1) Имеет ли смысл выражение

$\arcsin 0{,}95$; $\arcsin(-0{,}01)$; $\arcsin \frac{13}{10}$?

2) Может ли значение выражения $\arcsin a$ быть равным

$\frac{\pi}{10}$; $-\frac{13}{14}\pi$; $\frac{14}{13}\pi$?

Ответы обосновать.

При выполнении упражнения **586** желательно требовать от учащихся подробного обоснования ответа, как это сделано во втором абзаце на с. 175 учебника.

Упражнения **587—588** направлены на закрепление понятия арксинуса числа, что необходимо для осознанного решения простейших тригонометрических уравнений. Упражнение **593** полезно выполнить со всем классом, хотя его уровень несколько превышает обязательный.

Формула $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ может быть выведена на уроке (если учитель сочтёт возможным):

Обозначим $\arcsin a = \alpha$. По определению арксинуса числа это означает, что: 1) $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin \alpha = a$. Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$;

2) по свойству $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ имеем $\sin(-\alpha) = -a$.

Следовательно, по определению арксинуса числа $\arcsin(-a) = -\alpha = -\arcsin a$.

Другие равенства для $\arcsin a$, приведённые в упражнениях **599**, **600**, **605**, не являются обязательными для изучения учащимися базового уровня.

Вывести формулу корней уравнения $\sin x = a$ учащиеся могут самостоятельно или с помощью учителя по аналогии с рассуждениями, приведёнными в задачах 1 и 2 параграфа.

Обучение решению уравнений с помощью калькулятора желательно, но не является обязательным для всех.

В конце третьего урока рекомендуется провести самостоятельную работу (15—20 мин) на проверку усвоения материала параграфов 33 и 34:

1. Решить уравнение:

1) $3\sin x + 1 = 0$; 2) $2\cos 4x = 1$; 3) $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

[1) $4\sin x = 3$; 2) $2\cos 3x = \sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.]

2. Сравнить числа

$\arccos\frac{1}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ [$\arcsin 1$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$].

---

3. Найти все корни уравнения $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ $\left[[0;\ \frac{3}{2}\pi]\right]$.

Изучение материала параграфа можно распределить по урокам следующим образом: один вариант — на первом уроке разобрать весь теоретический материал параграфа, второй и третий уроки посвятить решению задач; другой вариант отражён в таблице:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Задачи 1 и 2, формулы (3) и (5)	586—588, 593	587 (2, 3)	599—606; ДМ § 34 № 33—36
2	Формула (4), задачи 3—5	589—592, 594 (1, 2), 597	590 (3), 591 (2, 3)	
3	Все материалы параграфа	594 (3, 4), 595, 596, 598	В тексте	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать формулы корней уравнения $\sin x = a$ и уметь их применять при выполнении упражнений типа **590**, **591**. В классах углублённого уровня дополнительно — **594**, **595**, **604**.

§ 35. Уравнение tg $x = a$ (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием арктангенса числа, обучение решению уравнения tg $x = a$; развитие навыков самостоятельного формулирования проблемы и нахождения путей её решения.

Формула корней уравнения tg $x = a$ запоминается учащимися на формальном уровне без труда.

Сложнее воспринимается сама идея изображения на единичной окружности точек, соответствующих числам, тангенс которых равен данному числу a, а соответственно возникает больше трудностей в формировании понятия arctg a.

Повторение материала предыдущих параграфов и определения тангенса острого угла прямоугольного треугольника позволяет подготовить учащихся к решению задач параграфа. С этой целью можно выполнить, например, такие упражнения:

1. С помощью рисунка 31 составить уравнение для решения задачи: «Найти все углы поворота точки $P(1;\ 0)$ около начала координат, чтобы получить точки M и N». Найти корни полученного уравнения на отрезках $[0;\ \pi]$; $[0;\ 2\pi]$; $[0;\ 2{,}5\pi]$.

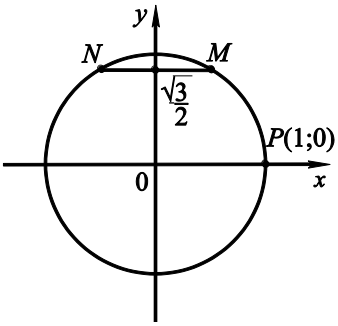


Рис. 31

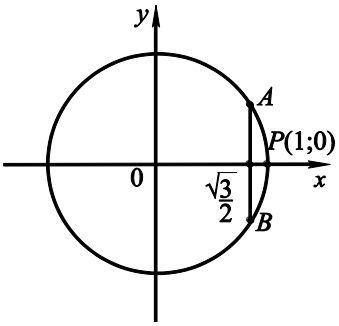


Рис. 32

2. С помощью рисунка 32 составить уравнение для решения задачи: «Найти все углы поворота точки $P(1;\ 0)$ около начала координат, чтобы получить точки A и B». Найти корни полученного уравнения на отрезках $[0;\ \pi]$; $[0;\ 2\pi]$; $[0;\ 2{,}5\pi]$.

3. На рисунке 33 изобразить[1]:

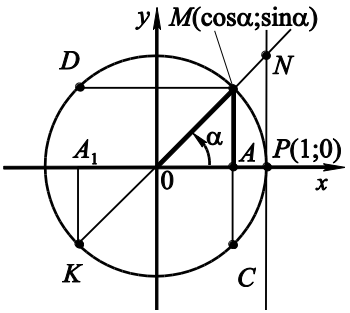


Рис. 33

1) точку D, соответствующую числу, синус которого равен sin α; 2) точку C, соответствующую числу, косинус которого равен cos α; 3) точку K, соответствующую числу, тангенс которого равен tg α.

Ответ обосновать.

Для ответа на последний вопрос задания 3 учащимся придётся вспомнить определение тангенса и как отношения синуса и косинуса, и как отношения катетов. Далее можно провести аналогию: в единичной окружности ($OM = 1$) $\sin\alpha = \frac{MA}{OM} = MA$, $\cos\alpha = \frac{OA}{OM} = OA$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MA}{OA}$.

Так как $|OA| \le 1$, то имеет смысл в качестве прилежащего катета взять катет, длина которого равна 1, например OP, тогда другой катет должен иметь длину, равную $|\operatorname{tg}\alpha|$. Таким образом, если из точки $P(1; 0)$ восставить перпендикуляр к оси Ox и через точки O и M провести прямую до пересечения с этим перпендикуляром и окружностью, получим точку N, такую, что $PN = |\operatorname{tg}\alpha|$, и точку K, соответствующую числу, тангенс которого равен tg α. По рисунку 33, рассматривая треугольники A_1OK, AOM и PON, это легко показать.

Теперь учащиеся *наглядно* могут представить себе, что tg α может быть любым действительным числом и почему $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует.

Решая задачи 1 и 2 текста параграфа, особое внимание следует уделить объединению формул корней уравнения в одну формулу. Для этого достаточно использовать рисунки 76 и 77 учебника.

---

[1] Все тонкие линии на рисунке должны появляться на доске по мере проведения рассуждений.

Понятие арктангенса числа можно ввести, используя самостоятельную работу с учебником, либо организовать работу так, как это предложено в предыдущем параграфе при введении arcsin α.

С помощью рисунка 78 учебника учащиеся могут иллюстрировать ответы на такие вопросы:

1. Имеет ли смысл выражение arctg 1; arctg 105; arctg (–10)?

2. Может ли значение arctg *a* быть равным $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{13}{10}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$?

Ответы обосновать.

При выполнении упражнения **607** желательно требовать от учащихся обоснования ответа, как это сделано на с. 181 учебника.

Упражнения **607—609** направлены на формирование понятия арккотангенса числа. Понятие арккотангенса в учебнике не вводится, так как его вполне заменяет понятие arctg α и соотношение ctg $\alpha \cdot$ tg $\alpha = 1$ (как и показано в задаче 4* параграфа).

Учащиеся должны уметь пользоваться формулой arctg $(-a) = -$arctg a, но доказывать эту формулу им необязательно (хотя и полезно).

З а д а ч а. Доказать, что для любого действительного числа *a* выполняется равенство arctg$(-a) = -$arctg$a$.

Обозначим arctg *a* через *a*. По определению арктангенса числа имеем: 1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) tg $\alpha = a$.

Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) по известному свойству tg $(-\alpha) = -$tg α, по определению $-$tg $\alpha = -a$.

Следовательно, по определению арктангенса числа arctg $(-a) = -\alpha = -$arctg a.

Другие свойства арктангенса числа для учащихся классов базового уровня необязательны. Желающие могут их доказать и использовать на примерах упражнений **615—618**.

Изучение материала параграфа по урокам можно распределить следующим образом: о д и н вариант — на п е р в о м уроке изучить весь теоретический материал параграфа, а на в т о р о м решать задачи. Д р у г о й вариант отражён в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Задачи 1 и 2, формулы (1) и (3)	607—609, 614	608 (2), 609 (2); ДМ § 35 № 9	613—618; ДМ § 35 № 29—32
2	Формула (2), задачи 3 и 4	610—612	ДМ § 35 № 22—25	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь применять формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ при выполнении упражнений типа **610—611**. В классах углублённого уровня дополнительно — **612**, **616**, **617**.

§ 36. Решение тригонометрических уравнений (4 / 5 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению методов введения нового неизвестного и разложения на множители, к решению тригонометрических уравнений.

Как уже указывалось во введении к главе, в данном параграфе рассматриваются три типа тригонометрических уравнений, при решении которых применяются различные методы. Обязательными для школьников являются метод введения нового неизвестного, что позволяет свести уравнение к квадратному, и метод разложения на множители. Метод введения вспомогательного аргумента, который рассматривается в п. 2 и применяется в задаче 8, не является обязательным для применения учащимися классов базового уровня, но как метод, значительно упрощающий решение некоторых уравнений, должен быть продемонстрирован.

Рассматривая уравнения, сводящиеся к квадратным (п. 1), необходимо обратить внимание учащихся на решение задачи 4 и обсуждение равносильности уравнений $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ и $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Среди уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$ (п. 2) уравнение, рассматриваемое в задаче 6, занимает особое место: это пример уравнения, однородного относительно синуса и косинуса. Желательно, чтобы при решении таких уравнений (упражнение **624**) учащиеся могли объяснить, почему при делении данного уравнения на $\cos x$ получается уравнение, равносильное данному, как это сделано на с. 187.

При решении задач (упражнение **625**), таких, как задача 8, с помощью введения вспомогательного аргумента важно добиться от учащихся объяснения существования вспомогательного аргумента в каждом кон-

кретном случае. Учащимся классов углублённого уровня можно предложить решить задачи 7 и 8 параграфа двумя способами: сведением к однородному уравнению относительно $\sin^2\frac{x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2}$ и введением вспомогательного аргумента (обратить внимание: уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ не имеет решения, если $c^2 > a^2 + b^2$).

Решая задачу 12 (п. 3), а также, например, упражнение **620**, желательно проиллюстрировать наличие общей части у двух серий корней с помощью единичной окружности, что поможет предотвратить ошибки в записи общей формулы ответа.

620. 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 34).

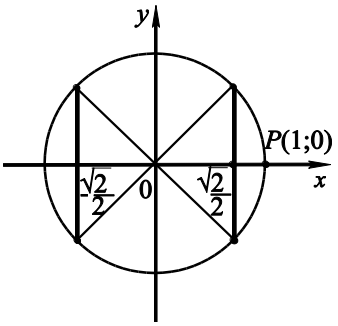


Рис. 34

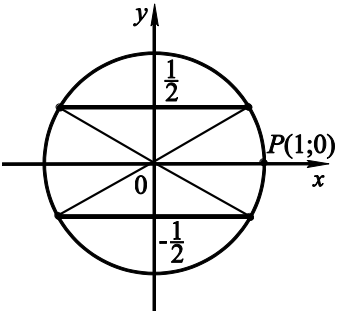


Рис. 35

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Иначе можно записать

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

620. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ (рис. 35).

1) $\sin x = \frac{1}{2}$, 2) $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

О т в е т можно записать в виде $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

При наличии времени можно предложить учащимся, интересующимся математикой, вывести удобные для запоминания формулы решения уравнений $\sin^2 x = a^2$, $\cos^2 x = a^2$, $\mathrm{tg}^2 x = a^2$, записав их так:

$$x = \pm\arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\ (|a| \le 1);$$
$$x = \pm\arccos a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\ (|a| \le 1);$$
$$x = \pm\mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

В задаче 13* и упражнении **628** важно показать учащимся необходимость проверки корней, чтобы не получить посторонних.

Упражнения к параграфу подобраны так, что умение решать каждую из задач, разобранных в учебнике, можно закрепить при выполнении соответствующих упражнений.

Упражнения **620—622** — задачи 1—4, упражнение **623** — задача 5, упражнение **624** — задача 6, упражнение **625** — задачи 7 и 8, упражнение **626** — задачи 9 и 10, упражнение **627** — задача 11, упражнение **635** — задача 12, упражнение **628** — задача 13, упражнение **629** — задача 14, упражнение **645** — задача 15.

Метод введения нового неизвестного можно продемонстрировать и при решении упражнения **631**.

631. 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$.

Обозначим $\sin x + \cos x = t$, тогда $(\sin x + \cos x)^2 = t^2$,

$2\sin x \cos x = t^2 - 1$, т. е. $\sin 2x = t^2 - 1$.

Получим уравнение относительно t:

$2(t^2 - 1) - 3t + 2 = 0$, $2t^2 - 3t = 0$, $t(2t - 3) = 0$.

1) $t = 0$, $\sin x + \cos x = 0$, $\mathrm{tg}\, x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $2t - 3 = 0$, $t = \dfrac{3}{2}$, $\sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$ не имеет решения

($2\sin x + 2\cos x = 3$, т. е. $c^2 > a^2 + b^2$).

Ответ. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Материал параграфа по урокам можно распределить следующим образом:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	Задачи 1—4	620—622	621 (2, 4), 622 (4)	636, 638—647; ДМ § 36 № 24—28
2	Задачи 1—6	620—624	ДМ § 36 № 1—5	
3	Задачи 9—11	624—627	ДМ § 36 № 14—17	
4	Задача 12	635		

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **621**, **622** (3, 4), **624**, **626** (1, 2). В классах углублённого уровня дополнительно — **629—631**.

§ 37*. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств (0 / 2 ч)

Материал данного параграфа не входит в обязательную программу по математике для классов базового уровня. При наличии времени учитель может ознакомить этих учащихся с приёмами решения простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Уровень сложности упражнений для классов базового уровня не должен превышать уровень заданий **648—651**. На этом этапе важно, чтобы учащиеся ознакомились с записью решения неравенства, ориентируясь на его иллюстрацию на единичной окружности.

Ещё раз к решению тригонометрических неравенств учащиеся смогут вернуться при изучении тригонометрических функций.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

На уроке обобщения и систематизации знаний важно обратить внимание учащихся на анализ уравнения, который позволит выбрать соответствующий метод решения и наметить путь решения.

Среди упражнений к главе VI, которые рекомендуется использовать на уроках повторения, особое внимание следует обратить на задания **656—665** (чтобы подобные уравнения умели решать большинство учащихся).

В качестве дополнительных можно использовать задания **678—690** и упражнения из «Дидактических материалов», разделы «Задания для подготовки к экзаменам» и «Задания для интересующихся математикой».

11 класс
Глава VII. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции определяются традиционно формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, где x — действительные числа, хотя ранее выражения $\sin x$, $\cos x$ определялись как координаты точки единичной числовой окружности, а выражения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ определялись как отношения $\frac{y}{x}$ и $\frac{x}{y}$. Ранее при изучении тригонометрии были приняты обозначения α и β, где этими буквами обозначались углы (поворота), выраженные как в градусах, так и в радианах. Это было связано с тем, что все основные формулы доказывались с помощью поворота точки единичной окружности с центром в начале координат, для обозначения координат этой точки использовались буквы x и y. Далее отмечалось, что выражения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ суть действительные числа, записанные в тригонометрической форме. Поэтому правомерно считать, что все тригонометрические формулы выражают определённые свойства тригонометрических функций. Среди них следует особо выделить те формулы, которые непосредственно относятся к исследованию тригонометрических функций и построению их графиков. Так, формулы $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$ выражают свойства нечётности и чётности соответственно функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Формулы знаков (например, при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\sin x > 0$, а $\cos x < 0$) выражают промежутки знакопостоянства одноимённых тригонометрических функций. Утверждения о том, что $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$, позволяют говорить о множестве значений этих функций; равенство $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, где $k \in \mathbf{Z}$, свидетельствует о периодичности функции $y = \sin x$ и т. д. Таким образом, практически все основные свойства тригонометрических функций были доказаны в предыдущих главах V—VI. Отметим, что в тригонометрических уравнениях неизвестное традиционно обозначалось буквой x, хотя простейшие из них (например, $\sin x = 0$ или $\cos x = 1$) решались с помощью поворота. Следует также обратить внимание на некоторые особенности определений свойств функций. Так, в определение чётности и нечётности функций не включается условие симметричности области определения функции относительно точки $x = 0$, так как это следует из соответствующих определений. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечётной, так как для любых x из области её определения выполняется равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Здесь уже сказано, что равенство выполнено при любых x из области определения, откуда следует, что принадлежность к ней x влечёт и принадлежность к ней $(-x)$. Аналогично в определении периодичности функции $f(x)$ уже за-

ложена принадлежность чисел $x \pm t$ к области определения функции, если ей принадлежит число x.

Построение графиков тригонометрических функций проводится с использованием их свойств и начинается с построения графика $y = \cos x$. График $y = \sin x$ получается сдвигом графика $y = \cos x$ по известной формуле $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. С помощью графиков как иллюстрируются известные свойства функций, так и выявляются некоторые дополнительные свойства. Так, из графика функции $y = \cos x$ следует, что эта функция принимает значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, наибольшее значение при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и т. д. С помощью графиков тригонометрических функций легко решаются простейшие тригонометрические уравнения и неравенства (особенно те, которые заданы на некотором промежутке).

Обратные тригонометрические функции в классах базового уровня даются обзорно (§ 43), в ознакомительном плане. Полезно также рассмотреть графики таких функций, как, например, $y = |\cos x|$, $y = a + \cos x$, $y = \cos(x + a)$, $y = a \cos x$, $y = \cos ax$, где a — некоторое число. Гармонические колебания рассмотрены в главе X (§ 59).

П р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— развитие представлений учащихся о месте элементарных, в частности, тригонометрических функций в математической науке;

— развитие умений осуществлять доказательство свойств функций, в частности, тригонометрических (ограниченность, периодичность); находить область определений и множество значений функции; строить графики тригонометрических функций с применением разных приёмов; исследовать функции, заданные графически;

— формирование умений применять различные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств в процессе исследования тригонометрических функций и решения практических задач.

М е т а п р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— развитие умений самостоятельно определять цели своей деятельности по исследованию процессов и явлений, моделями которых являются тригонометрические функции; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать эту деятельность;

— развитие навыков самостоятельного поиска методов решения практических задач;

— развитие умений логично и корректно излагать свою точку зрения в процессе решения задач и исследования различных процессов.

Л и ч н о с т н ы е ц е л и изучения главы:

— формирование основ саморазвития и самовоспитания, готовности и способности к самостоятельной деятельности;

— развитие стремлений к самообразованию на протяжении всей жизни;

— формирование ответственного отношения к выбору будущей профессии.

В результате изучения главы VII все учащиеся должны знать основные свойства тригонометрических функций, уметь строить их графики и распознавать функции по данному графику, а также решать задачи типа **758—763** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно — **765—770**.

§ 38. Область определения и множество значений тригонометрических функций (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия тригонометрической функции, формирование умений находить область определения и множество значений тригонометрических функций; развитие умений использовать все возможные ресурсы в процессе применения различных способов исследования свойств тригонометрических функций.

Изучение параграфа рекомендуется начать с повторения материала предыдущих глав (если позволяет время, полезно выделить на повторение курса 10 класса 3—4 ч и использовать упражнения к главам V и VI). Тем самым учащиеся будут подготовлены не только к восприятию теоретического материала, но и к решению задач, изложенных в параграфе. Если введение синуса, косинуса и тангенса как функций действительного аргумента, их области определения и множества значений полностью опирается на свойства точек единичной окружности, то решение задач на отыскание множества значений функции требует умения решать тригонометрические уравнения.

Для актуализации знаний можно использовать упражнения такого характера:

1. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол, равный α радиан, если:

а) $\alpha = 1{,}3$; б) $\alpha = -2{,}8$; в) $\alpha = 3{,}5$; г) $\alpha = 5$; д) $\alpha = -7$.

2. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол 185π.

3. Определить знак числа:

а) $\sin 1{,}3$; б) $\cos 2{,}8$; в) $\sin 3{,}5$; г) $\operatorname{tg} 5$; д) $\sin(-7)$.

4. Назвать три числа, синус которых:

а) $\frac{1}{2}$; б) 0,3; в) a, если $|a| < 1$.

5. Решить уравнение:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = 0{,}7$; в) $\cos x = 1$;

г) $\sin x = -2$; д) $\cos x = 1{,}3$.

6. Можно ли на единичной окружности изобразить точку с координатами:

а) $(\cos 1; \sin 1)$; б) $(\cos(-20); \sin(-20))$?

7. Может ли $\sin\alpha(\cos\alpha)$ принимать значение, равное 0; большее 1; меньшее –1?

8. При каких значениях a имеет решение уранение:

а) $2\sin x = a$; б) $\cos 2x = a$?

9. Имеет ли смысл выражение $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$?

Изучение теоретического материала рекомендуется вести в соответствии с текстом параграфа. После того как учитель, опираясь на хорошо известные учащимся сведения о соответствии каждому действительному числу x единственной точки единичной окружности, введёт понятие тригонометрической функции, учащиеся самостоятельно (или по учебнику) могут решить проблему, связанную с нахождением области определения и множества значений функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Задачи 1 и 3 из параграфа также могут быть изучены по ходу самостоятельной работы учащихся. Решение задач 2 и 4 требует помощи со стороны учителя. Задача 4 и упражнения **697—699** при недостатке времени могут быть предложены для самостоятельного изучения учащимся, которым этот материал будет интересен.

Упражнения **694—696** желательно решить со всеми учащимися, выбирая (особенно при недостатке времени) задания, посильные для учащихся класса. При выполнении этих упражнений учащиеся не только глубже постигают изучаемый материал, но и активно повторяют предшествующий курс математики.

Решение упражнения **694** желательно проводить с иллюстрацией на единичной окружности, особенно если тригонометрические неравенства в 10 классе изучались лишь в ознакомительном плане. Не рекомендуется тратить время на многословную запись решения. Вполне возможна такая запись:

694. 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$, $\sin x + 1 \geq 0$, $\sin x \geq -1$, $x \in \boldsymbol{R}$ (рис. 36);

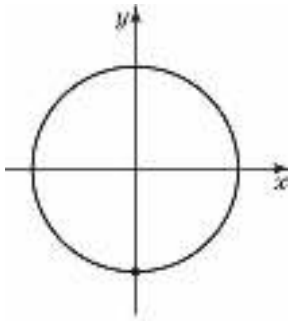


Рис. 36

5) $y = \sqrt{1-2\sin x}$, $1 - 2\sin x \geq 0$, $\sin x \leq \frac{1}{2}$,

$-\frac{7}{6}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 37);

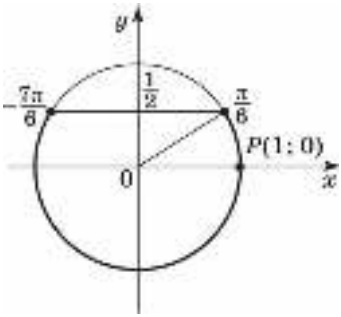


Рис. 37

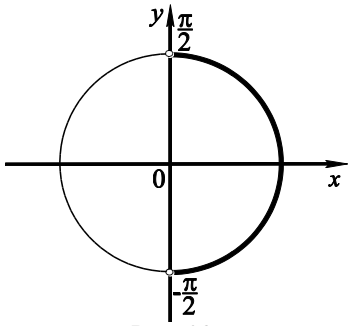


Рис. 38

6) $y = \ln\cos x$, $\cos x > 0$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 38).

696. 5) $y = 1 - 2|\cos x|$, $1 - 2|\cos x| = a$, $|\cos x| = \frac{1-a}{2}$,

$|\cos x| \leq 1$, $\frac{1-a}{2} \leq 1$, $1 - a \leq 2$, $a \geq -1$;

6) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\sin x + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$

$-1 \leq \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, откуда $-\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

Распределить материал параграфа по урокам можно так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 38 до задачи 4	691, 692; ДМ § 38 № 17—22	692 (3, 5); ДМ § 38 № 8—10, 12, 30	694, 696 (3, 4), 697—699; ДМ § 38 № 42—44
2	Задача 4	692, 693, 695—696	ДМ § 38 № 27, 28, 37	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать, что является областью определения и множеством значений функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и уметь решать упражнения типа **691** (1—4), **692** (1, 2). В классах углублённого уровня дополнительно — **694** (4—6), **696**.

§ 39. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — повторение понятий чётности и нечётности функций; введение понятия периодической функции; обучение исследованию тригонометрических функций на чётность и нечётность и нахождению периода функции; развитие умений продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности.

С понятиями чётной и нечётной функции учащиеся знакомились при изучении алгебры в основной школе, а в 10 классе они научились находить соотношения между синусом, косинусом, тангенсом углов α и $-\alpha$. Теперь, после введения понятия функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и знакомства с их областью определения, можно говорить, что истинность равенств $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для любых x из области определения позволяет сделать вывод о нечётности этих функций, а истинность равенства $\cos(-x) = \cos x$ — о её чётности. Здесь же целесообразно напомнить учащимся об особенностях графиков чётных и нечётных функций и симметрии их области определения относительно начала координат (см. введение к главе). Если возникнут затруднения, можно воспользоваться упражнениями из «Дидактических материалов» (с. 123—124, № 9—11).

ДМ № 11 (с. 124). Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси. Достроить её график на промежутке $[-\pi; 0]$, если часть её графика на отрезке $[0; \pi]$ изображена на рисунке 39 и известно, что функция $y = f(x)$ чётная.

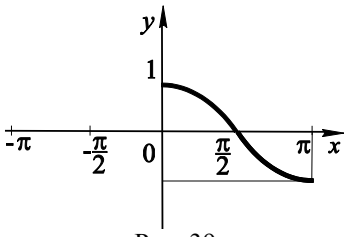


Рис. 39

Об определении периодической функции уже говорилось во введении к главе. Подвести учащихся к этому понятию можно, также опираясь на известный им материал главы V, § 22, 31 (истинность равенств $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$, доказывалась в § 31 со ссылкой на § 22).

Если учитель подробно разберёт по учебнику доказательство того факта, что наименьшим положительным периодом функции $y = \cos x$ является число 2π, то аналогичное доказательство для функции $y = \sin x$ можно предложить учащимся для самостоятельной работы.

В задачах 2 и 3 обсуждается доказательство периодичности заданной функции с данным периодом, и подобные задания (**702—703**) включены затем в систему задач обязательного уровня. Упражнения **705**, **706** с точки зрения ученика выглядят более сложными, так как наименьший положительный период предстоит найти. Одно из заданий упражнения **705** можно решить вместе с учащимися, остальные предложить для самостоятельного решения. Упражнение **706** входит в число дополнительных, так же как и задание **707**.

Решение задания **705** может быть записано сначала более подробно, например, таким образом:

705. 1) Функция определена для всех действительных чисел. По определению периодической функции верно равенство

$$\cos\frac{2}{5}(x+T) = \cos\frac{2}{5}x, \text{ или } \cos\left(\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}T\right) = \cos\frac{2}{5}x, \quad \frac{2}{5}T = 2\pi, T = 5\pi;$$

$$2)\ y = \sin\frac{3}{2}x,\ \sin\frac{3}{2}(x+T) = \sin\frac{3}{2}x,\ \sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}T\right) = \sin\frac{3}{2}x;\quad \frac{3}{2}T = 2\pi,$$

$T = \frac{4}{3}\pi.$

На одном из уроков можно предложить учащимся самостоятельную работу на проверку знания первых двух параграфов главы.

1. Найти область определения и множество значений функции:

1) $y = \sin\frac{3}{x}$; 2) $y = \cos 2x + 1$.

[1) $y = \cos\frac{2}{x}$; 2) $y = \sin\frac{x}{2} - 1$.]

2. Выяснить, является чётной или нечётной функция

$$y = x^3\cos x\ [y = x^3\sin x].$$

3. Доказать, что функция $y = \cos\frac{2}{3}x$ [$y = \sin\frac{3}{4}x$] является периодической с периодом $T = 3\pi$ $\left[T = \frac{8\pi}{3}\right]$.

---

4. Найти наименьший положительный период функции

$$y = \operatorname{tg}\frac{2x}{3}\ \left[y = \operatorname{tg}\frac{7}{8}x\right].$$

Материал параграфа по урокам можно распределить таким образом: либо на первом уроке ознакомить с теоретическим материалом всего параграфа и выполнить по одному заданию из упражнений **700**, **702**, **703**, а на втором уроке решать остальные упражнения (в этом случае будет больше времени для самостоятельной работы учащихся), либо использовать вариант, который приведён в таблице:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 39, задачи 1 и 2	700—702, 704 (1, 2)	701 (3, 4)	704, 706, 707; ДМ § 39, № 22—26
2	§ 39, материал после задачи 2 и задача 3	703, 705, 704 (4, 5)	Проверочная самостоятельная работа	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение периодической функции и уметь выполнять упражнения, такие, как **700**, **702**. В классах углублённого уровня дополнительно — **704**, **705**.

§ 40. Свойства функции $y = \cos x$ и её график (3 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление со свойствами функции $y = \cos x$, обучение построению графика функции и использованию свойств и графика функции при решении уравнений и неравенств; развития умений использовать все ресурсы для достижения цели при изучении свойств функции $y = \cos x$.

Теоретический материал параграфа чётко разделён на логические блоки: 1) исследование функции $y = \cos x$; 2) построение графика функции $y = \cos x$; 3) наблюдение свойств функции $y = \cos x$ по графику; 4) решение задач с использованием свойств функций.

Первый из блоков представляет собой обобщение и конкретизацию знаний, полученных ранее: исследование области определения, множества значений, чётности, периодичности функции, позволяет построить график функции сначала на отрезке $[0; \pi]$, затем на отрезке $[-\pi; \pi]$ и наконец на всей числовой прямой. Для обоснования убывания функции на промежутке $[0; \pi]$ учащиеся должны вновь вернуться к единичной окружности и определению косинуса числа.

Исследование функции дополняется построением нескольких точек с абсциссами из отрезка $[0; \pi]$, чтобы уточнить, как же именно будет проходить кривая на заданном промежутке при её убывании (при изучении

§ 53 школьники смогут получить теоретическое обоснование такого расположения кривой на этом промежутке).

Важно научить учащихся уже на этом этапе изображать эскиз графика функции $y = \cos x$ по точкам (0; 1), $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, (π; –1), $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$, (2π; 1), выбирая соответствующий единичный отрезок на осях координат. Полезно сделать (или приобрести) шаблон графика в удобном масштабе, чтобы в дальнейшем не тратить время на аккуратное изображение синусоиды.

Все учащиеся должны уметь «прочитать» свойства функции по графику. Учащимся, интересующимся математикой, будет полезно аналитически обосновать каждое свойство.

Применение свойств и графика функции при решении уравнений и неравенств приводится в задачах 1 и 2 и упражнениях **712**, **713**. Желательно напомнить учащимся, что подобные задания рассматривались и ранее (например, упражнения **577**, **578**), но решались с использованием единичной окружности или свойств неравенств.

Упражнения **708**—**711** направлены на выработку навыка чтения графика и его использования для сравнения чисел. Желательно обращаться к графику как можно чаще, чтобы приучить школьников уверенно ориентироваться в расположении абсцисс точек графика, что послужит и предотвращением ошибок при сравнении чисел.

Например, при выполнении упражнения **711** (1) полезно провести такие рассуждения:

I способ. $\frac{\pi}{7} \in [0; \pi]$, $\frac{8\pi}{9} \in [0; \pi]$, на отрезке [0; π] функция $y = \cos x$ убывает; $\frac{\pi}{7} < \frac{8\pi}{9}$, следовательно, $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$.

II способ. $\frac{\pi}{7} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x > 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. $\cos\frac{\pi}{7} > 0$; $\frac{8\pi}{9} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x < 0$ при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, т. е. $\cos\frac{8\pi}{9} < 0$, следовательно, $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$.

При изучении главы V упоминалось о необходимости формирования представления учащихся о расположении на единичной окружности точек, соответствующих рациональным числам. Желательно продолжить эту работу, в частности при выполнении упражнения **711** (5, 6):

711. 5) $1 \in [0; \pi]$, $3 \in [0; \pi]$, $y = \cos x$ убывает на отрезке [0; π], следовательно, $\cos 1 > \cos 3$ (можно провести рассуждения, аналогичные тем, что даны выше);

6) $4 \in [\pi; 2\pi]$, $5 \in [\pi; 2\pi]$, $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$, следовательно, $\cos 4 < \cos 5$.

Выполнение упражнения **714** полезно не только для закрепления свойств функции $y = \cos x$, но и для подготовки к изучению следующего параграфа.

714. 3) $\sin \frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}$, функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$, $\frac{\pi}{8} \in 0; \pi$, $\frac{3\pi}{8} \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8}$, следовательно, $\cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{3\pi}{8}$ и $\sin \frac{5\pi}{8} > \cos \frac{3\pi}{8}$.

Распределение материала параграфа по урокам может быть, например, таким:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 40 до задачи 1	708—711, 714; ДМ § 40 № 27	710 (3), 711 (2, 3)	717—719; ДМ § 40 № 24, 25
2	§ 40, задачи 1 и 2	712, 713, 715, 716	ДМ § 40 № 9—11	
3		762 (1, 4), 763 (1)		

При наличии времени полезно не только решить задачи **717**, **719**, но и предложить учащимся, интересующимся математикой, сначала исследовать заданные функции, а потом построить их графики. Кроме того, можно воспользоваться «Дидактическими материалами» и выполнить упражнения 24, 25.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь строить график функции $y = \cos x$, по графику определять свойства функции $y = \cos x$ и выполнять такие упражнения, как **708**, **711** (1—4). В классах углублённого уровня дополнительно — **715**, **716**.

§ 41. Свойства функции $y = \sin x$ и её график (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление со свойствами функции $y = \sin x$, обучение построению графика функции и использованию свойств и графика функции при решении уравнений и неравенств; развитие умений самостоятельно определять цели познавательной деятельности, осуществлять, контролировать и корректировать деятельность.

Изучение свойств и построение графика функции можно провести аналогично тому, как это было сделано при изучении функции $y = \cos x$ (учащимся классов углублённого уровня можно предложить это сделать самостоятельно, воспользовавшись уже изученными свойствами функции $y = \sin x$: область определения $\boldsymbol{R}$; множество значений $[-1; 1]$; функция нечётная и периодическая с наименьшим положительным периодом 2π).

В учебнике предлагается более оптимальный путь: воспользоваться формулой приведения, выразить $\sin x$ через $\cos x$ (т. е. $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$) и построить график функции $y = \sin x$ с помощью сдвига уже известного графика функции $y = \cos x$. Тогда и свойства функции $y = \sin x$ можно получить из свойств функции $y = \cos x$.

Начать изучение параграфа можно с выполнения упражнений, которые не только позволят повторить преобразования графиков функций, но и подведут к постановке проблемы поиска оптимального пути построения графика функции $y = \sin x$.

1. Задать аналитически функцию, график которой получен из данного графика со сдвигом вдоль оси Ox (рис. 40).

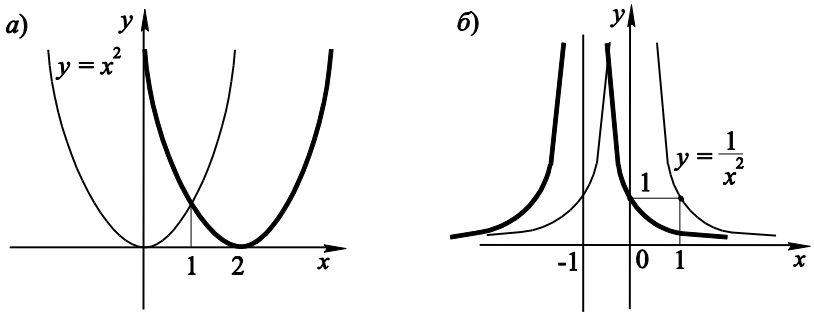


Рис. 40

2. Изобразить график функции $y = f(x + t)$, если дан график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $t = \pm 1$; б) $f(x) = \cos x$, $t = -\frac{\pi}{2}$.

Выполнение последнего задания позволяет перейти к изучению функции $y = \sin x$.

При решении задач 1 и 2 текста параграфа и выполнении упражнений **724—725** необходимо обратить внимание учащихся на нахождение корней уравнения $\sin x = a$ с помощью графика. Желательно, чтобы учащиеся сразу указывали точку на оси Ox, соответствующую $\arcsin a$, а затем, используя свойства функции и особенности графика, находили дру-

гие точки. Упражнения **724—725** могут быть выполнены со всем классом, несмотря на то что они помечены как несколько более сложные, чем упражнения обязательного уровня.

На последнем уроке по изучению § 41 можно провести проверочную самостоятельную работу (15 мин), например, такого содержания:

1. С помощью графика функции $y = \sin x$ [$y = \cos x$] найти корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\left[\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right)$ $\left[\left(-\frac{3\pi}{2};\ 0\right)\right]$.

2. С помощью графика функции $y = \cos x$ [$y = \sin x$] найти все решения неравенства $\cos x \le -\frac{1}{2}$ $\left[\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ на отрезке $\left(0;\ \frac{5\pi}{2}\right)$ $(-\pi;\ 2\pi)$.

---

3. Расположить в порядке возрастания числа

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \cos 5{,}8 \quad \left[\sin 6,\ \sin(-4{,}5),\ \sin\frac{\pi}{12}\right].$$

Распределение материала по урокам может быть таким:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 41 до задач 1 и 2	720—723, 726, 729	722 (3), 723 (5)	730, 731, 732; ДМ § 41 № 26—28, 30
2	§ 41, задачи 1 и 2	724—725, 727, 728	724 (4), 725 (4)	

При наличии времени, кроме упражнений учебника, можно использовать для работ в классе и дома упражнения 26—28 из сборника «Дидактические материалы».

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь строить график функции $y = \sin x$, по графику выяснять свойства функции $y = \sin x$ и выполнять упражнения типа **722—723**. В классах углублённого уровня дополнительно — **725—727**.

§ 42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и её график (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление со свойствами функции $y = \operatorname{tg} x$, обучение построению графика функции и решению уравнений и неравенств с помощью свойств и графика функции; развитие умений самостоятельно применить решения, определяющие стратегию исследования.

Изучение свойств функции $y = \operatorname{tg} x$ происходит так же, как и изучение свойств функции $y = \cos x$ (§ 40). Формулируются изученные ранее свойства, доказывается возрастание функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, строится несколько точек, принадлежащих графику и, наконец, с помощью свойства нечётности и периодичности изображается график на всей области определения.

Построение графика учащиеся могут выполнить самостоятельно. Помощь учителя будет полезна при доказательстве возрастания функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и обсуждении взаимного расположения графика функции и прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

Учащимся, у которых возникнут трудности в построении графика при приближении значений аргумента к $\frac{\pi}{2}$, можно предложить готовый график, выполненный на миллиметровой бумаге (или продемонстрировать с помощью проектора).

Задачи 1 и 2 и упражнения **736—737**, **739**, **741** решаются с помощью графика $y = \operatorname{tg} x$. В ходе решения и вырабатывается умение строить график. Полезно изготовить (или приобрести) шаблон графика, который будет использоваться и при решении более сложных задач.

В качестве самостоятельной домашней работы можно предложить некоторым учащимся исследовать функцию $y = \operatorname{ctg} x$ и построить её график, а результат изложить всему классу. При наличии шаблонов $y = \operatorname{tg} x$ все учащиеся смогут быстро изобразить в тетрадях график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и затем по графику сформулировать её свойства.

В задаче 3 показан поиск решения тригонометрического неравенства с помощью графика. Прежде чем решить эту задачу, напомнить, как решалось это неравенство с помощью единичной окружности.

Распределение материала параграфа по урокам может быть таким:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы	дополнительные
1	§ 42, задачи 1 и 2	733—737	735 (3, 5)	739, 742—746
2	§ 42, задача 3	736—741	737 (3, 4)	747, 749

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться строить график функции $y = \operatorname{tg} x$, выявлять по графику её свойства и выполнять упражнения типа **735**. В классах углублённого уровня дополнительно — **741**, **742**.

§ 43*. Обратные тригонометрические функции (0 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с обратными тригонометрическими функциями и их графиками; формирование навыков познавательной рефлексии как осознание границ своего знания и незнания.

Материал параграфа не является обязательным для изучения в классах базового уровня и рассматривается при наличии времени или предлагается для самостоятельной работы учащимся, интересующимся математикой.

Прежде чем приступить к изучению темы, в классах углублённого уровня, целесообразно повторить понятие взаимно обратных функций (§ 7) и определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа.

Полезно повторить расположение графиков взаимно обратных функций, выполнить построение кривой, симметричной относительно прямой $y = x$ графику функции: а) $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$; в) $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, высказав предположение, не является ли каждая полученная кривая соответственно графиком функции, обратной данной на заданном промежутке, обратиться к тексту учебника и обосновать высказанное предположение. Далее работать в соответствии с текстом параграфа.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

На уроке важно подвести итог исследованию элементарных функций методами элементарной математики, чтобы подготовить учащихся к исследованию функций методами математического анализа.

С этой целью можно использовать электронное приложение с графиками всех изученных функций (не только тригонометрических). Напомнить, как по графику найти область определения и множество значений функции. Повторить аналитическое решение подобных задач, используя какие-то из упражнений **758** (1, 3, 5), **759** (1, 5), **766** (1).

На тех же готовых графиках проиллюстрировать, является функция чётной или нечётной, и показать аналитическое решение упражнения **760** (1, 2). Рассмотреть интервалы знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания. Выделить периодичность как характерное свойство тригонометрических функций (выполнить упражнение **761**).

Подчеркнуть возможность использования графика функции при решении уравнений и неравенств. С помощью упражнения **764** напомнить учащимся, что при решении подобных задач на нахождение числа корней уравнений использование графика часто приводит к более быстрому нахождению ответа.

В итоге ещё раз сформулировать определение функции, перечислить известные элементарные функции и, повторив схему исследования функции, кратко напомнить аналитические пути ответа на вопрос каждого пункта схемы.

В качестве дополнительных полезны упражнения **773**, **774**, а также «Задания для подготовки к экзаменам» и «Задания для интересующихся математикой» из «Дидактических материалов».

Глава VIII. Производная и её геометрический смысл

Содержание разделов курса, составляющих начала математического анализа, трудно для изучения в средней школе. Поэтому их изложение в учебнике ведётся на наглядно-интуитивном уровне: многие формулы не доказываются, а только поясняются или принимаются без доказательства. Главное — показать учащимся целесообразность изучения производной и первообразной (интеграла), так как это необходимо при решении многих практических задач, связанных с исследованием физических явлений, вычислением площадей криволинейных фигур и объёмов тел с произвольными границами, с построением графиков функций. Хотя о геометрическом смысле производной говорится в конце этой главы, можно (в общих чертах) пояснить это уже в самом начале.

Прежде всего следует показать, что функции, графиками которых являются кривые, описывают многие важные физические и технические процессы. По сравнению с прямой кривые постоянно меняют наклон, меняют возрастание на убывание или наоборот; могут существовать значения y, которым соответствует не одно, а несколько значений x, и т. д., т. е. кривые являются существенно более сложными объектами для изучения, чем прямые. Отсюда возникает идея *линеаризации*, идея сведения изучения кривых к изучению некоторой ломаной, близкой к этой кривой, и далее к изучению отрезков ломаной, являющихся хордами, соединяющими две точки данной кривой. Впервые эту мысль высказал Г. Лейбниц (1646—1716), который утверждал, что на небольших промежутках кривая неотличима от прямой, а наклон секущей, проходящей через две точки кривой при сближении этих точек, можно заменить наклоном касательной. Чем ближе концы хорд друг к другу, тем точнее приближение данной кривой к соответствующей ломаной. Следует также иметь в виду, что наклон кривой в той или иной точке промежутка, на котором она рассматривается, определяет многие её свойства (возрастание, убывание и т. д.). Учащиеся знают, что угол наклона прямой (её угловой коэффициент) выражается отношением $\frac{y}{x} = k$ (в каждой её точке), наклон же кривой (или её градиент) задаётся отношением $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Это отношение определяет наклон хорды, концами которой являются точки $(x; f(x))$ и $(x + h; f(x + h))$. Если концы хорды сближаются (т. е. $h \to 0$), то наклон кривой в некоторой точке будет характеризоваться наклоном касательной к кривой в этой точке, т. е. производной $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Таким образом, вблизи избранной точки мы заменяем изучаемую функцию ли-

нейной. С помощью производной среди таких линейных функций выбирается та, которая даёт наилучшее приближение к данной функции.

Если обратиться к изучению неравномерного движения (задача 1 § 44), то производная даёт возможность на коротком отрезке времени заменить изучение неравномерного движения равномерным. Так как в учебнике производная определяется до введения строгого определения предела функции, равенство $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ означает, что $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$ и погрешность этого приближения становится сколь угодно малой при $h \to 0$. Этого оказывается достаточно для нахождения производных многих функций: x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ и др. При этом считается, что если x — фиксированное число и $h \to 0$, то наглядно понятно, что $2x + h \to 2x$, $3x^2 + 5xh + h^2 \to 3x^2$, $-\frac{1}{(x+h)x} \to \frac{1}{x^2}$ (если $x \neq 0$) и т. д. Тем не менее в качестве необязательного материала в учебнике формулируется строгое определение предела функции, на примерах поясняется непрерывность функции в точке и на промежутке, а также устанавливается связь между существованием производной и непрерывностью функции.

Отметим также, что формула $((kx + b)^p)' = px(kx + b)^{p-1}$ в общем случае не доказывается, приводятся лишь примеры её применения в частных случаях. Правила дифференцирования также не доказываются, а формулируются и применяются в конкретных случаях. Производные показательной, логарифмической и тригонометрических функций рассматриваются только в ознакомительном плане на несложных примерах. Все основные формулы дифференцирования сведены в таблицу на с. 248 учебника. Вопрос о геометрическом смысле производной можно рассмотреть так, как это сделано в учебнике, а можно и в такой последовательности:

1) определение углового коэффициента прямой и угла между этой прямой и осью Ox;

2) определение касательной к графику дифференцируемой функции;

3) геометрический смысл производной;

4) уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.

Сформулируем основные **цели** изучения данной главы.

П р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— завершение формирования представления о пределе числовой последовательности, обучение нахождению пределов последовательностей на основании свойств пределов;

— знакомство с понятиями предела функции и асимптотами графиков функции (только в классах углублённого уровня);

— формирование представления о непрерывности функции;

— введение понятий производной функции в точке;

— разъяснение физического и геометрического смысла производной;

— обучение нахождению производных элементарных функций, применению правил дифференцирования при нахождении производных;

— обучение составлению уравнения касательной к графику функции в заданной точке.

Метапредметные цели изучения главы:

— формирование умения самостоятельно определять цели своей деятельности, планировать работу по достижению цели, контролировать и корректировать свою деятельность;

— развитие умения выбора оптимальной стратегии для достижения решения поставленной проблемы;

— развитие умения в построении строгих доказательных рассуждений;

— развитие умения создавать и преобразовывать различные символьные записи и модели для решения учебных и исследовательских задач, понимать значение формализованных языков в соответствии с целями деятельности.

Личностные цели изучения главы:

— формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и практики;

— развитие готовности и способности к самостоятельной учебной, учебно-исследовательской и коммуникативной деятельности;

— формирование готовности к самообразованию и позитивного отношения к непрерывному образованию.

В результате изучения главы VIII все учащиеся должны знать определение производной, основные правила дифференцирования и формулы производных элементарных функций, приведённые в учебнике; понимать геометрический смысл производной; знать уравнение касательной, а также уметь решать задачи типа **869—873**, **875**, **878** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно — **879—881**, **889**.

Приложение. § 3. Предел последовательности (1 / 1 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием предела последовательности, свойствами сходящихся последовательностей, теоремой о монотонной последовательности; развитие умений пользоваться различными источниками информации с целью углубления полученных знаний.

Материал параграфа рекомендуется представить в виде лекции, полностью опираясь на текст учебника. Учащимся классов углублённого уровня предложить подобрать дополнительный материал по теме, используя различные источники информации. На этой базе провести небольшую

исследовательскую работу, в которой показать решение простых упражнений на вычисление предела, рассказать о применении предела последовательности в различных разделах математического анализа и соответственно в различных областях науки.

§ 44. Производная (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с понятием производной функции в точке и её физическим смыслом, формирование начальных умений находить производные элементарных функций на основе определения производной; формирование навыков познавательной рефлексии.

В начале первого урока в качестве подготовительных к изучению основного материала могут быть выполнены следующие задания:

1. Найти $f(2)$, $f(a)$, $f(a + 2)$, $f(a + 2) - f(a)$, если $f(x) = 5x + 3$.

2. Найти $f(3)$, $f(t + h)$, $f(t + h) - f(t)$, если $f(t) = t^2 + 1$.

Рассмотрение задачи 1 следует провести с помощью текста учебника, не уделяя много внимания обсуждению её решения. Акцент следует сделать на том, что для точного выполнения остановки поезда важно знать величину мгновенной скорости в определённый момент времени его равнозамедленного движения. Можно отметить, что не имеет значения, как двигался поезд до тормозной отметки.

Так как мгновенная скорость определяется через понятие средней скорости, желательно вспомнить с учащимися, как находится средняя скорость движения. Сделать это можно, например, в ходе решения следующих задач:

1. Расстояние от A до B равно 36 км. Первую половину пути велосипедист преодолел за 1 ч. После часовой остановки вторую половину пути он проехал за 2 ч. Какова средняя скорость движения велосипедиста на участке AB?

2. Упражнение **776** (1).

Понятия «приращение аргумента» и «приращение функции» в учебнике не вводятся. Производная определяется с помощью одного термина — «разностное отношение». Для подготовки учащихся к использованию понятия разностного отношения и соответствующей ему символики можно дополнить решение упражнения **776** (1) следующим заданием: «Найти среднюю скорость движения точки за промежуток времени от t до $(t + h)$ $(h > 0)$, если она движется по закону $s(t) = 1 + 3t$».

1) Время движения равно $(t + h) - h = h$.

2) $v_{\text{ср}} = \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h} = \dfrac{1+3(t+h)-(1+3t)}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3.$

Обязательный теоретический материал параграфа (до с. 231) следует рассматривать в соответствии с текстом учебника. При наличии дополнительного времени можно, например, с помощью более детального рассмотрения примера о движении точки по закону $s(t) = 3t^2$ углубить представление учащихся о пределе функции. Рассуждение можно провести следующим образом:

Если $s(t) = 3t^2$, то на отрезке времени $[t; t+h]$

$$v_{ср} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{3(t+h)^2-3t^2}{h} = \frac{6th+3h^2}{h} = 6t + 3h.$$

Подсчитаем средние скорости за промежутки времени h различной продолжительности, начиная, например, с момента времени $t = 1$:

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000001
$v_{ср}$	9	6,3	6,03	6,003	6,000003

Очевидно, что при уменьшении $h(h \to 0)$ значения средней скорости приближаются к значению $6t = 6 \cdot 1 = 6(6t + 3h \to 6t)$, т. е. $v_{ср} \to v(t) = 6t$.

При наличии времени с целью подготовки учащихся к осознанию сути понятия производной в точке, а также в перспективе к восприятию графического смысла производной, понятия средней и мгновенной скорости прямолинейного движения могут быть проиллюстрированы с помощью графиков зависимости пути от времени. Так, с помощью рисунка 41, *а* можно наглядно обосновать связь средней скорости движения на отрезке и «крутизны» графика функции $s = s(t)$ на этом отрезке. Рисунок 41, *б* иллюстрирует знакомое учащимся свойство постоянства средней и мгновенной скорости при равномерном прямолинейном движении. С помощью рисунка 41, *в* иллюстрируется поведение средней скорости точки (тангенса угла наклона секущей) за промежуток времени h (тем самым осуществляется пропедевтика геометрического смысла производной).

В начале в т о р о г о урока (возможно, в ходе проверки выполненного накануне дома упражнения **782**) повторяется запись разностного отношения, понятие производной функции $s(t)$, её обозначение и прочтение. Затем вводится общее определение производной функции в точке; понятия функций, дифференцируемых в точке и на промежутке; выполняется упражнение **780** (1). Задачи 2—4 разбираются на доске при участии школьников в их решении. Задача 5 может быть разобрана по тексту учебника; рассматривается (возможно, в ходе у с т н о й работы) применение формулы дифференцирования линейной функции.

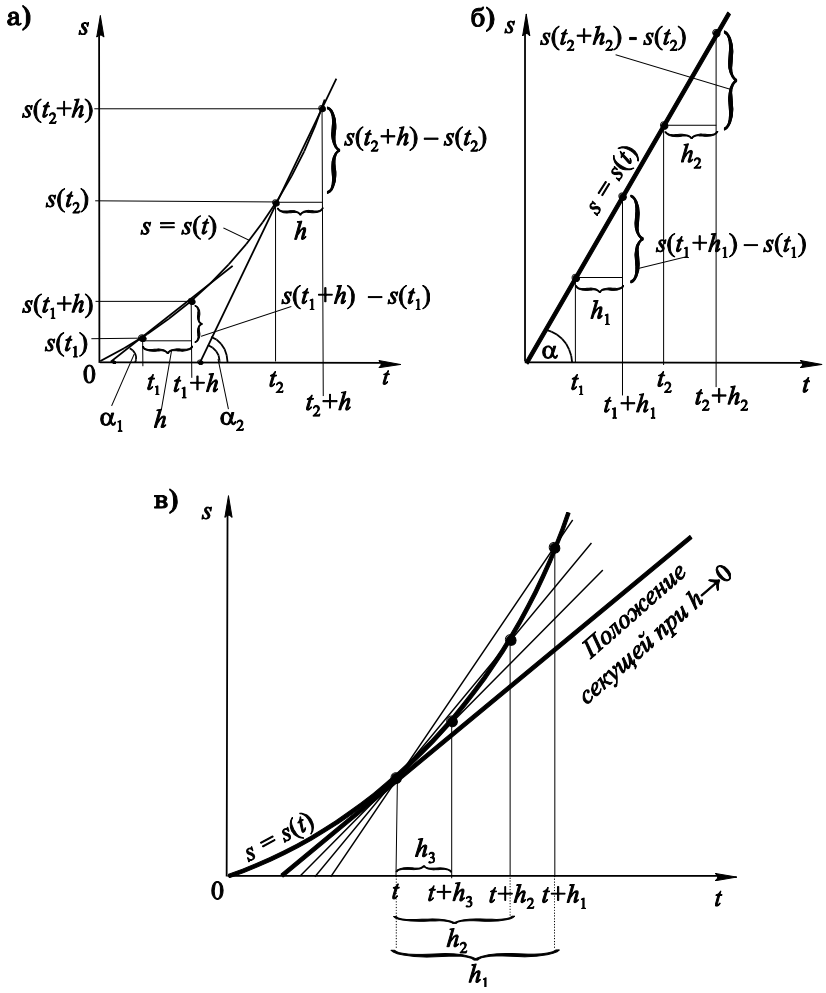


Рис. 41

Нахождение предела разностного отношения конкретной функции $f(x)$ учащиеся могут выполнять в три этапа:

1) найти разность $f(x + h) – f(x)$;

2) составить разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и найти его преобразованное выражение;

3) найти предел разностного отношения при $h \to 0$.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 44 (до с. 231)	776—779, 782, 783	779	784, 785, 786*
2	§ 44: определение производной, задачи 2—5, применение формулы $(kx + +b)' = k$	780, 781	Используя определение производной, найти $f'(x)$, если $f(x) = 6 - 5x$	

В классе углублённого уровня знакомство учащихся со строгим определением предела функции в точке, понятиями непрерывной функции в точке и на интервале (с. 231, упражнение **786**). Учителю следует иметь в виду, что при рассмотрении функции $y = |x|$ (с. 234 учебника) и при обосновании того, что в точке $x = 0$ эта функция не имеет производной, в неявном виде используется ссылка на теорему о единственности предела. Разностное отношение, составленное для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$, лучше записать с помощью символики, введённой в начале параграфа:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, \text{ если } h > 0, \\ -1, \text{ если } h < 0. \end{cases}$$

Для большинства учащихся в ситуации, когда теория пределов не рассматривается, отсутствие предела функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ (аналогично и функции $y = |\log_2 x|$ в точке $x = 1$) становится понятным на наглядно-интуитивном уровне после введения геометрического смысла производной в точке.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение и обозначение производной функции $f(x)$; иметь представление о механическом смысле производной; на основе интуитивного представления о пределе функции уметь находить производные функций в заданиях типа **780**. В классах углублённого уровня дополнительно — **784**, **785**.

§ 45. Производная степенной функции (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — введение формулы производной степенной функции $f(x) = x^p$ для любого действительного числа p; обучение использованию формул $(x^p)' = px^{p-1}$ и $((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$; развитие умений самостоятельно контролировать и корректировать свою деятельность.

В начале первого урока можно провести самостоятельную работу, проверяющую умение находить производные функций на основании определения производной (могут быть рассмотрены, например, производные функций $f(x) = 5 - 2x$ и $f(x) = -3x^2 + 1$). После анализа результатов её выполнения разбираются задачи 1 и 2 текста параграфа, записываются на доске (и в тетрадях учащихся) уже выведенные формулы производных функций x^2, x^3, x^{-1}, $x^{\frac{1}{2}}$ и делается обобщение для производной степенной функции x^p при любом действительном показателе p.

На втором уроке после разбора задачи 3 выполняются упражнения **791**, **792**, **793**(5), **796.**

Распределение учебного материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 45 до задачи 3	787—790	789 (3), 790 (5)	794—801
2	§ 45: задачи 3 и 4 (задача 5* — при наличии времени)	791— 793; ДМ § 45 № 14, 20	791 (3), 793 (5)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться применять формулы (1) и (2) из текста учебника при выполнении упражнений типа **790** и **792**, а также находить значение производной функции в точке при выполнении заданий типа **793**. В классах углублённого уровня дополнительно — **793**, **794**, **797**.

§ 46. Правила дифференцирования (3 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — овладение правилами дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, вынесения постоянного множителя за знак производной; развитие навыков самостоятельной познавательной деятельности.

Отработка навыка применения правил дифференцирования проводится в основном на степенных функциях, поэтому в устную работу в начале уроков по этой теме желательно включать задания, например, следующего содержания:

1. Найти производную функции x^8; $\sqrt[5]{x}$; $x^{-\frac{1}{3}}$.

2. Предварительно упростив аналитическую форму записи функции, найти её производную:

1) $f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{2}}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^5 \cdot x^{-1}}{3x^4}$; 4) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

Изучение темы проводится в соответствии с её изложением в учебнике, а распределить материал по урокам можно так:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 46, п. 1, задача 1; п. 2, задача 2	802—807	803 (7), 805 (3)	809, 818, 819, 822—829; ДМ § 46 № 22—26
2	§ 46, п. 3, задачи 3, 4	810—813, 820	813	
3	§ 46, задачи 5, 6	814, 815, 821	815	

В классе углублённого уровня рассматриваются п. 5 параграфа и примеры нахождения производной сложной функции, выполняются упражнения **816**, **817**, **830**.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться применять правила (1)—(4) при выполнении упражнений типа **806**, **811**, **814**. В классах углублённого уровня дополнительно — **818**, **820**, **822**.

§ 47. Производные некоторых элементарных функций (3 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения находить производные элементарных функций; развитие навыков самостоятельно контролировать и корректировать свою деятельность.

В начале первого урока может быть проведена самостоятельная работа (с проверкой в классе) по применению правил дифференцирования:

1. Найти производную функции:

1) $0{,}1x^2 + 3$; 2) $x^2(x - 1)$; 3) $\dfrac{x^3}{3 - x}$.

$\left[1)\ \dfrac{1}{3}x^6 - 5;\ 2)\ (x+1)x^3;\ 3)\ \dfrac{x}{1 - x^2}.\right]$

2. Найти $f(4)$ $[f(8)]$, если $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ $\left[f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right]$.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 47, пп. 1, 2	831, 832 (1—4), 833 (1—4), 834, 835(1—4)	833 (3), 835 (3)	840, 843 (1, 2, 3), 844, 845, 849—855; ДМ § 47 № 31—39
2	§ 47, пп. 3, 4 (до задачи 5)	836, 837 (1—3), 838, 839	836 (3)	
3	§ 47, задача 5	841, 842 и задание: «С помощью определения производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$»	841 (3)	

Если учащиеся имели возможность познакомиться с дифференцированием сложной функции, то при наличии времени выполняются упражнения **832**(5, 6), **833**(5), **835** (5, 6), **846—848**, **856**.

Если учитель считает, что навыки нахождения производных элементарных функций недостаточно сформированы, можно на изучение данной темы добавить 1 ч (уменьшив время, отводимое на обобщающее повторение главы). В конце последнего урока провести проверочную самостоятельную работу (15 мин).

1. Найти производную функции:

1) $\log_4 x + \sqrt{x}$; 2) $\ln x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}+3\right)$; 3) $\frac{\sin x}{e^{2x}}$.

$\left[1)\ \frac{1}{x^3}+\log_5 x;\ \ 2)\ 5^x\cdot\sin 3x;\ 3)\ \frac{\ln(3x+1)}{\cos x}.\right]$

2* (дополнительное). Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно, если $f(x) = e^{2x} \cdot \sqrt{x}$ [$f(x) = x\ln 6 - 6^x$].

Приведём решение задания 2.

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sqrt{x} + e^{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{2x} \cdot \frac{4x+1}{2\sqrt{x}}.$$

Так как $e^{2x} > 0$ при любом x, то $f'(x) > 0$, если $\begin{cases} x > 0, \\ 4x + 1 > 0, \end{cases}$

т. е. при $x > 0$.

[$f'(x) = \ln 6 - 6^x \ln 6 = (1 - 6^x) \ln 6$. Так как $\ln 6 > 0$, то $f'(x) > 0$, если $1 - 6^x > 0$, т. е. при $x < 0$.]

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать таблицу производных элементарных функций и правила дифференцирования (за исключением дифференцирования сложной функции) и уметь их применять при выполнении заданий типа **838**, **839**. В классах углублённого уровня дополнительно — **843**, **851**, **853**.

§ 48. Геометрический смысл производной (3 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с геометрическим смыслом производной, обучение составлению уравнения касательной к графику функции в заданной точке.

На всех уроках при изучении этой темы следует закреплять навыки нахождения производных элементарных функций, для чего могут быть использованы упражнения типа **869—873**. На первом уроке (до изучения материала параграфа) желательно выполнить следующее задание:

Построить график функции: 1) $y = \frac{1}{2}x - 1$; 2) $y = -2x + 1$.

Найти тангенс угла, образованного построенной прямой с осью Ox. Выяснить, является ли эта функция возрастающей, убывающей.

Объяснение нового материала следует вести в соответствии с текстом учебника, причём рисунки, аналогичные рисункам 110 и 111 учебника, должны быть обязательно выполнены учителем на доске, а рисунок 111 должен быть перенесён учащимися в тетради.

Уравнение касательной в общем виде выводится после рассмотрения задачи 2 текста параграфа. Желательно (особенно слабым учащимся) при составлении уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 придерживаться следующего алгоритма:

1) вычислить $f(x_0)$;

2) найти $f'(x)$;

3) вычислить $f'(x_0)$;

4) записать в общем виде уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и в него подставить заданное значение x_0 и вычисленные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, затем полученное уравнение преобразовать к виду $y = kx + b$.

На третьем уроке может быть проведена проверочная самостоятельная работа (10—15 мин) с заданием.

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - x$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \ln(3x - 2)$, $x_0 = 1$.

[1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \ln(-2x + 3)$, $x_0 = 1$.]

После усвоения учащимися геометрического смысла производной учитель может провести беседу о функциях, не имеющих производной в некоторых точках своей области определения.

Например, можно сообщить учащимся (не изучавшим строгого определения предела функции), что функция $y = |x|$ не имеет в точке $x = 0$ производной, и этот факт иллюстрируется отсутствием касательной к графику функции в этой точке (можно рассмотреть рисунок 104 учебника и наглядно обосновать отсутствие производной у функции $y = |\log_2 x|$ в точке $x = 1$). Полезно в русле этой беседы рассмотреть график функции (рис. 103), не являющейся непрерывной в точке $x = c$ и не имеющей в ней производной. Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 48 до задачи 2	857—859, 861	859 (3)	864—868; ДМ § 48 № 19—22
2	§ 48 до задачи 4*	860, 862, 863	860 (3)	
3	Задача 4*	868 и задание: «Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если: 1) $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = 2 \ln x$, $x_0 = e$»		

В результате изучения параграфа все учащиеся должны усвоить геометрический смысл производной и научиться записывать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 в упражнениях, аналогичных **860**. В классах углублённого уровня дополнительно — **864**, **866**.

Уроки обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

Повторение теоретического материала главы желательно проводить при непосредственном применении его в практических ситуациях. Так, например, повторение физического и геометрического смысла производной можно провести совместно, используя график движения точки на прямолинейном участке пути (рис. 42).

Рис. 42

По этому графику можно задавать вопросы, связанные с определением средней скорости на различных участках пути, а также задания на сравнение мгновенных скоростей в различные моменты времени. Знание определения понятия производной учащиеся должны продемонстрировать в процессе нахождения «по определению» производной какой-либо конкретной функции (например, функции $f(x) = x^2 - 3x$).

На первом уроке обобщения формулы производных элементарных функций и правил дифференцирования, написанные на плакате, могут быть вывешены для обозрения. На втором уроке плакат следует убрать и потребовать от учащихся уверенного применения всех изученных формул.

На уроках обобщающего повторения выполняются ранее не решённые задания из раздела «Упражнения к главе VIII» и из главы VIII «Дидактических материалов».

Обязательный уровень усвоения темы проверяется в ходе выполнения учащимися блока заданий «Проверь себя!». Упражнения **874**, **879** и **881** выполняются, если учащиеся знакомились с дифференцированием сложной функции.

Глава IX. Применение производной к исследованию функции

Цель изучения этой главы двоякая. С одной стороны, нужно показать учащимся, что с помощью производной можно аналитически установить много важных свойств функции. С другой стороны, показать, как, используя производную, строить графики функций более сложных, чем те, которые упомянуты в программе (графики которых строятся без применения производной).

Реализуя первую цель, естественно установить, о чём может «говорить» производная функции, и тем самым рассмотреть этот вопрос с общих позиций.

Итак, если производная функции существует в каждой точке некоторого промежутка, т. е. функция дифференцируема на нём, то она непрерывна на этом промежутке; обратное утверждение неверно, простейший пример тому $y = |x|$ — непрерывная функция, не имеющая производной в точке $x = 0$.

Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ на этом промежутке возрастает; если $f'(x) < 0$ — убывает.

Если функция дифференцируема в окрестности некоторой точки и имеет в этой точке производную, равную нулю, то данная точка является точкой максимума, или минимума, или точкой перегиба.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называют стационарными; точки, в которых $f'(x) = 0$ или в которых функция недифференцируема, называют критическими. Функция может иметь экстремум в точке, в которой она не имеет производной, например $y = |x|$ в точке $x = 0$.

В учебнике определение вида экстремума связано с переменой знака производной функции при переходе через точку экстремума. Желательно показать учащимся, что это можно сделать проще — по знаку второй производной: если $f''(x) > 0$ в этой стационарной точке, то данная точка есть точка минимума; если $f''(x) < 0$, то данная точка — точка максимума; если $f''(x) = 0$, то точка x есть точка перегиба (в § 53 вторая производная рассмотрена подробно).

Кроме критических точек, важное значение имеют точки разрыва функции, например точка $x = 0$ для функции $y = \frac{1}{x}$, нули функции, т. е. точки, где $f(x) = 0$, а также точка $x = 0$. Если область определения функции состоит из нескольких промежутков, то полезно рассматривать граничные точки, т. е. концы промежутков.

В § 51 приведена схема исследования основных свойств функции, предваряющих построение её графика.

В большинстве случаев полезно найти нули функции и отметить их на числовой прямой, а также провести вертикальные прямые через концы

промежутков, входящих в область определения функции (если она состоит из отдельных промежутков). Вертикальные прямые можно провести и через точки, где функция не существует (например, корни знаменателя дроби).

После нахождения производной следует найти стационарные точки и точки, где производная не существует (и может быть, также провести через них вертикальные прямые). При определении точек экстремума нужно обязательно находить значения функции в этих точках; в ряде упражнений требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке, для чего приходится сравнивать значения функции в точках экстремума с её значениями на концах данного отрезка.

Если речь идёт о построении графика функции, заданной многочленом n-й степени, полезно знать, что отсутствие свободного члена у многочлена означает, что график функции проходит через начало координат; кроме того, полезно знать, что количество стационарных точек меньше показателя степени многочлена (его производная является многочленом уже (n–1)-й степени).

Предметные цели изучения главы:

— формирование представлений о месте математического анализа в современной науке, способах описания реальных процессов и явлений на языке математического анализа;

— развитие умений применять производную при исследовании функций: нахождении промежутков монотонности, экстремума, наибольшего (или наименьшего) значений функции на отрезке, проводя при этом доказательные рассуждения;

— формирование умений строить графики функций с применением понятия производной (для классов углублённого уровня — и второй производной);

— развитие умений решать прикладные задачи (в частности, на оптимизацию) с применением элементов дифференциального исчисления.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умений самостоятельно определять цели деятельности при исследовании функций и реальных процессов;

— развитие способностей к самостоятельному поиску методов и информационных материалов для решения прикладных задач;

— развитие умений ясно, логично и точно излагать свою точку зрения как в устной, так и в письменной форме.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню науки и общественной практики;

— формирование основ самовоспитания, готовности к самостоятельной творческой деятельности;

— развитие навыков сотрудничества со сверстниками и взрослыми в процессе учебной, исследовательской, общественно-полезной деятельности.

В результате изучения IX главы все учащиеся должны знать, какие свойства функций исследуются с помощью производной (из тех, которые рассмотрены в учебнике), и уметь их применять при построении графиков и решении задач типа **956—965** и из рубрики «Проверь себя!». В классах углублённого уровня дополнительно — **970—973**.

§ 49. Возрастание и убывание функции (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению достаточных условий возрастания и убывания к нахождению промежутков монотонности функции; формирование навыков учебно-познавательной деятельности.

В начале первого урока повторяются определения возрастающей и убывающей на промежутках функций: «Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т. е. для любых x_1 и x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$)».

Учащиеся по виду графика функции должны научиться выявлять промежутки её возрастания и убывания. Так, например, по графику функции $y = f(x)$, представленному на рисунке 43, учащиеся должны определить, что функция возрастает на промежутках $x < 0$ и $x \geq 2$, убывает на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

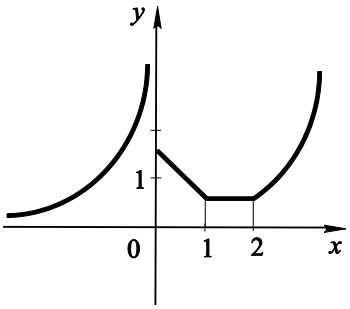


Рис. 43

При наличии времени можно предложить доказательство факта возрастания функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на интервале $x > 1$, используя определение возрастающей функции (впоследствии в задаче 1 этот факт будет доказан с привлечением производной, и учащиеся смогут оценить достоинства аппарата математического анализа при исследовании функций).

Пусть $x_2 > x_1 > 1$.

$$f(x_2) - f(x_1) =$$

$$= x_2 + \frac{1}{x^2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) = (x_2 - x_1) - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = (x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2} \right) > 0,$$

так как $x_2 - x_1 > 0$ (по предположению $x_2 > x_1$), а $x_1 x_2 > 1$ (по условию $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$), откуда $0 < \frac{1}{x_1 x_2} < 1$, и, значит, $1 - \frac{1}{x_1 x_2} > 0$.

Пояснение смысла теоремы Лагранжа можно сопровождать рассуждениями о движении «сверху вниз» прямой m (рис. 44), параллельной секущей AB и не имеющей общих точек с частью графика дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

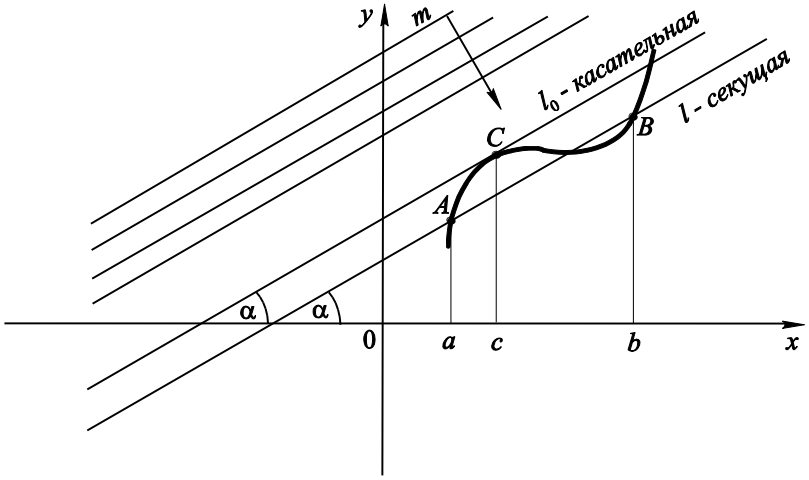


Рис. 44

При перемещении такой прямой m в направлении к секущей AB фиксируется первая общая с рассматриваемой частью графика функции точка (на рисунке это точка C) и положение прямой l_0, проходящей через эту точку. Из рисунка видно, что точка C (с абсциссой c) — точка касания прямой l_0 с графиком функции $y = f(x)$. Если α — угол, который образует секущая AB с осью Ox, и соответственно угол между касательной l_0 и осью Ox, то согласно геометрическому смыслу производной

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то на этом интервале существует по крайней мере одна точка c, такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, откуда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Предполагается, что понятие *достаточности* условия должно быть понятно учащимся на интуитивно-бытовом уровне (для покупки карандаша стоимостью три рубля пяти рублей *достаточно*, а двух рублей *недостаточно*). Учащиеся должны, к примеру, понимать, что для утверждения того факта, что на интервале $(a; b)$ дифференцируемая на этом интервале функция $f(x)$ возрастает, достаточно (вполне достаточно) показать, что $f'(x) > 0$ на $(a; b)$.

Напомним, что условия, без выполнения которых утверждение A заведомо не может быть верным, называются *необходимыми условиями*, а условия, при выполнении которых утверждение A заведомо верно, — *достаточными условиями*.

Теоретический материал параграфа и задачу 1 желательно разобрать на одном уроке, а оставшееся время посвятить практическому использованию теоремы 2 и ей аналогичной для случая убывания функции.

Приведённые после задачи 2 рассуждения о расширении интервалов монотонности до промежутков и отрезка в данном курсе строго не могут быть обоснованы, а делаются исходя из вида графика конкретной функции.

При выполнении упражнения **902** (1) появляется возможность вернуться к формулировке теоремы 2 и исключить в дальнейшем ошибочные высказывания учащихся. Так, в этом задании $y = \dfrac{1}{x+1}$, $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ — и очевидно, что $y' < 0$ для всех x из области определения ($x \neq -1$). Правильно говорить в данном случае, что функция убывает на каждом из двух интервалов, составляющих её области определения, т. е. функция убывает при $x < -1$ и при $x > -1$.

Распределение материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 49 до задачи 2	899		902—909, ДМ § 49 № 14, 15, 17, 19
2	§ 49 от задачи 2	900, 901	900 (5)	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны по графику функции выявлять промежутки её возрастания и убывания; находить интервалы монотонности функции, заданной аналитически, исследуя знаки её производной в заданиях типа **900**. В классах углублённого уровня дополнительно — **903**, **905**, **906**.

§ 50. Экстремумы функции (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с понятиями точек экстремума функции, стационарных и критических точек, с необходимым и достаточным условиями экстремума функции; обучение нахождению точек экстремума функции; развитие навыков самостоятельно корректировать свою деятельность.

Отталкиваясь от графика функции $y = x^3 - 3x^2$, изображённого на рисунке 123 учебника, вводятся определения точки максимума и точки минимума функции. Заметим, что для облегчения усвоения учащимися курса анализа в учебнике под точкой максимума (минимума) понимается точка *собственного* максимума (минимума), тогда как в строгом курсе анализа для того, чтобы точка x_0 была точкой максимума (минимума), требуется выполнение условия $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) для всех x из некоторой окрестности точки x_0.

Сообщается обобщённое название точек максимума и минимума («точки экстремума»), после чего по рисунку 130 (возможно, заранее продублированному учителем на доске или ПК) выполняется упражнение **910**, которое полезно дополнить следующими заданиями:

1. Для каждой найденной точки максимума (минимума) x_i указать какую-нибудь окрестность точки x_i, в которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_i)$ ($f(x) > f(x_i)$).

2. Объяснить, почему, например, точки $x = 1$, $x = 1{,}5$ не являются точками экстремума функции $f(x)$.

3. Как расположены касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках экстремума?

4. Найти $f'(-5)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ (при нахождении $f'(0) = 0$ обращается внимание на то, что $x = 0$ не является точкой экстремума).

5. Есть ли на отрезке [2; 6] значения x, для которых $f'(x) = 0$?

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума) иллюстрируется с помощью рисунков 126, 124, 125 и 127 учебника, после чего делается вывод о том, что точки максимума и минимума следует искать среди тех точек, в которых производная равна нулю, однако не всегда точка, в которой производная обращается в нуль, является точкой экстремума (точки $x = 0$ на рисунке 127 и $x = 0$ на рисунке 130 не являются точками экстремума, хотя в них производные рассматриваемых функций обращаются в нуль).

После введения понятий стационарных и критических точек выполняются упражнения **911—913** и рассматривается без доказательства достаточное условие экстремума (доказательство теоремы на с. 268 с использованием указания учебника можно предложить сильным учащимся для домашней работы).

После рассмотрения задач 1 и 2 учащиеся должны понять, что точки экстремума находятся с помощью знакомой им задачи нахождения интервалов возрастания и убывания функции.

В начале уроков изучения этой темы закрепляются навыки нахождения производных, повторяется решение различных уравнений и решение квадратных неравенств. Возможно повторение метода интервалов, которому при изучении следующего параграфа уделяется значительное внимание. Задания на актуализацию знаний при изучении § 50 могут быть выбраны из следующих:

1. Найти производную функции:

1) $3x^4 - 2x + 5$; 2) e^{-2x+1}; 3) $x^2 \cdot \sin x$.

2. Найти значения x, при которых значение $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = 5x^2 + 3x$; 2) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$;

3) $f(x) = xe^x$; 4) $f(x) = \sqrt{3-x}$.

3. Решить неравенство:

1) $15x + 1 > 0$; 2) $x(3 - x) > 0$; 3) $x^2 - 5x + 6 > 0$;

4) $x^2 - 5x + 6 < 0$; 5) $\frac{x-1}{x} < 0$; 6) $(x + 2)e^x > 0$.

Распределение материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 50 до последнего абзаца на с. 267	910—912, 913 (1, 2)	912 (3)	918 (3, 4), 919, 920 (1—4), 921, 922; ДМ § 50 № 16, 17, 24, 26, 27
2	§ 50: достаточное условие экстремума, задачи 1 и 2	914—917	915 (3)	

Приведём пример оформления решения стандартной задачи на нахождение точек экстремума и значений функции в этих точках. При оформлении решения задач этого типа можно использовать знак «+», обозначающий возрастание функции, и знак «–», который обозначает убывание функции на определённом промежутке.

915. 1) $y(x) = x^3 - 3x^2$, $y'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $y'(0) = 0$, когда $3x(x - 2) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (рис. 45). $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$, $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$.

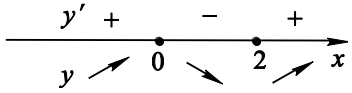


Рис. 45

Ответ: $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 0$; $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = -4$.

Если в классе изучалось нахождение производной сложной функции, могут быть выполнены и упражнения **913** (3, 4), **918** (1, 2), **920** (5, 6).

В конце третьего урока может быть проведена проверочная самостоятельная работа (15—20 мин).

1. Найти стационарные точки функции

$$y = \sin\frac{x}{2} \quad [y = \operatorname{tg} 2x].$$

2. Найти точки экстремума функции

$$y = \frac{2}{x} + \frac{x}{3} \qquad \left[y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right].$$

3. Найти точки экстремума и значения функции $f(x)$ в точках экстремума, если $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ $[f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}]$.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определения точек максимума и минимума, стационарных и критических точек; уметь применять необходимые и достаточные условия экстремума для нахождения точек экстремума функции при решении заданий типа **914**, **915**. В классах углублённого уровня дополнительно — **920**.

§ 51. Применение производной к построению графиков функций (2 / 4 ч)

Цель изучения параграфа — обучение построению графиков функций с помощью производной; развитие умений самостоятельно контролировать и корректировать деятельность в ходе решения задач на исследование функций.

В начале первого урока по готовому чертежу (аналогичному представленному на рисунке 130 учебника) учащиеся называют точки экстремума функции, озвучивают необходимое и достаточное условия экстремума функции в точке. До рассмотрения задачи 1 текста параграфа можно выполнить упражнения **923—925**.

Повторение применения метода интервалов можно провести в ходе решения на в т о р о м уроке следующих неравенств:

1) $(x-5)(x+2)>0$; 2) $(x-5)(x+2)<0$;

3) $(7-x)\left(x+\frac{1}{3}\right)>0$; 4) $(7-x)\left(x+\frac{1}{3}\right)<0$;

5) $(2x-1)(x+3)(x-4)\le 0$; 6) $\frac{(x-6)(x+3)}{x-2}\ge 0$;

7)* $(x+3)^2(x-2)>0$; 8)* $(x-4)^3(x+1)<0$.

Изучение материала параграфа проводится в соответствии с текстом учебника; построение графиков функций, предложенных в упражнениях, ведётся по алгоритму, сформулированному на с. 272 учебника. При выполнении п. 4 этого алгоритма следует иметь в виду, что если полученная в п. 2 производная — линейная или квадратичная функция, то её знак определяется на основании известных свойств функции. В более сложных случаях знак производной на интервалах определяется либо с помощью метода интервалов, либо по знаку производной в одной из произвольно выбранных точек рассматриваемого интервала. Запись в тетрадях учащихся (и на доске) при выполнении построения графика функции с помощью производной может быть следующей:

930. 1) $y=f(x)=2+5x^3-3x^5$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

2) $f'(x)=15x^2-15x^4=15x^2(1-x^2)=15x^2(1-x)(1+x)$.

3) $f'(x)=0$, $15x^2(1-x)(1+x)=0$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$ (рис. 46).

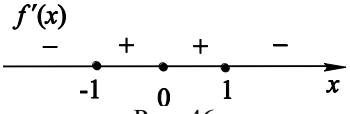


Рис. 46

4) $f'(2)=15\cdot 2^2(1-2)(1+2)<0$,

$f'(0{,}5)=15\cdot 0{,}5^2(1-0{,}5)(1+0{,}5)>0$,

$f'(-0{,}5)=15(-0{,}5)^2(1+0{,}5)(1-0{,}5)>0$,

$f'(-2)=15(-2)^2(1+2)(1-2)<0$.

5) $x=-1$ — точка минимума,

$f(-1)=2+5(-1)^3-3(-1)^5=2-5+3=0$;

$x=0$ не является точкой экстремума, $f(0)=2$;

$x=1$ — точка максимума,

$f(1)=2+5\cdot 1^3-3\cdot 1^5=2+5-3=4$.

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	–	0	+	0	+	0	–
$f(x)$	↘	0	↗	2	↗	4	↘

Дополнительные точки:
$f(-2) = 2 + 5(-2)^3 - 3(-2)^5 = 2 - 40 + 96 = 58$;
$f(2) = 2 + 5(2)^3 - 3 \cdot 2^5 = 2 + 40 - 96 = -54$ (рис. 47).

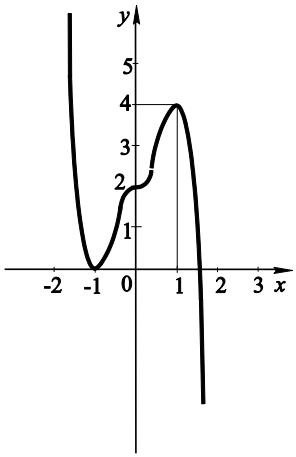


Рис. 47

Как показывает практика, многим учащимся (особенно слабым) при построении графика помогает следующий приём. После того как они отмечают на координатной плоскости точки экстремумов, сразу через эти точки проводятся маленькие дуги: «выпуклая вверх» для точек максимума и «выпуклая вниз» для точек минимума.

Учащиеся должны понимать, что предложенная им схема построения графиков функций не является универсальной; например, в задаче 3 параграфа после выявления того, что заданная функция нечётная, упрощаются исследование функции и построение её графика. Стоит подчеркнуть, что не имеет смысла использовать производную для построения графиков элементарных функций («основных» и полученных из «основных» либо сдвигом вдоль координатных осей, либо их сжатием к осям или растяжением).

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 51, задача 1, схема исследования функции	923—926		929—935; ДМ § 51 № 7—9
2	§ 51, задача 2	927, 928	927 (3)	

На последнем уроке в классе углублённого уровня может быть проведена проверочная самостоятельная работа (15—20 мин), например, следующего содержания:

1. Построить график функции
$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ [$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$].

2. Построить график функции $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sqrt{x}$ $\left[f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right]$ на отрезке [0;16] [[1;16]].

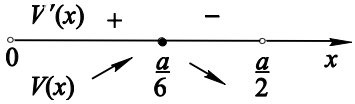
В результате изучения параграфа все учащиеся должны научиться строить график функции с помощью производной в заданиях типа **926—928**. В классах углублённого уровня дополнительно — **929**, **932**, **934**.

§ 52. Наибольшее и наименьшее значения функции (3 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению производной к нахождению наибольшего и наименьшего значений функций при решении прикладных задач «на экстремум»; формирование умений анализировать поставленную проблему и применять полученные выводы.

После мотивации изучения данной темы с помощью рисунка 135 учебника и построенных графиков функций упражнения **928** находятся наибольшее и наименьшее значения конкретных функций. Далее формулируется алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a; b]. Разбираются задачи 1, 2, выполняются упражнения **937**, **938**, **944.** В результате рассмотрения п. 2 можно алгоритмизировать процесс решения прикладных задач «на экстремум»:

№	Алгоритм решения прикладных задач «на экстремум»	Решение задачи **948**
1	Выявить величину, наименьшее (наибольшее) значение которой требуется найти	V — объём коробки
2	Ввести переменную, через которую выражается величина, указанная в п. 1	x — высота коробки

3	Указать допустимые значения введённой в п. 2 переменной	$0 < x < \frac{a}{2}$
4	Записать величину из п. 1 как функцию введённой в п. 2 переменной	Так как коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a - 2x$, $a - 2x$, x, то $V(x) = x(a - 2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$
5	Найти наибольшее (наименьшее) значение функции, введённой в п. 4, или точку, в которой оно достигается на заданном в п. 3 интервале  Рис. 48	$V'(x) = 12x - 8ax^2 + a^2$, $V(x) = 0$, когда $12x - 8ax + a^2 = 0$, откуда $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$. Наибольшее значение (см. рис. 48) на интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ функция $V(x)$ принимает при $x = \frac{a}{6}$. Ответ: $\frac{a}{6}$.

Распределение материала по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 52, п. 1	936—938	938 (1)	944—952; ДМ § 52 № 17—20
2	§ 52, п. 2	939—941		
3	§ 52, п. 2, 3	942, 943, 947, 948	Проверочная самостоятельная работа	

На последнем уроке при изучении темы можно провести проверочную самостоятельную работу (15—20 мин).

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5 \; [f(x) = x^4 - 18x^2 + 30]$$

на отрезке [–3; 2] [[–4; 3]].

2. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ $\left[f(x) = \frac{x^2}{e^x}\right]$ на интервале $x > 1$ [$x > 0$].

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь находить наибольшее и наименьшее значения функции в уп-

ражнениях типа **938**, **939** и применять полученное умение при решении задач типа **940**, **942**. В классах углублённого уровня дополнительно — **947—949**.

§ 53*. Выпуклость графика функции, точки перегиба (1 / 3 ч)

Цель рассмотрения параграфа — знакомство с производными высших порядков и применением второй производной к нахождению интервалов выпуклости дифференцируемой функции и точек перегиба.

Материал рассматривается в соответствии с текстом учебника. Приобретённые при его рассмотрении знания позволяют учащимся проводить более детальное, чем это делалось до сих пор, исследование функции. Например, можно вернуться к построению графика функции в упражнении **930** (1) (см. его решение в § 51 этого пособия) и дополнить исследование функции нахождением интервалов выпуклости и точек перегиба:

$$f''(x) = (f'(x))' = (15x^2 - 15x^4)' = 30x - 60x^3 = 30x(1 - 2x^2);$$

$$f''(x) = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При этом можно составить вторую (первая приведена в § 51) таблицу свойств функции.

x	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\cup$	$\approx 0{,}8$	$\cap$	2	$\cup$	$\approx 3{,}2$	$\cap$

Построение графика производится после того, как будут отмечены точки экстремума и точки перегиба.

Если учитель захочет, может предложить вместо двух таблиц исследования функции одну сводную.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	–	0	+	+	+	0	+	+	+	0	–
$f''(x)$	+	+	+	0	–	0	+	0	–	–	–
$f(x)$		0		$\approx 0{,}8$		2		$\approx 3{,}2$		4	
		max		перегиб		перегиб		перегиб		min	

При рассмотрении материала параграфа в течение 2—3 ч можно потребовать от учащихся самостоятельного выполнения заданий типа **954** (1, 2), **955** (1, 2).

Урок обобщения и систематизации знаний (1 / 2 ч)

Основные понятия и теоремы, рассмотренные в IX главе, желательно повторить как на уровне произнесения их определений и формулировок, так и в ходе непосредственного применения при решении упражнений. Для отработки практических навыков используются «Упражнения к главе IX», а также задания главы IX из «Дидактических материалов». Учителю следует иметь в виду, что в «Дидактических материалах» в компактной форме и наглядно представлены справочные сведения по всему теоретическому материалу, которыми удобно пользоваться на уроках обобщающего повторения.

Глава X. Интеграл

В главе VIII рассматривается как механический, так и геометрический смысл производной; на языке функций и их графиков он раскрывался в идее линеаризации: замена криволинейного участка графика прямолинейным означала замену неравномерного движения равномерным, а также замену некоторой дуги кривой отрезком касательной. Та же идея реализуется и при рассмотрении интеграла.

С точки зрения механики скорость прямолинейного движения определяется как производная пути по времени: если некоторая точка прошла путь $s(t)$, то её мгновенная скорость $v(t) = s'(t)$. Если теперь рассмотреть обратную задачу — нахождения пути, пройденного точкой с заданной скоростью, то придём к функции $s(t)$, которую называют первообразной функции $v(t)$, т. е. такой функцией, что $s'(t) = v(t)$. Так как производная постоянной равна нулю, то первообразная определяется с точностью до постоянной. Например, $(x^2)' = 2x$ и $(x^2 + 3)' = 2x$, и поэтому первообразной функции $y = 2x$ является функция $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Если скорость меняется по закону $v = v(t)$ и её графиком является некоторая кривая (рис. 49), то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t;\ t + h]$, приближённо равен площади заштрихованного прямоугольника со сторонами $v(t)$ и h, т. е. $v(t) \cdot h$. Точное значение пути $s(t)$ будет равно площади криволинейной трапеции, образованной кривой $v(t)$, осью Ox и ординатами $v(t)$ и $v(t + h)$.

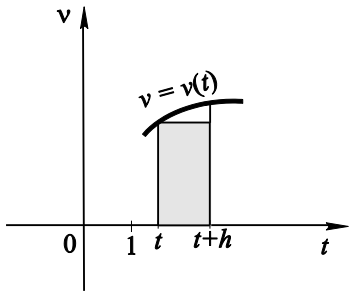


Рис. 49

Если в заданную кривую $v(t)$ вписать некоторую ломаную, то $s(t)$ можно вычислить с лучшим приближением (чем в случае $v(t) \cdot h$), заменив площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольников разбиения. Чем меньше будет основание прямоугольников, тем ближе сумма их площадей будет выражать площадь криволинейной трапеции. Так процесс линеаризации приводит к понятию определённого интеграла.

Учебный материал главы строится так: сначала определяется операция интегрирования как операция, обратная дифференцированию, и вво-

дится понятие первообразной; при этом не вводится ни определение неопределённого интеграла, ни его обозначение. Таблица правил интегрирования (т. е. таблица первообразных), естественно, в этом случае получается из таблицы производных. Формулируется, что все первообразные для функции $f(x)$ выражаются как $F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная, найденная в таблице. Этот факт строго не доказывается, а только поясняется.

Связь между первообразной и площадью криволинейной трапеции устанавливается формулой Ньютона—Лейбница. Далее возникает определённый интеграл как предел интегральной суммы, при этом также оказывается справедливой и формула Ньютона—Лейбница. Таким образом, эта формула является главной: с её помощью вычисляются определённые интегралы и находятся площади криволинейных трапеций.

Простейшие дифференциальные уравнения и применение производной и интеграла к решению физических задач (§ 59) даются в ознакомительном плане.

Предметные цели изучения главы:

— формирование представлений о математике как части мировой культуры, о способах описания на языке математического анализа явлений реального мира;

— введение понятия первообразной и обучение нахождению первообразной, как действию, обратному нахождению производной;

— введение понятия криволинейной трапеции и формирование умений применять формулу Ньютона—Лейбница для вычисления площади криволинейной трапеции;

— формирование представлений об определённом интеграле как важнейшей математической модели, позволяющей изучать явления смежных дисциплин (геометрии, физики, химии и пр.) и реальные процессы.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умения самостоятельного определения цели деятельности в ходе применения определённого интеграла при решении практических задач;

— развитие способностей к самостоятельной информационно-познавательной деятельности умений использовать различные источники информации для расширения знаний по применению математического анализа;

— развитие умений ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, обосновывая решения задач и доказательства теорем.

Личностные цели изучения главы:

— продолжение формирования мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;

— формирование стремления к самообразованию на протяжении всей жизни;

— формирование направленности учащихся на осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации жизненных планов.

В результате изучения главы X все учащиеся должны знать правила нахождения первообразных основных элементарных функций, формулу Ньютона—Лейбница и уметь их применять к вычислению площадей криволинейных трапеций при решении задач типа **1033**, **1035** (1, 2) и из рубрики «Проверь себя!» (задания 1, 2, 4 (1)). В классах углублённого уровня дополнительно — **1038**.

§ 54. Первообразная (2 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием первообразной, обучение нахождению первообразной степенной функции; развитие навыков познавательной деятельности.

Изучение материала параграфа полезно начать с повторения понятия производной и её физического смысла на примере задачи о мгновенной скорости (можно использовать задачи **779**, **782**, **783**). Далее, следуя тексту учебника, поставить задачу о нахождении закона движения по данному закону изменения скорости и перейти к определению первообразной и задаче 1. Упражнения **983** и **984** аналогичны задаче 1 и способствуют формированию первых представлений учащихся о первообразной.

Строгое доказательство того факта, что если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке, то на этом промежутке $F(x) = C$, где C — постоянная, выходит за рамки программы средней школы. Поэтому данное утверждение поясняется, опираясь на геометрический смысл производной (для большей наглядности можно использовать рисунок 126 учебника).

После задачи 1 в учебнике неявно приводится доказательство утверждения, сформулированного в предпоследнем абзаце на с. 292, в котором говорится, что первообразная функции на некотором промежутке определяется неоднозначно. Затем рассматривается расположение графиков первообразных и решается задача 2 текста учебника (после которой полезно выполнить упражнение **986** (1)).

В задаче 3 приводится вывод формулы для нахождения первообразной степенной функции, и эта задача должна быть решена всеми учащимися. Далее можно выполнить упражнения **985** и **986** (2), решение которых может быть записано, например, следующим образом:

$f(x) = \sqrt{x}$, следовательно, $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$. По условию график $F(x)$ проходит через точку M (9; 10), т. е. $F(9) = 10$, $\dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 10$, $18 + C = 10$, $C = -8$, $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

К упражнениям учебника можно добавить, например, такие:

1. Для функции $f(x) = -x^{-3}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; 2)$.

2. Тело движется прямолинейно, его скорость задаётся формулой $v(t) = 1 + 3t$. Найти закон, которым выражается движение этого тела, если в момент времени $t = 4$ тело находилось на расстоянии 20 единиц от начала движения.

На втором уроке можно предложить самостоятельную работу, которую следует проверить непосредственно после выполнения:

1. Показать, что функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ $\left[F(x) = \frac{x^7}{7}\right]$ является первообразной функции $f(x) = x^3$ $[f(x) = x^6]$ на всей числовой прямой.

2. Найти все первообразные для функции

$f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ $\left[f(x) = x^{\frac{3}{4}}\right]$.

3. Для функции $f(x) = x^2$ $\left[f(x) = \frac{1}{x^2}\right]$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; 2)$ [A (0,5; 4)].

Распределение материала параграфа по урокам может быть различным: либо лекция (1 ч) и практическое занятие (1 ч), либо так, как отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 54 задачи 1, 2	983, 984	983 (1)	987; ДМ § 54 № 5, 6
2	§ 54 задачи 1, 2, 3	985, 986	В тексте	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение первообразной и выполнять такие упражнения, как **983**, **986**. В классах углублённого уровня дополнительно — **987**.

§ 55. Правила нахождения первообразных (3 / 2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием интегрирования и обучение применению правил интегрирования при нахождении первообразных; развитие навыков самостоятельного поиска решения задач.

Изучая материал параграфа, учащиеся знакомятся с таблицей первообразных элементарных функций и двумя правилами интегрирования. Повторение формул для нахождения производных полезно провести при проверке таблицы первообразных. При этом следует сразу обратить внимание учащихся на тот факт, что первообразная и функция во всех рассмотренных примерах определены на одном и том же промежутке, т. е. функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на том промежутке, где они обе определены. Это важно, в частности, для правильного понимания того, что первообразная функции $f(x) = \frac{1}{x}$ дана лишь для $x > 0$.

Конечно, учитель вправе говорить и о случае отрицательных значений x и дать общую формулу $\ln |x| + C$. Однако не следует требовать от всех учащихся умения пользоваться этой формулой: в учебнике рассмотрен более простой случай.

Вторая половина таблицы первообразных сложнее для применения и запоминания, поэтому возможно при решении упражнений пользоваться учебником или вынести всю таблицу на плакат. Желательно вновь обратить внимание учащихся на функцию $f(x) = e^x$, её производную, а теперь и первообразную и пояснить, что это свойство предопределяет важную роль данной функции в решении многих практических задач (подробнее они смогут узнать из § 59).

На конкретных примерах можно показать, что правило нахождения первообразной функции, представленной в виде суммы функций, верно для суммы не только двух слагаемых, но и трёх и более. Например, можно выполнить следующее у п р а ж н е н и е:

Найти первообразные функции:

1) $3x^2 + 2x - 1$; 2) $2 + 3e^x + 4\cos x$; 3) $4\sqrt{x} + \sin 2x - x^4 - 3$.

Затем проверить результат решения дифференцированием. Выполняя упражнения учебника, периодически проверять результат дифференцированием: при этом учащиеся не только повторяют изученный материал, но и глубже осознают связь двух операций.

На последнем уроке по теме можно предложить с а м о с т о я т е л ь н у ю проверочную работу:

1. Найти все первообразные функции:

а) $x^5 - 2x$; б) $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}$; в) $2\sin x + x^2$.

[а) $x^6 + 3x^2$; б) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$; в) $3\cos x - x$.]

2. Для функции $f(x) = 2x + 3$ [$f(x) = 4x - 1$] найти первообразную, график которой проходит через точку M (1; 2) [M (–1; 3)].

---

3. Найти первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 2(x + 1)^3$ $\left[f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + 4(x-1)^5 \right]$, если $F(0) = 0$ [$F(0) = 1$].

4*. Скорость прямолинейного движения материальной точки задаётся формулой $V(t) = (3t + 2\sqrt{t})$. Найти закон движения точки, если $S(1) = \frac{11}{6}$. (Последнее задание работы не является обязательным.)

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 55, задачи 1, 2	988, 989	989 (1, 2)	997, 998; ДМ § 55 № 23, 24
2	§ 55, задачи 1, 2	989, 992, 993	992 (3, 4)	
3	§ 55, задачи 1, 2	990, 991, 994, 995	991 (2, 5, 8) или см. текст	

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать правила нахождения первообразных, уметь применять таблицу первообразных при выполнении таких упражнений, как **988**, **989** (1—4). В классах углублённого уровня дополнительно — **993**.

§ 56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл (2 / 3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование понятия криволинейной трапеции, ознакомление с понятием интеграла, обучение вычислению площади криволинейной трапеции в простейших случаях; формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню науки.

Материал параграфа даётся на наглядно-интуитивном уровне, поэтому учителю не следует требовать от учащихся воспроизведения каких-либо рассуждений (кроме задач 1 и 2), приведённых в учебнике.

Представление о криволинейной трапеции учащиеся должны получить, изучая рисунки 151—156 учебника (имеет смысл перенести их на ПК). Каждый раз, выделяя график функции, непрерывной и положительной на отрезке [a; b], прямые (а затем точки с абсциссами) $x = a$ и $x = b$,

ось Ox, учащиеся ещё и ещё раз выявляют особенности фигуры, которая называется криволинейной трапецией. Естественно возникает вопрос о возможности вычисления площади фигуры.

Рассматривая задачу вычисления площади криволинейной трапеции с помощью первообразной, можно использовать рисунок 80 введения к данной главе. Тогда утверждение о том, что при достаточно малых значениях h площадь криволинейной трапеции приблизительно равна $f(x)h$, становится более наглядным.

Формула Ньютона—Лейбница вводится практически одновременно с термином «интеграл». Сначала учащиеся рассматривают интеграл как разность значений первообразных и следом вводят его обозначение и чтение, откуда переходят к записи формулы нахождения площади через интеграл.

Не следует усиливать трудность знакомства со столь сложным понятием и здесь же говорить об интеграле как пределе интегральных сумм: этот материал вообще не является обязательным для всех учащихся.

Как уже отмечалось выше, в курсе математики средней школы нет понятия неопределённого интеграла, поэтому определённый интеграл называют просто интегралом. Интегральная сумма рассматривается в общем виде (отрезки разбиения могут быть необязательно равными) и предназначена только для ознакомления с понятием интеграла.

Желательно, чтобы учащиеся (если учитель счёл возможным ознакомить их с этим материалом) поняли, что об интегральной сумме функции на отрезке, а затем и интеграле можно говорить и в том случае, когда функция не только непрерывна и положительна, но и принимает на этом отрезке любые значения, в том числе и отрицательные, и нуль.

При решении задач на нахождение площади криволинейной трапеции важно, чтобы учащиеся грамотно выполняли чертёж и могли его использовать для иллюстрации решения: на этом этапе вычисление интеграла вторично, главное — вычисление площади.

Упражнения, представленные в этом параграфе, определяют уровень задач, которые должны уметь решать учащиеся выпускного класса по данной теме.

Распределение учебного материала по урокам:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 56, включая задачи 1 и 2	999, 1000	999 (2)	1003; ДМ § 56 № 13—16
2	§ 56 полностью	1000—1002	1000 (3, 5)	

При наличии времени полезно использовать упражнение **1013** и задачи 13—16 из «Дидактических материалов».

В результате изучения параграфа все учащиеся должны уметь изображать криволинейную трапецию, знать формулу Ньютона—Лейбница и уметь её применять при решении таких упражнений, как **999**, **1000**.

§ 57. Вычисление интегралов
§ 58. Вычисление площадей с помощью интегралов
§ 59*. Применение производной и интеграла к решению практических задач (1 / 4 ч)

Материал этих параграфов не является обязательным для изучения всеми учащимися классов базового уровня и может быть либо рассмотрен на ознакомительном уровне, либо предложен учащимся для самостоятельной работы.

В классах углублённого уровня рекомендуется уделить больше внимания изучению § 58 и решению задач, например **1014**, **1017**, **1018**, **1023**. По материалу § 59 можно провести семинар с предварительной подготовкой учащимися сообщений по каждому из пунктов текста учебника.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2 / 2 ч)

На этих уроках рекомендуется рассмотреть не только первообразную, но и производную, подчеркнуть, что операция интегрирования является обратной относительно дифференцирования; рассмотреть задачи, которые решались с помощью математического анализа. Полезными могут быть задачи **1033**, **1035**, **964**, **969**, **970**, **976** и «Задания для подготовки к экзаменам» из «Дидактических материалов».

Глава XI. Комбинаторика

Основные цели изучения главы XI — развитие комбинаторного мышления учащихся; знакомство с теорией соединений (как самостоятельным разделом математики и в дальнейшем — с аппаратом решения ряда вероятностных задач); обоснование формулы бинома Ньютона.

В Большой советской энциклопедии комбинаторика определяется как раздел математики, изучающий некоторые операции над конечными множествами. Основными задачами комбинаторики считаются следующие: 1) составление упорядоченных множеств (образование перестановок); 2) составление подмножеств данного множества (образование сочетаний); 3) составление упорядоченных подмножеств данного множества (образование размещений).

В Математическом энциклопедическом словаре (М.: Советская энциклопедия, 1988. — С. 276) приводится следующее описание комбинаторики:

«Комбинаторный анализ, комбинаторная математика, комбинаторика — раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью комбинаторики является изучение комбинаторных конфигураций, в частности вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания; блок-схемы и латинские квадраты.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики, таких, как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с которыми комбинаторный анализ тесно связан. Ещё математикам Древнего Востока были известны формула, выражающая число сочетаний через биномиальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. С мистическими целями изучались магические квадраты 3-го порядка. Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Эти труды, составляющие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем, Я. Бернулли, Л. Эйлером. С 50-х годов XX в. интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием кибернетики, дискретной математики, теории планирования и теории информации. На формирование направления исследований в дальнейшем оказывают

влияние два фактора. С одной стороны, выбор объектов исследований, с другой — формулировка целей исследования, зависящая в конечном счёте от сложности изучаемых объектов. Если исследуемая комбинаторная конфигурация имеет сложный характер, то целью исследования является выявление условий её существования и разработка алгоритмов построения...»

Из всего многообразия вопросов, которыми занимается комбинаторика, в содержание образования старшей школы сегодня включается лишь теория соединений — комбинаторных конфигураций, называющихся перестановками, размещениями и сочетаниями. Причём обязательными для изучения являются лишь *соединения без повторений* — соединения, составляемые по определённым правилам *из различных элементов*. Примерами задач на подсчёт числа определённых соединений являются, например, следующие:

1. *Задача на подсчёт числа перестановок из пяти элементов* (P_5).

Сколькими способами можно расставить на полке пять различных книг? (О т в е т. 120.)

2. *Задачи на подсчёт числа размещений из четырёх по два* (A_4^2).

1) Сколько существует вариантов назначения главного бухгалтера и его заместителя из четверых претендентов на эти должности? (О т в е т. 12.)

2) Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, используя каждую из них в записи не более одного раза? (О т в е т. 12.)

3. *Задача на подсчёт числа сочетаний из четырёх по два* (C_4^2).

Сколько существует вариантов выбора двоих человек для участия в конференции из числа четверых претендентов? (О т в е т. 6.)

Для подсчёта числа соединений каждого вида с помощью правила произведения в этой главе выводятся формулы

$$P_n = n!, \quad A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}, \quad C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ — произведение первых n натуральных чисел; при этом доопределяются $1! = 1$ и $0! = 1$. Для учащихся (после знакомства с рассмотренными тремя видами соединений) при решении конкретной задачи основной проблемой становится подведение условия под конкретный тип соединения. Обычно задачи на подсчёт числа перестановок учащиеся легко узнают. А отличать задачи на подсчёт числа размещений от задач на подсчёт числа сочетаний слабым учащимся часто бывает затруднительно. Учителю приходится нередко придумывать мнемонические подсказки для такой дифференциации. Например, чтобы учащиеся поняли, что размещения — это *упорядоченные* множества элементов, можно «привязать» термин размещения к словосочетаниям вида *размещение* (чего-либо; где-либо) по порядку. Эффективным для этой же цели

бывает напоминание того, что перестановки — это частный случай размещений.

Решая прикладную (текстовую) комбинаторную задачу на подсчёт числа соединений, в первую очередь ученик должен выяснить — разные или одинаковые, по сути, получаются соединения, если поменять в них порядок расположения элементов.

Помимо правила произведения (первое знакомство с которым произошло у учащихся в 7 классе, повторное — в 9 классе при решении элементарных вероятностных задач) в комбинаторике основным считается и правило суммы, которое можно сформулировать следующим образом: «Если некоторый элемент можно выбрать n способами, а другой элемент можно выбрать m способами, то выбрать либо первый, либо второй элемент можно $n + m$ способами». Однако при использовании правила суммы в данной формулировке (если учитель решит с ней познакомить учащихся сильного класса) необходимо следить за тем, чтобы ни один из способов выбора первого элемента не совпал с каким-либо способом выбора второго элемента. Если такое совпадение имеется, то правило суммы нельзя применять, так как число способов выбора будет равно $n + m - k$, где k — число совпадений. Правило суммы в главе не рассматривается, так как решение задач на его применение (без специального знакомства с правилом) не вызывает затруднений даже у слабых учащихся. Приведём пример задачи, решаемой с помощью комбинаторного правила суммы: «В классе 10 девочек и 12 мальчиков. Сколькими способами из учащихся класса можно выбрать одного дежурного по столовой?» (О т в е т. 22.)

Сформулируем основные **цели** изучения данной главы.

П р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— введение понятий перестановок, размещений и сочетаний;

— обучение решению практических и прикладных задач, сводящихся к подсчёту числа перестановок, размещений и сочетаний;

— обоснование конструирования треугольника Паскаля;

— обучение возведению двучленов в натуральную степень с использованием формулы Ньютона.

М е т а п р е д м е т н ы е ц е л и изучения главы:

— формирование умения находить оптимальные способы решения задач, достижения поставленных целей;

— развитие умения самоконтроля и самооценки своей деятельности;

— развитие навыков совместной деятельности с одноклассниками и учителями;

— развитие умения строить логические обоснования утверждений;

— расширение знаний о формальных языках и их использовании для решения прикладных задач.

Л и ч н о с т н ы е ц е л и изучения главы:

— формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и практики;

— формирование основ личностного развития и самовоспитания, готовности к самостоятельной творческой деятельности;

— развитие коммуникативных качеств личности;

— помощь в профессиональной ориентации учащихся и подготовка к осознанному выбору дальнейшего профиля обучения и профессиональной деятельности.

В результате изучения главы XI **все** учащиеся должны научиться применять формулы подсчёта числа различных видов соединений при решении упражнений типа **1043—1047**, **1059—1062**, **1065** (1, 3), **1072—1075**, **1080—1083**; должны научиться записи разложения бинома при выполнении упражнений типа **1092**. Распределение учебного материала главы по урокам (по I варианту программы) может быть таким, как показано ниже в таблице. На этих уроках рекомендуется выполнять упражнения к главе IX из «Дидактических материалов».

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 60 (повторение изученного в основной школе) § 61	Устно (с фронтальным обсуждением): 1043—1046, 1047, 1048; без обязательного доведения до числового результата 1049—1055, 1050—1052 (пропедевтика материала § 61); 1059—1065, 1068—1070	1052, 1055 1062—1063 (3), 1064 (3, 7), 1065 (3, 7)	1056—1058 1066, 1067, 1071
2	§ 62, до задачи 3	1072—1076	1072 (7)	
3	§ 62: задачи 3, 4	1077, 1078	1. Найти значение выражения: 1) $\frac{A_8^3 + A_7^2}{A_7^3}$; 2) $\frac{A_4^3 \cdot A_5^2}{A_6^3}$ 2. Решить относительно m уравнение: 1) $A_m^2 = 90$; 2) $A_m^4 = 14 \cdot A_{m-2}^3$	1079
4	§ 63 до свойства 1	1080—1086, 1088	1080 (7, 15)	1087
5	§ 63: свойства 1 и 2, задача 3	1089—1091	Проверочная самостоятельная работа	1109

			по вариантам на 10 мин: 1. Найти значение выражения: $C_{16}^{14} + C_{16}^{15}$ $\left[C_{14}^{12} + C_{14}^{13}\right]$. 2. Сколькими способами можно из 7 имеющихся роз выбрать 3 для подарка? [Сколькими способами можно дать имена двоим родившимся близнецам-мальчикам, выбирая их из 7 понравившихся имён?]	
6	§ 64 до задачи 2	1105, 1092, 1106	1092 (9), 1106 (3)	1113
7	§ 64: задача 2	1093, 1094	Проверочная работа по задачам рубрики «Проверь себя!» (с. 334)	1094, 1096 (после разбора задачи 3 текста параграфа)
8	§ 60—64: обобщение и систематизация знаний, умений	Из упражнений к главе: 1097—1113 (после анализа самостоятельной работы прошлого урока)		1114
9	Контрольная работа № 11			

Глава XII. Элементы теории вероятностей (11 / 13 ч)

Основная цель изучения главы — формирование вероятностного мышления учащихся; знакомство с основными понятиями теории вероятностей и обучение нахождению вероятностей и обучение нахождению вероятностей событий в опытах с очевидными (или легко вычисляемыми с помощью компьютерных знаний) равновероятными исходами.

Задачи, которые, в основном учащиеся решали в курсе математики, предполагали конкретные действия и их однозначный результат. Однако есть большой круг задач, которые имеют широкое применение в различных науках, технике, прикладных знаниях, но в которых результат действия не определён однозначно. Учащиеся, знакомившиеся с некоторыми вопросами теории вероятностей в основной школе, могут привести простейший пример: если подбросить монету, то нельзя точно сказать, какой стороной вверх она упадёт — орлом или решкой. Здесь результат действия (подбрасывания монеты) не определён однозначно. Может показаться, что в этой задаче и в аналогичных ей нет никакого определённого результата. Однако это не так. Даже игровая практика показывает, что при большом числе бросков примерно в половине случаев выпадает орёл, а в половине — решка. А это уже своеобразная закономерность.

Ещё один пример из реальной практики: при обработке деталей на станке-автомате размеры получаемых деталей будут колебаться около некоторого значения. Колебания носят случайный характер. Однако распределение размеров в больших партиях деталей имеет довольно строгие закономерности: средние арифметические размеров деталей в разных партиях оказываются приблизительно равными; отклонения той или иной величины размера от среднего значения также встречаются в разных партиях примерно одинаково часто.

Рассмотренные виды закономерностей и им подобные, встречающиеся в массовых случайных явлениях, изучаются теорией вероятностей.

Впервые такого рода закономерности были замечены при решении задач, связанных с азартными играми, в основном с игрой в кости в XVII в. (о чём свидетельствуют научные поиски того времени математиков П. Ферма и Б. Паскаля). Тогда и были введены основные понятия теории: случайный опыт (испытание), случайное событие, относительная частота события, вероятность события.

Относительной частотой (W) события A называют отношение числа случаев M появления этого события к общему числу испытаний N, проведённых в одних и тех же условиях, и записывают: $W(A) = \frac{M}{N}$. Устойчивость относительной частоты при многократном проведении испытаний может объясняться лишь проявлением некоторого объективного свойства случайного события, состоящего в существовании определённой степени

его возможности. Например, приблизительное равенство относительных частот выпадения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков при бросании игральной кости объясняется её симметриями, делающими одинаково возможным выпадение каждой из её граней.

Таким образом, степень объективной возможности случайного события можно измерить числом. Это число называется *вероятностью события* (и обозначается буквой P). Именно около этого числа группируются относительные частоты случайного события при увеличении числа испытаний ($P(A) \approx W(A)$). Относительная частота события зависит от числа произведённых испытаний, вероятность же случайного события связана только с самим случайным событием (при постоянных условиях).

Такой подход в определении вероятности называют *статистическим*. Подробно о нём рекомендуем учителю прочитать в пособии М. В. Ткачёвой и Н. Е. Фёдоровой «Элементы статистики и вероятность, 7—9 классы» (М.: Просвещение, 2009).

Только в простейших случаях вероятность случайного события может быть найдена «на бумаге» без проведения многочисленных испытаний (чему и посвящена глава XII учебника). Каждое испытание в этих случаях таково, что оно заканчивается одним и только одним из исходов (событий), называемых элементарными событиями (w_1, w_2, …, w_n). С каждым исходом w_k связывается неотрицательное число p_k — *вероятность* этого исхода. При этом $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Затем рассматривается более сложное событие A, состоящее в том, что «наступает или w_i или w_j, ..., или w_m». Исходы w_1, w_j, ..., w_m называют *благоприятствующими* событию A и по определению полагают вероятность $P(A)$ события A равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов: $P(A) = p_i + p_j + ... + p_m$. Частный случай, когда $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ (в учебнике в основном и рассматриваются такие события), приводит к классическому определению вероятности, выраженному формулой $P(A) = \frac{m}{n}$: «Вероятность события A равна отношению числа m исходов, благоприятствующих A, к числу всех равновозможных исходов n».

Подсчёт всех возможных исходов испытания и исходов, благоприятствующих событию A, часто осуществляется с помощью методов комбинаторики. Приведём пример условия и решения такой задачи.

З а д а ч а. В научном обществе 3 девушки и 5 юношей. Какова вероятность того, что случайным образом выбранные для участия в конференции 2 человека из числа членов общества окажутся юношами?

Р е ш е н и е. Пусть событие A — случайным образом выбраны 2 юноши. Число всех, возможных пар, составленных из членов общества, $n = C_8^2 = 28$. Число пар, благоприятствующих событию A, равно числу

возможных пар, выбранных из 5 юношей, т. е. $m = C_5^2 = 10$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

В Большой советской энциклопедии теория вероятностей определяется как «математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми».

Глава XII учебника посвящена исследованию простейших взаимосвязей между различными событиями, а также нахождению вероятностей некоторых видов событий через вероятности других событий.

Перечислим основные **цели** изучения главы.

Предметные цели изучения главы:

— знакомство с различными видами событий и их комбинациями;

— введение понятия вероятности события (в классическом понимании) и обучение нахождению вероятности случайного события с очевидными благоприятствующими исходами;

— обучение применению при решении задач теорем: о вероятности суммы двух несовместных событий (в классах углублённого уровня — с теоремой о вероятности суммы двух произвольных событий);

— введение понятия противоположного события и обучение оптимизации решения задач с использованием формулы $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;

— обучение составлению вероятностных моделей по условию задачи; формирование умения применять комбинаторные знания при нахождении вероятностей случайных событий.

Метапредметные цели изучения главы:

— формирование представлений о математике как части мировой культуры; о роли математики в описании на математическом языке явлений реального мира;

— формирование представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер; формирование умений оценивать вероятности наступления событий, описываемых в различных предметных сферах;

— формирование умений организовывать и проводить исследовательские и лабораторные работы;

— развитие умения использовать, создавать и преобразовывать различные символьные записи и модели для решения учебных и реальных задач в различных предметных областях.

Личностные цели изучения главы:

— формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и практики;

— продолжение развития основ личностного саморазвития и самовоспитания;

— завершение формирования готовности и способности к осознанному выбору дальнейшего профиля обучения и дальнейшей профессиональной деятельности;

— завершение формирования навыков социализации и продуктивного сотрудничества со сверстниками и взрослыми.

В результате изучения главы XII **все** учащиеся должны уметь находить вероятности случайных событий с помощью классического определения вероятности при решении упражнений типа **1125—1128**; иметь представление о сумме и произведении двух событий, уметь находить вероятность противоположного события (решать упражнения типа **1137—1140**); интуитивно определять независимые события и уметь находить вероятность одновременного наступления независимых событий в задачах, аналогичных **1148**, **1149**.

Приведём список дополнительной литературы по вопросам комбинаторики и теории вероятностей.

1. Бернулли Я. О законе больших чисел. — М., 1986.

2. Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. — М., 2004.

3. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М., 1969.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М., 1997.

5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М., 1982.

6. Лютикас В. С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. — М., 1990.

7. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М., 1985.

8. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников.— М., 1996.

9. Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е. Элементы статистики и вероятность. Учебное пособие для учащихся 7—9 кл. — М., 2009.

10. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. — М., 2004.

11. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. Пособие для студентов вузов. — М., 1982.

12. Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. — М., 2008.

Примерное распределение учебного материала главы по урокам отражено в следующей таблице:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (для работы в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 65 § 66	Устно (с фронтальным обсуждением): 1115—1117, 1118—1122	1120, 1122 (3, 9)	1123
2	§ 67 до задачи 3	Задача. События *A* и *B* связаны с одним опытом. Записать событие, состоящее в том, что: 1) произошли оба события *A* и *B*; 2) произошло только событие *A*; 3) произошло по крайней мере одно из данных событий; 4) ни одно из данных событий не произошло. 1124—1128	1127 (5) Задача. Найти вероятность того, что левая страница открытой наугад книги (объёмом 192 с.) будет иметь: 1) нечётный номер; 2) чётный номер; 3) номер, кратный 50; 4) номер, обозначенный двузначным числом	
3	§ 67: задачи 3 и 4	1129—1131 Задача. В ящике лежат 14 белых и 6 чёрных шаров. Наугад берут 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) два белых шара; 2) два чёрных шара; 3) шары разных цветов	1129 (7, 9, 17)	1132, 1133
4	§ 68 до задачи 3	1134—1140	Задача. Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости появится число: 1) отличное от 4; 2) не кратное 3	
5	§ 68 задача 3	1141—1143	Задача. В сетке лежат 5 красных, 8 зелёных и 7 жёлтых мячей. Наугад вынимают два мяча. Найти веро-	1144

			ятность того, что среди них окажется хотя бы один зелёный мяч. Проверочная самостоятельная работа по материалу § 65—68 (текст см. после таблицы) на 15 мин	
6	§ 69 (за исключением задачи 2)	1145, 1147—1151	Задача. Вероятность того, что баскетболист при одном броске попадёт в корзину, равна 0,8. Этот баскетболист бросает мяч в корзину дважды. Найти вероятность того, что он попадёт в корзину: 1) оба раза; 2) хотя бы один раз	1152—1155
7	§ 70	1056—1159	Задания рубрики «Проверь себя!» (с. 361, 362)	1173
8	§ 65—70 (обобщение и систематизация знаний и умений)	1161, 1163, 1166, 1167, 1171, 1172, 1177—1180	(практически все задания выполняются самостоятельно под контролем учителя)	1174
9	Контрольная работа № 12			

Глава XIII. Статистика (8 / 9 ч)

Вероятностно-статистические знания играют важную роль в общеобразовательной подготовке современного человека: без этих знаний трудно воспринимать социальную, политическую, экономическую информацию и принимать на её основе осознанные, обоснованные решения. Без стохастических знаний невозможно и полноценное изучение вопросов современной физики, биологии, химии.

Знаний описательной статистики достаточно для элементарного анализа данных в обозримых выборках; для нахождений некоторых характеристик та часть содержания общего образования, которая в образовательных Стандартах названа *статистикой* (и включает в себя изучение средних характеристик выборки, некоторые меры разброса элементов выборки, наглядное представление данных), является, фактически, лишь *описательной и наглядной статистикой* совокупности данных, по которым можно судить обо всей выборке; для правильного восприятия статистической информации, получаемой из средств массовой информации; для проведения несложных массовых исследований; для понимания того, какая выборка может считаться репрезентативной и т. п. Можно считать знания описательной статистики элементом общей культуры современного человека.

Однако понятия описательной и наглядной статистики лишь в первом приближении отражают содержание *математической статистики*, которая является составной частью теории вероятностей.

Основным понятием математической статистики является *случайная величина*, она же является основным предметом изучения данного стохастического раздела математики. Напомним о п р е д е л е н и е случайной величины (которое в явном виде в учебнике не формулируется, а разъясняется на конкретных примерах): «Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до его измерения (появления) невозможно точно предсказать». В учебнике понятия случайной величины и её значений вводятся в результате рассмотрения опытов с бросанием игральной кости (здесь случайная величина X принимает одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Но если в описательной статистике чаще всего рассматриваются *дискретные случайные величины* (т. е. величины, принимающие изолированные значения; множество значений конечно или счётно), то математическая статистика занимается в основном изучением свойств *непрерывных случайных величин* (т. е. величин, принимающих любые значения из неко-

торого промежутка). Введение в теорию непрерывных случайных величин приводится в учебнике как дополнительный материал.

В действительности рассматриваемые в описательной статистике дискретные случайные величины можно условно разделить на две категории: *чисто дискретные* (как, например, оценки за контрольную работу: здесь случайная величина может принимать любое из пяти целочисленных значений 1, 2, 3, 4 и 5) и *условно дискретные*, являющиеся фактически средними значениями интервалов непрерывной случайной величины (как, например, размеры одежды: так 48 размер одежды присвоен середине интервала полуобхвата грудной клетки от 47 до 49 см).

Учитель должен знать, что существует и другой подход к определению непрерывной случайной величины — *функциональный* (который и используется в вузовских курсах математической статистики). При этом подходе случайную величину X рассматривают как функцию элементарных событий с областью определения — множеством всех элементарных событий. Для случайной величины можно априорно (до опыта) указать лишь вероятности попадания значения случайной величины в некоторые числовые промежутки (например, $X < x$, $a \le X \le b$ и т. п.) и подсчитывать соответствующие вероятности: $P(X < x)$, $P(a \le X \le b)$ и т. п. Формулируется *закон распределения случайной величины* — соотношение, устанавливающее каким-либо образом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. К важнейшим характеристикам случайной величины относится *функция распределения* случайной величины $F(x)$ — вероятность события $X < x$, означающая, что случайная величина X в результате некоторого испытания примет значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Сформулированные в главе определения позволяют изучать дискретные и непрерывные случайные величины в одной логике. Для дискретных случайных величин закон распределения записывается либо формулой, либо в виде *таблицы распределения* по вероятностям (в случае конечного множества значений случайной величины). Относительные частоты в описательной статистике являются *прообразами вероятностей* появления того или иного значения случайной величины. Поэтому в учебнике, где рассматриваются небольшие по объёму «учебные» выборки, законы распределения значений случайных величин представлены в виде *таблиц распределения по частотам и относительным частотам*.

Графической формой задания закона распределения дискретной случайной величины является *полигон* (многоугольник) частот, а непрерывной — *гистограмма*. Желательно, чтобы как можно чаще рассматривались и анализировались на уроках выборки с большим числом элементов (более 50), распределение значений в которых близко к *нормальному распределению*. Для таких выборок полигоны частот (относительных частот) будут по виду приближаться к виду кривой нормального распределения

(имеющей форму перевёрнутого колокола). По графическим иллюстрациям удобно изучать свойства рассматриваемой случайной величины (соотносить среднее значение с медианой совокупности, определять размах, ощущать дисперсию).

Основные цели изучения главы:

— обучение сбору, анализу и наглядному представлению статистических данных;

— формирование умения *читать* готовые таблицы и диаграммы, видеть за ними конкретные явления с присущими им закономерностями;

— формирование представлений о случайной величине, значениях случайной величины и законе распределения значений случайной величины (по вероятностям, частотам и относительным частотам);

— обучение заданию закона распределения значений случайной величины в виде таблицы;

— обучение наглядному представлению распределения значений случайной величины в виде полигонов частот, относительных частот, вероятностей;

— обучение преобразованию форм представления статистических данных;

— формирование понятий центральных тенденций выборки: моды, медианы, среднего арифметического; обучение вычислению этих центральных тенденций в случаях представления значений случайной величины в виде ряда, таблицы, полигона;

— формирование понятий мер рассеяния данных выборки: размаха, дисперсии; обучение вычислению этих мер рассеяния в случаях представления данных в виде ряда, таблицы, полигона;

— формирование представлений о генеральной совокупности и репрезентативной выборке, о выборочном методе.

В результате изучения главы XIII **все** учащиеся должны справляться с упражнениями типа **1185**, **1187**, **1188**, **1193**, **1197**, **1201**, **1202**.

В классах, изучающих вопросы статистики впервые примерное распределение учебного материала по урокам отражено в таблицах (с учащимися, изучавшими стохастические разделы математики в основной школе, время изучения материала может быть сокращено; освободившиеся часы могут быть присоединены к итоговому повторению курса).

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные (в классе и дома)	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1—2	§ 71 до дополнительного материала, обозначенного значком * на с. 366	1184—1190	1190	1191, 1192 (после изучения материала, обозначенного значком *)
3—6	§ 72 до дополнительного материала, обозначенного значком * на с. 372; § 73	1193—1199, 1201—1206	Задания рубрики «Проверь себя!» (с. 384)	1200 (после изучения материала, обозначенного значком *) 1207—1209
7—8	§ 71—73 (обобщение и проверка знаний и умений)	1112—1115, 1218	Контрольная работа № 13 на 20 мин	

Итоговое повторение курса алгебры и начал анализа

Уроки итогового повторения имеют своей целью не только восстановление в памяти учащихся основного материала, но и обобщение, уточнение и систематизацию знаний по алгебре и началам анализа за курс средней школы. Материал для этих уроков содержится в следующих разделах учебника: «Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа», «Задачи для внеклассной работы».

Тематическое планирование уроков итогового повторения может быть различным в зависимости от математической подготовки класса и устремлений учителя. Приведём один из возможных вариантов планирования, в котором повторение предполагается проводить по основным содержательно-методическим линиям. В соответствии с концепцией курса и повторение целесообразно выстроить в следующем порядке: вычисления и преобразования → уравнения и неравенства → функции.

Вычисления и преобразования — 2/5 ч.

Уравнения, системы уравнений, неравенства — 4/6 ч.

Функции и графики — 4/6 ч.

Итоговая контрольная работа — 2/2 ч.

Решение задач по всему курсу — 2/4 ч.

При проведении итогового повторения предполагается широкое использование и комбинирование различных типов уроков (лекций, семинаров, практикумов, консультаций и т. д.) с целью быстрого охвата большого по объёму материала.

Необходимым элементом уроков итогового повторения должна быть самостоятельная работа учащихся. Она полезна как самим учащимся, так и учителю для осуществления обратной связи. Задания для самостоятельной проверочной работы должны быть и общими (по вариантам одного, например обязательного, уровня), и дифференцированными. Формы проведения работ тоже должны быть разнообразными: от традиционной работы с двумя-тремя заданиями до тестов и работ в форме рабочих тетрадей с заполнением пробелов в приведённых рассуждениях (что полезно для слабых учащихся).

Дополнительно для учащихся, интересующихся математикой и собирающихся продолжить образование в высших учебных заведениях, где необходимы знания математики, целесообразно использовать раздел учебника «Задачи для внеклассной работы».

Примерное планирование учебного материала

I вариант: 2 ч в неделю в 1-м полугодии,
3 ч в неделю во 2-м полугодии, всего 86 ч
II вариант: 4 ч в неделю, всего 136 ч

10 класс

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава I. Действительные числа		**13**	**18**
1, 2	Целые и рациональные числа. Действительные числа	3	4
3	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	2	2
4	Арифметический корень натуральной степени	3	4
5	Степень с рациональным и действительным показателем	3	5
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.1	1	—
	Контрольная работа № 2.1	—	1
Глава II. Степенная функция		**12**	**18**
6	Степенная функция, её свойства и график	3	3
7	Взаимно обратные функции	1	1
П. 4	Дробно-линейная функция и её график	1	1
8	Равносильные уравнения и неравенства	2	4
9	Иррациональные уравнения	2	4
10*	Иррациональные неравенства	—	2
	Уроки обобщения и систематизации знаний	2	2
	Контрольная работа № 1.2	1	—
	Контрольная работа № 2.2	—	1
Глава III. Показательная функция		**10**	**12**
11	Показательная функция, её свойства и график	2	2
12	Показательные уравнения	2	3
13	Показательные неравенства	2	3
14	Системы показательных уравнений и неравенств	2	2
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	1
	Контрольная работа № 1.3	1	—
	Контрольная работа № 2.3	—	1
Глава IV. Логарифмическая функция		**15**	**19**
15	Логарифмы	2	2
16	Свойства логарифмов	2	2
17	Десятичные и натуральные логарифмы	2	3
18	Логарифмическая функция, её свойства и график	2	2
19	Логарифмические уравнения	2	3
20	Логарифмические неравенства	2	4
	Уроки обобщения и систематизации знаний	2	2
	Контрольная работа № 1.4	1	—
	Контрольная работа № 2.4	—	1

Глава V. Тригонометрические формулы		**20**	**27**
21	Радианная мера угла	1	1
22	Поворот точки вокруг начала координат	2	2
23	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2	2
24	Знаки синуса, косинуса и тангенса	1	1
25	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	2
26	Тригонометрические тождества	2	3
27	Синус, косинус и тангенс углов α и –α	1	1
28	Формулы сложения	2	3
29	Синус, косинус и тангенс двойного угла	1	2
30*	Синус, косинус и тангенс половинного угла	1	2
31	Формулы приведения	2	2
32	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	1	3
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.5	1	—
	Контрольная работа № 2.6	—	1
Глава VI. Тригонометрические уравнения		**14**	**18**
33	Уравнение $\cos x = a$	3	3
34	Уравнение $\sin x = a$	3	3
35	Уравнение $\mathrm{tg}\, x = a$	2	2
36	Решение тригонометрических уравнений	4	5
37*	Примеры решения простейших тригонометрических неравенств	—	2
	Уроки обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.6	1	—
	Контрольная работа № 2.7	—	1
Повторение и решение задач		**2**	**24**

11 класс

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Повторение курса алгебры и начал математического анализа 10 класса		**2**	**6**
Глава VII. Тригонометрические функции		**13**	**20**
38	Область определении и множество значений тригонометрических функций	2	3
39	Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций	2	3
40	Свойства функции $y = \cos x$ и её график	3	3
41	Свойства функции $y = \sin x$ и её график	2	3
42	Свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и её график	2	2
43*	Обратные тригонометрические функции	—	3
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.7	1	—
	Контрольная работа № 2.8	—	1

Глава VIII. Производная и её геометрический смысл		**16**	**20**
П. 3	Предел последовательности	1	1
44	Производная	2	2
45	Производная степенной функции	2	3
46	Правила дифференцирования	3	3
47	Производные некоторых элементарных функций	3	4
48	Геометрический смысл производной	3	4
	Уроки обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.8	1	—
	Контрольная работа № 2.9	—	1
Глава IX. Применение производной к исследованию функций		**12**	**18**
49	Возрастание и убывание функции	2	2
50	Экстремумы функции	2	3
51	Применение производной к построению графиков функций	2	4
52	Наибольшее и наименьшее значения функции	3	3
53*	Выпуклость графика функции, точки перегиба	1	3
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 1.9	1	—
	Контрольная работа № 2.10	—	1
Глава X. Интеграл		**11**	**14**
54	Первообразная	2	2
55	Правила нахождения первообразной	3	2
56	Площадь криволинейной трапеции и интеграл	2	3
57, 58	Вычисление интегралов. Вычисление площадей с помощью интегралов	—	2
59	Применение производной и интеграла к решению практических задач	1	2
	Уроки обобщения и систематизации знаний	2	2
	Контрольная работа № 1.10	1	—
	Контрольная работа № 2.11	—	1
Глава XI. Комбинаторика		**10**	**13**
60	Правило произведения	1	2
61	Перестановки	2	2
62	Размещения	1	2
63	Сочетания и их свойства	2	2
64	Бином Ньютона	2	2
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	2
	Контрольная работа № 11	1	1
Глава XII. Элементы теории вероятностей		**11**	**13**
65	События	1	1
66	Комбинации событий. Противоположные события	1	2
67	Вероятность события	2	2
68	Сложение вероятностей	2	2
69	Независимые события. Умножение вероятностей	1	2
70	Статистическая вероятность	2	2

	Урок обобщения и систематизации знаний	1	1
	Контрольная работа № 12	1	1
Глава XIII. Статистика		**8**	**9**
71	Случайные величины	2	2
72	Центральные тенденции	2	2
73	Меры разброса	2	3
	Урок обобщения и контроля	1	1
	Контрольная работа № 13	1	1
Итоговое повторение курса алгебры и начал математического анализа		**3**	**23**

Оглавление

11 класс

Учебное издание

Фёдорова Надежда Евгеньевна
Ткачёва Мария Владимировна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Методические рекомендации
10—11 классы

Учебное пособие для
общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Руководитель центра *М. Н. Бородин*
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губина*
Корректор

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Алгебра и начала математического анализа

10—11 классы

Базовый и углублённый уровни

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочие программы базового и углублённого уровней по алгебре и началам математического анализа для среднего общего образования разработаны на основе фундаментального ядра общего образования и в соответствии с требованиями ФГОС к структуре и результатам освоения основных образовательных программ среднего общего образования. В них соблюдается преемственность с примерной рабочей программой основного общего образования. Примерные рабочие программы (далее — Программы) являются ориентиром для учителей, составляющих рабочие программы с учётом уровня подготовки классов, в которых ведётся преподавание по соответствующим учебникам.

Программы включают в себя:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели среднего (полного) общего образования с учётом специфики курса алгебры и начал математического анализа;

2) описание места предмета в учебном плане;

3) планируемые результаты освоения курса;

4) содержание курса для базового и углублённого уровней;

5) примерное тематическое планирование с определением основных видов учебной деятельности обучающихся;

Практическая значимость школьного курса алгебры и начал математического анализа обусловлена тем, что его объектами являются фундаментальные структуры и количественные отношения действительного мира. Математическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Курс алгебры и начал математического анализа является одним из опорных курсов старшей школы: он обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к фи-

зике. Развитие логического мышления учащихся при изучении алгебры и начал математического анализа способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки математического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении математических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте алгебры и математического анализа в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся, а также формированию качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, математика развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Изучение курса алгебры и начал математического анализа существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

При обучении алгебре и началам математического анализа формируются умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов. В процессе обуче-

ния школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса алгебры и начал математического анализа является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты математических умозаключений и принятые в математике правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно вскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым курс алгебры и начал математического анализа занимает ведущее место в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, способствуя восприятию математических форм, математика тем самым вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся. Её изучение развивает воображение школьников, существенно обогащает и развивает их пространственные представления.

В соответствии с принятой Концепцией развития математического образования в Российской Федерации математическое образование должно решать, в частности, следующие ключевые задачи:

— предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе;
— обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.;

— в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования.

Соответственно выделяются три направления требований к результатам математического образования:

1. Практико-ориентированное математическое образование (математика для жизни).

2. Математика для использования в профессии, не связанной с математикой.

3. Творческое направление, на которое нацелены те обучающиеся, которые планируют заниматься творческой и исследовательской работой в области математики, физики, экономики и других областях.

В соответствии с Законом об образовании РФ (ст. 12 п. 7) организации, осуществляющие образовательную деятельность, реализуют эти требования в образовательном процессе с учётом примерной основной образовательной программы как на основе учебно-методических комплектов соответствующего уровня, входящих в Федеральный перечень МОиН РФ, так и с возможным использованием иных источников учебной информации (учебно-методические пособия, образовательные порталы и сайты и др.).

В соответствии с требованиями в программах выделены два уровня: **базовый** и **углублённый.**

Цели освоения программы базового уровня — обеспечение возможности использования математических знаний и умений в повседневной жизни и возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием математики.

Программа углублённого уровня предназначена для профильного изучения математики; при выполнении этой программы предъявляются требования, соответствующие направлению «математика для профессиональной деятельности»; вместе с тем выпускник получает возможность изучить математику на гораздо более высоком уровне, что создаст

фундамент для дальнейшего серьёзного изучения математики в вузе.

Общая характеристика учебного предмета. Математическое образование играет важную роль и в практической, и в духовной жизни общества. Практическая сторона связана с созданием и применением инструментария, необходимого человеку в его продуктивной деятельности, духовная сторона − с интеллектуальным развитием человека, формированием характера и общей культуры.

Без конкретных знаний по алгебре и началам математического анализа затруднено понимание принципов устройства и использования современной техники, восприятие и интерпретация разнообразной социальной, экономической, политической информации, малоэффективна повседневная практическая деятельность. Каждому человеку в своей жизни приходится выполнять расчёты, читать информацию, представленную в виде таблиц, диаграмм, графиков, понимать вероятностный характер случайных событий, составлять несложные алгоритмы и др.

Изучение данного курса завершает формирование ***ценностно-смысловых установок и ориентаций*** учащихся в отношении математических знаний и проблем их использования в рамках среднего общего образования. Курс способствует формированию умения видеть и понимать их значимость для каждого человека независимо от его профессиональной деятельности; умения различать факты и оценки, сравнивать оценочные выводы, видеть их связь с критериями оценок и связь критериев с определённой системой ценностей.

Без базовой математической подготовки невозможна постановка образования современного человека. В школе математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. Реальной необходимостью в наши дни становится непрерывное образование, что требует полноценной базовой общеобразовательной подготовки, в том числе и по алгебре и началам математического анализа.

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления. Объекты

математических умозаключений и правила их конструирования вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление. Алгебре и началам математического анализа принадлежит ведущая роль в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по заданному алгоритму. В ходе решения задач – основной учебной деятельности на уроках математики – развиваются творческая и прикладная стороны мышления.

Обучение алгебре и началам математического анализа даёт возможность развивать у учащихся точную, лаконичную и информативную речь, умение отбирать наиболее подходящие языковые (в частности, символические, графические) средства, т. е. способствует формированию ***коммуникативной культуры***, в том числе — умению ясно, логично, точно и последовательно излагать свою точку зрения, использовать языковые средства, адекватные обсуждаемой проблеме.

Дальнейшее развитие приобретут и ***познавательные действия***. Учащиеся глубже осознáют основные особенности математики как формы человеческого познания, научного метода познания природы, а также возможные сферы и границы её применения.

Математическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Необходимыми компонентами общей культуры являются общее знакомство с методами познания действительности, представление о методах математики, их отличиях от методов естественных и гуманитарных наук, об особенностях применения математики для решения прикладных задач. Изучение математики способствует эстетическому воспитанию человека, пониманию красоты и изящества математических рассуждений.

В результате целенаправленной учебной деятельности, осуществляемой в формах учебного исследования, учебного проекта, получит дальнейшее развитие способность к ***информационно-поисковой деятельности***: самостоятельному отбору источников информации в соответствии с поставлен-

ными целями и задачами. Учащиеся научатся систематизировать информацию по заданным признакам, критически оценивать и интерпретировать информацию. Изучение курса будет способствовать развитию ***ИКТ-компетентности*** учащихся.

Получит дальнейшее развитие способность к ***самоорганизации*** и ***саморегуляции***. Учащиеся получат опыт успешной, целенаправленной и результативной учебно-предпрофессиональной деятельности; освоят на практическом уровне умение планировать вою деятельность и управлять ею во времени; использовать ресурсные возможности для достижения целей; осуществлять выбор конструктивных стратегий в трудных ситуациях; самостоятельно реализовывать, контролировать и осуществлять коррекцию учебной и познавательной деятельности на основе предварительного планирования и обратной связи, получаемой от педагогов.

Содержательной основой и главным средством формирования и развития всех указанных способностей служит целенаправленный отбор учебного материала, который ведётся на основе принципов ***научности*** и ***фундаментальности***, ***историзма***, ***доступности*** и ***непрерывности***, ***целостности*** и ***системности*** математического образования, его ***связи с техникой, технологией, жизнью***.

Содержание по алгебре и началам математического анализа формируется на основе Фундаментального ядра школьного математического образования. Оно представлено в виде совокупности содержательных линий, раскрывающих наполнение Фундаментального ядра школьного математического образования применительно к старшей школе. Программа регламентирует объём материала, обязательного для изучения, но не задаёт распределения его по классам. Поэтому содержание данного курса включает следующие разделы: «*алгебра*»; «*математический анализ*»; «*вероятность и статистика*».

Содержание раздела «Алгебра» способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач окружающей реальности. Продолжается изучение мно-

гочленов с целыми коэффициентами, методов нахождения их рациональных корней. Происходит развитие и завершение базовых знаний о числе. Тема «Комплексные числа» знакомит учащихся с понятием комплексного числа, правилами действий с ними, различными формами записи комплексных чисел, решением простейших уравнений в поле комплексных чисел и завершает основную содержательную линию курса школьной математики «Числа». Основное назначение этих вопросов связано с повышением общей математической подготовки учащихся, освоением простых и эффективных приёмов решения алгебраических задач.

Раздел «Математический анализ» представлен тремя основными темами: «элементарные функции», «производная» и «интеграл». Содержание этого раздела нацелено на получение школьниками конкретных знаний о функции как важнейшей модели описания и исследования разнообразных реальных процессов. Изучение степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций продолжает знакомство учащихся с основными элементарными функциями, начатое в основной школе. Помимо овладения непосредственными умениями решать соответствующие уравнения и неравенства, у учащихся формируется запас геометрических представлений, лежащих в основе объяснения правомерности стандартных и эвристических приёмов решения задач. Темы «Производная» и «Интеграл» содержат традиционно трудные вопросы для школьников, даже для тех, кто выбрал изучение математики на углублённом уровне, поэтому их изложение предполагает опору на геометрическую наглядность и на естественную интуицию учащихся, — более чем на строгие определения. Тем не менее знакомство с этим материалом даёт представление учащимся об общих идеях и методах математической науки.

При изучении раздела «Вероятность и статистика» рассматриваются различные математические модели, позволяющие измерять и сравнивать вероятности различных событий, делать выводы и прогнозы. Этот материал необходим прежде всего для формирования у учащихся функциональной гра-

мотности — умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей. К этому разделу относятся также сведения из логики, комбинаторики и теории графов, значительно варьирующиеся в зависимости от типа программы.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план для изучения предмета «Математика» отводит на базовом уровне от 4 учебных часа в неделю и на углублённом уровне от 6 учебных часа (1-й вариант) или от 8 учебных часа (2-й вариант) в неделю в 10—11 классах. Поэтому на изучение алгебры и начал математического анализа отводится 2,5 учебных часа в неделю в течение каждого года обучения для базового уровня, всего 85 уроков и 4 или 6 учебных часа для углублённого уровня, всего 136 или 180 уроков соответственно. Распределение учебного времени представлено в таблице.

Предмет	**Количество часов**					
	Базовый уровень		Углублённый уровень			
			1-й вариант		2-й вариант	
	10 класс	11 класс	10 класс	11 класс	10 класс	11 класс
Математика (интегрированный курс)	136	136				
Геометрия	51	51	68	68	102	102
Алгебра и начала математического анализа	85	85	136	136	180	180

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Базовый уровень

Для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования по

специальностям, не связанным с прикладным использованием математики (1-й уровень планируемых результатов), выпускник **научится,** а также **получит возможность научиться** для развития мышления (2-й уровень планируемых результатов, выделено *курсивом*):

Элементы теории множеств и математической логики

— Оперировать[1] понятиями: конечное множество, бесконечное множество, числовые множества на координатной прямой, элемент множества, подмножество, пересечение и объединение множеств, отрезок, интервал, *промежуток с выколотой точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости*;

— *проверять принадлежность элемента множеству, заданному описанием;*

— находить пересечение и объединение двух, *нескольких* множеств, представленных графически на числовой прямой, *на координатной плоскости;*

— строить на числовой прямой подмножество числового множества, заданное простейшими условиями;

— оперировать понятиями: утверждение (высказывание), отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример;

— распознавать ложные утверждения, ошибки в рассуждениях, в том числе с использованием контрпримеров;

— *проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений.*

---

[1] Здесь и далее:

на 1-м уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, решении задач;

на 2-м уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— использовать числовые множества на координатной прямой и *на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений*;

— проводить логические, *доказательные* рассуждения в ситуациях повседневной жизни, *при решении задач из других предметов.*

<u>Числа и выражения</u>

— Оперировать понятиями: натуральное и целое число, делимость чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, рациональное число, иррациональное число, приближённое значение числа, часть, доля, отношение, процент, масштаб;

— оперировать понятиями: логарифм числа, тригонометрическая окружность, *радианная* и градусная мера угла, синус, косинус, тангенс и котангенс углов, имеющих произвольную величину, *числа e и* π;

— выполнять арифметические действия с целыми и рациональными числами, сочетая устные и письменные приёмы, применяя при необходимости вычислительные устройства;

— сравнивать рациональные числа между собой; сравнивать с рациональными числами значения целых степеней чисел, корней натуральной степени из чисел, логарифмов чисел в простых случаях;

— выполнять несложные преобразования числовых выражений, содержащих степени чисел, корни из чисел, логарифмы чисел; *находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства;*

— пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах;

— изображать точками на координатной прямой целые и рациональные числа; целые степени чисел, корни натуральной степени из чисел, логарифмы чисел в простых случаях;
— выполнять несложные преобразования целых и дробно-рациональных буквенных выражений;
— выражать в простейших случаях из равенства одну переменную через другие;
— вычислять в простых случаях значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
— *проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, корни, логарифмы и тригонометрические формулы;*
— *находить значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;*
— изображать схематически угол, величина которого выражена в градусах или *радианах;*
— оценивать знаки синуса, косинуса, тангенса, *котангенса* конкретных углов; *использовать при решении задач табличные значения тригонометрических функций углов;*
— *выполнять перевод величины угла из радианной меры в градусную и обратно.*

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— выполнять действия с числовыми данными при решении задач практического характера и *задач из различных областей знаний,* используя при необходимости справочные материалы и вычислительные устройства;
— соотносить реальные величины, характеристики объектов окружающего мира с их конкретными числовыми значениями;
— использовать методы округления и прикидки при решении практических задач повседневной жизни;

— *оценивать, сравнивать и использовать при решении практических задач числовые значения реальных величин, конкретные числовые характеристики объектов окружающего мира.*

Уравнения и неравенства

— Решать линейные уравнения и неравенства, квадратные уравнения;

— решать логарифмические и показательные уравнения вида $\log_a (bx + c) = d$, $a^{bx + c} = d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a) и неравенства вида $\log_a x < d$, $a^x < d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a);

— приводить несколько примеров корней тригонометрического уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где a — табличное значение соответствующей тригонометрической функции;

— *решать несложные рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, простейшие иррациональные уравнения и неравенства;*

— *использовать методы решения уравнений: приведение к виду «произведение равно нулю» или «частное равно нулю», замена переменных;*

— *использовать метод интервалов для решения неравенств;*

— *использовать графический метод для приближённого решения уравнений и неравенств;*

— *изображать на тригонометрической окружности множество решений тригонометрических уравнений и неравенств.*

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— составлять и решать уравнения, системы уравнений *и неравенства* при решении несложных практических задач *и задач из других учебных предметов;*

— *использовать уравнения и неравенства для построения и исследования простейших математических моделей реальных ситуаций или прикладных задач;*
— *уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат, оценивать его правдоподобие в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи.*

Функции

— Оперировать понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание и убывание функции на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке, периодическая функция, период, *чётная и нечётная функции;*
— оперировать понятиями: прямая и обратная пропорциональность, линейная, квадратичная, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции;
— распознавать графики функций прямой и обратной пропорциональности, линейной, квадратичной, логарифмической, показательной и тригонометрических функций и соотносить их с формулами, которыми они заданы;
— находить по графику приближённо значения функции в заданных точках;
— определять по графику свойства функции (нули, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности, наибольшие и наименьшие значения и т. п.);
— строить эскиз графика функции, удовлетворяющей приведённому набору условий (промежутки возрастания/убывания, значение функции в заданной точке, точки экстремумов, *асимптоты, нули функции и т. д.*);
— *определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;*
— *строить графики изученных функций;*

— *решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графики.*

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— определять по графикам *и использовать для решения прикладных задач* свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, *асимптоты*, период и т. п.), интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации;

— *определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радио связи и т. п. (амплитуда, период и т. п.).*

Элементы математического анализа

— Оперировать понятиями: производная функции в точке, касательная к графику функции, производная функции;

— определять значение производной функции в точке по изображению касательной к графику, проведённой в этой точке;

— *вычислять производную одночлена, многочлена, квадратного корня, производную суммы функций;*

— *вычислять производные элементарных функций и их комбинаций, используя справочные материалы;*

— решать несложные задачи на применение связи между промежутками монотонности и точками экстремума функции, с одной стороны, и промежутками знакопостоянства и нулями производной этой функции — с другой;

— *исследовать функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простых рациональных функций с использованием аппарата математического анализа.*

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— пользуясь графиками, сравнивать скорости возрастания (роста, повышения, увеличения и т. п.) или скорости убы-

вания (падения, снижения, уменьшения и т. п.) величин в реальных процессах;

— соотносить графики реальных процессов и зависимостей с их описаниями, включающими характеристики скорости изменения (быстрый рост, плавное понижение и т. п.);
— использовать графики реальных процессов для решения несложных прикладных задач, в том числе определяя по графику скорость хода процесса;
— *решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик реальных процессов, нахождением наибольших и наименьших значений, скорости и ускорения и т. п., интерпретировать полученные результаты.*

Статистика и теория вероятностей, логика и комбинаторика

— Оперировать основными описательными характеристиками числового набора: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения;
— оперировать понятиями: частота и вероятность события, случайный выбор, опыты с равновозможными элементарными событиями;
— вычислять вероятности событий на основе подсчёта числа исходов;
— *иметь представление: о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин; о математическом ожидании и дисперсии случайных величин; о нормальном распределении и примерах нормально распределённых случайных величин;*
— *понимать суть закона больших чисел и выборочного метода измерения вероятностей;*
— *иметь представление об условной вероятности и о полной вероятности, применять их в решении задач;*

— *иметь представление о важных частных видах распределений и применять их в решении задач;*
— *иметь представление о корреляции случайных величин, о линейной регрессии.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— оценивать, сравнивать и *вычислять* в простых случаях вероятности событий в реальной жизни;
— читать, сопоставлять, сравнивать, интерпретировать в простых случаях реальные данные, представленные в виде таблиц, диаграмм, графиков;
— *выбирать подходящие методы представления и обработки данных;*
— *уметь решать несложные задачи на применение закона больших чисел в социологии, страховании, здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.*

Текстовые задачи

— Решать несложные текстовые задачи разных типов, *решать задачи разных типов, в том числе задачи повышенной трудности;*
— *выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы;*
— анализировать условие задачи, строить для её решения математическую модель, *проводить доказательные рассуждения;*
— понимать и использовать для решения задачи информацию, представленную в виде текстовой и символьной записи, схем, таблиц, диаграмм, графиков, рисунков;
— действовать по алгоритму, содержащемуся в условии задачи;
— использовать логические рассуждения при решении задачи;
— работать с избыточными условиями, выбирая из всей информации данные, необходимые для решения задачи;

— осуществлять несложный перебор возможных решений, выбирая из них оптимальное по критериям, сформулированным в условии;
— анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту;
— решать задачи на расчёт стоимости покупок, услуг, поездок и т. п.;
— решать несложные задачи, связанные с долевым участием во владении фирмой, предприятием, недвижимостью;
— решать задачи на простые проценты (системы скидок, комиссии) и на вычисление сложных процентов в различных схемах вкладов, кредитов и ипотек;
— решать практические задачи, требующие использования отрицательных чисел: на определение температуры, положения на временной оси (до нашей эры и после), глубины/высоты, на движение денежных средств (приход/расход) и т. п.;
— использовать понятие масштаба для нахождения расстояний и длин на картах, планах местности, планах помещений, выкройках, при работе на компьютере и т. п;
— *решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата;*
— *анализировать и интерпретировать результаты в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту;*
— *переводить при решении задачи информацию из одной формы в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы.*

<u>История и методы математики</u>

— Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;
— знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей; *представлять вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей;*

— понимать роль математики в развитии России;
— применять известные методы при решении стандартных *и не стандартных* математических задач; *использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение;*
— замечать и характеризовать математические закономерности в окружающей действительности и *на их основе характеризовать красоту и совершенство окружающего мира, а также произведений искусства;*
— *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

Углублённый уровень

Для успешного продолжения образования по специальностям, связанным с прикладным использованием математики (1-й уровень планируемых результатов), выпускник **научится,** а также **получит возможность научиться** для обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, связанным с осуществлением научной и исследовательской деятельности в области математики и смежных наук (2-й уровень планируемых результатов, выделено *курсивом*).

Элементы теории множеств и математической логики

— Свободно оперировать[1] понятиями: множество, пустое, конечное и бесконечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение, объединение и разность множеств;
— применять числовые множества на координатной прямой: отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток с выколо-

[1] Здесь и далее — знать определение понятия, знать и уметь доказывать свойства (признаки, если они есть) понятия, характеризовать связи с другими понятиями, представляя одно понятие как часть целостного комплекса, использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

той точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости;

— проверять принадлежность элемента множеству;
— находить пересечение и объединение множеств, в том числе представленных графически на числовой прямой и на координатной плоскости;
— задавать множества перечислением и характеристическим свойством;
— оперировать понятиями: утверждение, отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, причина, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример;
— проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений;
— *оперировать понятием определения, основными видами определений и теорем;*
— *понимать суть косвенного доказательства;*
— *оперировать понятиями счётного и несчётного множества;*
— *применять метод математической индукции для проведения рассуждений и доказательств при решении задач.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений;
— проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;
— *использовать теоретико-множественный язык и язык логики для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов.*

<u>Числа и выражения</u>

— Свободно оперировать понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество

целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;

— понимать и объяснять разницу между позиционной и непозиционной системами записи чисел;
— переводить числа из одной системы записи (системы счисления) в другую;
— доказывать и использовать признаки делимости, суммы и произведения при выполнении вычислений и решении задач;
— выполнять округление рациональных и иррациональных чисел с заданной точностью;
— сравнивать действительные числа разными способами;
— упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби, числа, записанные с использованием арифметического квадратного корня, корней степени больше 2;
— находить НОД и НОК разными способами и использовать их при решении задач;
— выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней;
— выполнять стандартные тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных, иррациональных выражений;
— *свободно оперировать числовыми множествами при решении задач;*
— *понимать причины и основные идеи расширения числовых множеств;*
— *владеть основными понятиями теории делимости при решении стандартных задач;*
— *иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;*

— *свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений;*
— *владеть формулой бинома Ньютона;*
— *применять при решении задач теорему о линейном представлении НОД, Китайскую теорему об остатках, Малую теорему Ферма;*
— *применять при решении задач теоретико-числовые функции: число и сумма делителей, функцию Эйлера;*
— *применять при решении задач цепные дроби, многочлены с действительными и целыми коэффициентами*;
— *владеть понятиями приводимые и неприводимые многочлены и применять их при решении задач;*
— *применять при решении задач Основную теорему алгебры; простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— выполнять и объяснять результаты сравнения результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближённых вычислений, используя разные способы сравнений;
— записывать, сравнивать, округлять числовые данные;
— использовать реальные величины в разных системах измерения;
— составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов.

<u>Уравнения и неравенства</u>

— Свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений;

— решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3-й и 4-й степеней, дробно-рациональные и иррациональные;
— овладеть основными типами показательных, логарифмических, иррациональных, степенных уравнений и неравенств и стандартными методами их решений и применять их при решении задач;
— применять теорему Безу к решению уравнений;
— применять теорему Виета для решения некоторых уравнений степени выше второй;
— понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать;
— владеть методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор;
— использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения;
— решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами;
— владеть разными методами доказательства неравенств;
— решать уравнения в целых числах;
— изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами;
— свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений;
— *свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;*
— *свободно решать системы линейных уравнений;*
— *решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами;*
— *применять при решении задач неравенства Коши—Буняковского, Бернулли;*

— *иметь представление о неравенствах между средними степенными.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач из других учебных предметов;
— выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем, при решении задач из других учебных предметов;
— составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач из других учебных предметов;
— составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты;
— использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств.

Функции

— Владеть понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке, периодическая функция, период, чётная и нечётная функции; уметь применять эти понятия при решении задач;
— владеть понятием степенная функция; строить её график и уметь применять свойства степенной функции при решении задач;
— владеть понятиями показательная функция, экспонента; строить их графики и уметь применять свойства показательной функции при решении задач;
— владеть понятием логарифмическая функция; строить её график и уметь применять свойства логарифмической функции при решении задач;

— владеть понятием тригонометрические функции; строить их графики и уметь применять свойства тригонометрических функций при решении задач;
— владеть понятием обратная функция; применять это понятие при решении задач;
— применять при решении задач свойства функций: чётность, периодичность, ограниченность;
— применять при решении задач преобразования графиков функций;
— владеть понятиями числовые последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессия;
— применять при решении задач свойства и признаки арифметической и геометрической прогрессий;
— *владеть понятием асимптоты и уметь его применять при решении задач*;
— *применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков*.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т. п.), интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации;
— определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радио связи и т. п. (амплитуда, период и т. п.).

Элементы математического анализа

— Владеть понятием бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и уметь применять его при решении задач;
— применять для решения задач теорию пределов;

— владеть понятиями бесконечно большие числовые последовательности и, бесконечно малые числовые последовательности и уметь сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые последовательности;
— владеть понятиями: производная функции в точке, производная функции;
— вычислять производные элементарных функций и их комбинаций;
— исследовать функции на монотонность и экстремумы;
— строить графики и применять к решению задач, в том числе с параметром;
— владеть понятием касательная к графику функции и уметь применять его при решении задач;
— владеть понятиями первообразная, определённый интеграл;
— применять теорему Ньютона—Лейбница и её следствия для решения задач;
— *свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;*
— *свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;*
— *оперировать понятием первообразной для решения задач;*
— *овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона—Лейбница и его простейших применениях;*
— *оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;*
— *уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;*
— *уметь применять при решении задач теоремы Вейерштрасса;*
— *уметь выполнять приближённые вычисления (методы решения уравнений, вычисления определённого интеграла);*

— *уметь применять приложение производной и определённого интеграла к решению задач естествознания;*
— *владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость.*

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

— решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов, интерпретировать полученные результаты.

Статистика и теория вероятностей, логика и комбинаторика, теория графов

— Оперировать основными описательными характеристиками числового набора; понятием генеральная совокупность и выборка из неё;
— оперировать понятиями: частота и вероятность события, сумма и произведение вероятностей, вычислять вероятности событий на основе подсчёта числа исходов;
— владеть основными понятиями комбинаторики и уметь применять их при решении задач;
— иметь представление об основах теории вероятностей;
— иметь представление о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин;
— иметь представление о математическом ожидании и дисперсии случайных величин;
— иметь представление о совместных распределениях случайных величин;
— понимать суть закона больших чисел и выборочного метода измерения вероятностей;
— иметь представление о нормальном распределении и примерах нормально распределённых случайных величин;
— иметь представление о корреляции случайных величин;

— *иметь представление о центральной предельной теореме;*
— *иметь представление о выборочном коэффициенте корреляции и линейной регрессии;*
— *иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и её уровне значимости;*
— *иметь представление о связи эмпирических и теоретических распределений;*
— *иметь представление о кодировании, двоичной записи, двоичном дереве;*
— *владеть основными понятиями теории графов (граф, вершина, ребро, степень вершины, путь в графе) и уметь применять их при решении задач;*
— *иметь представление о деревьях и уметь применять его при решении задач;*
— *владеть понятием связность и уметь применять компоненты связности при решении задач;*
— *уметь осуществлять пути по рёбрам, обходы рёбер и вершин графа;*
— *иметь представление об Эйлеровом и Гамильтоновом пути; иметь представление о трудности задачи нахождения Гамильтонова пути;*
— *владеть понятиями конечные счётные множества и счётные множества и уметь применять их при решении задач;*
— *уметь применять метод математической индукции;*
— *уметь применять принцип Дирихле при решении задач.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни;
— выбирать методы подходящего представления и обработки данных.

<u>Текстовые задачи</u>

— Решать разные задачи повышенной трудности;

— анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы;
— строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи;
— решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата;
— анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту;
— переводить при решении задачи информацию из одной формы записи в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

— решать практические задачи и задачи из других предметов.

<u>История и методы математики</u>

— Иметь представление о вкладе выдающихся математиков в развитие науки;
— понимать роль математики в развитии России;
— использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение;
— применять основные методы решения математических задач;
— на основе математических закономерностей в природе характеризовать красоту и совершенство окружающего мира и произведений искусства;
— применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач;
— пользоваться прикладными программами и программами символьных вычислений для исследования математических объектов;

— *применять математические знания к исследованию окружающего мира (моделирование физических процессов, задачи экономики).*

СОДЕРЖАНИЕ

Базовый уровень

Элементы теории множеств и математической логики

Конечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение и объединение множеств, числовые множества на координатной прямой, отрезок, интервал, *промежуток с выколотой точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости.*

Утверждение (высказывание), отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример, доказательство.

Числа и выражения

Корень *n*-й степени и его свойства. *Понятие предела числовой последовательности.* Степень с действительным показателем, свойства степени. Действия с корнями натуральной степени из чисел, *тождественные преобразования выражений, включающих степени и корни.*

Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы. *Число е.* Логарифмические тождества. Действия с логарифмами чисел; *простейшие преобразования выражений, включающих логарифмы.*

Изображение на числовой прямой целых и рациональных чисел, корней натуральной степени из чисел, логарифмов чисел.

Тригонометрическая окружность*, радианная мера угла*. Синус, косинус, тангенс, *котангенс* произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него. Значения тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° ($0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ рад). Формулы приведения, сложения, формулы двойного и половинного угла.

Уравнения и неравенства

Уравнения с одной переменной. Простейшие иррациональные уравнения. Логарифмические и показательные уравнения вида $\log_a (bx + c) = d$, $a^{bx + c} = d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a и рациональным показателем) и их решения. Тригонометрические уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — табличное значение соответствующей тригонометрической функции и их решения.

Неравенства с одной переменной вида $\log_a x < d$, $a^x < d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a).

Несложные рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, простейшие иррациональные уравнения и неравенства.

Метод интервалов. Графические методы решения уравнений и неравенств.

Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Уравнения, системы уравнений с параметром.

Функции

Понятие функции. Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность. Наибольшее и наименьшее значения функции. Периодичность функции. Чётность и нечётность функций.

Степенная, показательная и логарифмические функции; их свойства и графики. *Сложные функции.*

Тригонометрические функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$. *Функция* $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства и графики тригонометрических функций. *Арккосинус*, *арксинус, арктангенс числа*, *арккотангенс числа*. *Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.*

Преобразования графиков функций: сдвиги вдоль координатных осей, растяжение и сжатие, симметрия относительно координатных осей и начала координат. Графики взаимно обратных функций.

Элементы математического анализа

Производная функции в точке. Касательная к графику функции. Геометрический и физический смысл производной. Производные элементарных функций. Производная суммы, произведения, *частного*, двух функций.

Вторая производная, её геометрический и физический смысл.

Понятие о непрерывных функциях. Точки экстремума (максимума и минимума). Исследование элементарных функций на точки экстремума, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной. *Построение графиков функций с помощью производных. Применение производной при решении задач.*

Первообразная. Первообразные элементарных функций. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница. Определённый интеграл. Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью интеграла.

Статистика и теория вероятностей, логика и комбинаторика

Частота и вероятность события. Достоверные, невозможные и случайные события. Вычисление вероятностей в опытах с равновозможными элементарными исходами. Решение задач с применением комбинаторики. Вероятность суммы двух несовместных событий. Противоположное событие и его вероятность.

Правило умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Решение задач с применением дерева вероятностей.

Дискретные случайные величины и их распределения.

Математическое ожидание, дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное отклонения.

Понятие о нормальном распределении. Примеры случайных величин, подчинённых нормальному закону (погрешность измерений, рост человека).

Представление о законе больших чисел. Роль закона больших чисел в науке, природе и обществе.

Совместные наблюдения двух случайных величин. Понятие о корреляции.

Углублённый уровень

Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества. Характеристическое свойство, элемент множества, пустое, конечное, бесконечное множество. Способы задания множеств. Подмножество. Отношения принадлежности, включения, равенства. Операции над множествами, их иллюстрации с помощью кругов Эйлера. *Счётные и несчётные множества*.

Истинные и ложные высказывания (утверждения), операции над высказываниями. Кванторы существования и всеобщности. *Алгебра высказываний.*

Законы логики. *Основные логические правила.* Решение логических задач с использованием кругов Эйлера.

Умозаключения. Обоснования и доказательство в математике. Определения. Теоремы. *Виды доказательств*. *Математическая индукция*. Утверждения: обратное данному, *противоположное, обратное противоположному*. Признак и свойство, необходимые и достаточные условия.

Числа и выражения

Множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел. Множество комплексных чисел. Действия с комплексными числами. Комплексно сопряжённые числа. Модуль и аргумент числа. *Тригонометрическая форма комплексного числа.*

Радианная мера угла. Тригонометрическая окружность. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Тригонометрические формулы приведения и сложения, формулы двойного и половинного угла. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратные преобразования.

Степень с действительным показателем, свойства степени. Число *e*. Логарифм, свойства логарифма. Десятичный и натуральный логарифмы.

Тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных и иррациональных выражений.

Метод математической индукции.

Основная теорема арифметики. Остатки и сравнения. Алгоритм Евклида. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма. Системы счисления, отличные от десятичных. Функция Эйлера, число и сумма делителей натурального числа.

Основная теорема алгебры. Приводимые и неприводимые многочлены. Симметрические многочлены. Целочисленные и целозначные многочлены.

Уравнения и неравенства

Уравнение, являющееся следствием другого уравнения; уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений.

Тригонометрические, показательные, логарифмические и иррациональные уравнения и неравенства. Типы уравнений. Решение уравнений и неравенств.

Метод интервалов для решения неравенств. Графические методы решения уравнений и неравенств. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Системы тригонометрических, показательных, логарифмических и иррациональных уравнений. Системы тригонометрических, показательных, логарифмических и *иррациональных* неравенств.

Уравнения, системы уравнений с параметрами. *Неравенства с параметрами.*

Решение уравнений степени выше 2 специальных видов. Формулы Виета. Теорема Безу. Диофантовы уравнения. Решение уравнений в комплексных числах.

Неравенства о средних. Неравенство Бернулли.

Функции

Функция и её свойства; нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность. Наибольшее и наименьшее значения функции. Периодическая функция и её наименьший

период. Чётные и нечётные функции. *Функции «дробная часть числа»* $y = \{x\}$ *и «целая часть числа»* $y = [x]$.

Взаимно обратные функции. Графики взаимно обратных функций. Тригонометрические функции числового аргумента $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции, их главные значения, свойства и графики.

Степенная, показательная, логарифмическая функции, их свойства и графики.

Преобразования графиков функций: сдвиг, умножение на число, симметрия относительно координатных осей и начала координат.

Элементы математического анализа

Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Понятие предела функции в точке. *Понятие предела функции в бесконечности. Асимптоты графика функции.* Непрерывность функции. *Свойства непрерывных функций. Теорема Вейерштрасса для непрерывных функций.*

Дифференцируемость функции. Производная функции в точке. Касательная к графику функции. Геометрический и физический смысл производной. *Применение производной в физике*. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования.

Вторая производная, её геометрический и физический смысл.

Точки экстремума (максимума и минимума). Исследование элементарных функций на точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. *Построение графиков функций с помощью производных*. *Применение производной при решении прикладных задач на максимум и минимум.*

Первообразная. Неопределённый интеграл. Первообразные элементарных функций. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница. Определённый ин-

теграл. Вычисление площадей плоских фигур *и объёмов тел вращения с помощью интеграла.*

Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

Комбинаторика, вероятность и статистика, логика и теория графов

Правило произведения в комбинаторике. Соединения без повторений. Сочетания и их свойства. Бином Ньютона. *Соединения с повторениями.*

Вероятность события. Сумма вероятностей несовместных событий. Противоположные события. Условная вероятность. Независимые события. Произведение вероятностей независимых событий. Формула Бернулли. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Вероятностное пространство. Аксиомы теории вероятностей.

Дискретные случайные величины и их распределения. Совместные распределения. Распределение суммы и произведения независимых случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин.

Бинарная случайная величина, распределение Бернулли. Геометрическое распределение. Биномиальное распределение и его свойства.

Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности. Функция распределения. Равномерное распределение.

Нормальное распределение. Функция Лапласа. Параметры нормального распределения. Примеры случайных величин, подчинённых нормальному закону (погрешность измерений, рост человека).

Закон больших чисел. Выборочный метод измерения вероятностей. Роль закона больших чисел в науке, природе и обществе.

Корреляция двух случайных величин. Понятие о коэффициенте корреляции.

Статистическая гипотеза. Статистические критерии. Статистическая значимость. Проверка простейших гипотез.

Основные понятия теории графов.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала для учебно-методических комплектов по алгебре и началам математического анализа, выпускаемых издательством «Просвещение», не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по алгебре и началам математического анализа разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, использование современных технологий.

Перечень учебных действий ученика не носит нормативного характера, его не следует рассматривать в качестве требований ни к учителю, ни к ученику.

Следует также обратить внимание на то, что характеристика учебных действий ученика в предлагаемом тематическом планировании относится к предметной области. Универсальные учебные действия конкретизированы в «Программе развития и формирования универсальных учебных действий».

Планирование по алгебре и началам математического анализа к каждому учебнику представлено в нескольких вариантах в соответствии с базисным учебным планом.

Базовый уровень: 2,5 ч в неделю, всего 85 ч в год;

углублённый уровень: 4 ч или 5 ч в неделю, всего 136 ч или 180 ч соответственно в год.

Базовый уровень

2,5 ч в неделю, всего 170 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	10 класс		
Глава I. Действительные числа		**13**	Находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Переводить бесконечную периодическую дробь в обыкновенную дробь. Приводить примеры (давать определение) арифметических корней натуральной степени. Применять правила действий с радикалами, выражениями со степенями с рациональным показателем при вычислениях и преобразованиях выражений
1, 2	Целые и рациональные числа. Действительные числа	2 1	
3	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	2	
4	Арифметический корень натуральной степени	3	
5	Степень с рациональным и действительными показателями	3	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 1	1	
Глава II. Степенная функция		**12**	По графикам степенных функций (в зависимости от показателя степени) описывать их свойства (монотонность, ограничен-
6	Степенная функция, её свойства и график	3	
7	Взаимно обратные функции. Сложная		

	функция	2	ность, чётность, нечётность).
8	Равносильные уравнения и неравенства	2	Строить схематически график степенной функции в зависимости от принадлежности показателя степени (в аналитической записи рассматриваемой функции) к одному из рассматриваемых числовых множеств (при показателях, принадлежащих множеству целых чисел, при любых действительных показателях) и перечислять её свойства. Приводить примеры степенных функций (заданных с помощью формулы или графика), обладающих заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Анализировать поведение функций на различных участках области определения. Распознавать равносильные преобразования, преобразования, приводящие к урав-
9	Иррациональные уравнения	2	
10*	Иррациональные неравенства	—	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 2	1	

			нению-следствию. Решать простейшие иррациональные уравнения. Распознавать графики и строить графики степенных функций, используя графопостроители, изучать свойства функций по их графикам. Выполнять преобразования графиков степенных функций: параллельный перенос. Применять свойства степенной функции при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Глава III. Показательная функция		**10**	По графикам показательной функции описывать её свойства (монотонность, ограниченность). Приводить примеры показательной функции (заданной с помощью формулы или графика), обладающей заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл пере-
11	Показательная функция, её свойства и график	2	
12	Показательные уравнения	2	
13	Показательные неравенства	2	
14	Системы показательных уравнений и неравенств	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	

	Контрольная работа № 3	1	численных свойств. Анализировать поведение функций на различных участках области определения. Решать простейшие показательные уравнения, неравенства и их системы. Решать показательные уравнения методами разложения на множители, способом замены неизвестного, с использованием свойств функции, решать уравнения, сводящиеся к квадратным. Распознавать графики и строить график показательной функции, используя графопостроители, изучать свойства функции по графикам. Формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих показательную функцию, и проверять их. Выполнять преоб-

			разования графика показательной функции: параллельный перенос. Применять свойства показательной функции при решении прикладных задач
Глава IV. Логарифмическая функция		**15**	Выполнять простейшие преобразования логарифмических выражений с использованием свойств логарифмов, с помощью формул перехода. По графику логарифмической функции описывать её свойства (монотонность, ограниченность). Приводить примеры логарифмической функции (заданной с помощью формулы или графика), обладающей заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Анализировать поведение функций на
15	Логарифмы	2	
16	Свойства логарифмов	2	
17	Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода	2	
18	Логарифмическая функция, её свойства и график	2	
19	Логарифмические уравнения	2	
20	Логарифмические неравенства	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 4	1	

			различных участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций. Формулировать определения перечисленных свойств. Решать простейшие логарифмические уравнения, логарифмические неравенства и их системы. Решать логарифмические уравнения различными методами. Распознавать графики и строить график логарифмической функции, используя графопостроители, изучать свойства функции по графикам, формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих логарифмическую функцию, и проверять их. Применять свойства логарифмической функции при решении прикладных за-

			дач и задач повышенной сложности
Глава V. Тригонометрические формулы		**20**	Переводить градусную меру в радианную и обратно. Находить на окружности положение точки, соответствующей данному действительному числу. Находить знаки значений синуса, косинуса, тангенса числа. Выявлять зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла. Применять данные зависимости для доказательства тождества, в частности, на определённых множествах. Применять при преобразованиях и вычислениях формулы связи тригонометрических функций углов α и –α, формулы сложения, формулы двойных и половинных углов,
21	Радианная мера угла	1	
22	Поворот точки вокруг начала координат	2	
23	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2	
24	Знаки синуса, косинуса и тангенса	1	
25	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	
26	Тригонометрические тождества	2	
27	Синус, косинус и тангенс углов α и –α	1	
28	Формулы сложения	2	
29	Синус, косинус и тангенс двойного угла	1	
30	Синус, косинус и тангенс половинного угла	1	
31	Формулы приведения	2	
32	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	1	

	Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 5	1 1	формулы приведения, формулы суммы и разности синусов, суммы и разность косинусов. Доказывать тождества, применяя различные методы, используя все изученные формулы. Применять все изученные свойства и формулы при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Глава VI. Тригонометрические уравнения		**14**	Уметь находить арксинус, арккосинус, арктангенс действительного числа, грамотно формулируя определение. Применять формулы для нахождения корней уравнений $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Уметь решать тригонометрические уравнения: линейные относительно синуса, косинуса, тангенса угла (числа), сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного, сводящиеся к
33	Уравнение $\cos x = a$	3	
34	Уравнение $\sin x = a$	3	
35	Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	2	
36	Решение тригонометрических уравнений	4	
37*	Примеры решения простейших тригонометрических неравенств	—	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 6	1	

			простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители. Применять все изученные свойства и способы решения тригонометрических уравнений и неравенств при решении прикладных задач
Итоговое повторение		**1**	
		11 класс	
Глава VII. Тригонометрические функции		**14**	По графикам функций описывать их свойства (монотонность, ограниченность, чётность, нечётность, периодичность). Изображать графики тригонометрических функций с помощью графопостроителей, описывать их свойства. Распознавать графики тригонометрических функций. Строить графики элементарных функций, используя графопостроители, изучать свойства элементарных функций по их графикам
38	Область определения и множество значений тригонометрических функций	2	
39	Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций	2	
40	Свойство функции $y = \cos x$ и её график	3	
41	Свойство функции $y = \sin x$ и её график	2	
42	Свойства и графики функций $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$	2	
43*	Обратные тригонометрические функции	1	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	

	Контрольная работа № 1	1	
Глава VIII. Производная и её геометрический смысл		**16**	Приводить примеры функций, являющихся непрерывными, имеющих вертикальную, горизонтальную асимптоту. Записывать уравнение каждой из этих асимптот. Уметь по графику функции определять промежутки непрерывности и точки разрыва, если такие имеются. Уметь доказывать непрерывность функции. Находить угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке. Находить мгновенную скорость движения материальной точки. Находить производные элементарных функций. Находить производные суммы, произведения и частного двух функций, производную сложной функции $y = f(kx + b)$. Применять понятие производной при ре-
44	Производная	2	
45	Производная степенной функции	2	
46	Правила дифференцирования	3	
47	Производные некоторых элементарных функций	3	
48	Геометрический смысл производной	3	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 2	1	

			шении задач
Глава IX. Применение производной к исследованию функций		**12**	Находить вторую производную и ускорение процесса, описываемого с помощью формулы. Находить промежутки возрастания и убывания функции. Находить точки минимума и максимума функции. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Находить наибольшее и наименьшее значения функции. Исследовать функцию с помощью производной и строить её график
49	Возрастание и убывание функции	2	
50	Экстремумы функции	2	
51	Применение производной к построению графиков функций	2	
52	Наибольшее и наименьшее значения функции	3	
53*	Выпуклость графика функций, точки перегиба	1	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 3	1	
Глава X. Интеграл		**11**	Вычислять приближённое значение площади криволинейной трапеции. Находить первообразные функций: $y = x^p$, где $p \in \boldsymbol{R}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. Находить первообразные функций $f(x) + g(x)$, $kf(x)$ и $f(kx + b)$. Вычислять площадь
54	Первообразная	2	
55	Правила нахождения первообразных	3	
56	Площадь криволинейной трапеции и интеграл	2	
57, 58	Вычисление интегралов. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов	—	
59	Применение произ-		

	водной интеграла к решению практических задач Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 4	1 2 1	криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона—Лейбница
Глава XI. Комбинаторика		**10**	Применять правило произведения при выводе формулы числа перестановок. Создавать математические модели для решения комбинаторных задач с помощью подсчёта числа размещений, перестановок и сочетаний. Использовать свойства числа сочетаний при решении прикладных задач и при конструировании треугольника Паскаля. Применять формулу бинома Ньютона при возведении двучлена в натуральную степень
60	Правило произведения	1	
61	Перестановки	2	
62	Размещения	1	
63	Сочетания и их свойства	2	
64	Бином Ньютона Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 5	2 1 1	
Глава XII. Элементы теории вероятностей		**11**	Приводить примеры случайных, достоверных и невозможных событий. Определять и нахо-
65	События	1	
66	Комбинация событий. Противополож-	1	

	ное событие		дить сумму и произведение событий.
67	Вероятность события	2	Определять вероятность события в классическом понимании. Находить вероятность события с использованием формул комбинаторики, вероятность суммы двух несовместимых событий и вероятность события, противоположного данному. Приводить примеры независимых событий. Находить вероятность совместного наступления двух независимых событий. Находить статистическую вероятность событий в опыте с большим числом в испытании. Иметь представление о законе больших чисел
68	Сложение вероятностей	2	
69	Независимые события. Умножение вероятностей	1	
70	Статистическая вероятность	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 6	1	
Глава XIII. Статистика		**8**	Знать понятие случайной величины, представлять распределение значений дискретной случайной величины в виде
71	Случайные величины	2	
72	Центральные тенденции	2	
73	Меры разброса	2	

	Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 7	1 1	частотной таблицы, полигона частот (относительных частот). Представлять распределение значений непрерывной случайной величины в виде частотной таблицы и гистограммы. Знать понятие генеральной совокупности и выборки. Приводить примеры репрезентативных выборок значений случайной величины. Знать основные центральные тенденции: моду, медиану, среднее. Находить центральные тенденции учебных выборок. Знать, какая из центральных тенденций наилучшим образом характеризует совокупность. Иметь представление о математическом ожидании. Вычислять значение математического ожидания случайной величины с конечным числом значений.

			Знать основные меры разброса значений случайной величины: размах, отклонение от среднего и дисперсию. Находить меры разброса случайной величины с небольшим числом различных её значений
Итоговое повторение курса алгебры и начал математического анализа		**5**	

Углублённый уровень

4 ч в неделю, всего 272 ч

Номер параграфа	**Содержание материала**	**Количество часов**	**Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)**
		10 класс	
Глава I. Действительные числа		**18**	Находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Переводить бесконечную периодическую дробь в обыкновенную дробь. Приводить примеры (давать определение) арифметических корней натуральной сте-
1, 2	Целые и рациональные числа.	2	
	Действительные числа	2	
3	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	2	
4	Арифметический корень натуральной степени	4	

5	Степень с рациональным и действительными показателями Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 1	5 2 1	пени. Пояснять на примерах понятие степени с любым действительным показателем. Применять правила действий с радикалами, выражениями со степенями с рациональным показателем (любым действительным показателем) при вычислениях и преобразованиях выражений. Доказывать тождества, содержащие корень натуральной степени и степени с любым действительным показателем, применяя различные способы. Применять умения преобразовывать выражения и доказывать тождества при решении задач повышенной сложности
Глава II. Степенная функция		**18**	По графикам степенных функций (в зависимости от показателя степени) описывать их свойства (монотонность, ограниченность, чётность, нечётность).
6 7 8	Степенная функция, её свойства и график Взаимно обратные функции. Сложная функция Равносильные урав-	3 2	

	нения и неравенства	4	Строить схематически график степенной функции в зависимости от принадлежности показателя степени (в аналитической записи рассматриваемой функции) к одному из рассматриваемых числовых множеств (при показателях, принадлежащих множеству целых чисел, при любых действительных показателях) и перечислять её свойства. Определять, является ли функция обратимой. Строить график сложной функции, дробно-рациональной функции элементарными методами. Приводить примеры степенных функций (заданных с помощью формулы или графика), обладающих заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Анализировать поведение функций на различных
9	Иррациональные уравнения	4	
10*	Иррациональные неравенства	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 2	1	

			участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций. Формулировать определения перечисленных свойств. Распознавать равносильные преобразования, преобразования, приводящие к уравнению-следствию. Решать простейшие иррациональные уравнения, иррациональные неравенства и их системы. Распознавать графики и строить графики степенных функций, используя графопостроители, изучать свойства функций по их графикам. Делать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих степенные функции, и проверять их. Выполнять преобразования графиков степенных функций: параллельный перенос, растяжение (сжатие) вдоль оси ординат (построение графиков с модулями, построение гра-

			фика обратной функции). Применять свойства степенной функции при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Глава III. Показательная функция		**12**	По графикам показательной функции описывать её свойства (монотонность, ограниченность). Приводить примеры показательной функции (заданной с помощью формулы или графика), обладающей заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Анализировать поведение функций на различных участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций. Формулировать определения перечисленных свойств. Решать простейшие показательные
11	Показательная функция, её свойства и график	2	
12	Показательные уравнения	3	
13	Показательные неравенства	3	
14	Системы показательных уравнений и неравенств	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 3	1	

			уравнения, неравенства и их системы. Решать показательные уравнения методами разложения на множители, способом замены неизвестного, с использованием свойств функции, решать уравнения, сводящиеся к квадратным, иррациональным. Решать показательные уравнения, применяя различные методы. Распознавать графики и строить график показательной функции, используя графопостроители, изучать свойства функции по графикам. Формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих показательную функцию, и проверять их. Выполнять преобразования графика показательной функции: параллельный перенос, растяжение

			(сжатие) вдоль оси ординат (построение графиков с модулями, построение графика обратной функции). Применять свойства показательной функции при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Глава IV. Логарифмическая функция		**19**	Выполнять простейшие преобразования логарифмических выражений с использованием свойств логарифмов, с помощью формул перехода. По графику логарифмической функции описывать её свойства (монотонность, ограниченность). Приводить примеры логарифмической функции (заданной с помощью формулы или графика), обладающей заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл пере-
15	Логарифмы	2	
16	Свойства логарифмов	2	
17	Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода	3	
18	Логарифмическая функция, её свойства и график	2	
19	Логарифмические уравнения	3	
20	Логарифмические неравенства	4	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 4	1	

			численных свойств. Анализировать поведение функций на различных участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций. Формулировать определения перечисленных свойств. Решать простейшие логарифмические уравнения, логарифмические неравенства и их системы. Решать логарифмические уравнения различными методами. Распознавать графики и строить график логарифмической функции, используя графопостроители, изучать свойства функции по графикам, формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих логарифмическую функцию, и проверять их. Выполнять преобразования

			графика логарифмической функции: параллельный перенос, растяжение (сжатие) вдоль оси ординат (построение графиков с модулями, построение графика обратной функции). Применять свойства логарифмической функции при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Глава V. Тригонометрические формулы		**27**	Переводить градусную меру в радианную и обратно. Находить на окружности положение точки, соответствующей данному действительному числу. Находить знаки значений синуса, косинуса, тангенса числа. Выявлять зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла. Применять данные зависимости для доказательства тождества, в частности, на определённых мно-
21	Радианная мера угла	1	
22	Поворот точки вокруг начала координат	2	
23	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2	
24	Знаки синуса, косинуса и тангенса	1	
25	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	
26	Тригонометрические тождества	3	
27	Синус, косинус и тангенс углов α и –α	1	
28	Формулы сложения	3	
29	Синус, косинус и		

	тангенс двойного угла	2	жествах.
30	Синус, косинус и тангенс половинного угла	2	Применять при преобразованиях и вычислениях формулы связи тригонометрических функций
31	Формулы приведения	2	углов α и –α, формулы сложения, формулы двойных и половинных углов,
32	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	3	формулы приведения, формулы суммы и разности синусов, суммы и разность косинусов, произведения синусов и косинусов. Доказывать тождества, применяя различные методы, используя все изученные формулы. Применять все изученные свойства и формулы при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 5	1	
Глава VI. Тригонометрические уравнения		**18**	Уметь находить арксинус, арккосинус, арктангенс действительного числа, грамотно формулируя определение. Применять свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа.
33	Уравнение cos $x = a$	3	
34	Уравнение sin $x = a$	3	
35	Уравнение tg $x = a$	2	
36	Решение тригонометрических уравнений	5	
37*	Примеры решения		

	простейших тригонометрических неравенств Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 6	2 2 1	Применять формулы для нахождения корней уравнений $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$. Уметь решать тригонометрические уравнения: линейные относительно синуса, косинуса, тангенса угла (числа), сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного, сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители. Решать однородные (первой и второй степени) уравнения относительно синуса и косинуса, а также сводящиеся к однородным уравнениям. Использовать метод вспомогательного угла. Применять метод предварительной оценки левой и правой частей уравнения. Уметь применять несколько методов при решении уравнения. Решать несложные системы тригономет-

			рических уравнений. Решать тригонометрические неравенства с помощью единичной окружности. Применять все изученные свойства и способы решения тригонометрических уравнений и неравенств при решении прикладных задач и задач повышенной сложности
Итоговое повторение		**24**	
11 класс			
Глава VII. Тригонометрические функции		**20**	По графикам функций описывать их свойства (монотонность, ограниченность, чётность, нечётность, периодичность). Приводить примеры функций (заданных с помощью формулы или графика), обладающих заданными свойствами (например, ограниченности). Разъяснять смысл перечисленных свойств. Изображать графики сложных функций с помощью графопостроителей, описывать их свойства.
38	Область определения и множество значений тригонометрических функций	3	
39	Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций	3	
40	Свойство функции $y = \cos x$ и её график	3	
41	Свойство функции $y = \sin x$ и её график	3	
42	Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	2	
43*	Обратные тригонометрические функ-		

	ции Урок обобщения и систематизации знаний Контрольная работа № 1	3 2 1	Решать простейшие тригонометрические неравенства, используя график функции. Распознавать графики тригонометрических функций, графики обратных тригонометрических функций. Применять и доказывать свойства обратных тригонометрических функций. Строить графики элементарных функций, используя графопостроители, изучать свойства элементарных функций по их графикам, формулировать гипотезы о количестве корней уравнений, содержащих элементарные функции, и проверять их. Выполнять преобразования графиков элементарных функций: параллельный перенос, растяжение (сжатие) вдоль оси ординат. Применять другие элементарные способы построения графиков. Уметь применять различные

			методы доказательств истинности
Глава VIII. Производная и её геометрический смысл		**20**	Приводить примеры монотонной числовой последовательности, имеющей предел. Вычислять пределы последовательностей. Выяснять, является ли последовательность сходящейся. Приводить примеры функций, являющихся непрерывными, имеющих вертикальную, горизонтальную асимптоту. Записывать уравнение каждой из этих асимптот. Уметь по графику функции определять промежутки непрерывности и точки разрыва, если такие имеются. Уметь доказывать непрерывность функции. Находить угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке. Находить мгновенную скорость движения материальной точки. Анализировать пове-
44	Производная	3	
45	Производная степенной функции	3	
46	Правила дифференцирования	3	
47	Производные некоторых элементарных функций	4	
48	Геометрический смысл производной	4	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 2	1	

			дение функций на различных участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций. Находить производные элементарных функций. Находить производные суммы, произведения и частного двух функций, производную сложной функции $y = f(kx + b)$. Объяснять и иллюстрировать понятие предела последовательности. Приводить примеры последовательностей, имеющих предел и не имеющих предела. Пользоваться теоремой о пределе монотонной ограниченной последовательности. Выводить формулы длины окружности и площади круга. Объяснять и иллюстрировать понятие предела функции в точке. Приводить примеры функций, не имеющих предела в некоторой точке.

			Вычислять пределы функций. Анализировать поведение функций на различных участках области определения. Находить асимптоты. Вычислять приращение функции в точке. Составлять и исследовать разностное отношение. Находить предел разностного отношения. Вычислять значение производной функции в точке (по определению). Находить угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с заданной абсциссой. Записывать уравнение касательной к графику функции, заданной в точке. Находить производную сложной функции, обратной функции. Применять понятие производной при решении задач

Глава IX. Применение производной к исследованию функций		**18**	Находить вторую производную и ускорение процесса, описываемого с помощью формулы. Находить промежутки возрастания и убывания функции. Доказывать, что заданная функция возрастает (убывает) на указанном промежутке. Находить точки минимума и максимума функции. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Находить наибольшее и наименьшее значения функции. Исследовать функцию с помощью производной и строить её график. Применять производную при решении текстовых, геометрических, физических и других задач
49	Возрастание и убывание функции	2	
50	Экстремумы функции	3	
51	Применение производной к построению графиков функций	4	
52	Наибольшее и наименьшее значения функции	3	
53*	Выпуклость графика функций, точки перегиба	3	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 3	1	
Глава X. Интеграл		**17**	Вычислять приближённое значение площади криволинейной трапеции.
54	Первообразная	2	
55	Правила нахождения первообразных	2	

56	Площадь криволинейной трапеции и интеграл	3	Находить первообразные функций: $y = x^p$, где $p \in \boldsymbol{R}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$. Находить первообразные функций: $f(x) + g(x)$, $kf(x)$ и $f(kx + b)$. Вычислять площади криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона—Лейбница. Находить приближённые значения интегралов. Вычислять площадь криволинейной трапеции с помощью интеграла
57	Вычисление интегралов. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов	2	
58		3	
59	Применение производной интеграла к решению практических задач	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 4	1	
Глава XI. Комбинаторика		**13**	Применять при решении задач метод математической индукции. Применять правило произведения при выводе формулы числа перестановок. Создавать математические модели для решения комбинаторных задач с помощью подсчёта числа размещений, перестановок и сочетаний. Находить число перестановок
60	Правило произведения	2	
61	Перестановки	2	
62	Размещения	2	
63	Сочетания и их свойства	2	
64	Бином Ньютона	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	2	
	Контрольная работа № 5	1	

			с повторениями. Решать комбинаторные задачи, сводящиеся к подсчёту числа сочетаний с повторениями. Применять формулу бинома Ньютона. При возведении бинома в натуральную степень находить биномиальные коэффициенты при помощи треугольника Паскаля
Глава XII. Элементы теории вероятностей		**13**	Приводить примеры случайных, достоверных и невозможных событий. Знать определение суммы и произведения событий. Знать определение вероятности события в классическом понимании. Приводить примеры несовместных событий. Находить вероятность суммы несовместных событий. Находить вероятность суммы произвольных событий. Иметь представление об условной ве-
65	События	1	
66	Комбинация событий. Противоположное событие	2	
67	Вероятность события	2	
68	Сложение вероятностей	2	
69	Независимые события. Умножение вероятностей	2	
70	Статистическая вероятность	2	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 6	1	

			роятности событий. Знать строгое определение независимости двух событий. Иметь представление о независимости событий и находить вероятность совместного наступления таких событий. Вычислять вероятность получения конкретного числа успехов в испытаниях Бернулли
Глава XIII. Статистика		**9**	Знать понятие случайной величины, представлять распределение значений дискретной случайной величины в виде частотной таблицы, полигона частот (относительных частот). Представлять распределение значений непрерывной случайной величины представлять в виде частотной таблицы и гистограммы. Знать понятие генеральной совокупности и выборки. Приводить примеры репрезентативных вы-
71	Случайные величины	2	
72	Центральные тенденции	2	
73	Меры разброса	3	
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	
	Контрольная работа № 7	1	

			борок значений случайной величины. Знать основные центральные тенденции: моду, медиану, среднее. Находить центральные тенденции учебных выборок. Знать, какая из центральных тенденций наилучшим образом характеризует совокупность. Иметь представление о математическом ожидании. Вычислять значение математического ожидания случайной величины с конечным числом значений. Знать основные меры разброса значений случайной величины: размах, отклонение от среднего и дисперсию. Находить меры разброса случайной величины с небольшим числом различных её значений
Итоговое повторение курса алгебры и начал математического анализа		**26**	

Учебно-методический комплект

1. *Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В.* и др. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. Базовый и углублённый уровни
2. *Шабунин М. И., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е.* и др. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс. Базовый и углублённый уровни
3. *Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е.* Алгебра и начала математического анализа. Тематические тесты. 10 класс. Базовый и углублённый уровни
4. *Фёдорова Н. Е.* Изучение алгебры и начал анализа. Книга для учителя. 10—11 классы
5. *Шабунин М. И., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е.* и др. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс. Базовый и углублённый уровни
6. *Ткачёва М. В.* Алгебра и начала математического анализа. Тематические тесты. 11 класс. Базовый и углублённый уровни

Дополнительная литература

1. *Агаханов Н. Х.* Математика. Районные олимпиады: 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. *Александров П. С.* Энциклопедия элементарной математики. Книга II. Алгебра / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
3. *Александров П. С.* Энциклопедия элементарной математики. Книга III. Функции и пределы (основы анализа) / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962.
5. *Вилейтнер Г.* Хрестоматия по истории математики / Г. Вилейтнер. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010.
6. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. — М.: Наука, 1969.

7. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: IX—X кл.: пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1983.
8. *Гнеденко Б. В.* Очерк по истории теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М.: Либроком, 2013.
9. *Куланин Е. Д.* Три тысячи конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин, В. П. Норин, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. — М.: Айрис-пресс, 2003.
10. *Курант Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М.: МЦНМО, 2001.
11. *Лютикас В. С.* Факультативный курс по математике. Теория вероятностей: учеб. пособие для 9—11 кл. средней школы / В. С. Лютикас. — М.: Просвещение, 1990.
12. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ: Астрель, 2002.
13. *Плотцкий А.* Вероятность в задачах для школьников / А. Плотцкий. — М., 1996.
14. *Реньи А.* Трилогия о математике / А. Реньи. — М.: Мир, 1980.
15. *Садовничий Ю. В.* Математика. Тематическая подготовка к ЕГЭ / Ю. В. Садовничий. — М.: Илекса, 2011.
16. *Сергеев И. Н.* ЕГЭ. Математика. Задания типа С / И. Н. Сергеев. — М.: Экзамен, 2009.
17. *Халамайзер А. Я.* Комбинаторика и бином Ньютона / А. Я. Халамайзер. — М.: Просвещение, 1980.
18. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике: 7—11 кл. / А. В. Шевкин. — М.: Илекса, 2012.
19. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада. Задачи и решения. Вып. 1, 2 / А. В. Шевкин. — М.: Илекса, 2008—2012.
20. *Шевкин А. В.* ЕГЭ. Математика. Задания С6 / А. В. Шевкин, Ю. О. Пукас. — М.: Экзамен, 2012.
21. *Шибасов Л. П.* За страницами учебника математики: математический анализ. Теория вероятностей: пособие для учащихся 10—11 кл. / Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 2008.

Интернет-библиотеки

1. Интернет-библиотека сайта Московского центра непрерывного математического образования.
   http://ilib.mccme.ru/
2. Математические этюды.
   http://etudes.ru
3. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант».
   http://kvant.mccme.ru/
4. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета.
   http://lib.mexmat.ru/books/3275