Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

9 КЛАСС

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2019

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21
Г36

16+

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков,
В. Б. Некрасов, И. И. Юдина

Геометрия. Методические рекомендации. 9 класс :
Г36 учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян и др.]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2019. — 96 с. : ил. — ISBN 978-5-09-071000-8.

Учебное пособие предназначено для учителей, которые преподают геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна и др. Оно написано в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре. Эта книга будет полезна в первую очередь начинающим учителям.

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Глазков Юрий Александрович
Некрасов Владимир Борисович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации
9 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики. Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*. Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художники *О. П. Боголомолова, А. Б. Юдкин*. Художественный редактор *Т. В. Глушкова*. Компьютерная графика *К. В. Кергелен*. Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Е. В. Семериковой*. Корректор *Л. А. Ермолина*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 16.05.19. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,96. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.

ISBN 978-5-09-071000-8

Предисловие

Книга является заключительной частью методического пособия для учителей, преподающих геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной «Геометрия. 7—9 классы» (М.: Просвещение, 2019). В ней отражена методическая концепция учебника, направленная на достижение учащимися (с помощью учителя и учебника) требуемых Федеральным государственным образовательным стандартом результатов обучения, как предметных, относящихся к геометрическим знаниям и умениям, так и более широких — метапредметных и личностных, включающих всестороннее развитие личности, потребность в непрерывном продолжении образования и самосовершенствования.

Будучи нацеленным в первую очередь на предметные результаты обучения, пособие содержит комментарии к теоретическому и задачному материалу и методические рекомендации по проведению уроков по теме каждого параграфа. В самом начале комментариев и рекомендаций к данному параграфу говорится о его назначении. Далее внимание учителя обращается на те или иные моменты, связанные с изучением теоретического материала и решением задач. Для наиболее сложных теорем курса даны примерные планы проведения их доказательств. Эти планы рекомендуется записать на доске и в тетрадях, чтобы учащиеся смогли лучше усвоить логику рассуждений как при изучении теоретического материала в классе, так и при домашней работе с учебником. Указаны теоремы, которые можно предложить учащимся проработать самостоятельно по учебнику.

При изучении курса геометрии решению задач должно быть уделено большое внимание. Все новые понятия, теоремы, свойства геометрических фигур, способы рассуждений должны усваиваться в процессе решения задач. На это следует отводить в среднем не менее половины каждого урока. Лучшему усвоению материала способствует большое количество и разнообразие задач, содержащихся в учебнике. Основными являются задачи к каждому параграфу. Дополнительные задачи к каждой главе имеют двойное назначение: для основной работы, если задач к какому-то параграфу главы окажется недостаточно, и для повторения материала данной главы. Более трудные задачи можно использовать для внеклассной работы. По каждому классу в учебнике приведены задачи повышенной трудности. Они не являются обязательными и предназначены для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими особый интерес к математике. Их можно использовать также в кружках и на факультативных занятиях.

Помимо задач из учебника, для работы в классе можно использовать задачи из рабочих тетрадей, входящих в данный учебно-методический комплект, а также упражнения, предложенные в данной книге. Среди них есть задачи по готовым рисункам, которые могут помочь подвести учащихся к новым понятиям и утверждениям, а также задачи для лучшего осмысления и усвоения изученного материала, для подготовки к самостоятельной или контрольной работе. Даны образцы возможного оформления решения задач.

Целый ряд задач: основных, дополнительных, а также задач повышенной трудности — имеет электронную версию, содержащуюся в «Единой коллекции ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др.». Их можно использовать при наличии компьютерного обеспечения. Электронный адрес: school-collection.edu.ru

К каждому параграфу даны рекомендации по распределению задач для работы в классе и дома. В домашних заданиях наряду с номерами пунктов учебника и номерами задач указаны номера вопросов для повторения к соответствующей главе. Предполагается, что при подготовке к уроку учащийся должен найти ответы на эти вопросы в указанных пунктах учебника. Такой подход формирует умение самостоятельно работать с учебником.

Комментарии и рекомендации к каждому параграфу завершаются формулировкой основных требований, которые предъявляются к учащимся после изучения данного параграфа. Требования относятся как к знанию теоретического материала, так и к умению решать задачи и овладению теми или иными универсальными учебными действиями.

По каждой теме в книге приведены примерные самостоятельные и контрольные работы, указано назначение самостоятельных работ (обучающая или проверочная).

Варианты самостоятельных и контрольных работ, причём разного уровня сложности, и варианты математических диктантов можно брать также из дидактических материалов (авторы Б. Г. Зив и В. М. Мейлер), а также из сборника самостоятельных и контрольных работ (автор М. А. Иченская), входящих в данный учебно-методический комплект.

Представлены карточки для устного опроса учащихся по материалу каждой главы. Их можно использовать как при текущем, так и при итоговом контроле знаний и умений учащихся. Объём вопросов каждой карточки учитель может менять в зависимости от цели опроса и времени, отведённого на опрос.

Книга содержит также рекомендации по проведению уроков итогового повторения.

В заключение рекомендаций к каждой главе даны решения отдельных задач этой главы, а также комментарии и указания к некоторым задачам. Их назначение — показать образцы рассуждений или примерное оформление решения.

В соответствии со структурой основного учебника в конце пособия даны решения либо комментарии и указания к решению отдельных задач повышенной трудности.

Примерное поурочное тематическое планирование составлено из расчёта, что на изучение геометрии в 9 классе отводится 2 часа в неделю (всего 68 часов за учебный год). В соответствии с этим по каждому параграфу указано примерное количество отводимых на него уроков. В конце пособия приведено примерное тематическое планирование учебного материала за курс 9 класса.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, приведённые в книге, являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами и их свойствами, но и на решение более важных задач, определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом, — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно, точно и компетентно излагать свои мысли, аргументировать высказанные утверждения, всестороннее развитие творческих способностей учащегося.

Курс 9 класса является завершающим звеном в изучении планиметрии. В течение двух предыдущих лет учащиеся накапливали геометрические знания и умения, изучали свойства отрезков, углов, треугольников, четырёхугольников, окружностей, для них стали привычными понятия определения, теоремы, доказательства. Всё это позволяет интенсифицировать учебный процесс, вводить в него элементы лекционно-семинарских занятий, увеличивать долю самостоятельной работы учащихся.

ГЛАВА

IX Векторы *(10 ч)*

Понятие вектора и действия над векторами вводятся в этой главе так, как это принято в физике. Величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, называются в физике векторными и изображаются отрезками со стрелкой. Поэтому геометрический вектор вводится как направленный отрезок, т. е. отрезок, на котором задано направление от одного конца к другому.

Следует иметь в виду, что изучение векторов в курсе геометрии преследует две цели: подготовить учащихся к восприятию действий над векторными величинами в физике и показать, как можно использовать векторы при решении геометрических задач. Поэтому основное внимание следует уделить не обоснованиям формул и теорем векторной алгебры, а умению выполнять действия над векторами и демонстрации возможностей векторного метода в геометрии.

Примерное поурочное планирование учебного материала

При изучении главы IX «Векторы» нужно использовать рабочую тетрадь и дидактические материалы для 8 класса.

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Понятие вектора	2	112—114	С-32
§ 2. Сложение и вычитание векторов	3	115—128	С-33, С-34
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	3	129—137	С-35, С-36
Решение задач	1	112—137	С-37
Контрольная работа № 1	1	—	К-6

§ 1 Понятие вектора *(2 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия вектора, его длины, коллинеарных и равных векторов; научить учащихся изображать и обозначать векторы, откладывать от любой точки плоскости вектор, равный данному.

Материал пп. 79, 80 рекомендуется изложить в виде небольшой лекции с применением разнообразных иллюстративных средств (мультимедийное оборудование, плакаты и т. п.). Особое внимание следует уделить физическим примерам векторных величин, а также примеру, подводящему к определению равенства векторов.

В классе можно выполнить практические задания 738, 739, 740 (а), 742 и решить задачи 744 (устно), 745 (выборочно), 746 (устно по заготовленному чертежу), 750 (прямое утверждение).

Дома: вопросы для повторения 1—5 (с. 208); задачи 740 (б), 749, 750 (обратное утверждение).

Перед тем как приступить к изучению п. 81 «Откладывание вектора от данной точки», желательно проверить усвоение предшествующего материала. Это можно сделать в процессе решения следующих устных задач:

1. На рисунке 1, *а*—*в* изображены параллелограмм $ABCD$, трапеция $KLMN$ ($KL \parallel MN$) и треугольник PQR (AB, BC, CA — средние линии этого треугольника).

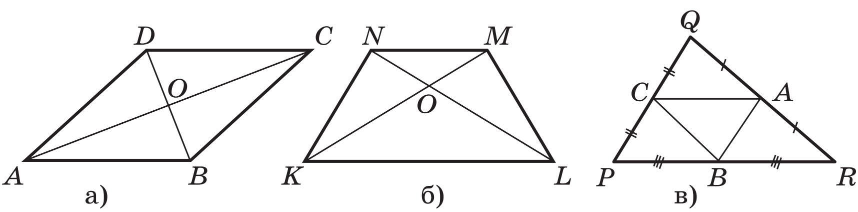


Рис. 1

а) Назовите векторы с началом и концом в отмеченных на рисунке точках, являющиеся: сонаправленными, противоположно направленными, равными.

б) Укажите векторы, длины которых равны. Равны ли при этом сами векторы?

2. Задача 752.

После изучения п. 81 (рассказ учителя) рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Перечертите рисунок 2 в тетрадь. Постройте векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{NQ}$, такие, что $\overrightarrow{MP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NQ} \downarrow\uparrow \vec{a}$.
2. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

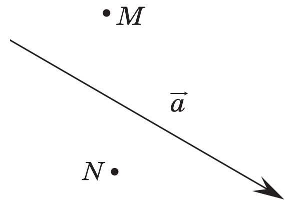


Рис. 2

Вариант II

1. Перечертите рисунок 3 в тетрадь. Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, такие, что $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \vec{m}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{m}$.
2. Точки M, K, N, P не лежат на одной прямой, и $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN}$. Докажите, что четырёхугольник $KMNP$ — параллелограмм.

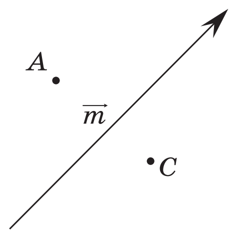


Рис. 3

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Точка M лежит на отрезке AB. Постройте векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MN}$, такие, что $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$. Найдите KN, если $AB = a$.
2. Точка O лежит внутри четырёхугольника $ABCD$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельной работы С-32 из дидактических материалов.

Дома: вопрос для повторения 6 (с. 209); задачи 743, 747, 748.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать** определения вектора, модуля вектора, равных векторов; **уметь объяснить**, какие два вектора называются сонаправленными и какие — противоположно направленными; **уметь изображать и обозначать** векторы, **откладывать** от данной точки **вектор**, равный данному; **приводить примеры** физических векторных величин; **решать задачи** типа 741—752.

§ 2 Сложение и вычитание векторов *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия суммы и разности двух векторов, рассмотреть законы сложения векторов и на их основе ввести понятие суммы трёх и более векторов; научить строить сумму двух данных векторов, используя правила треугольника и параллелограмма, сумму нескольких векторов, используя правило многоугольника, строить разность двух данных векторов двумя способами.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: сумма двух векторов, законы сложения векторов, правило параллелограмма — 1 урок; сумма нескольких векторов, вычитание векторов — 1 урок; решение задач — 1 урок.

Содержание пп. 82, 83 («Сумма двух векторов» и «Законы сложения векторов. Правило параллелограмма») рекомендуется изложить на первом уроке в виде небольшой лекции с использованием иллюстративных средств (плакаты, мультимедийное оборудование и т. п.).

Для лучшего усвоения изложенного материала можно выполнить в классе следующие практические задания и упражнения:

1. Задача 753.
2. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$. Какие из построенных векторов равны друг другу?
3. Задача 759 (а) (решить без помощи чертежа).
4. Упростите выражение:

   а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK})+\overrightarrow{KM}$;

   б) $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{XY})+\overrightarrow{NX}$.
5. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

   а) $\overrightarrow{EF}+(\overrightarrow{FP}+\vec{x})=\overrightarrow{EM}$;

   б) $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{MK}+\vec{x}$.
6. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, если $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{XB})+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{DC}$, где P и X — произвольные точки плоскости.

Дома: вопросы для повторения 7—10 (с. 209); практические задания и задачи 754, 759 (б) (без чертежа), 763 (б, в).

На следующем уроке, перед тем как рассказать о построении суммы трёх и более векторов, рекомендуется проверить усвоение предшествующего материала в процессе устного решения задач типа:

7. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

   а) $\overrightarrow{MN} + \vec{x} = \overrightarrow{MK}$;

   б) $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

8. Упростите выражение:

   а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$;

   б) $\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{FQ})$.

После введения правила многоугольника в классе можно решить задачи 755, 761, 762 (а).

Перед тем как приступить к изучению п. 85 «Вычитание векторов», целесообразно напомнить учащимся определение разности двух чисел, а затем предложить им самим придумать определение разности двух векторов.

После этого учителю рекомендуется изложить оставшийся материал п. 85, а затем учащиеся выполняют практическое задание 756 и решают задачи 762 (г), 763 (а), 764 (а). Кроме того, можно выполнить следующие упражнения:

9. Упростите выражение

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QM} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{CF}.$$

10. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия

$$\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{PQ} - \vec{x} - \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{RQ}.$$

Дома: вопросы для повторения 11—13 (с. 209); задачи 757, 760, 762 (б, в, д), 763 (г), 764 (б), 774.

Третий урок рекомендуется посвятить решению задач к § 2. Для решения в классе и дома можно рекомендовать задачи 765—773.

На уроке желательно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC. Постройте вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ и найдите $|\vec{p}|$, если $AB = 8$ см.

Вариант II

Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Постройте вектор $\vec{m} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ и найдите $|\vec{m}|$, если $BC = 9$ см.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ и найдите $|\vec{a}|$, если $AD = 12$ см, $BC = 5$ см.

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-33 и С-34 из дидактических материалов.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, как определяются сумма двух векторов, сумма нескольких векторов, вектор, противоположный данному, разность векторов; **знать и уметь обосновывать** законы сложения векторов; **уметь строить** сумму двух векторов с помощью правил треугольника и параллелограмма, сумму нескольких векторов с помощью правила многоугольника, разность векторов двумя способами с обоснованием каждого из этих способов; **уметь решать задачи** типа 759—771. Желательно, чтобы учащиеся могли провести аналогию между законами сложения векторов и свойствами сложения чисел, между определениями разности векторов и разности чисел.

§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести ещё одно действие: умножение вектора на число, ознакомить учащихся со свойствами этого действия; на конкретных примерах показать применение векторов при доказательстве теорем и решении геометрических задач, в частности, с помощью векторов доказать теорему о средней линии трапеции.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: умножение вектора на число и его свойства — 1 урок; применение векторов при решении задач и доказательстве теорем — 2 урока.

Содержание п. 86 рекомендуется изложить в виде небольшой лекции, уделив особое внимание примеру с движением автомобилей и изображением их скоростей (рис. 4, этот рисунок учащимся полезно сделать в тетрадях).

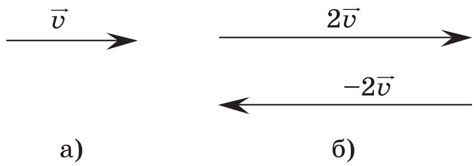


Рис. 4

После рассказа учителя можно выполнить практические задания 776 (б, г, д), 777 и решить задачи 779, 780 (б), 781 (а), 782.

Дома: вопросы для повторения 14—17 (с. 209); практические задания 775, 776 (а, в, е); задачи 780 (а), 781 (б, в), 783, 802, 804.

Усвоение нового материала можно проверить на следующем уроке в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам.

1. На рисунке 5 $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторы: а) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DM}$, где M — точка на стороне BC, такая, что $MB : MC = 3 : 2$; в) $\overrightarrow{KM}$, где K — точка на стороне AD, такая, что $AK : KD = 1 : 3$; г) $\overrightarrow{MN}$, где N — точка на диагонали AC, такая, что $ON = NC$.

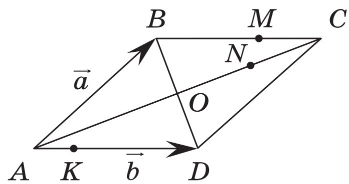


Рис. 5

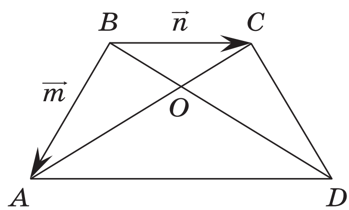


Рис. 6

2. На рисунке 6 $ABCD$ — трапеция, O — точка пересечения диагоналей, $BC \parallel AD$, $AD = 2BC$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$ векторы: а) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AO}$.

Перед тем как приступить к рассмотрению примеров решения геометрических задач с помощью векторов, желательно вспомнить основные правила действий с векторами, выполнив упражнения типа:

3. Упростите выражение $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{EP}$.

4. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF}$.

На этом и последующих уроках рекомендуется записывать то или иное условие как в векторной, так и в обычной (геометрической) форме (перевод с векторного языка на геометрический и обратно). Желательно, чтобы этот материал заносился в таблицу и таким образом накапливался. Приведём пример.

C — точка на прямой AB	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
M — точка на отрезке AB, такая, что $AM : MB = \lambda$	$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$
$ABCD$ — параллелограмм	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$
$ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$)	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$, $k > 0$, $k \neq 1$, $\overrightarrow{AB} \neq x\overrightarrow{AC}$

Разобрав с учащимися решение задачи 1 из п. 87, можно решить далее следующие две задачи:

Задача 1. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Решение. Пусть O — произвольная точка. Согласно задаче 1 из п. 87 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, поэтому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$, что и требовалось доказать.

Замечание. Результат задачи 1 можно использовать при доказательстве теоремы о средней линии трапеции на следующем уроке.

Задача 2. Точка C лежит на отрезке AB, причём $AC : CB = 2 : 3$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Решение. По условию $AC : CB = 2 : 3$, поэтому $3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$. Но $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Следовательно, $3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, откуда получаем $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Замечание. Задача 2 является частным случаем более общей задачи 806.

Кроме того, в классе рекомендуется решить задачу 784 и разобрать решение задачи 2 из п. 87.

Дома: вопрос для повторения 18 (с. 209); задачи 785, 786, 805. Более подготовленным учащимся можно задать на дом следующую задачу, аналогичную задаче 2 из п. 84:

Задача 3. Докажите, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей.

Последний урок по теме § 3 можно начать с решения следующей задачи:

Задача 4. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырёхугольника $ABCD$, причём $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

Решение. Пусть K_1 — середина AB, K_2 — середина MN, K_3 — середина CD (рис. 7).

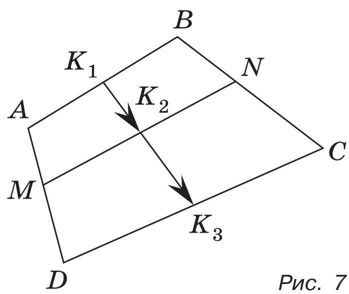


Рис. 7

Согласно задаче 2 из п. 87

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),\ \overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC},$$

поэтому

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Таким образом, векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Доказательство теоремы о средней линии трапеции рекомендуется провести самому учителю. При этом целесообразно использовать результат задачи 1, решённой на предыдущем уроке. Доказательство можно оформить на доске и в тетрадях в виде следующей краткой записи:

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, M — середина стороны AB, N — середина стороны CD (рис. 266 учебника).

Доказать: $MN \parallel AD$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Доказательство. 1. Согласно рассмотренной в классе задаче 1

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

2. Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и, значит, $MN \parallel AD$.

3. Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| = AD + BC$, поэтому $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Замечание. Если задача 1 не была рассмотрена на предыдущем уроке, то сначала нужно доказать, что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Для усвоения теоремы о средней линии трапеции в классе можно решить задачи 793 и 795.

В конце урока желательно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

Точка K делит отрезок MN в отношении $MK : KN = 3 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, где A — произвольная точка.

Вариант II

Точка A делит отрезок EF в отношении $EA : AF = 2 : 5$. Выразите вектор $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{KA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{KF}$, где K — произвольная точка.

Вариант III **(для более подготовленных учащихся)**

Докажите, что если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то для произвольной точки X плоскости выполняется равенство $\overrightarrow{XA} = \alpha\overrightarrow{XB} + \beta\overrightarrow{XC}$, где $\alpha + \beta = 1$.

(Полезно предложить учащимся сформулировать и доказать обратное утверждение.)

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-35 и С-36 из дидактических материалов.

Дома: вопросы для повторения 19, 20 (с. 209); задачи 787, 794, 796, 808.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какой вектор называется произведением данного вектора на данное число и какими свойствами обладает умножение вектора на число; **уметь формулировать** определение средней линии трапеции, **доказывать теорему** о средней линии трапеции и **решать задачи** типа 782—787, 793—798.

Решение задач (1 ч)

В начале этого урока желательно провести небольшую *самостоятельную работу* с целью проверки усвоения теоремы о средней линии трапеции.

Самостоятельная работа

Вариант I

Высота, проведённая из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен 2 см. Найдите большее основание трапеции, если её средняя линия равна 8 см.

Вариант II

Высота, проведённая из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит среднюю линию на отрезки, равные 2 см и 6 см. Найдите основания трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

Равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 13 см, описана около окружности, радиус которой равен 6 см. Найдите среднюю линию и площадь этой трапеции.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-37 из дидактических материалов.

Затем можно решить в классе задачи 799, 806, 809, а также следующую задачу (при наличии времени):

Задача 5. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q — середины отрезков KM и LN (рис. 8). Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.

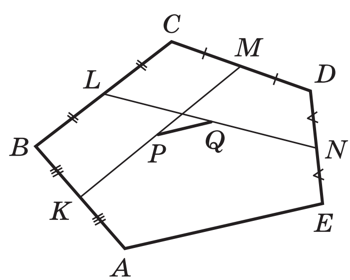


Рис. 8

Решение. Пусть O — произвольная точка. Согласно задаче 1 из п. 87 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Аналогично $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$.

Из этих равенств получаем $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Отсюда следует, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.

Дома: задачи 797, 803, 810.

Контрольная работа № 1 *(1 ч)*

Вариант I

1. Точки E и F лежат соответственно на сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$, причём $AE = ED$, $BF : FC = 4 : 3$.

   а) Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$.

   б) Может ли при каком-нибудь значении x выполняться равенство $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{CD}$?

2. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 15 см и 17 см, средняя линия равна 6 см. Найдите основания трапеции.

Вариант II

1. Точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне CD параллелограмма $ABCD$, причём $AK = KB$, $CM : MD = 2 : 5$.

   а) Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$.

   б) Может ли при каком-нибудь значении x выполняться равенство $\overrightarrow{KM} = x\overrightarrow{CB}$?

2. Один из углов прямоугольной трапеции равен $120°$, большая боковая сторона равна 20 см, а средняя линия равна 7 см. Найдите основания трапеции.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AN}$.

2. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Боковая сторона разделена на три равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, заключённые между боковыми сторонами трапеции.

Можно использовать также варианты контрольной работы К-6 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Какие векторы называются коллинеарными? Дайте определение равных векторов.

2. Начертите ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ и отметьте точки M и N по разные стороны от прямой AB и точку K на

прямой AB. Отложите от точек M, N и K соответственно векторы: $\overrightarrow{MM_1}$, сонаправленный с $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NN_1}$, равный $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{KK_1}$, противоположно направленный по отношению к $\overrightarrow{AB}$.

3. Дано: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Вариант II

1. Объясните, какой вектор называется суммой двух данных векторов. Какие правила сложения двух и нескольких векторов вы знаете?
2. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и постройте вектор $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.
3. Найдите длину вектора $\vec{m}$, если
$$\vec{m} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RK}.$$

Вариант III

1. Какой вектор называется разностью двух данных векторов?
2. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.
3. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия
$$\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{OD} + \vec{x} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{OA}.$$

Вариант IV

1. Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?
2. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и отметьте точку O. Отложите от точки O вектор $\overrightarrow{OA} = 1{,}5\vec{p} - 2\vec{q}$.
3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка M делит сторону AD в отношении $AM : MD = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы IX

772. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Но $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD}$, поэтому
$$\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XD},$$
откуда
$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}.$$

785. Пусть X — произвольная точка плоскости. Тогда
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{XN} - \overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

786. Так как точка A_1 — середина стороны BC, то
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$
Далее,
$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b},\ \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

789. Следует уточнить условие задачи: предполагается, что хотя бы два из отрезков $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ не лежат на одной прямой и не параллельны.

По правилу сложения векторов имеем
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2},\ \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BB_2},\ \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CC_2}.$$
Сложив эти равенства и учитывая, что
$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0},\ \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AA_2} = \vec{0},\ \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_2} = \vec{0},$$
получим
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}.$$

Пусть, например, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ неколлинеарны. Отложим от произвольной точки M вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A_1A_2}$, а затем от точки N вектор $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{B_1B_2}$. Тогда
$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{C_1C_2}.$$
Точки M, N и P не лежат на одной прямой, т. е. MNP — треугольник. Этот треугольник искомый, так как $MN = |\overrightarrow{MN}| = A_1A_2$, $NP = |\overrightarrow{NP}| = B_1B_2$, $PM = |\overrightarrow{PM}| = C_1C_2$ и, кроме того, $MN \parallel A_1A_2$, $NP \parallel B_1B_2$, $PM \parallel C_1C_2$.

790. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC и пусть $AD > BC$. Согласно задаче 785 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, поэтому вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен этим векторам, и, значит, $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$.

Далее $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. Так как $\overrightarrow{AD} \upuparrows \overrightarrow{BC}$, то из этого равенства следует, что $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

791. Пусть точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$ и пусть точка O_1 —

середина отрезка KM, точка O_2 — середина отрезка LN. Докажем, что точки O_1 и O_2 совпадают.

Для произвольной точки X имеем

$$\overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}),\ \overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}),\ \text{поэтому}$$

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XK} + \overrightarrow{XM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}).$$

Аналогично получаем

$$\overrightarrow{XO_2} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}).$$

Таким образом, $\overrightarrow{XO_1} = \overrightarrow{XO_2}$, т. е. точки O_1 и O_2 совпадают.

792. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, точки M и N — середины сторон AB и AC. Докажем, что $MN \parallel BC$ и $MN = \frac{1}{2}BC$. Имеем

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Из равенства $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ следует, что $MN \parallel BC$ и $MN = \frac{1}{2}BC$.

799. Пусть BK — перпендикуляр, проведённый к основанию AD данной трапеции (рис. 9).

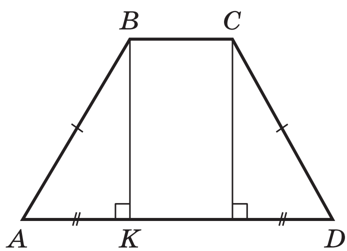


Рис. 9

Тогда $KD = AD - AK$. Но $AK = \dfrac{AD - BC}{2}$, поэтому

$$KD = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2},$$

т. е. отрезок KD равен средней линии трапеции. Следовательно, средняя линия равна 7 см.

804. 1) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$. Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$, и, значит, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$, откуда

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

3) $\overrightarrow{KD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$.

807. Так как A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков BC, AC и AB, то согласно задаче 1 п. 87 имеем

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \\ = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

809. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 10) с основаниями AD и BC, $\angle B = 90°$, $\angle BCD = 120°$, $AC = CD = a$, MN — средняя линия трапеции.

1) $\angle BCD + \angle D = 180°$, следовательно, $\angle D = 60°$.
2) В треугольнике ACD $AC = CD$, поэтому $\angle CAD = \angle D = 60°$, т. е. треугольник ACD равносторонний: $AD = AC = CD = a$.
3) В треугольнике ABC $\angle BAC = 90° - \angle CAD = 30°$, следовательно, $BC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$.
4) $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{4}$.

810. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями BC и AD, MN — средняя линия, CK — биссектриса угла BCD, DK — биссектриса угла ADC (рис. 11). Требуется доказать, что точка K лежит на прямой MN.

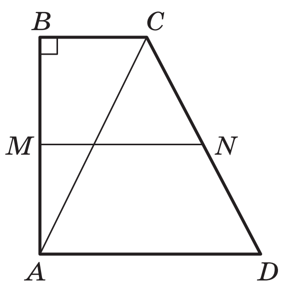


Рис. 10

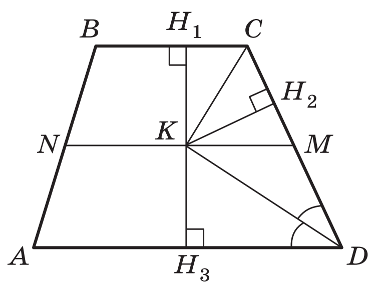


Рис. 11

Проведём перпендикуляры KH_1, KH_2 и KH_3 к прямым BC, CD и DA. Согласно теореме п. 74 $KH_1 = KH_2 = KH_3$, т. е. точка K равноудалена от параллельных прямых AD и BC. Отсюда следует, что она лежит на прямой m, параллельной прямым BC и AD и равноудалённой от них (задача 281). Но $M \in m$ и $N \in m$ (задача 282), следовательно, прямая m совпадает с прямой MN, и, значит, точка K лежит на прямой MN.

ГЛАВА

X Метод координат *(11 ч)*

Метод координат служит основой аналитической геометрии, в которой геометрические фигуры изучаются с помощью методов алгебры.

Некоторое представление о методе координат учащиеся имеют из курса алгебры, где было введено понятие прямоугольной системы координат и рассматривались задачи на построение линий (графиков функций) по заданному уравнению.

В данной главе отражены следующие вопросы: координаты вектора, действия над векторами с заданными координатами, вычисление длины вектора по его координатам, вычисление длины отрезка и координат его середины по координатам концов отрезка, уравнения окружности и прямой, применение метода координат при решении геометрических задач.

Назначение главы — расширить и углубить представления учащихся о методе координат, развить умение применять алгебраический аппарат при решении геометрических задач. Учащиеся должны усвоить, что практическое применение метода координат состоит в том, что вводится подходящим образом прямоугольная система координат, условие задачи записывается в координатах и далее решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений. В учебнике приведены примеры решения геометрических задач методом координат — задачи 952, 953, 981, 984.

Примерное поурочное планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Координаты вектора	2	1—8	С-1, С-2
§ 2. Простейшие задачи в координатах	2	9—19	С-3, С-4
§ 3. Уравнения окружности и прямой	4	20—29	С-5, С-6, С-7
Решение задач	2	1—29	—
Контрольная работа № 2	1	—	К-1

§ 1 Координаты вектора *(2 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятие координат вектора и рассмотреть правила действий над векторами с заданными координатами.

Понятия вектора, суммы, разности векторов и произведения вектора на число были введены в предыдущей главе. В частности, учащимся известно, что при умножении данного вектора на число получается вектор, коллинеарный данному. Однако вопрос о возможности представления одного из двух данных коллинеарных векторов в виде произведения другого вектора на число ещё не ставился. Ответ на этот вопрос даёт лемма, доказанная в начале параграфа. Она используется далее при доказательстве теоремы о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам.

Изучение параграфа можно начать с устного решения задач по рисунку, на котором изображены параллелограмм $ABCD$ с диагоналями AC и BD, пересекающимися в точке O, а также отрезки MP и NQ, соединяющие соответственно середины сторон AB и CD, BC и AD. Требуется выразить:

а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AO}$;

б) вектор $\overrightarrow{NC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$;

в) вектор $\overrightarrow{NB}$ через вектор $\overrightarrow{AD}$;

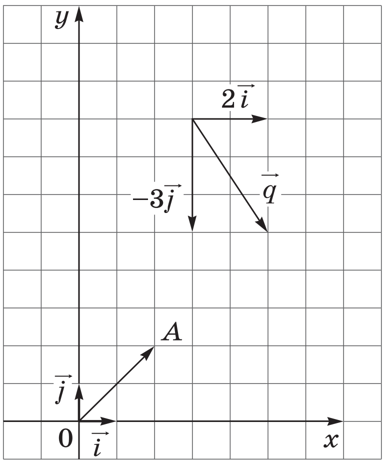
г) вектор $\overrightarrow{MP}$ через вектор $\overrightarrow{PO}$.

После этого естественно поставить вопрос о возможности для любой пары коллинеарных векторов подобрать такое число, что один из векторов будет равен произведению второго вектора на это число, т. е. перейти к рассмотрению леммы. Для понимания учащимися формулировки леммы полезно обсудить, во-первых, почему важно условие $\vec{a} \neq \vec{0}$ и, во-вторых, будет ли верно утверждение, если рассматривать произвольные (в том числе и неколлинеарные) ненулевые векторы.

После доказательства леммы можно с помощью простых задач, связанных с тем же рисунком параллелограмма $ABCD$, подвести учащихся к мысли о возможности выражения вектора через два данных неколлинеарных вектора.

З а д а ч а. Точки M и Q — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AQ}$; в) вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BM}$.

Координаты вектора



$\overrightarrow{OA} = \{2;2\}$, $\vec{q}\{2;-3\}$

$\vec{a}\{x_1;y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;y_2\}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\boxed{\vec{c} = \{x_1 + x_2;\, y_1 + y_2\}}$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

$\boxed{\vec{d} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}}$

$\vec{e} = k\vec{a}$

$\boxed{\vec{e} = \{kx_1; ky_1\}}$

Рис. 12

Затем нужно рассмотреть теорему о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам, в ходе её доказательства полезно обратить внимание на роль леммы.

При введении координат вектора и правил, позволяющих по данным координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число, рекомендуется использовать настенную таблицу (рис. 12). В дальнейшем она может служить справочной таблицей.

Обоснования указанных правил учащиеся могут изучить самостоятельно. Для лучшего усвоения изученного материала в классе целесообразно решить следующие задачи: 911 (а, б), 912 (б, в), 915, 916 (а, б), 918 (рис. 276, *а*, *б* из учебника), 919 (для векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$), 920 (а, в), 922 (а), 924 (для вектора $2\vec{a}$), 926 (а). Многие задачи можно решить устно при фронтальной работе.

Для обучающей *самостоятельной работы* можно использовать задачи 917 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), 918 (рис. 276, *в* из учебника), 921 (а, г), 925 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), 926 (в). При наличии времени учащимся можно предложить выполнить задания 914 (а), 927.

В *самостоятельную работу* контролирующего характера можно включить следующие задачи:

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 912 (а, г), 920 (г), 926 (б), 990 (а) (для векторов $\vec{q}$ и $\vec{r}$), 988 (а, б).

Вариант II. Задачи 912 (в, д), 920 (д), 926 (г), 990 (а) (для векторов $\vec{p}$ и $\vec{s}$), 988 (в, г).

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-1 и С-2 из дидактических материалов.

Дома: пп. 89, 90; вопросы для повторения 1—8 (с. 244); задачи 911 (в, г), 916 (в, г), 919 (для векторов $\vec{a}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$), 920 (б), 921 (б, в), 922 (в, г), 923 (б—г), 925 (для векторов $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** лемму о коллинеарных векторах и теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам; **уметь объяснять**, что такое координаты вектора в данной системе координат, **формулировать и обосновывать** правила действий с векторами, координаты которых заданы; **уметь решать задачи** типа 917, 918, 926.

§ 2 Простейшие задачи в координатах *(2 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть простейшие задачи в координатах и показать, как они используются при решении более сложных задач методом координат.

Объяснение нового материала полезно предварить следующим диктантом по теме § 1:

Вариант I

1. Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{a}\{2;\ -1\}$.
2. Запишите координаты вектора $\vec{c}$, если его разложение по координатным векторам имеет вид $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
3. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, равного разности векторов $\vec{m}$ и $\vec{t}$, если $\vec{m}\{-5;\ 0\}$, $\vec{t}\{0;\ -4\}$.
4. Найдите координаты вектора $3\vec{d}$, если $\vec{d}\{4;\ -2\}$.
5. Дано: $\vec{a}\{3;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - 4\vec{b}$.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
7. Диагонали ромба равны 6 см и 8 см. Найдите его сторону.
8. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте вектор $\vec{a}\{-3;\ 1\}$ с началом в точке O.

Вариант II

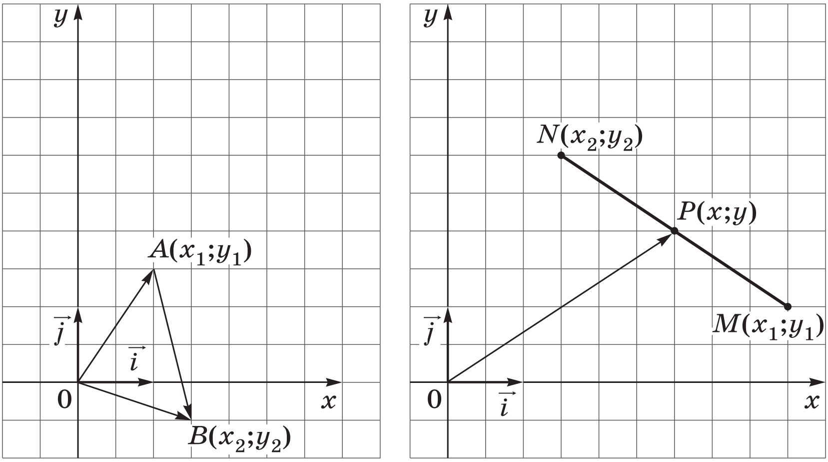
1. Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора $\vec{b}\{-3;\ 0\}$.
2. Запишите координаты вектора $\vec{a}$, если его разложение по координатным векторам имеет вид $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
3. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{m}$ и $\vec{t}$, если $\vec{m}\{-5;\ 0\}$, $\vec{t}\{0;\ -4\}$.
4. Найдите координаты вектора $-2\vec{p}$, если $\vec{p}\{-2;\ 5\}$.
5. Дано: $\vec{a}\{3;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{l} = 3\vec{b} - \vec{a}$.
6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{BO}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
7. Сторона ромба равна 13 дм, а одна из его диагоналей — 24 дм. Найдите вторую диагональ.
8. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте вектор $\vec{b}\{4;\ -1\}$ с началом в точке O.

При изложении нового материала полезно использовать настенную таблицу (рис. 13). Затем можно решить задачи 929, 932, 934 (а, б), 937, 938 (б, в), 940.

Обучение применению метода координат полезно разделить на два этапа. На первом — решать задачи, в которых требуется найти те или иные элементы фигуры, если даны координаты некоторых её точек. Например, можно решить задачи 942, 944, 947 (а), 950 (а). На втором этапе следует рассмотреть обычные геометрические задачи, условия которых задаются без координат. Целесообразно разобрать с учащимися решения задач 952 и 953 по учебнику.

Полезно подчеркнуть, что систему координат нужно выбирать так, чтобы координаты точек фигуры, которые используются при решении задач, находились по заданным

Простейшие задачи в координатах



$\overrightarrow{OA}$ — радиус – вектор точки A

$$\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1\};\ \overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2\}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$$

$P(x;y)$ — середина отрезка MN

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Рис. 13

её элементам наиболее простым образом. Сопоставить различные способы выбора системы координат можно на примере задачи 954. Затем полезно рассмотреть задачу 956, а при наличии времени — задачи 1007 и 1008.

Поскольку развитие умения применять метод координат для решения геометрических задач является весьма трудной задачей, то на данном этапе эта цель не может ставиться перед всеми учащимися. Но решать несложные задачи, в которых многоугольники заданы координатами их вершин, должны уметь все ученики.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Задача 948 (а) из учебника.
2. Задача 950 (а) из учебника.

3. Основания прямоугольной трапеции равны 6 см и 8 см, а высота равна 5 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Вариант II

1. Задача 949 (а) из учебника.
2. Задача 950 (б) из учебника.
3. Основания равнобедренной трапеции равны 8 м и 12 м, а высота равна 7 м. Найдите длины отрезков, соединяющих концы одной боковой стороны с серединой другой боковой стороны.

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-3 и С-4 из дидактических материалов.

Дома: пп. 91, 92; вопросы для повторения 9—14 (с. 244); задачи 931, 935, 936, 938 (а, г), 941, 957.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **усвоить понятие** радиус-вектора точки; **уметь обосновывать** утверждение о том, что координаты радиус-вектора точки равны соответствующим координатам этой точки; **уметь выводить** формулу, связывающую координаты вектора с координатами его конца и начала, а также формулы координат середины отрезка, длины вектора и расстояния между двумя точками с известными координатами; **уметь применять** эти формулы при решении задач типа 945, 951; **уметь объяснять**, в чём состоит метод координат при изучении свойств геометрических фигур, и (требование к хорошо подготовленным учащимся) **решать** этим методом геометрические **задачи** типа 954—958.

§ 3 Уравнения окружности и прямой *(4 ч)*

Назначение параграфа — вывести уравнения окружности и прямой и показать, как можно использовать эти уравнения при решении геометрических задач, в частности при исследовании взаимного расположения двух окружностей.

Первый урок целесообразно начать с диктанта, затрагивающего как тему предыдущего параграфа, так и новую тему.

Вариант I

1. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(-2; 3)$, $B(6; -3)$.
2. Найдите длину отрезка EH, если $E(-3; 8)$, $H(2; -4)$.

3. Найдите длину вектора $\vec{c}$, равного $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}\{6;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ -8\}$.
4. Какая фигура является множеством всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных точек?
5. Принадлежит ли точка $A(-6;\ 2)$ графику функции $y=-0{,}5x$?
6. Функция задана уравнением $y=2x-3$. Какая линия служит графиком этой функции?
7. На окружности радиуса 7 см даны точки A и B, расстояние между которыми равно 13 см. Лежит ли центр окружности на прямой AB?
8. Вершины треугольника ABC имеют следующие координаты: $A(8;\ -3)$, $B(5;\ 1)$, $C(12;\ 0)$. Докажите, что $\angle B=\angle C$.

Вариант II

1. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(3;\ -4)$, $D(-3;\ 6)$.
2. Найдите длину отрезка KB, если $K(-6;\ -3)$, $B(2;\ 3)$.
3. Найдите длину вектора $\vec{d}$, равного $\vec{e}+\vec{f}$, если $\vec{e}\{-12;\ 0\}$, $\vec{f}\{0;\ 5\}$.
4. Прямая l является серединным перпендикуляром к стороне AB треугольника ABC и проходит через вершину C. Определите вид треугольника ABC.
5. Принадлежит ли точка $B(2;\ -8)$ графику функции $y=-4x$?
6. Функция задана уравнением $y=5-x$. Какая линия служит графиком этой функции?
7. Какой фигурой является множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки?
8. Вершины четырёхугольника $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(-3;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(5;\ -1)$, $D(1;\ -4)$. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

Объяснение нового материала можно начать с разбора шестого задания диктанта, обратив внимание учащихся на то, что им уже известны графики некоторых функций. В частности, графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая линия, а уравнение $y=kx+b$ называется уравнением этой прямой. Учащиеся должны знать также уравнения параболы и гиперболы.

Понятие уравнения произвольной линии даётся в ознакомительном плане. При этом важно добиться понимания учащимися следующего: чтобы установить, что данное уравнение является уравнением данной линии, нужно доказать, что: 1) координаты любой точки линии удовлетворяют данному уравнению и 2) координаты любой точки, не лежащей на данной линии, не удовлетворяют этому уравнению.

При рассмотрении уравнения окружности полезно показать, что не любое уравнение второй степени с двумя переменными задаёт окружность. Например, уравнение $4x^2+y^2=4$ задаёт в прямоугольной системе координат не окружность, а эллипс (с этой фигурой учащиеся знакомились в курсе черчения), уравнение $x^2+y^2=0$ задаёт единственную точку — начало координат, а уравнению $x^2+y^2=-4$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, поэтому это уравнение не задаёт никакой фигуры.

В отношении прямой дело обстоит иначе: уравнением любой прямой в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени с двумя переменными (уравнения прямых, параллельных осям координат, также можно считать уравнениями с двумя переменными, например, уравнение $x=x_0$ можно записать в виде $x+0y=x_0$) и, обратно, любое уравнение первой степени с двумя переменными задаёт прямую.

В ходе объяснения нужно использовать настенную таблицу (рис. 14).

Далее можно разобрать с учащимися или предложить им самим решить следующие задачи: 959 (а, д), 961, 963, 966 (а), 972, 976, 977, 978 (а, б), 981, 984.

Для обучающей *самостоятельной работы* можно использовать задачи 969, 983, 1003 (а). Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 987 и 1004.

В контролирующей *самостоятельной работе* можно использовать следующие задания:

Самостоятельная работа

Вариант I. Задания 959 (г), 968, 973, 982 (б).

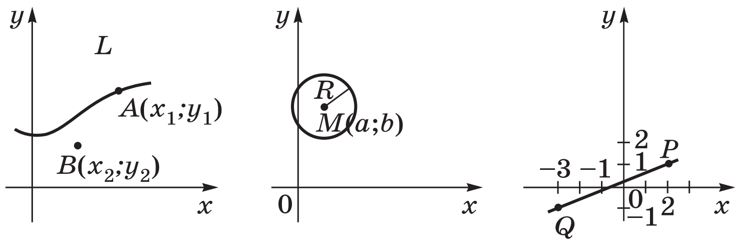
Вариант II. Задания 959 (в), 967, 974 (б), 982 (а).

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-5 и С-6 из дидактических материалов.

Содержание п. 96 «Взаимное расположение двух окружностей» целесообразно изложить учителю в виде лекции, а в конце урока предложить самостоятельную работу С-7 из дидактических материалов.

Д о м а: пп. 93—96; вопросы для повторения 15—24 (с. 244—245); задачи 959 (б), 962, 970, 974 (а), 979, 980, 986.

Уравнения окружности и прямой



$f(x,y)=0$ — уравнение линии L

$A\in L:\ f(x_1,y_1)=0$

$B\notin L:\ f(x_2,y_2)\neq 0$

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$PQ:\ ax+by+c=0$

$P(2;1)$, $Q(-3;-1)$

$$\begin{cases} a\cdot 2+b\cdot 1+c=0 \\ a(-3)+b(-1)+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2c \\ b=-5c \end{cases}$$

$2cx-5cy+c=0$

$PQ:\ 2x-5y+1=0$

Рис. 14

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какое уравнение называется уравнением данной линии в заданной прямоугольной системе координат; **уметь выводить уравнения** окружности и прямой, **объяснять**, что такое угловой коэффициент прямой и как, сравнивая угловые коэффициенты двух прямых, сделать вывод об их взаимном расположении (параллельны или пересекаются); **уметь строить** окружности и прямые с заданными уравнениями, используя при этом опыт, полученный при изучении курса алгебры; **решать задачи** типа 966, 972.

Решение задач (2 ч)

Назначение этих уроков — закрепление знаний и умений учащихся по материалу главы. Первый урок можно начать со следующего *математического диктанта*:

Вариант I

1. Лежит ли точка $A(2;\ -1)$ на окружности, заданной уравнением $(x-2)^2+(y-3)^2=25$?

2. Напишите уравнение окружности, если её центр — точка (4; 5), а радиус равен 3.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -2)$ и параллельной оси ординат.
4. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, если она проходит через точку $C(-2; 3)$.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(-2; -1)$ и $N(3; 1)$.
6. Найдите длину вектора $\vec{a}\{-12; 5\}$.
7. Найдите координаты середины отрезка PQ, если $P(5; -3)$; $Q(3; -7)$.
8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; -5)$, $B(-3; 4)$.

Вариант II

1. Лежит ли точка $A(2; -1)$ на прямой, заданной уравнением $2x - 3y - 7 = 0$?
2. Напишите уравнение окружности, если её центр — точка (4; 5), а радиус равен 2.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 3)$ и параллельной оси абсцисс.
4. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $D(3; -2)$.
5. Напишите уравнение окружности с центром в точке $P(-2; -1)$, если она проходит через точку $Q(1; 3)$.
6. Найдите расстояние между точками $A(-1; 3)$ и $B(2; -1)$.
7. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-12; 5\}$, $\vec{b}\{7; -3\}$.
8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(-1; 6)$, $D(3; -2)$.

Можно использовать также варианты диктанта МД-1 из дидактических материалов.

Поскольку цель уроков — закрепление знаний и умений, то основной формой работы можно избрать работу учащихся в парах. На этих уроках полезно не только решать задачи, но и провести опрос учащихся по теоретическому материалу. Для этого удобно использовать карточки, включив в каждую по одному вопросу из каждого параграфа главы X.

Для решения в классе можно использовать следующие задачи: 913, 943, 951, 991, 996, 997, 999, 1000, 1001, 1005. Задачи 995, 1004, 1009 полезно разобрать в ходе фронтальной работы.

Самостоятельная работа контролирующего характера может включать следующие задания:

Самостоятельная работа

Вариант I. Задания 968, 989 (а, г), 993, 1010 (б).

Вариант II. Задания 971, 989 (б, в), 992, 1010 (а).

Учащимся, успешно справившимся с предложенными заданиями, можно рекомендовать решить задачу 1002 (а).

Дома: вопросы для повторения 1—24 (с. 244—245); задачи 990, 995, 914, 945, 998, 958.

Контрольная работа № 2 *(1 ч)*

Вариант I

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}$, если
$$\vec{a} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},\ \vec{b}\{3;\ -2\},\ \vec{c}\{-6;\ 2\}.$$
2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-6;\ 1)$, $B(2;\ 4)$, $C(2;\ -2)$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите высоту треугольника, проведённую из вершины A.
3. Окружность задана уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Напишите уравнение прямой, проходящей через её центр и параллельной оси ординат.

Вариант II

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{b}$, если
$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{d},\ \vec{c}\{-3;\ 6\},\ \vec{d}\{2;\ -2\}.$$
2. Даны координаты вершин четырёхугольника $ABCD$: $A(-6;\ 1)$, $B(0;\ 5)$, $C(6;\ -4)$, $D(0;\ -8)$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник, и найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
3. Окружность задана уравнением $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$. Напишите уравнение прямой, проходящей через её центр и параллельной оси абсцисс.

Вариант III

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}$, если
$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{m} + \vec{n},\ \vec{m}\{6;\ -2\},\ \vec{n}\{1;\ -2\}.$$
2. Даны координаты вершин треугольника MPT: $M(-4;\ 3)$, $P(2;\ 7)$, $T(8;\ -2)$. Докажите, что данный треугольник прямоугольный, и найдите радиус описанной около него окружности.
3. Окружность задана уравнением $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Напишите уравнение прямой, проходящей через её центр и параллельной оси ординат.

Вариант IV

1. Найдите координаты и длину вектора $\vec{d}$, если
$$\vec{d} = \vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q},\ \vec{p}\{2;\ 3\},\ \vec{q}\{9;\ -9\}.$$
2. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $KLMN$: $K(-4;\ 2)$, $L(0;\ 5)$, $M(12;\ 0)$. Найдите координаты четвёртой вершины и периметр данного параллелограмма.
3. Окружность задана уравнением $x^2 + (y - 1)^2 = 4$. Напишите уравнение прямой, проходящей через её центр и параллельной оси абсцисс.

Можно использовать также варианты контрольной работы К-1 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам.
2. Выведите формулы координат середины отрезка через координаты его концов.
3. Напишите уравнение окружности с центром в точке $B(4;\ 0)$, проходящей через точку $A(7;\ 4)$.

Вариант II

1. Сформулируйте правило вычисления координат разности двух векторов.
2. Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;\ -3)$ и $B(3;\ 5)$.

Вариант III

1. Сформулируйте правило вычисления координат произведения вектора на число по заданным координатам вектора.
2. Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.
3. Найдите координаты середины отрезка AB, если даны координаты его концов: $A(-3;\ 4)$, $B(3;\ -6)$.

Вариант IV

1. Сформулируйте утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.

2. Выведите уравнение прямой l в прямоугольной системе координат, если l является серединным перпендикуляром к отрезку с концами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.
3. Найдите расстояние между точками $M(2;\ -1)$ и $N(5;\ -3)$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы X

914 (а). Доказательство проведём методом от противного, т. е. предположим, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Тогда по лемме о коллинеарных векторах существует число k, такое, что $\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ (заметим, что $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$). Отсюда следует, что $(1+k)\vec{b}=(k-1)\vec{a}$. Хотя бы одно из чисел $k+1$, $k-1$ не равно нулю; пусть, например, $k+1\neq 0$. Тогда $\vec{b}=\frac{k-1}{k+1}\vec{a}$, и, значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию задачи.

927. Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то утверждение задачи очевидно, поэтому предположим, что $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то по лемме о коллинеарных векторах существует число k, такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$. По свойству 3^0 п. 90 $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, т. е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

Докажем обратное утверждение: если координаты одного вектора пропорциональны координатам другого, то векторы коллинеарны. Пусть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, т. е. существует число k, такое, что $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$. Умножив первое равенство на $\vec{i}$, а второе на $\vec{j}$ и сложив, получим

$$x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=kx_1\vec{i}+ky_1\vec{j},\ \text{или}\ \vec{b}=k\vec{a}.$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

945. Для решения задачи достаточно определить координаты точек O, A и C. Тогда по формуле расстояния между двумя точками найдём длины отрезков AC и OC.

По условию задачи имеем $O\{0;\ 0\}$, $A\{a;\ 0\}$. Пусть $C\{x;\ y\}$. Так как $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$ и $BC:OA=d:a$, то $\overrightarrow{BC}=\frac{d}{a}\overrightarrow{OA}$. Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OA}$ имеют координаты $\{x-b,\ y-c\}$ и $\{a,\ 0\}$, поэтому

$$x-b=\frac{d}{a}a,\ y-c=\frac{d}{a}\cdot 0.$$

Отсюда получаем $x=b+d$, $y=c$.

По формуле расстояния между двумя точками находим

$$AC = \sqrt{(b + d - a)^2 + c^2}, \ OC = \sqrt{(b + d)^2 + c^2}.$$

987. Для решения задачи удобно ввести систему координат так, чтобы диагонали ромба лежали на осях координат. Тогда вершины ромба будут иметь координаты $A(-a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ 0)$, $D(0;\ -b)$, где $2a$ и $2b$ — длины диагоналей.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка. Условие $AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2$, записанное в координатах, даёт уравнение искомого множества точек. Записав это равенство в координатах, после несложных преобразований получаем уравнение вида $ax + by = 0$. Этим уравнением задаётся прямая, проходящая через начало координат $O(0;\ 0)$, т. е. через точку пересечения диагоналей ромба, и перпендикулярная к стороне AB. В самом деле, полученное уравнение совпадает с уравнением серединного перпендикуляра l к отрезку M_1M_2, где $M_1(a;\ b)$, $M_2(-a;\ -b)$:

$$2(2a)x + 2(2b)y = 0, \text{ или } ax + by = 0$$

(см. § 3, формулу (3)). Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{-2a;\ -2b\}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}\ \{a;\ b\}$, следовательно, прямая l перпендикулярна к прямой AB.

1000. В случаях в)—д) необходимо преобразовать данное уравнение, записав его в виде уравнения (1) из § 3.

в) Уравнение можно записать так:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -20.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки, поэтому данное уравнение не является уравнением окружности.

г) Уравнение можно записать так:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(1;\ -2)$ и радиусом, равным 5.

1002. а) Координаты точек A, B и C должны удовлетворять уравнению окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Подставив в это уравнение координаты данных точек, получим систему трёх уравнений относительно неизвестных a, b и r:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2 & (1) \\ (4 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 & (2) \\ (3 - a)^2 + (-2 - b)^2 = r^2. & (3) \end{cases}$$

Решение этой системы может вызвать затруднения у учащихся, в таком случае нужно подсказать им способ решения: вычесть из уравнения (1) сначала уравнение (2), а затем уравнение (3). Получится система двух линейных уравнений с неизвестными a и b, которую учащиеся могут решить самостоятельно $\left(a = -\frac{7}{2}, b = \frac{5}{2}\right)$. Подставив эти значения в любое из уравнений, например в уравнение (1), находим значение r^2 и записываем искомое уравнение:

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}.$$

1004. Достаточно доказать, что данные прямые не имеют ни одной общей точки. Для этого запишем уравнения данных прямых так: $y = 2x + \frac{2}{3}$ и $y = 2x - 3$. Ясно, что эта система несовместна, т. е. нет чисел x, y, удовлетворяющих этим двум уравнениям. Геометрически это означает, что данные прямые не имеют ни одной общей точки и, следовательно, они параллельны.

1007. Пусть $OABC$ — данная трапеция с основаниями $OA = a$ и $BC = b$ (пусть $a > b$) и высотой h. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы точка A лежала на положительной полуоси Ox, а прямая BC пересекала положительную полуось Oy. В этой системе координат вершины трапеции будут иметь координаты $O(0;\ 0)$, $A(a;\ 0)$, $B(c + b;\ h)$, $C(c;\ h)$, где c — некоторое число. Далее нетрудно найти координаты середин M и N диагоналей трапеции и вычислить расстояние между ними: $MN = \frac{a - b}{2}$. Таким образом,

$$MN = \frac{1}{2}(OA - BC).$$

1010. а) Введём систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, где $a = AB$. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка. Условие $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$, записанное в координатах, даёт уравнение искомого множества. Оно приводится к виду

$$(x + a)^2 + y^2 = (2a)^2.$$

Этим уравнением задаётся окружность радиуса $2a$ с центром в точке $(-a;\ 0)$, т. е. в точке, симметричной точке B относительно точки A.

ГЛАВА XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов *(13 ч)*

В этой главе введены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов от 0° до 180°, доказаны теоремы синусов и косинусов, введено скалярное произведение векторов и рассмотрены его свойства. Основное назначение главы — развить тригонометрический аппарат как средство решения геометрических задач, а также показать, как применяется скалярное произведение векторов при решении задач.

Примерное поурочное планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла	3	30—37	—
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	4	38—48	С-8, С-9, С-10, С-11
§ 3. Скалярное произведение векторов	3	49—60	С-12, С-13
Решение задач	2	30—60	—
Контрольная работа № 3	1	—	К-2, К-3

§ 1 Синус, косинус, тангенс, котангенс угла *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов от 0° до 180° и вывести формулы для вычисления координат точки, которые будут использоваться в следующем параграфе при доказательстве теоремы о площади треугольника и теоремы косинусов.

На первом уроке полезно проверить, насколько усвоены учащимися понятия синуса, косинуса и тангенса для острого угла прямоугольного треугольника, введённые в 8 классе (глава VII, § 4). Это можно сделать с помощью следующего *математического диктанта*:

Вариант I

1. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите синус меньшего острого угла этого треугольника.
2. Стороны прямоугольного треугольника равны 26 м, 24 м и 10 м. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.
3. Катет прямоугольного треугольника равен 6 дм, а противолежащий угол равен 30°. Найдите гипотенузу этого треугольника.
4. Вычисляя синус острого угла прямоугольного треугольника, ученик получил число 1,05. Верны ли его вычисления?
5. Найдите косинус острого угла, если синус этого угла равен $\frac{12}{13}$.
6. Найдите тангенс острого угла, если синус этого угла равен $\frac{12}{13}$.
7. Синус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{9}{41}$. Чему равен косинус второго острого угла этого треугольника?

Вариант II

1. Стороны прямоугольного треугольника равны 5 м, 12 м и 13 м. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.
2. Стороны прямоугольного треугольника равны 10 дм, 8 дм и 6 дм. Найдите косинус меньшего острого угла этого треугольника.
3. Катет прямоугольного треугольника равен 8 см, а противолежащий угол равен 45°. Найдите гипотенузу этого треугольника.
4. Вычисляя косинус острого угла прямоугольного треугольника, ученик получил число, равное 1,05. Верны ли его вычисления?

5. Найдите синус острого угла, если его косинус равен $\frac{24}{25}$.
6. Найдите тангенс острого угла, если его косинус равен $\frac{24}{25}$.
7. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{24}{25}$. Чему равен синус второго острого угла этого треугольника?

Затем можно приступить к изучению параграфа, опираясь на то, что учащимся уже известны понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и на основе теоремы Пифагора было доказано основное тригонометрическое тождество. Для лучшего усвоения нового материала полезно рассмотреть задачи 1012 (для точек A, B, M_1, M_2), 1013 (б), 1014 (б).

На втором уроке целесообразно обсудить с учащимися задачу 1011, а затем решить следующую задачу:

Используя единичную полуокружность, постройте угол:

а) косинус которого равен $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0, -1;

б) синус которого равен $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 1.

Для её решения полезно заготовить на доске несколько полуокружностей.

Далее можно предложить учащимся доказать, что синусы смежных углов равны, а косинусы смежных углов выражаются взаимно противоположными числами.

После этого рекомендуется объяснить учащимся содержание п. 99. Закончить урок можно решением задач 1016, 1018 (в), 1019 (в).

Следующий урок полезно начать с фронтального повторения теоретического материала по настенной таблице (рис. 15). Затем рассмотреть задачи 1015 (б), 1017 (в) и 1018 (г), а в оставшееся время можно провести следующую *самостоятельную работу* контролирующего характера:

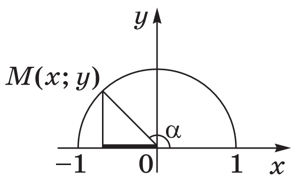
Самостоятельная работа

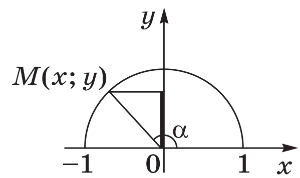
Вариант I. Задачи 1015 (а), 1017 (б), 1018 (а), 1019 (а).

Вариант II. Задачи 1015 (г), 1017 (а), 1018 (д), 1019 (г).

Дома: пп. 97—99; вопросы для повторения 1—7 (с. 266); задачи 1012 (для точек M_2 и M_3), 1013 (б, в), 1014 (а, б), 1015 (в), 1017 (а, б), 1018 (б), 1019 (б).

Тригонометрические функции
$(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$





$x = \cos\alpha$ $\quad(-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1)$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad(\alpha \ne 90^\circ)$

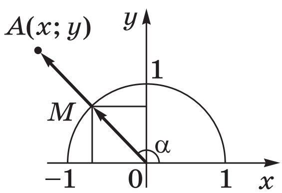
$y = \sin\alpha$ $\quad(0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1)$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \;\; (0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ)$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \;\; (0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ)$



$\overrightarrow{OM}\{\cos\alpha;\, \sin\alpha\}$; $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$

$x = OA \cdot \cos\alpha,\; y = OA \cdot \sin\alpha$

$\overrightarrow{OA}\{OA\cos\alpha;\; OA\sin\alpha\}$

Рис. 15

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить,** что такое единичная полуокружность и как с её помощью определяются синус и косинус для углов от 0° до 180°, как определяются тангенс и котангенс через синус и косинус и для каких углов они не определены; **уметь обосновывать** основное тригонометрическое тождество; **знать формулы** приведения и формулы для вычисления координат точки; **уметь решать задачи** типа 1013—1019.

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника *(4 ч)*

Назначение параграфа — доказать теорему о площади треугольника, теоремы синусов, косинусов и познакомить учащихся с методами решения треугольников и измерительными работами, основанными на использовании этих теорем.

Изучение параграфа можно спланировать следующим образом: на первых двух уроках рассмотреть все три теоремы (пп. 100—102); третий урок посвятить решению треугольников (п. 103); четвёртый урок — применению тригонометрических формул в измерительных работах на местности (п. 104) и итоговой самостоятельной работе.

Проверка опорных знаний учащихся может быть осуществлена с помощью следующего *математического диктанта*:

Вариант I

1. Найдите площадь треугольника, если его основание равно 7 см, а высота равна 4 см.
2. Найдите синус угла, если его косинус равен $\frac{1}{3}$.
3. Найдите синус угла, если синус смежного с ним угла равен 0,3.
4. Начертите треугольник ABC с тупым углом C. Проведите высоту треугольника из вершины B.
5. Луч OC образует с положительной полуосью абсцисс угол, равный 60°. Найдите координаты точки C, если $OC = 6$.
6. Найдите расстояние между точками $A(5;\ -5)$ и $B(-7;\ 0)$.
7. Определите, каким — остроугольным, прямоугольным или тупоугольным — является треугольник, два угла которого равны 43° и 48°.
8. Точка C единичной полуокружности имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найдите угол, который образует луч OC с положительной полуосью Ox.

Вариант II

1. Найдите площадь треугольника, если его основание равно 10 дм, а высота равна 5 дм.
2. Найдите косинус угла, если его синус равен $\frac{1}{4}$.

3. Найдите синус угла, если синус смежного с ним угла равен 0,7.
4. Начертите треугольник CDE с тупым углом E. Проведите высоту треугольника из вершины C.
5. Луч OB образует с положительной полуосью абсцисс угол $30°$. Найдите координаты точки B, если $OB = 8$.
6. Найдите расстояние между точками $C(-7;\ 15)$ и $D(8;\ 0)$.
7. Определите, каким — остроугольным, прямоугольным или тупоугольным — является треугольник, два угла которого равны $35°$ и $56°$.
8. Точка A единичной полуокружности имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Найдите угол, который образует луч OA с положительной полуосью Ox.

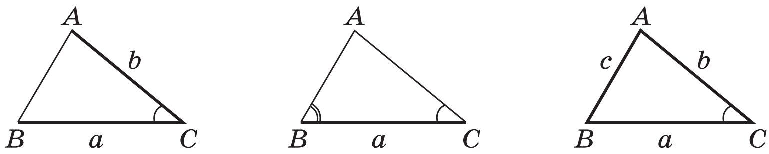
Изучение теорем параграфа можно организовать в форме беседы. Доказательства теоремы о площади треугольника и теоремы косинусов нетрадиционны — они основаны на формулах для вычисления координат точки, которые были выведены в п. 99 учебника. Целесообразно провести рассуждения, используя один и тот же чертёж (рис. 292 учебника). После доказательства теоремы полезно обсудить с учащимися, какие три элемента треугольника нужно знать, чтобы вычислить четвёртый элемент (сторону или угол), используя: а) теорему синусов; б) теорему косинусов.

Далее можно рассмотреть задачи 1020 (а), 1022, а также следующие две задачи:
1. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $BC = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle C = 60°$.
2. Найдите угол A треугольника ABC, если $AB = AC = 1$ м, $BC = \sqrt{3}$ м.

При наличии времени можно провести самостоятельную работу по вариантам С-8, С-9 и С-10 из дидактических материалов.

При рассмотрении задач на решение треугольников полезно обратить внимание учащихся на то, что при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов. Например, зная три стороны треугольника, для вычисления первого угла применяем теорему косинусов, а для вычисления второго угла можно использовать как ту, так и другую теорему. Но поскольку синус угла равен синусу смежного с ним угла, то нахождение синуса угла ещё не позволяет определить сам угол — он может быть острым или тупым, если синус угла меньше 1. Если же вычислить

Решение треугольников



$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\quad \angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$ $\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\quad b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ $\quad \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$ $\quad c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$ $\quad \angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$

Рис. 16

косинус угла, то по его знаку и величине угол определяется однозначно.

Учащимся полезно оформить в тетради таблицу-памятку (рис. 16), содержащую схемы решений трёх основных задач, описанных в п. 102. Такую же настенную таблицу желательно иметь в классе.

Полезно совместно с учащимися разобрать и зафиксировать в тетрадях решения задач 1021, 1024 (а), 1026, 1033. Задаче 1033, решение которой приведено в учебнике, следует уделить особое внимание. Для проведения обучающей *самостоятельной работы* можно использовать задачи 1023, 1027, 1028.

Практические измерительные работы на местности учащиеся уже выполняли в предыдущих классах. Желательно напомнить им, что в 8 классе высота предмета и расстояние до недоступной точки определялись на основе подобия треугольников. В 9 классе эти же задачи решаются с применением тригонометрических функций. Можно предложить учащимся самостоятельно прочитать дома материал п. 104 и решить задачи 1036—1038. На уроке в классе можно прорешать задачи 1030, 1031, 1035.

В *самостоятельной работе* контролирующего характера можно предложить следующие задачи:

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 1058 (б), 1060 (а), 1061 (а).

Вариант II. Задачи 1058 (а), 1060 (б), 1061 (в).

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-11 из дидактических материалов.

Наиболее подготовленным учащимся можно дополнительно предложить задачи 1025 (в), 1034.

Дома: пп. 100—104; вопросы для повторения 8—13 (с. 266); задачи 1020 (б, в), 1024 (б), 1025 (г, ж, и), 1032, 1057, 1061 (б), 1062, 1064.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** теорему о площади треугольника, теоремы синусов и косинусов; **уметь объяснять**, что называется решением треугольника и как решаются три основные задачи этого типа; **усвоить** утверждение задачи 1033; **уметь рассказать** о применении тригонометрических формул в измерительных работах на местности как об одном из практических приложений геометрии; **уметь решать задачи** типа 1025 (а, е, з).

§ 3 Скалярное произведение векторов *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов, изучить его свойства и показать, как применяется скалярное произведение векторов при решении геометрических задач.

Изучение параграфа можно построить следующим образом: сначала рассмотреть понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов (1 ч), затем — скалярное произведение в координатах, его свойства и применение к решению задач (2 ч).

Готовность к восприятию нового материала можно проверить с помощью следующего *математического диктанта*:

Вариант I

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы коллинеарны вектору $\overrightarrow{AO}$?
2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы сонаправлены с вектором $\overrightarrow{OB}$?

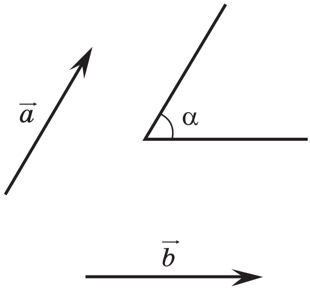
3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие векторы равны вектору $\overrightarrow{OC}$?
4. При каком условии $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
5. Известно, что $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{OB}| = 4$. Найдите $|\overrightarrow{OD}|$, если $AOBD$ — прямоугольник.
6. В треугольнике CDE $DE = 5$, $CE = 4$, $\angle C = 45°$. Найдите сторону DE.
7. В треугольнике KLM $KL = LM = 5$, $KM = 6$. Найдите косинус угла L.
8. В треугольнике OPQ $\angle O = 60°$, $\angle P = 75°$, $OP = 8$. Найдите сторону PQ.

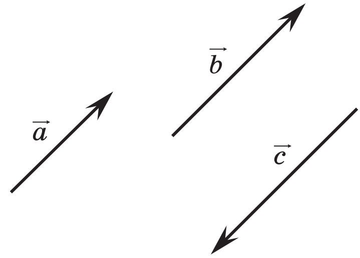
Вариант II

1. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы коллинеарны вектору $\overrightarrow{MT}$?
2. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы сонаправлены с вектором $\overrightarrow{KM}$?
3. Диагонали ромба $KLMP$ пересекаются в точке T. Какие векторы равны вектору $\overrightarrow{TL}$?
4. При каком условии $|\vec{c}-\vec{d}| = |\vec{c}| - |\vec{d}|$?
5. Известно, что точки C и D лежат соответственно на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат. Найдите $|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|$, если $|\overrightarrow{OC}| = 5$, $|\overrightarrow{OD}| = 12$.
6. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $AC = 4$. Найдите косинус угла A.
7. В треугольнике BCD $BC = 6$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 45°$. Найдите сторону BD.
8. В треугольнике DEF $DE = 6$, $EF = 7$, $\angle E = 30°$. Найдите сторону DF.

При объяснении нового материала полезно обратить внимание учащихся на то, что угол между векторами — это не геометрическая фигура, а величина (градусная мера) соответствующего угла, в частности, угол между сонаправленными векторами считается равным нулю градусов. При введении понятия скалярного произведения векторов необходимо подчеркнуть, что в отличие от суммы и разности векторов скалярное произведение есть число (скаляр) — именно это и обусловило название операции.

Скалярное произведение векторов





$\widehat{\vec a\vec b}=\alpha$

$\widehat{\vec a\vec b}=0^\circ$

$\widehat{\vec a\vec c}=180^\circ$

$$(\widehat{\vec a\vec b}=90^\circ)\Leftrightarrow(\vec a\perp\vec b)$$

$$\boxed{\vec a\vec b=|\vec a||\vec b|\cos(\widehat{\vec a\vec b})}$$

Если $\vec a\neq\vec 0$ и $\vec b\neq\vec 0$, то:

а) $(0^\circ\leqslant\widehat{\vec a\vec b}<90^\circ)\Leftrightarrow(\vec a\vec b>0)$;

б) $(90^\circ<\widehat{\vec a\vec b}\leqslant180^\circ)\Leftrightarrow(\vec a\vec b<0)$;

в) $(\vec a\perp\vec b)\Leftrightarrow(\vec a\vec b=0)$;

г) $(\widehat{\vec a\vec b}=0^\circ)\Leftrightarrow(\vec a\vec b=|\vec a||\vec b|)$.

$$\boxed{\vec a^{\,2}=\vec a\vec a=|\vec a|^2}$$

Рис. 17

При объяснении материала удобно использовать таблицу (рис. 17).

Для работы в классе рекомендуются задачи 1039 (а, б, ж, з), 1040 (а, д, е), 1041 (б), 1042 (а). В контролирующую *самостоятельную работу* можно включить следующие задания:

Самостоятельная работа

Вариант I. Задания 1039 (в), 1040 (в), 1041 (в), 1042 (в).

Вариант II. Задания 1039 (г), 1040 (б), 1041 (а), 1042 (г).

Рассмотрение формулы скалярного произведения в координатах и свойств скалярного произведения векторов полезно предварить следующим *математическим диктантом*:

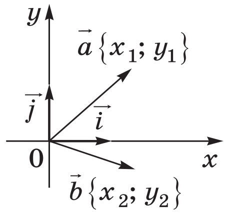
Вариант I

1. Известно, что $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы. Запишите координаты вектора $\vec{c}$.
2. Дан вектор $\vec{m}\{0;\ 5\}$. Запишите разложение вектора $\vec{m}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Даны векторы $\vec{c}\{-1;\ 2\}$ и $\vec{m}\{2;\ 1\}$. Найдите координаты суммы векторов $\vec{c}$ и $\vec{m}$.
4. Найдите координаты вектора $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{-3;\ 0\}$.
5. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ 6\}$ и $\vec{b}\{-2;\ 3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
6. Две стороны треугольника равны 7 см и 3 см, а угол между ними равен 120°. Найдите третью сторону треугольника.
7. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $AB = 2$, $AC = 3$. Вычислите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
8. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Вариант II

1. Дан вектор $\vec{p}\{3;\ 0\}$. Запишите разложение вектора $\vec{p}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
2. Известно, что $\vec{d} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы. Запишите координаты вектора $\vec{d}$.
3. Найдите координаты вектора $-\vec{b}$, если $\vec{b}\{0;\ -2\}$.
4. Даны векторы $\vec{d}\{2;\ -1\}$ и $\vec{e}\{3;\ -1\}$. Найдите координаты разности векторов $\vec{d}$ и $\vec{e}$.
5. Даны векторы $\vec{c}\{-1;\ 9\}$ и $\vec{n}\{3;\ -2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 3\vec{c} + \vec{n}$.
6. В треугольнике MPQ $\angle M = 135°$, $MP = 5$, $MQ = 2\sqrt{2}$. Вычислите $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$.
7. Две стороны треугольника равны 3 м и 9 м, а угол между ними равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.
8. Чему равно скалярное произведение координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$?

Скалярное произведение в координатах



$\vec{a}\{x_1; y_1\}$

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

$\vec{b}\{x_2; y_2\}$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$ ($\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$); 2) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$; 4) $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$.

Рис. 18

Изучение теоремы о скалярном произведении векторов в координатах и свойств скалярного произведения полезно построить так, чтобы учащиеся сами проводили алгебраические преобразования. Полученные результаты можно вынести на настенную таблицу (рис. 18). Особое внимание следует уделить формулировке утверждения (следствие 1) об условии перпендикулярности ненулевых векторов через их координаты, которое сформулировано с использованием оборота «тогда и только тогда». Наиболее подготовленным учащимся полезно разобраться (с помощью учителя), что дано и что требуется доказать, если в формулировке оставить только слово «тогда», а также если оставить слова «только тогда».

В классе можно решить задачи 1044 (а), 1047 (а), 1048 (для угла A), 1051, 1053, а также разобрать решения задач 1054 и 1055.

При обсуждении задачи 1055 следует обратить внимание учащихся на то, что введение скалярного произведения векторов позволяет применять векторный аппарат для решения задач, в которых требуется найти углы многоугольника.

Для обучающей *самостоятельной работы* можно использовать задачи 1044 (б), 1045, 1047 (б).

В заключение можно провести контролирующую *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 1049 и 1068.

Вариант II. Задачи 1065 и 1052.

Можно использовать также некоторые задачи вариантов самостоятельных работ С-12 и С-13 из дидактических материалов.

Дома: пп. 105—108; вопросы для повторения 14—22 (с. 266—267); задачи 1044 (в), 1047 (в), 1048 (для углов B и C), 1066.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, что такое угол между векторами; **формулировать** определение скалярного произведения двух векторов; **выводить формулы** скалярного произведения и косинуса угла между векторами через координаты векторов; **формулировать** и **обосновывать** утверждения о свойствах скалярного произведения векторов, проводя самостоятельно соответствующие алгебраические преобразования; **уметь решать задачи** типа 1044—1051; наиболее подготовленные учащиеся должны усвоить, что в утверждениях о перпендикулярности ненулевых векторов относится к слову «тогда» (что дано и что требуется доказать) и что — к словам «только тогда».

Решение задач (2 ч)

Назначение этих уроков — закрепление и проверка знаний и умений учащихся, сформированных при изучении главы XI.

Первый урок полезно начать со следующего *диктанта*, проверяющего знания по теме «Скалярное произведение векторов»:

Вариант I

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен $120°$.
2. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{c}$ и $\vec{e}$ равно 0. Определите угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{c}$.
3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m}\{3;\ -2\}$, $\vec{n}\{-2;\ 3\}$.
4. Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x;\ y\}$ и $\vec{b}\{-y;\ x\}$.
5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{p}\{3;\ -4\}$, $\vec{q}\{15;\ 8\}$.
6. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3\}$ и $\vec{b}\{x;\ -4\}$. При каком значении x эти векторы перпендикулярны?

Вариант II

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, а угол между ними равен $135°$.
2. Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равно нулю. Определите угол между этими векторами.
3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-4;\ 5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 4\}$.
4. Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{c}\{x;\ -y\}$ и $\vec{d}\{y;\ x\}$.
5. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\{-12;\ 5\}$, $\vec{b}\{3;\ 4\}$.
6. Даны векторы $\vec{m}\{3;\ y\}$ и $\vec{n}\{2;\ -6\}$. При каком значении y эти векторы перпендикулярны?

Далее можно рассмотреть задачи 1025 (б), 1056, 1059 с записью решений в тетрадях, а затем решить задачи 1040 (г), 1042 (б), 1050, 1060 (в), 1063.

Учащимся, выполнившим все задания, можно предложить задачу 1029.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты математического диктанта МД-2 из дидактических материалов.

Контрольная работа № 3 *(1 ч)*

Вариант I

1. Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если $A(-1;\ 3)$.
2. Решите треугольник ABC, если $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$, $BC = 3\sqrt{2}$ см.
3. Найдите косинус угла M треугольника KLM, если $K(1;\ 7)$, $L(-2;\ 4)$, $M(2;\ 0)$.

Вариант II

1. Найдите угол между лучом OB и положительной полуосью Ox, если $B(3;\ 3)$.
2. Решите треугольник BCD, если $\angle B = 45°$, $\angle D = 60°$, $BC = \sqrt{3}$ см.
3. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если $A(3;\ 9)$, $B(0;\ 6)$, $C(4;\ 2)$.

Вариант III

1. Найдите угол между лучом OC и положительной полуосью Ox, если $C\left(\sqrt{3}; 1\right)$.
2. Решите треугольник CDE, если $\angle C = 60°$, $CD = 8$ дм, $CE = 5$ дм.
3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 60°$.

Вариант IV

1. Найдите угол между лучом OD и положительной полуосью Ox, если $D(-2;\ 2)$.
2. Решите треугольник DEF, если $DE = 5$ м, $DF = 8$ м, $EF = 4$ м.
3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 60°$.

Можно использовать также некоторые задачи вариантов контрольных работ К-2 и К-3 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Что называется тангенсом и что называется котангенсом угла α? Для каких значений α тангенс (котангенс) не существует и почему?
2. Сформулируйте и докажите теорему синусов.
3. Даны векторы $\vec{p}\{x;\ -4\}$ и $\vec{q}\{2;\ 3\}$. Найдите значение x, если $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Вариант II

1. Напишите формулы приведения.
2. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\{-5;\ 7\}$ и $\vec{b}\{2;\ 1\}$.

Вариант III

1. Что такое скалярное произведение векторов?
2. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.
3. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если $AB = 8$ м, $AC = 6$ м, $BC = 12$ м.

Вариант IV

1. Какие два вектора называются перпендикулярными?
2. Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.
3. Найдите синус угла B треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle C = 30°$.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XI

1019. Эту задачу целесообразно решить сначала в общем виде. Если известны координаты x и y точки A и $x \neq 0$, то из равенств $y = OA \cdot \sin\alpha$, $x = OA \cdot \cos\alpha$, разделив первое из них почленно на второе, получим $\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha$, а из этого равенства можно с помощью таблиц или микрокалькулятора найти значение α. В частных случаях решение можно найти иначе:

а) $2 = OA \cdot \sin\alpha$, $2 = OA \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \sin\alpha$ и, следовательно, $\alpha = 45°$.

б) $0 = OA \cdot \cos\alpha$, следовательно, $\cos\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$.

1029. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $BC = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника (рис. 19).

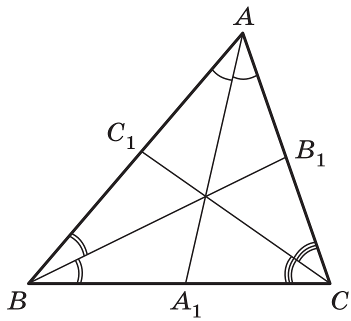


Рис. 19

1. Рассмотрим треугольник BB_1C:

$$\frac{BB_1}{\sin C} = \frac{BC}{\sin B_1}, \quad \angle B_1 = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right),$$

поэтому

$$\sin B_1 = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \text{ и } BB_1 = \frac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}.$$

2. Рассмотрим треугольник BC_1C:

$$\frac{CC_1}{\sin B} = \frac{BC}{\sin C_1}, \ \sin C_1 = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right),$$

следовательно,

$$CC_1 = \frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

3. Рассмотрим треугольник ABC:

$$\angle A = 180^\circ - (\alpha + \beta), \ \ \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

откуда

$$AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

В треугольнике AA_1B

$$\angle AA_1B = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Если $\alpha \geqslant \beta$, то $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \geqslant 0$, и тогда

$$\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right).$$

Если $\alpha < \beta$, то $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} < 0$, и тогда

$$\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Далее, в треугольнике AA_1B

$$\frac{AB}{\sin AA_1B} = \frac{AA_1}{\sin B},$$

$$\text{откуда} \ \ AA_1 = \frac{a\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma},$$

где $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\alpha \geqslant \beta$; $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$, если $\alpha < \beta$.

1056. Пусть $ABCD$ — данный ромб. Выразим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Используя эти выражения, получаем $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 0$, так как $AD = AB$. Следовательно, $AC \perp BD$.

1059. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $\angle AOB = \alpha$. Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$. Найдём площадь каждого из четырёх треугольников, пользуясь теоремой о площади треугольника. Учитывая, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\ \alpha$ и $AC = AO + OC$, $BD = BO + OD$, получаем

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

1063. Запишем равенство $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$, воспользовавшись формулой площади треугольника:

$$\frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} xc \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} xb \sin\frac{\alpha}{2},$$

где $x = AD$. Отсюда, учитывая, что $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, находим x:

$$x = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}.$$

1069. Пусть $\triangle ABC$ — данный равнобедренный треугольник с прямым углом C, AM и BN — медианы треугольника. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы катет CA лежал на положительной полуоси абсцисс, а катет CB — на положительной полуоси ординат. В качестве единицы измерения отрезков возьмём отрезок CA. В этой системе координат точки A, B, M и N имеют координаты $A\ (1;\ 0)$, $B\ (0;\ 1)$, $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, поэтому

$$\overrightarrow{AM}\left\{-1; \frac{1}{2}\right\},\ \overrightarrow{NB}\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

По формуле (5) п. 107 находим $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{NB}$: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

По тригонометрическим таблицам находим $\alpha = 36°51'$.

ГЛАВА

XII Длина окружности и площадь круга *(12 ч)*

В этой главе рассматриваются традиционные вопросы, связанные с длиной окружности и площадью круга, в частности, доказываются теоремы об описанной и вписанной в правильный многоугольник окружностях.

Вывод формул длины окружности и площади круга основан на интуитивном представлении о пределе: при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, его периметр стремится к длине этой окружности, а его площадь — к площади круга, ограниченного окружностью.

Примерное поурочное планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Правильные многоугольники	4	61—71	С-14, С-15
§ 2. Длина окружности и площадь круга	4	72—85	С-16, С-17
Решение задач	3	61—85	—
Контрольная работа № 4	1	—	К-4

§ 1 Правильные многоугольники *(4 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятие правильного многоугольника, доказать теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, вывести формулы, связывающие площадь и сторону правильного многоугольника с радиусами вписанной и описанной окружностей (они будут использованы при выводе формул длины окружности и площади круга), рассмотреть задачи на построение правильных многоугольников.

Изучение темы рекомендуется разделить на два этапа: первые два урока посвятить повторению материала, который понадобится в данном параграфе, и изучению пп. 109—111; третий и четвёртый уроки — изучению пп. 112 и 113.

Повторение формулы суммы углов выпуклого многоугольника, свойств биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку, теорем об окружностях, вписанной в треугольник и описанной около него, признака равнобедренного треугольника, свойства касательной к окружности полезно провести в ходе решения следующих задач:

1. Все углы выпуклого пятиугольника равны друг другу. Найдите величину каждого угла.
2. Докажите, что треугольник, две высоты которого равны, является равнобедренным.
3. Окружность радиуса 5 см касается сторон угла A в точках B и C. Найдите длины отрезков AB и AC, если центр окружности удалён от вершины угла на 13 см.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, проходящая через их центры, перпендикулярна к отрезку AB.
5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности лежит на одной из медиан, а центр описанной окружности — на той же медиане или её продолжении.
6. Докажите, что радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, вдвое меньше радиуса описанной около него окружности.
7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.
8. Докажите, что для площади S любого многоугольника, описанного около окружности радиуса r, справедлива формула $S = p \cdot r$, где p — полупериметр многоугольника.

Далее можно ввести понятие правильного многоугольника, предложить учащимся вывести формулу для вычисления его угла и решить задачи 1078, 1079, 1081 (в), 1083 (в).

Затем формулируются теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него. Доказательство первой теоремы можно рассмотреть в классе, а доказательство второй и формулировки следствий учащиеся могут изучить дома. Применение первой теоремы целесообразно показать на задачах 1084 и 1086. Затем можно обсудить решения задач 1080 и 1082 и решить следующие задачи:

9. Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника равны.

10. На каждой из сторон квадрата отмечены две точки, делящие каждую сторону в отношении $1 : \sqrt{2} : 1$. Докажите, что эти точки служат вершинами правильного восьмиугольника.
11. Постройте с помощью транспортира и циркуля правильный пятиугольник.

В конце второго урока желательно провести *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Задачи 1081 (б), 1083 (г), 1084 (г).
2. Докажите, что три вершины правильного шестиугольника, взятые через одну, служат вершинами правильного треугольника.

Вариант II

1. Задачи 1081 (г), 1083 (а), 1084 (е).
2. Докажите, что четыре вершины правильного восьмиугольника, взятые через одну, служат вершинами квадрата.

Можно использовать также некоторые задачи вариантов самостоятельной работы С-14 из дидактических материалов.

Сильным учащимся можно предложить задачу 1207 (а).

Дома: пп. 109—111; вопросы для повторения 1—4 (с. 284); задачи 1081 (а, д), 1083 (б), 1084 (д), 1085.

Вывод формул (1)—(4) из п. 112 учебника учащиеся могут провести самостоятельно под руководством учителя. Для этого полезно заготовить на доске необходимые чертежи. Предварительное знакомство с формулами можно провести в ходе фронтального решения следующей задачи:

Правильный многоугольник вписан в окружность радиуса 1 м. Вычислите сторону, периметр, площадь многоугольника и радиус вписанной окружности, если число сторон равно 3, 4, 5.

Полезно на доске заготовить таблицу. Её учащиеся будут заполнять в ходе решения задачи:

n	a_n	P	S	r
3				
4				
5				

Далее можно предложить учащимся прочитать текст п. 113, построить в тетради правильный шестиугольник, а затем на том же чертеже — правильные треугольник и двенадцатиугольник.

Полезно решить в классе задачу 1098 (а).

На втором уроке вначале можно организовать фронтальное решение задач 1089, 1095, 1096, используя при этом справочную настенную таблицу (рис. 20).

Затем целесообразно провести *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 1090, 1094 (г).

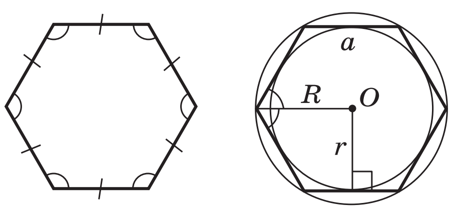
Вариант II. Задачи 1091, 1094 (в).

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты самостоятельной работы С-15 из дидактических материалов.

Учащимся, интересующимся математикой, можно предложить задачи 1207 (б) и 1208.

Дома: пп. 112, 113; вопросы для повторения 5—7 (с. 284); задачи 1087, 1088, 1092, 1093, 1097, 1098 (б), 1100 (в, г).

Правильные многоугольники



$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$S = \frac{1}{2}Pr$$

n	a	r	S
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
4	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
6	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Рис. 20

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать** определение правильного многоугольника, **формулировать и доказывать теоремы** об окружности, описанной около правильного многоугольника, и об окружности, вписанной в правильный многоугольник; **уметь выводить формулы** для вычисления угла, площади, стороны правильного многоугольника и радиуса вписанной в него окружности **и применять их** при решении задач типа 1081, 1083, 1087, 1094, 1098, 1100; в ходе изучения темы учащиеся должны **проявить способность** самостоятельно **усваивать** новые знания, **выводить** новые формулы.

§ 2 Длина окружности и площадь круга *(4 ч)*

Назначение параграфа — вывести формулы длины окружности и площади круга, а также формулы для вычисления длины дуги окружности и площади кругового сектора.

В 6 классе учащиеся получили наглядное представление о длине окружности и площади круга, познакомились с соответствующими формулами. После изучения правильных многоугольников появляется возможность в какой-то мере обосновать эти формулы. Однако следует учесть, что это обоснование нестрогое, оно основано на интуитивном представлении о пределе: при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в окружность, его периметр стремится к длине этой окружности, а площадь — к площади круга, ограниченного окружностью. Изучение темы можно начать со следующего *математического диктанта*:

Вариант I

1. Найдите угол правильного десятиугольника.
2. Найдите сторону правильного треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 2 м.
3. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, если радиус описанной около него окружности равен 2 м.
4. Найдите площадь правильного треугольника, если расстояние от его центра до вершины равно 2 м.

5. Закончите предложение: «Угол с вершиной в центре окружности называется...»
6. Угол с вершиной в центре правильного многоугольника и сторонами, проходящими через две его соседние вершины, равен 36°. Сколько сторон имеет этот многоугольник?
7. Чему равен cos 0°?
8. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник.

Вариант II

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его сторона стягивает дугу описанной окружности, равную 18°?
2. Найдите площадь квадрата, если радиус описанной около него окружности равен 2 дм.
3. Закончите предложение: «Кругом называется часть плоскости...»
4. Найдите сторону квадрата, если расстояние от его центра до вершины равно 2 дм.
5. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат, если радиус описанной около него окружности равен 2 дм.
6. Чему равен cos 0°?
7. Найдите угол правильного девятиугольника.
8. С помощью циркуля и линейки постройте правильный треугольник.

Поскольку материал параграфа нетрадиционен и опирается на понятие предела, его изложение целесообразно дать в форме лекции. Пункт 116 о площади кругового сектора учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику.

Для лучшего усвоения формул длины окружности и площади круга можно решить задачи 1101 и 1114 (не вычерчивая таблицы, выполнить вычисления для трёх первых столбцов). Затем можно рассмотреть задачи 1102 (а, б), 1109 (а, б), 1124, 1126 и организовать фронтальное решение следующих задач: 1104 (а, в), 1105 (г), 1113, 1116 (в), 1117 (г), 1127.

В конце урока рекомендуется провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 1102 (в), 1115 (б), 1109 (в), 1104 (б).

Вариант II. Задачи 1102 (г), 1115 (а), 1109 (г), 1116 (а).

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты самостоятельных работ С-16 и С-17 из дидактических материалов.

Учащимся, быстро выполняющим задание, можно предложить задачи 1215 и 1216.

Дома: пп. 114—116; вопросы для повторения 8—13 (с. 284); задачи 1101, 1103, 1105 (а), 1108, 1111, 1114, 1117 (а), 1118, 1120.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **усвоить формулы** длины окружности и дуги окружности, площади круга; **уметь объяснить**, какие части круга называются круговым сектором и круговым сегментом и как вычислить площади этих фигур; **уметь применять** изученные формулы при решении задач типа 1111, 1113, 1119, 1120, 1126, 1127.

Решение задач (3 ч)

Назначение этих уроков — закрепить знания и умения учащихся по материалу главы, подготовить их к контрольной работе.

Первый урок полезно начать со следующего *математического диктанта*, позволяющего проверить знание формул длины окружности и дуги окружности, площади круга и кругового сектора:

Вариант I

1. Площадь круга равна S. Найдите длину ограничивающей его окружности.
2. Найдите длину дуги окружности радиуса 9 м, если градусная мера дуги равна 120°.
3. Длина дуги окружности равна 3π, а её радиус равен 8. Найдите градусную меру этой дуги.
4. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 13 см и 12 см.

5. Найдите площадь кругового сектора радиуса 4 см, если его центральный угол равен 45°.
6. Площадь кругового сектора равна 18π м^2, а его центральный угол равен 40°. Найдите радиус сектора.

Вариант II

1. Длина окружности равна C. Найдите площадь ограниченного ею круга.
2. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 25 см и 24 см.
3. Найдите площадь кругового сектора радиуса 3 см, если его центральный угол равен 20°.
4. Площадь кругового сектора равна 10π м^2, а его радиус равен 6 м. Найдите центральный угол сектора.
5. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 дм, если её градусная мера равна 60°.
6. Длина дуги окружности равна 6π, а её градусная мера равна 120°. Найдите радиус окружности.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты математического диктанта МД-3 из дидактических материалов.

После диктанта полезно напомнить учащимся формулу площади треугольника, полученную ещё в 8 классе (§ 4, гл. VIII):

$$S = \frac{1}{2}Pr,$$

где P — периметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Можно даже предложить снова вывести эту формулу, используя рисунок 21, воспроизведённый на доске. Эта формула будет полезной при решении задач 1105, 1117 и др.

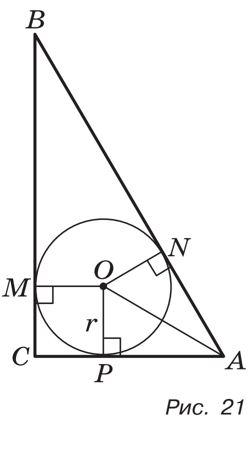


Рис. 21

Далее рекомендуется решить задачи 1099, 1104 (д), 1105 (в), 1110, 1112, 1116 (б), 1117 (в), 1123, 1138, 1144 (б). Решения некоторых из них полезно предварительно обсудить, а затем записать в тетрадях, остальные задачи учащиеся могут решить самостоятельно с последующей проверкой ответов или решений.

Учащимся, интересующимся математикой, можно предложить задачи 1133 и 1134.

На последнем уроке целесообразно провести проверочную *самостоятельную работу*.

Самостоятельная работа

Вариант I. Задачи 1125, 1129 (в), 1132 (а), 1144 (а), 1197.

Вариант II. Задачи 1128, 1129 (г), 1132 (б), 1143 (б), 1139.

Дома: задачи 1104 (г), 1105 (б), 1106, 1107, 1117 (в), 1121, 1122.

Контрольная работа № 4 *(1 ч)*

Вариант I

1. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 45 см. Найдите сторону правильного восьмиугольника, вписанного в ту же окружность.
2. Найдите площадь круга, если площадь вписанного в ограничивающую его окружность квадрата равна 72 дм^2.
3. Найдите длину дуги окружности радиуса 3 см, если её градусная мера равна 150°.

Вариант II

1. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равен 48 м. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.
2. Найдите длину окружности, если площадь вписанного в неё правильного шестиугольника равна $72\sqrt{3}$ см^2.
3. Найдите площадь кругового сектора, если градусная мера его дуги равна 120°, а радиус круга равен 12 см.

Вариант III

1. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 48 см. Найдите сторону правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность.
2. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами 3 см и 7 см.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей её хордой, если длина хорды равна 4 м, а градусная мера дуги равна 60°.

Вариант IV

1. Периметр правильного пятиугольника, вписанного в окружность, равен 6 дм. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.

2. Площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром, равна 45π м^2, а радиус меньшей окружности равен 3 м. Найдите радиус большей окружности.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и стягивающей её хордой, если длина хорды равна 2 см, а диаметр окружности равен 4 см.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты контрольной работы К-4 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте определение правильного многоугольника.
2. Докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.
3. Найдите площади секторов, на которые разбивают круг два радиуса, если угол между ними равен 36°, а радиус окружности равен 4 м.

Вариант II

1. Какая точка называется центром правильного многоугольника?
2. Докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
3. Найдите длины дуг, на которые разбивают окружность два радиуса, если угол между ними равен 72°, а радиус окружности равен 6 дм.

Вариант III

1. Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближённое значение.
2. Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.
3. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 3 см.

Вариант IV

1. Как выражается сторона правильного треугольника через радиус описанной окружности?

2. Выведите формулу для вычисления радиуса окружности, вписанной в правильный n-угольник, через радиус окружности, описанной около него.
3. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром, если их радиусы равны 5 м и 10 м.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XII

1099. Диагонали A_3A_7 и A_4A_8 четырёхугольника $A_3A_4A_7A_8$ являются диаметрами окружности, в которую вписан данный восьмиугольник, поэтому они равны и точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, четырёхугольник $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник. Так как $\angle A_3OA_4 = 45°$, то согласно задаче 1059 площадь прямоугольника равна $\sqrt{2}\,R^2$.

1105. в) Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $\angle C = 90°$, $\angle B = \alpha$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $P = a + b + c$, r — радиус вписанной окружности. Тогда $a = c\cos\alpha$, $b = c\sin\alpha$. Воспользуемся двумя формулами для вычисления площади S треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\alpha = \frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{cr}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + 1).$$

Отсюда получаем $r = \dfrac{c\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + \sin\alpha + 1)}$, поэтому

$$C = 2\pi r = \frac{\pi c\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $\cos\alpha + \sin\alpha - 1$, после несложных преобразований получаем

$$C = \pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$

1117. в) Воспользуемся двумя формулами для вычисления площади треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$ и $S = \dfrac{1}{2}P \cdot r$, где a и b — длины сторон треугольника, α — угол между ними, P — периметр, r — радиус вписанной окружности. Получим

$$S = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha \text{ и } S = r \cdot a\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Отсюда находим r, а затем площадь круга:

$$S_{\text{круга}} = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

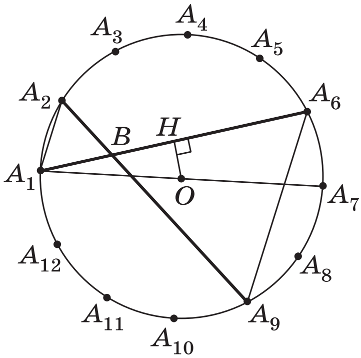


Рис. 22

1133. а) Угол $A_1A_2A_9$ вписанный, поэтому $\angle A_1A_2A_9 = \frac{1}{2}\smile A_1A_9 = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{12}\cdot 4 = 60^\circ$ (рис. 22).

Аналогично $\angle A_2A_1A_6 = 60^\circ$. Следовательно, $\angle A_1BA_2 = 60^\circ$, и поэтому треугольник A_1A_2B равносторонний. Аналогично доказывается, что треугольник A_6A_9B равносторонний.

б) Так как A_1A_7 — диаметр окружности с центром O, описанной около данного двенадцатиугольника, то $OA_1 = OA_7$. Пусть $OH \perp A_1A_6$. Угол $A_6A_1A_7$ опирается на дугу A_6A_7, поэтому $\angle HA_1O = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. В прямоугольном треугольнике $A_1HO : A_1H = R\cos 15^\circ$, где R — радиус описанной окружности. Значит, $A_1A_6 = 2R\cos 15^\circ$. Но $r = R\cdot\cos 15^\circ$ (формула (3) п. 112). Следовательно, $A_1A_6 = 2r$.

1134. а) Угол A_2OA_7 центральный, поэтому $\angle A_2OA_7 = \smile A_2A_7 = \frac{360^\circ}{10}\cdot 5 = 180^\circ$ и, следовательно, A_2A_7 — диаметр, т. е. $A_2A_7 = 2R$ (рис. 319 учебника).

б) Имеем $\angle A_1A_2B = \angle A_1A_2A_7 = \frac{1}{2}\smile A_1A_7 = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{10}\cdot 4 = 72^\circ$, $\angle A_4OB = \angle A_4OA_2 = \smile A_2A_4 = 72^\circ$. Следовательно, $\triangle A_1A_2B \backsim \triangle A_4OB$ по двум углам. Далее, согласно задаче 718 $\angle A_1BA_2 = \frac{1}{2}(\smile A_1A_2 + \smile A_4A_7) = 72^\circ$, поэтому $\angle A_1BA_2 = \angle A_1A_2B$, и, значит, треугольник A_1A_2B равнобедренный ($A_1A_2 = A_1B$). Из подобия треугольников A_1A_2B и A_4OB следует, что треугольник A_4OB также равнобедренный ($A_4B = A_4O$).

в) Так как $A_4B = A_4O = R$, $A_1A_2 = A_1B$, то $A_1A_4 - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1B = A_4B = R$.

1136. Положим, $A_1A_4 = a_4$. Тогда:

1) $B_1A_2 = A_1A_2 - A_1B_1 = a_4 - R$ (рис. 320 учебника), $C_2B_1 = A_2C_2 - B_1A_2 = R - (a_4 - R) = 2R - a_4 = 2R - R\sqrt{2} = R(2 - \sqrt{2})$,

так как $a_4 = R\sqrt{2}$. Аналогично находим C_3B_2, C_4B_3, C_1B_4 и получаем равенства: $C_2B_1 = C_3B_2 = C_4B_3 = C_1B_4$.

2) В треугольнике $B_1A_2C_3$

$$B_1C_3 = \sqrt{A_2C_1^2 + A_2C_3^2} = \sqrt{\left(a_4 - R\right)^2 + \left(a_4 - R\right)^2} = R\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Аналогично находим $B_2C_4 = B_3C_1 = B_4C_2 = R(2 - \sqrt{2})$.

Итак, все стороны восьмиугольника равны.

3) $\angle A_2B_1C_3 = 45°$, поэтому $\angle C_2B_1C_3 = 135°$. Аналогично каждый из остальных углов восьмиугольника равен $135°$. Следовательно, $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ — правильный восьмиугольник.

Площадь восьмиугольника можно вычислить по формуле $S = a_4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} B_1A_2^2$ или по формуле $S = \frac{1}{2} Pr$, где $P = 8R(2 - \sqrt{2})$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2} R$.

Ответ: $S = 4R^2(\sqrt{2} - 1)$.

1142. Обозначим радиусы данных кругов через r и R, а радиус искомого круга через x. По условию задачи

$$\pi r^2 + \pi R^2 = \pi x^2, \text{ откуда } x^2 = r^2 + R^2.$$

Значит, радиус x равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами, равными r и R. Построив этот прямоугольный треугольник, получим отрезок, равный радиусу искомого круга, после чего можно построить сам искомый круг.

ГЛАВА

XIII Движения *(9 ч)*

В этой главе вводятся понятия отображения плоскости на себя, движения и рассматриваются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот. Кроме того, исследуется важный вопрос о связи понятий наложения и движения.

Понятие наложения, на основе которого определялось равенство фигур, относится в данном курсе к числу основных (неопределяемых) понятий. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (аксиомы 7—13, с. 339 учебника). В отличие от наложения движение — определяемое понятие: движения определяются как отображения плоскости на себя, сохраняющие расстояния между точками. В п. 119 (этот пункт не является обязательным для учащихся) доказано, что любое наложение является движением и, обратно, любое движение является наложением. Таким образом, доказана эквивалентность понятий наложения и движения.

Примерное поурочное планирование учебного материала

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Понятие движения	3	86—88	С-18
§ 2. Параллельный перенос и поворот	3	89—93	С-19, С-20
Решение задач	2	86—93	—
Контрольная работа № 5	1	—	К-5

§ 1 Понятие движения *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия отображения плоскости на себя и движения, рассмотреть два вида движений — осевую и центральную симметрии — и некоторые свойства движений.

В 8 классе учащиеся познакомились с осевой и центральной симметриями как свойствами геометрических фигур. В данном параграфе осевая и центральная симметрии рассматриваются как примеры движений, т. е. отображений плоскости на себя, сохраняющих расстояния между точками.

Изучение темы полезно начать с повторения понятий точек, симметричных относительно данной прямой (оси симметрии), и точек, симметричных относительно данной точки (центра симметрии). В ходе повторения нужно подвести учащихся к понятию сохранения расстояния между точками. Этой цели служат следующие задачи:

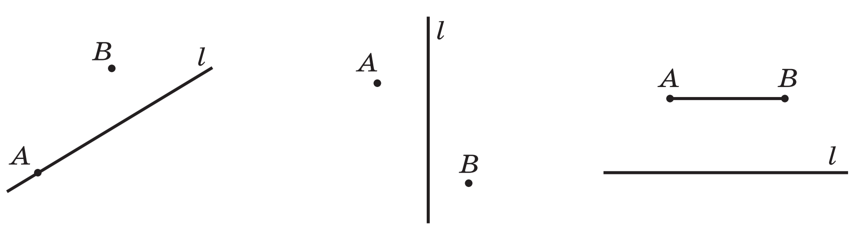
1. Для каждого из случаев, представленных на рисунке 23, *а—в*, постройте точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой l.
2. Существует ли на плоскости такая точка, для которой нет симметричной точки относительно данной прямой?
3. Докажите, что в каждом из рассмотренных в задаче 1 случаев $A_1B_1 = AB$.
4. Постройте точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно точки O, если:

   а) точка O лежит на отрезке AB;

   б) точка O не лежит на прямой AB.
5. Существует ли такая точка плоскости, для которой нет точки, симметричной относительно данной точки?
6. Докажите, что в каждом из рассмотренных в задаче 4 случаев $A_1B_1 = AB$.

Далее нужно ввести понятие отображения плоскости на себя и проиллюстрировать его примерами осевой и центральной симметрий.

Важно подчеркнуть, что при отображении плоскости на себя выполняются два условия: 1) каждой точке плоско-



а) б) в)

Рис. 23

сти ставится в соответствие какая-то одна точка плоскости и 2) каждая точка плоскости оказывается поставленной в соответствие какой-то одной точке плоскости. Нужно показать, что в случаях осевой и центральной симметрий выполняются оба условия.

В качестве контрпримера можно привести соответствие между точками плоскости, при котором каждой точке плоскости ставится в соответствие её ортогональная проекция на данную прямую. В этом случае нарушено второе условие отображения плоскости на себя: не каждая точка плоскости оказывается сопоставленной какой-то точке, а именно любая точка, не лежащая на данной прямой, не будет сопоставлена никакой точке плоскости (плоскость отображается не на себя, а на данную прямую).

Затем рекомендуется решить задачи 1148 (а) и 1149 (а).

Далее, опираясь на задачи 3 и 6, рассмотренные в начале урока, можно ввести понятие движения. В качестве примера отображения плоскости на себя, не являющегося движением, т. е. не сохраняющего расстояния между точками, можно рассмотреть центральное подобие (гомотетию) с коэффициентом 2; учащиеся могут сами доказать, что при таком отображении расстояния между точками увеличиваются в два раза.

Для усвоения понятия движения можно решить задачу 1153, а затем по заранее подготовленному чертежу (рис. 24) — следующую задачу: «При движении плоскости точка A переходит в точку M. В какую из обозначенных на рисунке точек может отобразиться при этом движении точка B?»

Далее можно доказать, что осевая и центральная симметрии являются движениями. После этого рассматривается теорема о том, что при движении отрезок отображается на отрезок, и следствие из неё. В ходе доказательства

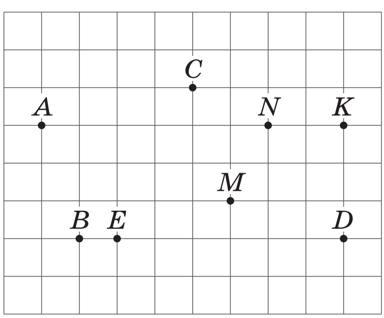


Рис. 24

теоремы полезно акцентировать внимание учащихся на том, что доказательство состоит из двух частей: во-первых, доказывается, что каждая точка P данного отрезка MN отображается в некоторую точку P_1 отрезка M_1N_1 и, во-вторых, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 переходит какая-то точка P данного отрезка MN. После доказательства теоремы и её следствия желательно разобрать решение задачи 1150 и решить задачи 1151, 1152 (а, б), 1158.

Хотя пункт 119* не является обязательным, учащиеся должны знать, что понятия наложения и движения эквивалентны, а значит, при движении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Для лучшего усвоения материала этого пункта полезно обсудить решение задачи 1156 и решить задачи 1154, 1155, 1157.

Дома: пп. 117—118; вопросы для повторения 1—13 (с. 297); задачи 1148 (б), 1149 (б), 1159, 1160, 1161, 1174.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, что такое отображение плоскости на себя; **знать** определение движения плоскости; **уметь доказывать**, что осевая и центральная симметрии являются движениями и что при движении отрезок отображается на отрезок, а треугольник — на равный ему треугольник; **уметь решать задачи** типа 1152, 1159, 1161.

§ 2 Параллельный перенос и поворот *(3 ч)*

Назначение параграфа — познакомить учащихся ещё с двумя видами движений: параллельным переносом и поворотом.

Теоретический материал параграфа можно изложить в форме лекции. В хорошо подготовленном классе доказательство утверждения о том, что поворот является движением, учащиеся могут прочитать самостоятельно по учебнику, а затем следует его обсудить.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что при параллельном переносе прямая отображается на параллельную ей прямую или сама на себя. Отсюда следует простой способ построения образов прямых и отрезков при параллельном переносе.

Далее можно решить задачи 1162, 1164, 1166, 1167. В ходе решения задачи 1166 полезно подчеркнуть, что поворот вокруг точки на 180° по часовой стрелке совпадает с поворотом вокруг этой же точки на 180° против часовой стрелки и является центральной симметрией.

Задания 1163 и 1169 могут быть выполнены учащимися самостоятельно (с последующим обсуждением). Полезно предложить учащимся самостоятельно изучить решение задачи 1171 (а), приведённое в учебнике, выполнить необходимые построения, а затем можно обсудить это решение. Важно подчеркнуть, что решение рассмотренной задачи даёт ещё один способ построения прямой, на которую отображается данная прямая при повороте вокруг данной точки.

Рекомендуется рассмотреть с учащимися также следующие задачи:

1. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата являются вершинами другого квадрата.
2. Докажите, что при повороте правильного треугольника ABC вокруг вершины A на $60°$ либо вершина B переходит в вершину C, либо вершина C переходит в вершину B.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны.
   а) Постройте отрезок CA_1, на который отображается сторона AB при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.
   б) Найдите площадь треугольника A_1CD, если $AD = 10$ см, $BC = 4$ см, $AB = 6$ см.
2. Докажите, что правильный шестиугольник при повороте на $60°$ вокруг своего центра отображается на себя.

Вариант II

1. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC.
   а) Постройте отрезок MB_1, на который отображается сторона AB при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$.
   б) Найдите периметр треугольника MDC, где D — точка пересечения отрезков BC и MB_1, если периметр треугольника ABC равен 12 м.
2. Докажите, что правильный пятиугольник при повороте на $72°$ вокруг своего центра отображается на себя.

Можно использовать также некоторые задачи вариантов самостоятельных работ С-19 и С-20 из дидактических материалов.

Дома: пп. 120—121; вопросы для повторения 14—17 (с. 297); задачи 1165, 1167, 1168, 1170, 1171 (б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какое отображение плоскости на себя называется параллельным переносом на данный вектор и какое — поворотом плоскости вокруг данной точки (центра поворота) на заданный угол; **уметь доказывать**, что параллельный перенос и поворот являются движениями, и **решать задачи** типа 1164—1168; в ходе изучения всей главы учащиеся должны **проявить способность** самостоятельно усваивать новые разделы геометрических знаний.

Решение задач (2 ч)

Назначение уроков — закрепление знаний учащихся по теме «Движения», развитие умений решать задачи с применением движений.

На этих уроках рекомендуется рассмотреть простые задачи, причём большинство из них целесообразно решать в ходе обсуждения с учащимися. Это относится к задачам 1172, 1173, 1177, 1180. Полезно обсудить и решения задач 1176, 1178, 1183. Задачи 1174, 1175, 1181, 1182 можно предложить учащимся решить самостоятельно, а затем обсудить их решения.

В ходе этих уроков можно провести устный опрос по материалу главы.

Контрольная работа № 5 *(1 ч)*

Вариант I

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при симметрии относительно прямой, содержащей боковую сторону AB.
2. Две окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых равны, пересекаются в точках M и N. Через точку M проведена прямая, параллельная O_1O_2 и пересекающая окружность с центром O_2 в точке D. Используя параллельный перенос, докажите, что четырёхугольник O_1MDO_2 является параллелограммом.

Вариант II

1. Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при симметрии относительно точки, являющейся серединой боковой стороны CD.
2. Дан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Его стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 попарно равны и параллельны. Используя центральную симметрию, докажите, что диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 данного шестиугольника пересекаются в одной точке.

Вариант III

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при повороте вокруг точки A на угол, равный углу DAB, по часовой стрелке.
2. На одной стороне угла XOY отложены отрезки OA и OB, а на другой стороне — отрезки OM и ON так, что $OM = OA$, $ON = OB$. Используя осевую симметрию, докажите, что точка пересечения отрезков MB и AN лежит на биссектрисе угла XOY.

Вариант IV

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Постройте фигуру, на которую отображается эта трапеция при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AD}$.
2. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Используя осевую симметрию, докажите, что $AC + CB < AM + MB$.

Можно использовать также варианты контрольной работы К-5 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Объясните, что такое отображение плоскости на себя.
2. Докажите, что параллельный перенос является движением.
3. Точка M — середина стороны BC правильного треугольника ABC, точки N и K симметричны точке M относительно прямых AB и AC. Докажите, что $NK \perp AM$.

Вариант II

1. Дайте определение движения плоскости.
2. Докажите, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя.
3. На окружности с центром O и радиусом r отмечена точка A. Постройте окружность, на которую отображается данная окружность при повороте вокруг точки A на 60° по часовой стрелке. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения данной и построенной окружностей.

Вариант III

1. На какую фигуру отображается при движении отрезок?
2. Докажите, что центральная симметрия является движением.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Постройте точки D и E, на которые отображаются точки A и C при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, и докажите, что $AE = DB$.

Вариант IV

1. На какую фигуру отображается при движении треугольник?
2. Докажите, что поворот плоскости вокруг точки является движением.
3. Точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ является его центром симметрии. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы XIII

1148. Обозначим буквой l ось симметрии, буквой a данную прямую. Осевая симметрия — движение, поэтому образом прямой a является некоторая прямая a'.

а) Пусть $a \parallel l$. Предположим, что прямые l и a' не параллельны. Тогда они имеют общую точку, обозначим её M. Так как $M \in l$, то точка M отображается сама на себя, и, следовательно, $M \in a$. Отсюда следует, что прямые a и l имеют общую точку M, что противоречит условию $a \parallel l$. Следовательно, $a' \parallel l$.

б) Пусть $a \perp l$, M — точка пересечения прямых a и l, а N — точка прямой a, отличная от M. Так как $a \perp l$, то образ N' точки N лежит на прямой a. Очевидно, образ точки M, т. е. сама точка M, также лежит на прямой a. Таким образом, прямые a и a' имеют две общие точки: M и N', следовательно, они совпадают.

1151. Пусть $a \parallel b$, а a' и b' — образы прямых a и b при данном движении. Предположим, что прямые a' и b' не параллельны. Тогда они имеют общую точку. Обозначим её M', а через M обозначим точку, которая при данном движении переходит в точку M'. Ясно, что $M \in a$ и $M \in b$, что невозможно, так как $a \parallel b$. Следовательно, $a' \parallel b'$.

1152. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, а A', B', C' и D' — точки, в которые отображаются вершины данного четырёхугольника. Пользуясь теоремой п. 118, сначала надо доказать, что при данном движении четырёхугольник $ABCD$ отображается на четырёхугольник $A'B'C'D'$.

а) Так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$, то согласно задаче 1151 $A'B' \parallel C'D'$ и $B'C' \parallel D'A'$, поэтому $A'B'C'D'$ — параллелограмм.

б) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD. Тогда $AB \parallel CD$, $AB \neq CD$. Согласно задаче 1151 $A'B' \parallel C'D'$ и, кроме того, $A'B' \neq C'D'$. Следовательно, $A'B'C'D'$ — трапеция.

1154. Пусть при данном отображении каждая точка плоскости отображается на себя. Очевидно, что это отображение сохраняет расстояния, поэтому оно является движением. По теореме п. 119 данное отображение является наложением.

1155. Предположим, что существуют различные движения g_1 и g_2, при которых точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1. Тогда найдётся такая точка M, что точки M_1 и M_2 — образы точки M при отображениях g_1 и g_2 — будут различными точками. Точно так же, как и при доказательстве теоремы п. 119, доказывается, что $A_1M_1 = A_2M_2$, $B_1M_1 = B_2M_2$, $C_1M_1 = C_2M_2$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как $A_1B_1C_1$ — треугольник.

1173. Пусть g — данное движение, а e — тождественное отображение плоскости на себя, т. е. отображение, при котором каждая точка плоскости, и в частности каждая вершина треугольника ABC, отображается на себя. Ясно, что e — движение, поэтому согласно задаче 1155 движения g и e совпадают, и, значит, движение g является тождественным отображением плоскости на себя.

1178. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$ (рис. 25).

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, следовательно, при этом параллельном переносе точка B отображается в точку C. Отрезки AA_1 и DA_2 равны и параллельны, поэтому ADA_2A_1 — параллелограмм, и, следовательно, $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AD}$. Таким образом, при рассматриваемом параллельном переносе точка A_1 отображается в точку A_2, точка B — в точку C, и, значит, отрезок A_1B отображается на отрезок A_2C. Отсюда следует, что середина O_1 отрезка A_1B отображается в середину O_2 отрезка A_2C, т. е. $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD}$. Поэтому $O_1O_2 = AD$, $O_1O_2 \parallel AD$.

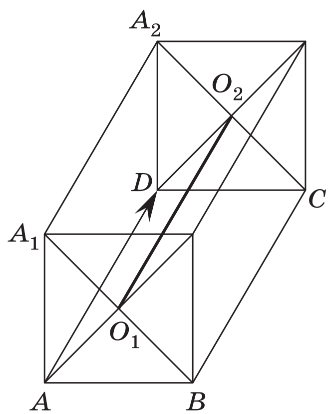


Рис. 25

1179. Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ точка S отображается в точку S_1 (рис. 26).

Тогда треугольник ABS отображается на треугольник DCS_1. Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SS_1}$ то $SS_1 \parallel BC$. Но $BC \perp CD$, поэтому $SS_1 \perp CD$. Значит, высота треугольника DCS, проведённая из вершины S, лежит на прямой SS_1. Заметим, что $CC_1 \perp S_1D$ (так как $S_1D \parallel SA$) и $DD_1 \perp S_1C$ (так как $SS_1 \parallel CB$), следовательно, K — точка пересечения высот треугольника DCS_1. Отсюда следует, что прямая SS_1 проходит через точку K. Таким образом, прямые SS_1 и SK совпадают, т. е. $SK \parallel BC$, и поэтому $SK \perp AB$.

1180. Рассмотрим поворот вокруг точки O на $120°$ в направлении обхода по дуге ABC от точки A к точке C (рис. 27).

Так как $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ и $OA = OB = OC$, то при этом повороте точка A отображается в точку B, точка B — в точку C, точка C — в точку A. Аналогично при этом же повороте точки A_1, B_1, C_1 отображаются соответственно в точки B_1, C_1 и A_1. Следовательно, прямая AA_1 отображается на прямую BB_1, прямая BB_1 — на прямую CC_1, прямая CC_1 — на прямую AA_1.

Отсюда следует, что если прямая AA_1 проходит через точку O, то прямые BB_1 и CC_1 также проходят через эту точку. Если же прямая AA_1 не проходит через точку O, то и прямые BB_1 и CC_1 не проходят через эту точку и, попарно пересекаясь, образуют некоторый треугольник MNP (см. рис. 27). Ясно, что при рассматриваемом повороте точка M пересечения отрезков AA_1 и BB_1 отображается в точку N пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Аналогично точка N отображается в точку P пересечения отрезков CC_1 и AA_1, а точка P — в точку M. Следовательно, $MN = NP = PM$, т. е. треугольник MNP равносторонний.

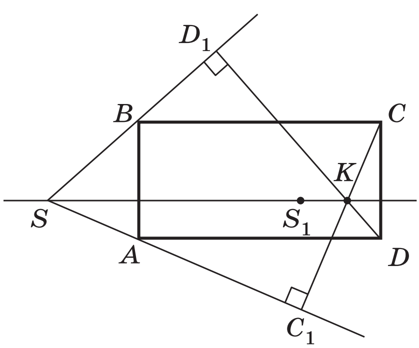


Рис. 26

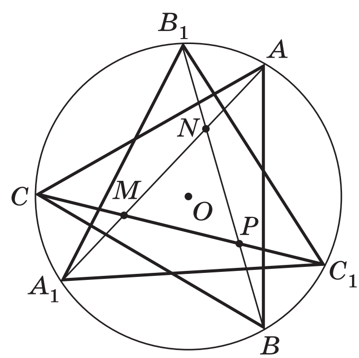


Рис. 27

ГЛАВА

XIV Начальные сведения из стереометрии *(2 ч)*

При наличии времени учитель может ознакомить учащихся с некоторыми пространственными фигурами — многогранниками, а также телами и поверхностями вращения, построив свой рассказ в виде лекции по материалам главы XIV. Можно предложить наиболее сильным учащимся самим разобрать решение задачи 1188 на построение сечения параллелепипеда и решить аналогичные задачи 1189—1192.

При необходимости отведённые на знакомство с элементами стереометрии 2 урока можно использовать как дополнительные уроки повторения и подготовки к ГИА.

Об аксиомах планиметрии (2 ч)

При завершении курса планиметрии в конце 9 класса два урока отводятся на ознакомление учащихся с аксиоматическим методом, в частности с системой аксиом, которые положены в основу изученного курса геометрии.

На первом уроке желательно провести с учащимися беседу об аксиоматическом методе в геометрии. В связи с этим необходимо напомнить им некоторые факты о возникновении и развитии геометрии. Для этой беседы рекомендуется использовать приложения 1 и 2 учебника: «Об аксиомах планиметрии» и «Некоторые сведения о развитии геометрии», а также дополнительную литературу.

В зависимости от уровня подготовки класса на втором уроке можно разобрать один или два примера теорем, которые в курсе были доказаны на основе наглядных представлений, и доказать их с использованием принятых в учебнике аксиом. Один из таких примеров (теорема, выражающая первый признак равенства треугольников) разобран в приложении 1 учебника.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

907. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$, а если $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

В любом случае $\overrightarrow{AB} = n \cdot \overrightarrow{AC}$, где n равно либо $\frac{AB}{AC}$, либо $-\frac{AB}{AC}$. Отсюда для любой точки O получаем

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}),$$

т. е.

$$(n-1)\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} + (-n)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Таким образом, в качестве k, l и m можно взять числа $k = n - 1$, $l = 1$, $m = -n$, и тогда будут выполнены равенства

$$0 = k + l + m,\ k \cdot \overrightarrow{OA} + l \cdot \overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Обратно, пусть существуют числа k, l, m, одновременно не равные нулю и такие, что $k + l + m = 0$ и $k \cdot \overrightarrow{OA} + l \cdot \overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ при любом выборе точки O. Тогда это равенство выполняется и в том случае, когда точка O совпадает с точкой A, т. е. $l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Числа l и m одновременно не равны нулю, так как в противном случае из равенства $k + l + m = 0$ следует, что и $k = 0$. Пусть, например, $l \neq 0$. Тогда $\overrightarrow{AB} = -\frac{m}{l}\overrightarrow{AC}$, т. е. векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, значит, точки A, B и C лежат на одной прямой.

908. Пусть точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$, а точки E и F — середины его диагоналей AC и BD. Обозначим буквой G точку пересечения отрезков KM и LN. Согласно задаче 791 точка G — общая середина этих отрезков.

Возьмём произвольную точку O плоскости. На основании задачи 1 п. 87 имеем

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD});$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC});$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}).$$

Отсюда следует:

$$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}, \text{ т. е.}$$

$$2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \vec{0},$$

и, следовательно, согласно задаче 907 точки G, E и F лежат на одной прямой.

910. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 28).

Согласно теореме о пересечении медиан треугольника имеем

$$\overrightarrow{GA} = -2\cdot\overrightarrow{GA_1},\ \overrightarrow{GB} = -2\cdot\overrightarrow{GB_1}. \quad (1)$$

По правилу треугольника сложения векторов получаем

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1O}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{B_1O}. \quad (3)$$

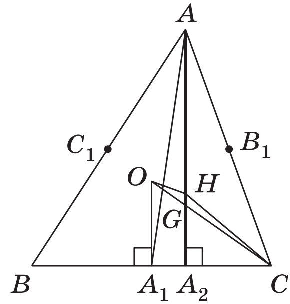


Рис. 28

Так как векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{AH}$ коллинеарны, то существует такое число n, что $\overrightarrow{A_1O} = n\cdot\overrightarrow{AH}$ (см. решение задачи 907). Аналогично $\overrightarrow{B_1O} = m\cdot\overrightarrow{BH}$, где m — некоторое число. Из равенств (1) и (2) имеем

$$\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{A_1O} = (1+2n)\overrightarrow{AH}.$$

Таким же образом, используя равенства (1) и (3), получаем

$$\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = (1+2m)\overrightarrow{BH}.$$

Следовательно, $(1+2n)\overrightarrow{AH} = (1+2m)\overrightarrow{BH}$.

Так как векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BH}$ не коллинеарны, то

$$1+2n = 1+2m = 0,$$

и поэтому $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. Отсюда следует, что точка G лежит на отрезке HO, причём $\frac{HG}{GO} = 2$.

1257. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AC}\{x-x_1;\ y-y_1\}$ и $\overrightarrow{CB}\{x_2-x;\ y_2-y\}$. По условию задачи $AC = \lambda CB$ и $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CB}$, поэтому $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Отсюда получаем

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$

и, следовательно, так как $1+\lambda \neq 0$,

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

1258. Пусть A_1B_1 — медиана треугольника $A_1A_2A_3$, а $M(x;\ y)$ — точка пересечения его медиан. Так как B_1 — середина отрезка A_2A_3, то $B_1\left(\frac{x_2+x_3}{2};\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. Используя задачу 1257 и учитывая, что $\lambda = \frac{A_1M}{MB_1} = 2$, получаем

$$x = \frac{x_1 + 2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

1261. Пусть $B(x_4;\ y_4)$ — центр масс системы двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2. Тогда согласно определению центра масс точка B лежит на отрезке A_1A_2 и справедливо равенство $A_1B \cdot m_1 = BA_2 \cdot m_2$, откуда $\frac{A_1B}{BA_2} = \frac{m_2}{m_1}$. По формулам задачи 1257 получаем

$$x_4 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},\ y_4 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Пусть $C(x;\ y)$ — центр масс системы трёх точек A_1, A_2 и A_3 с массами m_1, m_2 и m_3. Тогда $A_3C \cdot m_3 = CB(m_1 + m_2)$, откуда

$$\frac{A_3C}{CB} = \frac{m_1 + m_2}{m_3},$$

и снова по формулам задачи 1257 находим:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},\ y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

1263. а) Воспользуемся указанием к решению задачи, данным в учебнике. Пусть L — линия, заданная уравнением

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

а $M_0(x_0;\ y_0)$ — некоторая её точка.

Возьмём точки $M_1(x_0 - A;\ y_0 - B)$ и $M_2(x_0 + A;\ y_0 + B)$ и, пользуясь формулой (2) п. 95, напишем уравнение серединного перпендикуляра l к отрезку M_1M_2 (рис. 29):

$$(x - x_0 + A)^2 + (y - y_0 + B)^2 =$$
$$= (x - x_0 - A)^2 + (y - y_0 - B)^2.$$

Упростив это уравнение, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

или $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$

Так как $M_0 \in L$, то $-Ax_0 - By_0 = C$. Таким образом, полученное уравнение принимает вид (1), поэтому линии L и l совпадают, т. е. L — прямая линия.

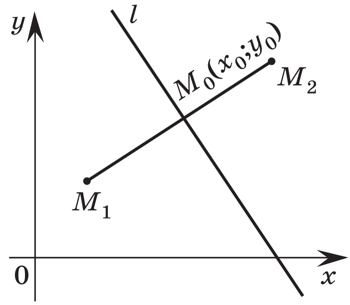


Рис. 29

1265. Введём обозначения для координат точек A, B, C и M: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $M(x;\ y)$. Тогда уравнение искомого множества точек можно записать в виде

$$\alpha((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2) + \beta((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2) +$$
$$+ \gamma((x - x_3)^2 + (y - y_3)^2) = \sigma, \tag{1}$$

где σ — заданное число, или

$$(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)y^2 - 2(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) -$$
$$- 2(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)y + \alpha x_1^2 + \alpha y_1^2 + \beta x_2^2 + \beta y_2^2 + \gamma x_3^2 + \gamma y_3^2 = \sigma.$$

а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Разделим почленно уравнение (1) на $\alpha+\beta+\gamma$ и приведём его к виду

$$\left(x-\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2=$$

$$=\frac{\sigma-\alpha x_1^2-\alpha y_1^2-\beta x_2^2-\beta y_2^2-\gamma x_3^2-\gamma y_3^2}{\alpha+\beta+\gamma}+$$

$$+\left(\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2.$$

Обозначим число, стоящее в правой части полученного уравнения, буквой k. Возможны три случая:

1) $k>0$. Искомое множество точек есть окружность.

2) $k=0$. Искомое множество состоит из одной точки.

3) $k<0$. Искомое множество точек — пустое множество.

б) $\alpha+\beta+\gamma=0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид $Ax+By+C=0$, где A и B — коэффициенты при x и y, а C — свободный член. Возможны три случая.

1) Хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля.

Искомое множество есть прямая (см. задачу 1263 (а).

2) $A=B=C=0$. Искомое множество есть вся плоскость.

3) $A=B=0$, $C\neq 0$. Искомое множество есть пустое множество.

1268. а) Введём систему координат так, как показано на рисунке 30: точки A и B имеют координаты $(-a;\ 0)$ и $(a;\ 0)$, где $a=\frac{1}{2}AB$. Точка $M(x,\ y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $AM=kBM$, т. е. $AM^2=k^2BM^2$, или $(x+a)^2+y^2=k^2(x-a)^2+k^2y^2$. Это уравнение приводится к виду

$$\left(x+a\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2.$$

Итак, искомое множество точек при любом $k\neq 1$ представляет собой окружность с центром $A_1\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2};\ 0\right)$ радиуса $\frac{2ak}{|1-k^2|}$. Одна из окружностей при $k<1$ изображена на рисунке 30.

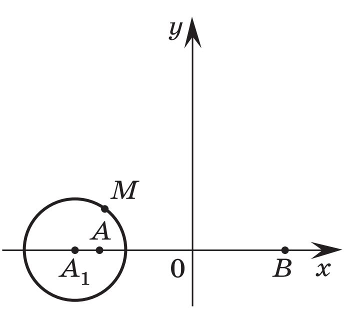


Рис. 30

б) Для доказательства второго утверждения, используя теорему, обратную теореме Пифагора, достаточно доказать, что $A_1C^2=r^2+R^2$, где C — центр произвольной окружности, проходящей через точки A и B, R — её радиус, $r = \frac{2ak}{\left|1-k^2\right|}$ — радиус окружности Аполлония с центром A_1. Центр любой окружности, проходящей через точки A и B, лежит на оси Oy, поэтому точка C имеет координаты $(0;\ c)$, и, следовательно,

$$R^2 = CA^2 = a^2 + c^2,\ \ A_1C^2 = a^2\frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)^2} + c^2.$$

Используя эти выражения, получаем

$$A_1C^2 = r^2 + R^2.$$

1270. Пусть $\angle AOB = \varphi$ (рис. 31). Тогда

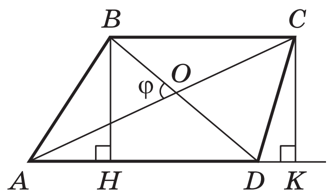


Рис. 31

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\varphi,\ S_{OBC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{ODC} = \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\varphi,\ S_{OAD} = \frac{1}{2}OA \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}OA \cdot OD \cdot \sin\varphi.$$

Поэтому $S_{OAB} \cdot S_{ODC} = \frac{1}{4}OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin^2\varphi = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$.

По условию $S_{ODC}^2 = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$, следовательно, $S_{ODC}^2 = S_{OAB} \cdot S_{ODC}$, откуда $S_{ODC} = S_{OAB}$.

Значит,

$$S_{ABD} = S_{OAB} + S_{OAD} = S_{ODC} + S_{OAD} = S_{ACD}.$$

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD. Поэтому из равенства их площадей следует равенство их высот BH и CK. А это означает, что $BC \parallel AD$, т. е. четырёхугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

1271. Пусть $ABCD$ — произвольный четырёхугольник, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (рис. 32, *а*). Докажем сначала, что

$$S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd).$$

Пусть точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Тогда

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd).$$

Это неравенство верно и в том случае, когда вершины B и D лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 32, *б*), так как в этом случае $S_{ABCD} < S_{AB_1CD} \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой AC.

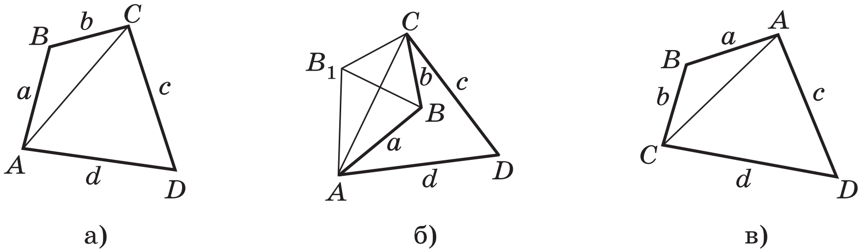


Рис. 32

Для решения исходной задачи разрежем четырёхугольник $ABCD$ по диагонали AC, перевернём треугольник ABC и приложим его к треугольнику ACD другой стороной (рис. 32, *в*). Записав доказанное неравенство для полученного четырёхугольника, имеем

$$S \leqslant \frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD) = \frac{1}{2}(ac + bd).$$

1272. Первый способ. Так как $BA_1 : A_1C = c : b$ (см. задачу 535), то согласно задаче 806 $\overrightarrow{AA_1} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$. Отсюда

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \frac{b^2\overrightarrow{AB}^2 + c^2\overrightarrow{AC}^2 + 2bc\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{(b+c)^2} = \frac{b^2c^2 + c^2b^2 + 2b^2c^2\cos A}{(b+c)^2},$$ или

$$AA_1 = \frac{\sqrt{2b^2c^2(1+\cos A)}}{b+c} = \frac{2bc}{b+c} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos A}}{\sqrt{2}} = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Второй способ. См. решение задачи 1063.

1274. Пусть S — площадь данного четырёхугольника. Тогда $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha$ (рис. 33). Квадрат диагонали, противолежащей углам α и $180^\circ - \alpha$, вычисляется по формулам

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha \text{ и } x^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Далее

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab+cd)^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Итак,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

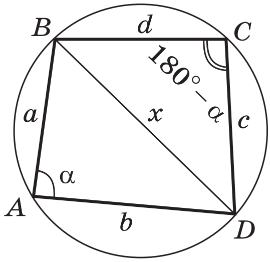


Рис. 33

1277. Согласно задаче 1033 $AC = 2R\sin\beta$, где R — радиус описанной окружности. Выразим R через S и β. Треугольники OBC и OBM имеют общую высоту (рис. 34), поэтому $\frac{S_{OBM}}{S_{OBC}} = \frac{BM}{BC}$, откуда

$$S_{OBM} = \frac{BM}{BC} \cdot S_{OBC}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$S_{OBN} = \frac{BN}{AB} \cdot S_{OAB}. \qquad (2)$$

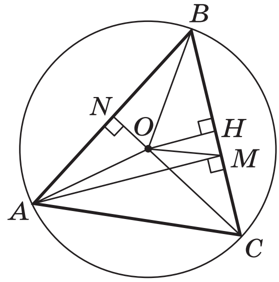


Рис. 34

Из прямоугольного треугольника ABM находим $BM = AB \cdot \cos\beta$, а из треугольника BCN находим $BN = BC \cdot \cos\beta$. Согласно задаче 1033 $AB = 2R\sin C$, $BC = 2R\sin A$. Наконец, $\angle COB = 2\angle A$ и $\angle AOB = 2\angle C$, так как центральные углы AOB и COB опираются на те же дуги, что и вписанные углы C и A. Следовательно,

$$S_{OBC} = \frac{R^2}{2}\sin 2A = R^2 \sin A\cos A \text{ и } S_{OAB} = \frac{R^2}{2}\sin 2C = R^2\sin C\cos C.$$

Подставив все найденные выражения в равенства (1) и (2) и сложив их, получим

$$S = S_{OBM} + S_{OBN} = R^2\cos\beta\,(\sin C\cos A + \sin A\cos C) =$$
$$= R^2\cos\beta\,\sin(A + C) = R^2\cos\beta \cdot \sin\beta.$$

Отсюда

$$R = \sqrt{\frac{S}{\cos\beta \cdot \sin\beta}},$$

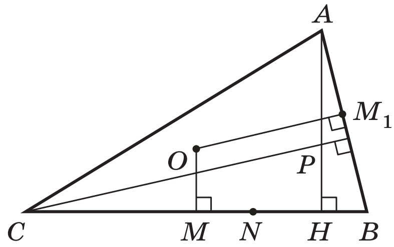
и, следовательно,

$$AC = 2\sqrt{\frac{S\sin^2\beta}{\cos\beta\sin\beta}} = 2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

1278. Обозначим буквой P точку пересечения высот треугольника ABC, буквой O центр описанной около него окружности (рис. 35, *а*) и докажем сначала, что $AP = 2OM$.

Пусть M_1 — середина стороны AB, тогда $\triangle OMM_1 \sim \triangle PAC$ (их стороны соответственно параллельны). Так как $AC = 2MM_1$ (MM_1 — средняя линия треугольника ABC), то $AP = 2OM$. Найдём OM. Пусть прямая AN пересекает описанную около треугольника окружность в точке E (рис. 35, *б*). Тогда $OE \perp BC$ и $M \in OE$.

Прямоугольные треугольники AHN и EMN равны ($MN = NH$ по условию, углы при вершине N равны как вертикальные), поэтому $AN = NE$, а значит, ON — медиана равнобедренного треугольника AOE и тем самым его высота.



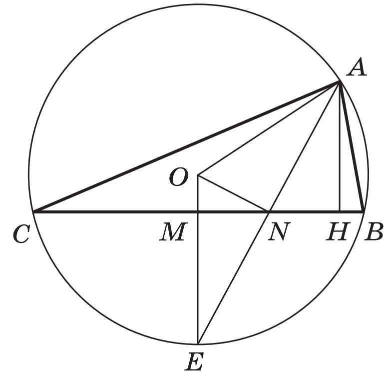


Рис. 35

Следовательно, $\angle ONM + \angle ANH = 90°$. Но $\angle HAN + \angle ANH = 90°$, поэтому $\angle ONM = \angle HAN$, откуда следует, что $\triangle OMN \backsim \triangle NHA$. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{OM}{NH} = \frac{MN}{h}$, и, следовательно,

$$OM = \frac{MN^2}{h} = \frac{MH^2}{4h}.$$

Из прямоугольного треугольника AMH находим $MH^2 = l^2 - h^2$. Итак, $OM = \frac{l^2 - h^2}{4h}$, а значит, $AP = \frac{l^2 - h^2}{2h}$.

1290. а) Пусть R и r — радиусы данных концентрических окружностей ($R > r$), а S — площадь ограниченного ими кольца. Тогда $S = \pi(R^2 - r^2)$. Если x — радиус искомой окружности, то $S = \pi x^2$, поэтому $x^2 = R^2 - r^2$. Следовательно, для построения отрезка x достаточно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой R и катетом r.

1291. Пусть точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB и не лежит на прямой AB, M_1 — та точка, в которую отображается точка M при данном движении g. Из равенств $M_1A = MB$, $M_1B = MA$, $MB = MA$ следует, что $M_1A = M_1B$, т. е. точка M_1 лежит на том же серединном перпендикуляре. Кроме того, $AM = AM_1$, $BM = BM_1$, а значит, либо точки M и M_1 совпадают, либо точки A и B лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1, и тогда середина отрезка MM_1 совпадает с серединой O отрезка AB. В первом случае треугольник ABM при движении g отображается на треугольник BAM. Но такое отображение можно осуществить при помощи осевой симметрии с осью OM, а согласно задаче 1156 движение, совмещающее указанные треугольники, единственно. Следовательно, g — осевая симметрия. Во втором случае точка O —

середина отрезка MM_1, а движение g, совмещающее равные треугольники ABM и BAM_1, является центральной симметрией с центром O.

1293. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, O и O_1 — точки пересечения их диагоналей (рис. 36), $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

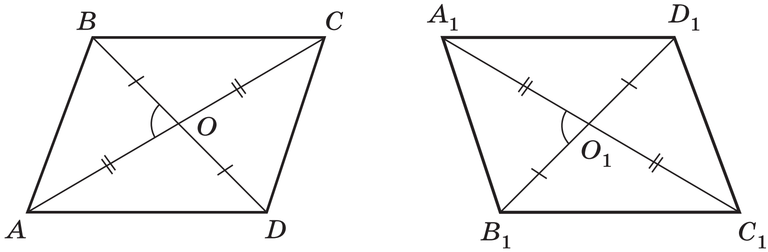


Рис. 36

Из равенства диагоналей следует, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle A_1O_1B_1$, поэтому существует движение, при котором точка A переходит в точку A_1, точка O — в точку O_1 и точка B — в точку B_1 (задача 1156). Так как при движении прямая отображается на прямую, то при указанном движении прямая AO отображается на прямую A_1O_1, прямая BO — на прямую B_1O_1, а так как при движении сохраняются расстояния между точками, то точка C переходит в точку C_1, а точка D — в точку D_1. Итак, при указанном движении вершины параллелограмма $ABCD$ совмещаются с вершинами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, поэтому совмещаются и соответствующие стороны этих параллелограммов. Следовательно, данные параллелограммы равны.

1294. Рассмотрим две трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с основаниями AB, DC и A_1B_1, D_1C_1 (рис. 37), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Пусть $AB > CD$.

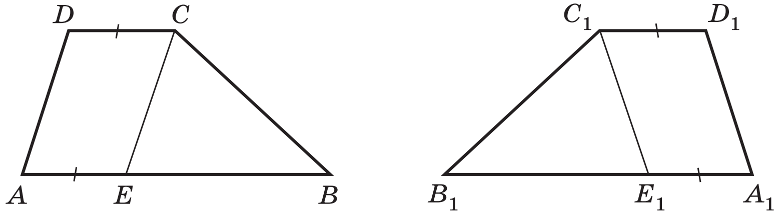


Рис. 37

На сторонах AB и A_1B_1 возьмём такие точки E и E_1, что $AE = CD$ и $A_1E_1 = C_1D_1$. Тогда $BE = B_1E_1$, а четырёхугольники $AECD$ и $A_1E_1C_1D_1$ — параллелограммы (их противоположные стороны равны и параллельны), поэтому $CE = C_1E_1$. Согласно задаче **1156** существует движение, при котором точки B, C, E отображаются в точки B_1, C_1, E_1. При этом движении точка A отображается в точку A_1 (так как луч EA отображается в луч E_1A_1 и $EA = E_1A_1$), а прямая CD — в прямую C_1D_1 (так как $CD \parallel BE$, $C_1D_1 \parallel B_1E_1$, см. задачу **1151**). Аналогично прямая AD отображается в прямую A_1D_1, поэтому точка D отображается в точку D_1. Итак, все вершины трапеции $ABCD$ отображаются в вершины трапеции $A_1B_1C_1D_1$, поэтому эти трапеции равны.

1299. Пусть данные окружности пересекаются в двух точках, M — одна из этих точек, точки O и O_1 — центры окружностей и AB — искомый отрезок (рис. 38).

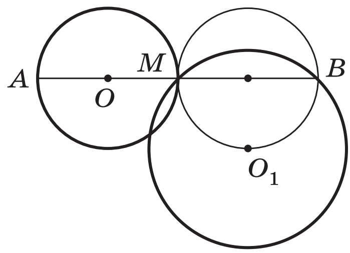


Рис. 38

При симметрии относительно точки M точка A окружности с центром O отображается в точку B, а сама окружность — на окружность, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B. Следовательно, для решения задачи нужно построить окружность, симметричную окружности с центром O относительно точки M, через точку B её пересечения с окружностью с центром O_1 провести прямую MB и отметить точку A пересечения прямой с первой окружностью. Отрезок AB искомый.

1301. А н а л и з. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD (причём $CD > AB$) (рис. 39), E — точка, в которую отображается вершина D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. В треугольнике BCE стороны BC и $BE = AD$ даны, а сторону $CE = CD - AB$ легко построить по данным сторонам AB и CD. Значит, треугольник BCE можно построить.

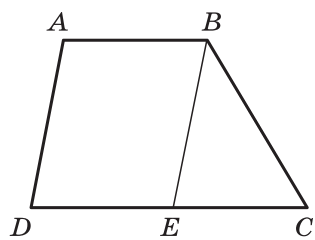


Рис. 39

П о с т р о е н и е. Строим сначала треугольник BCE по трём сторонам, а затем достраиваем его до трапеции $ABCD$.

Повторение. Решение задач. Подготовка к ГИА (9 ч)

При повторении курса геометрии и подготовке к государственной итоговой аттестации необходимо сконцентрировать внимание учащихся на ключевых вопросах программы. Основные факты планиметрии и применяемые в ней методы можно сгруппировать по следующим темам: «Треугольник» (2 ч), «Окружность» (2 ч), «Четырёхугольники, многоугольники» (3 ч), «Векторы, метод координат, движения» (2 ч).

Рассмотрение этих вопросов может включать обобщение и систематизацию сведений об основных свойствах геометрических фигур, доказательство отдельных теорем, решение комплексных задач. При повторении полезно обращать внимание учащихся на различные методы геометрических доказательств. В зависимости от подготовки класса повторение можно проводить по всем или отдельным вопросам рассматриваемой темы.

Ниже даётся подбор задач для организации итогового повторения по указанным выше темам.

Треугольник

Основные вопросы программы: равенство и подобие треугольников, сумма углов треугольника, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, площадь треугольника.

Задачи

1. В треугольниках ABC и DEK $AB = DE$, $AC = DK$, $BP = EM$, где P и M — середины сторон AC и DK. а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DEK$. б) Найдите S_{ABC}, если $EM = 3$ см, $DK = 4\sqrt{2}$ см, $\angle EMK = 135°$.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $BD = B_1D_1$, где BD и B_1D_1 — высоты треугольников, причём точки D и D_1 лежат на отрезках AC и A_1C_1. а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $B_1D_1C_1$, если известно, что $BD = 6$ см, $DC = 8$ см. в) Найдите угол $A_1C_1B_1$, если $BD = 6$ см, $DC = 8$ см.
3. На рисунке 40 $AB = AC$, AD — биссектриса угла EAC.
а) Докажите, что $AD \parallel BC$.
б) Найдите отношение площадей треугольников ADM и KMC, если $AM = 5$ см, $MC = 3$ см.
в) Найдите S_{MKC}, если $S_{AMD} = Q$.

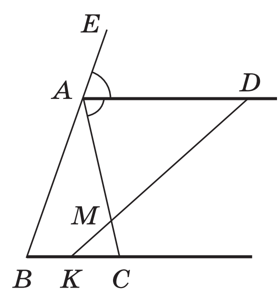


Рис. 40

4. На рисунке 41 $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, $DE \perp AB$.
   а) Докажите, что треугольники ABC и DAE подобны.
   б) Найдите катеты треугольника ABC, если $AB = 13$ см, $AE = 5{,}2$ см, $DE = 2$ см.
   в) Докажите, что около четырёхугольника $BDEC$ можно описать окружность.

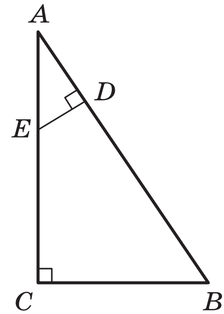


Рис. 41

5. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB, $CD = a$, $AD = b$. Найдите: а) BC; б) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC; в) отношение площадей треугольников ADC и ABC.
6. В треугольнике ABC $AB = 14$ см, $AC = 15$ см, $BC = 13$ см. Найдите: а) меньшую высоту треугольника; б) площадь треугольника ADC, если AD — биссектриса треугольника ABC; в) медиану AE треугольника ABC.
7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC и высоте, проведённой к стороне AC.
8. Площадь треугольника ABC равна Q. Найдите площадь треугольника AOB_1, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC, а B_1 — середина стороны AC.
9. С помощью циркуля и линейки постройте равнобедренный треугольник ABC по основанию AC и углу B и биссектрису BD внешнего угла этого треугольника при вершине B.

Окружность

Основные вопросы программы: окружность и круг, касательная к окружности и её свойства, окружность, описанная около треугольника, окружность, вписанная в треугольник.

Задачи

1. Хорда AB окружности радиуса 4 см видна из центра под углом 90°. Найдите: а) хорду AB и расстояние от центра окружности до этой хорды; б) углы треугольника ABC, где C — точка, расположенная на большей дуге AB окружности так, что $\smile AC : \smile CB = 5 : 4$; в) хорду BC.
2. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K, причём $AK = 6$ см,

$BK = 32$ см, $KD = 24$ см. Найдите: а) хорды BD и CD; б) расстояние от точки A до прямой BD; в) радиус данной окружности.

3. Треугольник ABC с углом B, равным $135°$, вписан в окружность с центром O и радиусом $R = 10\sqrt{2}$ см. Найдите: а) сторону AC; б) сторону AB и S_{ABC}, если известно, что $\angle ABC = 30°$.

4. Точки M, D и K лежат на окружности, угол DMK равен $45°$, хорда DK равна 12 см. Найдите: а) радиус данной окружности; б) угол MKD, если известно, что $DM = 6\sqrt{6}$ см.

5. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, равен 3 см, $KB = 4$ см, где K — точка касания окружности с боковой стороной. Найдите: а) сторону AC; б) угол BAC; в) радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

6. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, касающаяся сторон AB и BC в точках M и H. а) Докажите, что $\triangle MBH \sim \triangle ABC$. б) Найдите угол BAC и радиус окружности, если $AB = 2$ м, $MH = 1$ м.

Четырёхугольники. Многоугольники

Основные вопросы программы: параллелограмм и его свойства, признаки параллелограмма, прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства, трапеция, многоугольник, правильные многоугольники.

Задачи

1. На рисунке 42 $AEFC$ — прямоугольник, $AC = 10$ см, $AE = 3$ см, $BM = AM$.
   а) Докажите, что MN — средняя линия треугольника ABC.
   б) Найдите S_{AMNC}.
   в) Найдите S_{ABC}.

2. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, $AB = a$, $AD = b$. Найдите: а) отрезки BE и EC; б) отрезки BK и KD и S_{ABE}, если K — точка пересечения AE и BD, а $\angle A = 60°$.

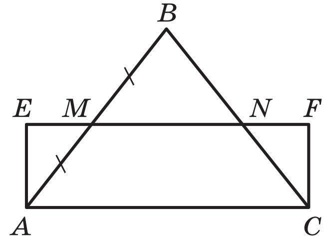


Рис. 42

3. На рисунке 43 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle 1 = \angle 2$.
а) Докажите, что четырёхугольник $BFDK$ — параллелограмм, и найдите его площадь и периметр, если $KF = 10$ см, $BD = 6$ см, $\angle KOD = 150°$.
б) Каким условиям должны удовлетворять отрезки KF и BD, чтобы параллелограмм $BFDK$ был прямоугольником (ромбом, квадратом)?
4. Меньшая диагональ параллелограмма перпендикулярна к его стороне, а высота, проведённая из вершины тупого угла, делит бóльшую сторону на отрезки, равные 9 см и 16 см. Найдите: а) стороны и высоту параллелограмма, проведённую из вершины тупого угла; б) диагонали параллелограмма; в) площадь параллелограмма.
5. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AK угла A, точка K делит сторону BC на отрезки $BK = 4$ см и $KC = 2\sqrt{2}$ см. Расстояние между параллельными прямыми AD и BC равно $2\sqrt{2}$ см. Найдите: а) углы параллелограмма; б) площадь треугольника ABC; в) радиус окружности, описанной около треугольника DKC.
6. На рисунке 44 точки M, N, P и Q — середины сторон четырёхугольника $ABCD$, $AC = 10$ см, $BD = 18$ см.
а) Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм, и найдите его периметр.
б) Найдите площади четырёхугольников $ABCD$ и $MNPQ$, если $\angle BOC = 60°$.
7. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 2 см и 8 см, вписана окружность. Найдите: а) боковую сторону трапеции; б) радиус вписанной окружности; в) площадь трапеции.
8. В равнобедренной трапеции с основаниями AD и BC $\angle D = 60°$, $BC = 12$ см, а $\angle BCA = 30°$.
а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD.
в) Найдите площадь трапеции $ABCD$.

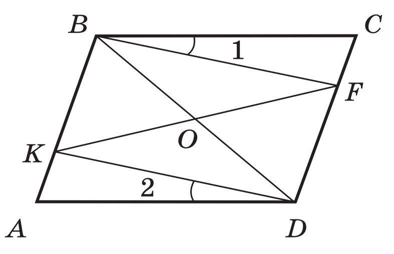


Рис. 43

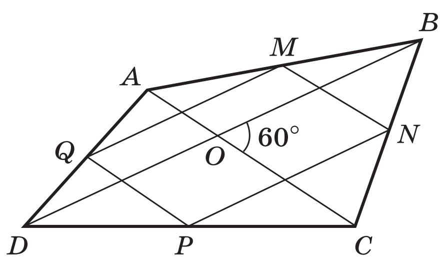


Рис. 44

9. В ромб, сторона которого равна диагонали и равна a, вписана окружность, а в эту окружность вписан правильный треугольник. Найдите: а) радиус окружности; б) сторону треугольника; в) площади ромба, круга и правильного треугольника.

10. Каждый угол правильного n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ равен $150°$.
а) Найдите число сторон этого многоугольника.
б) Найдите угол $A_2A_3A_{10}$.
в) Докажите, что треугольник A_1A_3B подобен треугольнику $A_6A_{10}B$, где B — точка пересечения диагоналей A_1A_6 и A_3A_{10} этого многоугольника.

11. Внешний угол правильного n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ в три раза меньше угла этого многоугольника.
а) Найдите число сторон этого многоугольника.
б) Найдите угол $A_3A_1A_6$.
в) Докажите, что четырёхугольник $A_1A_3A_4A_8$ — равнобедренная трапеция.

Векторы, метод координат, движения

Основные вопросы программы: вектор, длина вектора, сложение векторов и его свойства, умножение вектора на число и его свойства, коллинеарные векторы, прямоугольные координаты точек на плоскости, формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами, координаты середины отрезка, уравнения окружности и прямой, применение векторов и метода координат к доказательству теорем и решению задач, движения.

Задачи

1. Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(-3; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(2; 2)$, $D(4; -2)$.
а) Найдите координаты середин сторон этого четырёхугольника.
б) Докажите, что середины сторон четырёхугольника $ABCD$ являются вершинами ромба, и найдите площадь этого ромба.

2. а) Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, и выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
б) Выразите векторы $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и AD.
в) Определите вид четырёхугольника $MNPQ$.

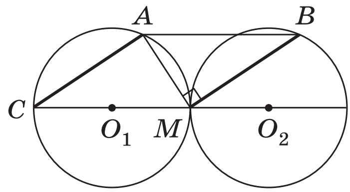


Рис. 45

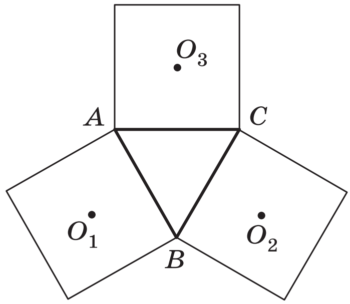


Рис. 46

3. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$; в) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.
4. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A(1;\ 3)$, $B(8;\ 2)$, $C(5;\ -1)$.
5. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна стороне BC, точка M — середина стороны BC, отрезок DM перпендикулярен к диагонали AC. Найдите углы параллелограмма.
6. Две окружности радиуса r с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга в точке M. На первой окружности отмечена точка A, а на второй — точка B так, что хорды AM и BM взаимно перпендикулярны (рис. 45).
Докажите, что: а) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ отрезок AC отображается на отрезок BM; б) $AB = 2r$.
7. На сторонах правильного треугольника построены квадраты (рис. 46). Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами правильного треугольника.

Примерное тематическое планирование учебного материала

Номер параграфа	Содержание материала	Кол-во часов
Глава IX. Векторы		**10**
1	Понятие вектора	2
2	Сложение и вычитание векторов	3
3	Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	3
	Решение задач	1
	Контрольная работа № 1	1
Глава X. Метод координат		**11**
1	Координаты вектора	2
2	Простейшие задачи в координатах	2
3	Уравнения окружности и прямой	4
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 2	1
Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов		**13**
1	Синус, косинус, тангенс, котангенс угла	3
2	Соотношения между сторонами и углами треугольника	4
3	Скалярное произведение векторов	3
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 3	1
Глава XII. Длина окружности и площадь круга		**12**
1	Правильные многоугольники	4
2	Длина окружности и площадь круга	4
	Решение задач	3
	Контрольная работа № 4	1
Глава XIII. Движения		**9**
1	Понятие движения	3
2	Параллельный перенос и поворот	3
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 5	1
Глава XIV. Начальные сведения из стереометрии		**2**
1	Многогранники	1
2	Тела и поверхности вращения	1
Об аксиомах планиметрии		**2**
Повторение. Решение задач. Подготовка к ГИА		**9**
Всего		**68**

Содержание