МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

2-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21
Б94

Пособие содержит примерное планирование учебного материала, методические рекомендации к каждому параграфу, комментарии к упражнениям и контрольные работы.

Учебное издание

Буцко Елена Владимировна
Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10 класс

Углублённый уровень

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Дата подписания к использованию 15.02.2023.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-108886-1

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Геометрия. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. М. Полякова. Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках геометрии в 10 классе.

В разделе **«Примерное поурочное планирование»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы.

Раздел **«Методические рекомендации по организации учебной деятельности образовательных достижений учащихся»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены формируемые и планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока данной темы, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для повторения и для домашней работы указаны из учебника «Геометрия. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия. 10 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др. Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности. Технологические карты являются эффективной помощью учителю при организации учебной деятельности. При этом нужно учитывать, что выполнение объёма заданий на уроке и дома должно корректироваться учителем в зависимости уровня математической подготовки учащихся.

Раздел **«Контрольные работы»** состоит из шести контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа представлена в четырёх вариантах. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний.

В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** показаны методы контроля в учебном процессе.

В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** *предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ.*

В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Примерное поурочное планирование

3 часа в неделю, всего 105 часов

Номер параграфа	Номер урока	Содержание учебного материала	Количество часов
Глава 1. Введение в стереометрию			**11**
1	1, 2	Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии	2
2	3—5	Следствия из аксиом стереометрии	3
3	6—10	Пространственные фигуры. Начальные представления о многогранниках	5
	11	Контрольная работа № 1	1
Глава 2. Параллельность в пространстве			**21**
4	12—14	Взаимное расположение двух прямых в пространстве	3
5	15—19	Параллельность прямой и плоскости	5
6	20—24	Параллельность плоскостей	5
7	25—27	Преобразование фигур в пространстве. Параллельное проектирование	3
8	28—31	Изображения плоских и пространственных фигур	4
	32	Контрольная работа № 2	1
Глава 3. Перпендикулярность в пространстве			**42**
9	33—35	Угол между прямыми в пространстве	3
10	36—40	Перпендикулярность прямой и плоскости	5

11	41—45	Перпендикуляр и наклонная	5
12	46—50	Теорема о трёх перпендикулярах	5
	51	Контрольная работа № 3	1
13	52—56	Угол между прямой и плоскостью	5
14	57—61	Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями	5
15	62—66	Перпендикулярные плоскости	5
16	67—69	Площадь ортогональной проекции многоугольника	3
17	70—72	Многогранный угол. Трёхгранный угол	3
18	73, 74	Геометрическое место точек пространства	2
	75	Контрольная работа № 4	1
		Глава 4. Многогранники	**22**
19	76—80	Призма	5
20	81—84	Параллелепипед	4
21	85—90	Пирамида	6
22	91, 92	Усечённая пирамида	2
23	93—96	Тетраэдр	4
	97	Контрольная работа № 5	1
		Повторение и систематизация учебного материала	**9**
	98—104	Повторение и систематизация учебного материала за курс геометрии	8
	105	Итоговая контрольная работа	1

Методические рекомендации по организации учебной деятельности

Глава 1. Введение в стереометрию

§ 1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать основными понятиями стереометрии, формировать представление об аксиоматическом методе.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать основными понятиями стереометрии, получит представление об аксиоматическом методе.

Основные понятия

Плоскость, прямая пересекает плоскость, плоскости пересекаются, аксиомы A1, A2, A3, A4, A5, A6.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.7	1.4	1.29		1.6, 1.8
Урок 2	1.9, 1.10, 1.11, 1.14, 1.16, 1.17, 1.19	1.12, 1.21, 1.23, 1.24, 1.25	1.30	Самостоятельная работа № 1: № 3, 4	1.13, 1.15, 1.18, 1.20, 1.22

Методические комментарии

Перед началом изучения темы желательно повторить основные принципы, по которым строился курс планиметрии. Учащиеся должны осознанно и неформально понимать необходимость введения основных понятий. Здесь во многом может помочь рисунок 1.1 параграфа. Однако обсуждение того, какие именно понятия должны войти в список основных понятий, выходит за рамки школьного курса геометрии.

Для обозначения принадлежности точек и прямых плоскости в учебнике используется теоретико-множественная символика: точка, принадлежащая плоскости, — это элемент множества точек плоскости; множество точек прямой, принадлежащей плоскости, — это подмножество точек плоскости. Такой подход позволяет ввести соответствующие обозначения, делающие оформление доказательств теорем и решений задач более кратким и компактным.

Понятие аксиомы не является новым для учащихся. Желательно, чтобы учащиеся назвали ряд аксиом, знакомых им из курса планиметрии. Необходимость введения аксиом учащиеся тоже могут разъяснить, исходя из предыдущего опыта.

Понятно, что учебник не ставит цель познакомить учащихся с полным списком аксиом стереометрии. Основываясь на определённых традициях, сложившихся в школьной геометрии, в параграфе приводятся формулировки четырёх аксиом. Причём этот список аксиом не является независимым. Так, аксиому А4 можно вывести из других аксиом. Такой выбор обусловлен удобством изложения. Более подробно об аксиомах и аксиоматиках учащиеся смогут прочитать в рассказе «Об аксиомах» на с. 32 учебника.

Следует обратить внимание учащихся на комментарии к аксиомам. Они разъясняют их содержание.

Задача, разобранная в параграфе, уточняет содержание аксиомы А4.

Комментарии к упражнениям

№ 1.14. Найдите точку пересечения прямых AB и m.

№ 1.19. Воспользуйтесь методом от противного.

№ 1.22. Точки A, K и E лежат на прямой пересечения плоскостей ABC и α.

№ 1.25. Пусть не все точки лежат в одной плоскости. Тогда для трёх данных точек A, B и C найдётся такая точка D, которая не принадлежит плоскости ABC. Но по условию задачи указанные четыре точки должны лежать в одной плоскости.

№ 1.28. Рассмотрев частные случаи, следует высказать гипотезу, а затем доказать её методом математической индукции.

§ 2. Следствия из аксиом стереометрии

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение доказывать и применять следствия из аксиом стереометрии.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится доказывать и применять следствия из аксиом стереометрии.

Основные понятия

Следствия из аксиом стереометрии, способы однозначного задания плоскости.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.7	2.6			2.5, 2.8
Урок 2	2.9, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.17		2.25		2.15, 2.18
Урок 3	2.16, 2.19, 2.21, 2.22	2.24	2.26	Самостоятельная работа № 2: № 4, 7	2.20, 2.23

Методические комментарии

Следствия из аксиом стереометрии, как и аксиомы, являются наглядно очевидными фактами. Однако их можно доказать с помощью аксиом стереометрии.

Следует обратить внимание, что формулировки теорем 2.1 и 2.2 состоят из двух частей: существование плоскости и её единственность. Поэтому доказательства этих теорем состоят тоже из двух частей. Единственность плоскости, обладающей указанными свойствами, доказывается методом от противного.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно разъяснить учащимся, что некоторые аксиомы стереометрии и следствия из них взаимно заменяемые.

В этом параграфе сообщается очень важный факт об элементах, задающих плоскость. Здесь становится актуальным разъяснение учащимся, что означает действие провести плоскость. Эта операция принципиально отличается от аналогичной задачи планиметрии. Когда в планиметрии проводят прямую, то действительно строится модель прямой в виде отрезка. В стереометрии построить модель плоскости нельзя. Её лишь можно вообразить. Поэтому процесс построения плоскости заменяется указанием элементов, задающих плоскость.

При рассмотрении задач 2.14, 2.15 учитель должен обратить внимание учащихся на то, как важно корректно изображать стереометрические фигуры на плоскостных рисунках. Здесь могут помочь иллюстрации Мориса Эшера, предоставленные с помощью интерактивных средств обучения.

По мере изучения стереометрии следует обращать внимание на то, каким образом элементы пространственных фигур трансформируются при их изображении на плоскости. Так, при изучении данного параграфа можно привести пример того, что окружность может «потерять» свою форму и стать эллипсом либо отрезком.

Комментарии к упражнениям

№ 2.9, 2.10. Эти задачи, как правило, не вызывают сложностей. Вместе с тем они учат важному элементу стереометрических построений: построению на чертеже точки пересечения данной прямой с данной плоскостью. Этот навык незаменим при построении сечений многогранников.

№ 2.14. Точки E, D и F должны лежать на одной прямой.

№ 2.15. Все рассматриваемые точки и прямые лежат в одной плоскости, следовательно, точки A, D и M должны лежать на одной прямой.

№ 2.17. Если данные прямые не пересекаются в одной точке, то количество точек их пересечения равно трём. Тогда эти прямые будут лежать в одной плоскости, что противоречит условию.

№ 2.19. Найдите точку пересечения прямой MN с прямой пересечения плоскостей α и β.

№ 2.22. Докажите, что точка A является общей для трёх данных плоскостей.

№ 2.23. Докажите, что точка пересечения прямых AB и CD является общей для плоскостей ABC, XAB и XCD.

§ 3. Пространственные фигуры. Начальные представления о многогранниках

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение распознавать и изображать многогранники и исследовать чертежи и их частные виды: пирамиду и призму; строить сечения многогранников плоскостями, заданными своими элементами.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать и изображать многогранники и их частные виды: пирамиду и призму; строить сечения многогранников плоскостями, заданными своими элементами.

Основные понятия

Многогранник, поверхность многогранника, грани многогранника, рёбра многогранника, вершины многогранника, пирамида, боковые грани пирамиды, основание пирамиды, боковые рёбра пирамиды, рёбра основания пирамиды, тетраэдр, призма, основания призмы, боковые грани призмы, боковые рёбра призмы, прямоугольный параллелепипед, сечение многогранника плоскостью, секущая плоскость.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	3.1, 3.2, 3.3, 3.5				3.4, 3.6
Урок 2	3.7, 3.9, 3.12, 3.14, 3.16, 3.17		3.42		3.8, 3.10, 3.11, 3.13, 3.15

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	3.19, 3.21, 3.22, 3.24	3.26, 3.27			3.18, 3.20, 3.23
Урок 4	3.28, 3.30, 3.31, 3.32		3.43		3.29
Урок 5	3.33, 3.35, 3.36, 3.37, 3.39	3.40, 3.41		Самостоятельная работа № 3: № 5, 6, 8	3.34, 3.38

Методические комментарии

Изучать плоскости и прямые в пространстве, их взаимное расположение достаточно сложно, если не привязывать эти фигуры к известным учащимся многогранникам. При таком подходе изучаемый материал становится более содержательным и наглядным. Поэтому уже в § 3 учебника, на начальном этапе изучение курса стереометрии формируется представление о многогранниках.

В этом параграфе материал излагается описательно, во многом основываясь на ранее полученных представлениях о многогранниках. Здесь не надо требовать от учащихся строгих определений призмы и пирамиды. Эти определения будут даны в главе 4. Важно, чтобы учащиеся могли различать многогранники среди других стереометрических тел, описывать призму и пирамиду. Особое внимание следует обратить на элементы этих двух геометрических фигур.

Задача 1 параграфа обозначена как ключевая. Именно навыки, приобретённые при её решении, позволят учащимся в дальнейшем строить сечения многогранников. При необходимости учителю достаточно легко придумать целый ряд аналогичных задач.

Построение сечений многогранников — одна из фундаментальных задач стереометрии. Этот тип задач, как никакой другой, очень хорошо развивает пространственное воображение. Поэтому в учебнике так много внимания уделяется задачам на построение сечений многогранников. В этом параграфе построение сечения основано лишь на элементах, задающих плоскость. Эти элементы были перечислены в § 2.

В параграфе разобраны два типа задач на построение сечений многогранников: построение сечения по трём точкам и по прямой и точке вне её. Следует подробно разобрать с учащимися эти задачи. Текст решения можно рассматривать как один из образцов оформления решения задач подобного рода. В зависимости от уровня математической подготовки класса оформление решения задач на построение сечений можно сделать более формальным, используя теоретико-множественный язык, в частности операцию пересечения множеств.

Задачу 6 можно фактически рассматривать как доказательство теоремы Дезарга для случая, когда на конфигурации отсутствуют несобственные точки и прямые. Решение этой задачи формирует важный и красивый приём решения планиметрических задач с помощью стереометрических методов. Этот приём нередко называют «выходом в пространство». С его применением учащиеся ещё не раз будут встречаться в курсе стереометрии.

Комментарии к упражнениям

№ 3.24. Найдите точки пересечения прямых AM и EK, а также точку пересечения прямых BM и FK. Полученные точки пересечения определяют искомую прямую.
№ 3.25. Найдите точки пересечения прямых CE и BF, а также точку пересечения прямых AC и BD. Полученные точки пересечения определяют искомую прямую.
№ 3.30. При решении этой задачи важно проанализировать, сколько сторон может иметь многоугольник, полученный в результате сечения куба плоскостью. Например, рассуждения могут быть такими: поскольку в кубе шесть граней, то количество сторон многоугольника не может превышать шести и т. д.
№ 3.31. Пусть прямые MF и MK пересекают рёбра AB и CD в точках F_1 и K_1 соответственно. Тогда точка пересечения прямых FK и F_1K_1 принадлежит плоскости основания пирамиды.
№ 3.33. Постройте прямые пересечения плоскостей ABP и ADM, а также плоскостей ADM и BDN.
№ 3.36—3.38. Воспользуйтесь идеей решения задачи 3.31, где описывается, как найти точку пересечения прямой и плоскости основания. Фактически при решении этих задач используется идея центрального проектирования.
№ 3.40—3.41. Воспользуйтесь идеей решения задачи 5 параграфа.

Контрольная работа № 1

Глава 2. Параллельность в пространстве

§ 4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями параллельные прямые, скрещивающиеся прямые, классифицировать прямые в зависимости от их расположения в пространстве; доказывать и применять свойства параллельных прямых в пространстве и признак скрещивающихся прямых.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями параллельных прямых, скрещивающихся прямых, классифицировать прямые в зависимости от их расположения в пространстве; доказывать и применять свойства параллельных прямых в пространстве и признак скрещивающихся прямых.

Основные понятия

Параллельные прямые, скрещивающиеся прямые, взаимное расположение прямых в пространстве, параллельные отрезки, скрещивающиеся отрезки, свойства параллельных прямых, признак скрещивающихся прямых.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9				4.4, 4.7, 4.10
Урок 2	4.11, 4.12, 4.14, 4.16	4.18	4.35		4.13, 4.15, 4.17

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	4.19, 4.20, 4.21, 4.23, 4.25	4.26, 4.28, 4.30, 4.32, 4.34	4.36	Самостоятельная работа № 4: № 2, 3, 5	4.22, 4.24, 4.27

Методические комментарии

Важно, чтобы учащиеся поняли, что определение параллельных прямых, данное в планиметрии, в стереометрии требует уточнения.

В учебнике принята концепция, при которой совпадающие прямые не считаются параллельными. Это связано с тем, что такой подход менее формальный, а значит, более понятный для ученика. Однако этот подход может требовать при решении задач рассмотрения отдельно случаев, когда прямые параллельны и когда они совпадают.

Определение параллельных прямых даёт ещё один способ, с помощью которого можно задать плоскость.

В определении скрещивающихся прямых указано, что прямые не должны лежать в одной плоскости. Это означает, что не существует плоскости, в которой лежат эти две прямые.

Схема, изображённая на рисунке 4.4, рассматривает все способы расположения двух прямых в пространстве.

Формулировка теоремы 4.2 дословно повторяет аксиому параллельных прямых, известную учащимся из планиметрии. Понять, что утверждения планиметрии в стереометрии могут приобретать другой смысл, довольно сложно. Это понимание не следует требовать от каждого ученика.

Комментарии к упражнениям

№ 4.19. Эта задача доказывает то, что отношение скрещиваемости двух прямых не обладает свойством транзитивности.

№ 4.21. Если предположить, что такие прямые построить можно, то данные прямые окажутся в одной плоскости.

№ 4.30. Пусть плоскость, проходящая через прямую BD и точку M, пересекает ребро AC в точке K. В плоскости DKB через точку M проведём прямую, параллельную прямой BD.

№ 4.33. Постройте прямую пересечения плоскостей NCK и NMC_1.
№ 4.34. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, точка O_1 — её проекция на плоскость α. Тогда отрезок OO_1 является средней линией трапеции B_1BDD_1 и средней линией треугольника ACC_1.

§ 5. Параллельность прямой и плоскости

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение владеть понятием прямой, параллельной плоскости; доказывать и применять признак параллельности прямой и плоскости и достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием прямой, параллельной плоскости; доказывать и применять признак параллельности прямой и плоскости и достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

Основные понятия

Прямая, параллельная плоскость; признак параллельности прямой и плоскости; отрезок, параллельный плоскости; достаточные условия параллельности двух прямых в пространстве.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.6				5.3, 5.7
Урок 2	5.8, 5.9, 5.11, 5.13	5.15, 5.17	5.55		5.10, 5.12, 5.14

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	5.19, 5.21, 5.23, 5.25, 5.28	5.26, 5.29	5.56		5.20, 5.22, 5.24
Урок 4	5.30, 5.32, 5.36, 5.38	5.34, 5.39			5.31, 5.33, 5.37
Урок 5	5.41, 5.43, 5.45, 5.46	5.48, 5.49, 5.51, 5.53		Самостоятельная работа № 5: № 3, 4, 5	5.42, 5.44, 5.47

Методические комментарии

В учебнике принята концепция, при которой прямая, принадлежащая плоскости, не считается параллельной этой плоскости. Руководствуясь чисто формальными соображениями, такое дополнение следовало бы внести. Однако для учащихся это уточнение было бы непонятным. Также такой подход является продолжением принятой концепции определения параллельных прямых: совпадающие прямые не считаются параллельными. Вместе с тем принятое определение вынуждает быть более аккуратным в формулировках. Например, в формулировке теоремы 5.3 уточнение «по прямой, отличной от двух данных» является обязательным.

Важно обратить внимание учащихся на структуру изучения нового материала. Вначале вводится определение нового понятия. Далее доказывается теорема-признак, позволяющая определить, находятся ли плоскость и прямая в отношении параллельности. Далее рассматриваются свойства прямой, параллельной плоскости. Эта же структура изложения материала будет использоваться в большинстве тем этого учебника, где будет вводиться новое понятие.

В качестве упражнения учащимся можно предложить и другой способ доказательства теоремы 5.1: воспользоваться тем, что параллельные прямые определяют плоскость и все общие точки двух рассматриваемых плоскостей принадлежат прямой b.

Один из способов доказательства следствия из теоремы 5.2 может выглядеть так. Выбрать в данной плоскости произвольную точку. Через эту точку и данную прямую провести плоскость. По теореме 5.2 проведённая плоскость будет пересекать данную плоскость по прямой, параллельной данной прямой.

Свойства прямой, параллельной плоскости, позволяют расширить арсенал приёмов построения сечений многогранников. Это демонстрируют задачи 3 и 4 параграфа.

Комментарии к упражнениям

№ 5.17. 1) Поскольку прямая AD параллельна плоскости BB_1C_1, то на основании теоремы 5.2 достаточно через точку M провести прямую, параллельную прямой AD.

№ 5.35. Найдите точку пересечения прямых AF и A_1E.

№ 5.45. Через точки M, N и K в соответствующих гранях призмы проведите прямые MM_1, NN_1 и KK_1, параллельные боковым рёбрам призмы. Точки M_1, N_1 и K_1 принадлежат рёбрам основания призмы. Далее следует найти точку пересечения прямых NK и N_1K_1 и точку пересечения прямых NM и N_1M_1. Полученные точки пересечения принадлежат прямой пересечения секущей плоскости с плоскостью основания призмы.

№ 5.46. Через точки N и K проведите прямые, параллельные рёбрам куба. Далее постройте точки пересечения прямых NM, NK и KM с плоскостью ABC.

№ 5.50. Плоскость CMN пересекает плоскость ABC по прямой, параллельной прямой AE.

§ 6. Параллельность плоскостей

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение владеть понятием параллельности плоскостей, доказывать и применять признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием параллельности плоскостей, доказывать и применять признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей.

Основные понятия Параллельные плоскости, признак параллельности плоскостей, параллельные многоугольники, свойства параллельных плоскостей.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	6.1, 6.2, 6.3, 6.5				6.4, 6.6
Урок 2	6.7, 6.8, 6.10, 6.12, 6.16	6.14	6.46		6.9, 6.11, 6.13, 6.17
Урок 3	6.18, 6.20, 6.24, 6.25	6.22, 6.26			6.19, 6.21, 6.23
Урок 4	6.27, 6.29, 6.31, 6.33	6.34	6.47		6.28, 6.30, 6.32
Урок 5	6.36, 6.38, 6.40, 6.42	6.44		Самостоятельная работа № 6: № 7, 8	6.37, 6.39, 6.41, 6.43

Методические комментарии

Определение параллельных плоскостей не предоставляет эффективного механизма проверки этого свойства. Компенсирует этот недостаток признак параллельности двух плоскостей.

Важно обратить внимание на целый ряд нюансов в формулировке признака параллельности двух плоскостей. Если снять условие пересечения прямых, то легко нарисовать конструкцию, при которой две прямые одной плоскости будут параллельны двум прямым другой плоскости, но при этом плоскости будут пересекающимися. Нередко признак параллельности плоскостей перегружают дополнительным условием: требованием, чтобы две прямые другой плоскости тоже были пересекающимися.

Теорема 6.2 во многом похожа на соответствующее свойство параллельных прямых. Поэтому учащимся будет несложно понять, что эта теорема состоит из двух частей.

Первое следствие из теоремы 6.2 наглядно и очевидно. Его доказательство является хорошим упражнением для формирования необходимости в формальных доказательствах. Второе следствие облегчает решение целого ряда задач.

Комментарии к упражнениям

№ 6.20. Пусть прямые C_1M и B_1D_1 пересекаются в точке K. Через точку K следует провести прямую, параллельную ребру DD_1.
№ 6.22. Через точку K в плоскости BDC проведите прямую, параллельную ребру BD. Пусть эта прямая пересекает ребро DC в точке M. Через точку M в плоскости ADC проведите прямую, параллельную ребру AD.
№ 6.33. Пусть прямые EF и BC пересекаются в точке X. Соедините точки X и K. Через точку E проведите прямую, параллельную прямой KX.
№ 6.40. На продолжении ребра BC за точку B отложите точку K так, чтобы $BK = BC$. Тогда плоскость KB_1D параллельна прямой AD_1.

§ 7. Преобразование фигур в пространстве. Параллельное проектирование

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать представление о преобразовании фигур в пространстве, формировать умение выполнять параллельную проекцию фигуры на плоскость, доказывать и применять свойства параллельного проектирования. ***Личностные:*** формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся получит представление о преобразовании фигур в пространстве, научится выполнять параллельную проекцию фигуры на плоскость, доказывать и применять свойства параллельного проектирования.
Основные понятия	Преобразование фигуры, образ фигуры, прообраз фигуры, параллельный перенос, симметрия относительно точки,

центральная симметрия, движение фигуры, фигура, симметричная относительно точки, центр симметрии фигуры, равные фигуры, преобразование подобия фигуры, подобные фигуры, параллельное проектирование, параллельная проекция фигуры на плоскость в направлении прямой, изображение проекции фигуры на плоскость в направлении прямой, свойства параллельного проектирования.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	7.1, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8		7.23		7.2, 7.9
Урок 2	7.10, 7.11, 7.13, 7.15		7.24		7.12, 7.14, 7.16
Урок 3	7.17, 7.18, 7.20	7.21		Самостоятельная работа № 7: № 3, 7	7.19, 7.22

Методические комментарии

Введение понятия преобразования геометрических фигур в пространстве полностью построено по аналогии с преобразованием фигур в планиметрии. В учебнике принята концепция, при которой не рассматривается преобразование всего пространства в целом, а рассматривается лишь преобразование фигуры как подмножества точек пространства. Если рассматривать преобразование как функцию, то областью определения её будет являться фигура. Поэтому в учебнике говорится о движении фигуры, о гомотетии фигуры, о преобразовании подобия фигуры и т. п.

Рисунки, связанные с преобразованием геометрических фигур в пространстве, довольно громоздкие. Поэтому при разъяснении нового материала желательно более активно пользоваться готовыми рисунками из учебника либо заранее подготовить комплект крупномасштабных изображений для рассмотрения с помощью интерактивных средств обучения.

Многие определения частных видов преобразований практически дословно повторяют аналогичные определения из планиметрии.

Поскольку учащиеся довольно часто встречаются с изображением пространственных объектов на плоскости, то определение преобразования параллельного проектирования является мотивированным.

В параграфе рассматриваются теоремы, описывающие три основных свойства параллельного проектирования. Учащиеся должны в первую очередь усвоить то, что эти теоремы описывают инварианты преобразования. Именно они и составляют свойства параллельного проектирования.

В задаче 3 параграфа описывается эффективный приём, основанный на применении параллельного проектирования. Он заключается в том, что для данной конфигурации выбираются выгодные плоскость и направление проектирования. В полученной фигуре соотношение между линейными элементами равно искомому.

Комментарии к упражнениям

№ 7.17. Если направление параллельного проектирования параллельно одной из данных скрещивающихся прямых, то искомой фигурой будет прямая и точка вне её.
№ 7.18. Рассмотрите диагонали двух противолежащих граней куба. Проведите в них по одной диагонали, лежащей на скрещивающихся прямых.
№ 7.22. Проекцией плоскости ABM на плоскость AA_1D_1 в направлении прямой BA является прямая AN.

§ 8. Изображения плоских и пространственных фигур

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение изображать основные типы треугольников и четырёхугольников, а также призмы и пирамиды. ***Личностные:*** формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.
Планируемые результаты	Учащийся научится изображать основные типы треугольников и четырёхугольников, а также призмы и пирамиды.

Основные понятия	Изображения плоских и пространственных фигур, эллипс, центр эллипса.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	8.1, 8.3, 8.4	8.6			8.2, 8.5
Урок 2	8.7, 8.8, 8.9, 8.12, 8.14	8.11, 8.16	8.39		8.10, 8.13, 8.15
Урок 3	8.18, 8.20, 8.22, 8.23	8.19, 8.25	8.40		8.21, 8.24
Урок 4	8.26, 8.28, 8.30, 8.31, 8.34	8.32, 8.33, 8.35, 8.36, 8.37		Самостоятельная работа № 8: № 5, 7	8.27, 8.29

Методические комментарии

Важно разъяснить учащимся, что, изображая пространственные фигуры на плоскости, мы добиваемся схожести с оригиналом за счёт того, что используем инварианты этого преобразования, т. е. такие свойства, которые сохраняются при параллельном проектировании. Эти свойства выражены в трёх теоремах. Важно подчеркнуть, что параллельное проектирование не сохраняет величины углов и длины отрезков. На первых этапах эти факты могут вызвать определённые трудности в восприятии изображения фигуры. В частности, для учащихся может оказаться непривычным, что изображением равностороннего треугольника служит произвольный треугольник. Как показывает опыт, такие трудности являются временными.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно предложить другую трактовку задачи 2 параграфа, а именно: если провести все диагонали правильного пятиугольника, то образуется, в свою очередь, правильный пятиугольник, т. е. пятиугольник, подобный данному. Возникает естественный вопрос: существует ли пятиугольник, отличный от правильного, у которого точки пересечения диагоналей являются вершинами пятиугольника, подобного данному? В основе поиска ответа на этот вопрос лежит такой инвариант параллельного проектирования, как параллельная проекция, которая сохраняет отношение подобия фигур, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Задача 3 параграфа иллюстрирует такую идею: доказывать целый ряд свойств для правильного треугольника, как правило, гораздо легче, чем для треугольников общего вида. Если спроектировать данный треугольник в правильный, то при условии сохранения искомой величины задача становится более доступной.

Задача 5 параграфа продолжает знакомить учащихся с приёмом «выхода в пространство» при решении планиметрических задач.

Комментарии к упражнениям

№ 8.12. Через середины сторон A_1B_1 и C_1B_1 проведите прямые, соответственно параллельные прямым A_1D_1 и C_1E_1.

№ 8.14. Треугольник $A_1B_1D_1$ является изображением равностороннего треугольника ABC. Проведите медиану B_1M_1. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма следует провести прямую, параллельную B_1M_1.

№ 8.21. Постройте диаметр, перпендикулярный диаметру, проходящему через точку A_1 (см. задачу 7.33). Искомая касательная параллельна построенному диаметру.

№ 8.25. Пусть отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AK : KC = 2 : 1$.

№ 8.29. Для квадрата $ABCD$ равенство $BF = AK$ означает, что прямые BF и AK перпендикулярны. Тем самым эта задача свелась к задаче 8.28.

№ 8.31. Через точку O_1 проведём прямые, параллельные основаниям и боковой стороне A_1B_1 трапеции. Пусть M и K — точки пересечения с основаниями B_1C_1 и A_1D_1 трапеции соответственно, а точка P — с боковой стороной A_1B_1. Это точки касания вписанной окружности с тремя сторонами трапеции. Точка касания окружности со стороной C_1D_1 делит эту сторону в отношении $MC_1 : KD_1$.

№ 8.33. Отрезок FO_1 параллелен боковому ребру призмы и равен его половине.

Контрольная работа № 2

Глава 3. Перпендикулярность в пространстве

§ 9. Угол между прямыми в пространстве

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** владеть понятиями угла между двумя пересекающимися прямыми, угла между двумя параллельными прямыми, угла между двумя скрещивающимися прямыми, применять эти понятия к решению задач, распознавать перпендикулярные прямые. ***Личностные:*** формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение сравнивать, анализировать, строить логическое рассуждение и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся овладеет понятиями угла между двумя пересекающимися прямыми, угла между двумя параллельными прямыми, угла между двумя скрещивающимися прямыми, научится применять эти понятия к решению задач, распознавать перпендикулярные прямые.
Основные понятия	Угол между двумя пересекающимися прямыми, угол между двумя параллельными прямыми, угол между двумя скрещивающимися прямыми, перпендикулярные прямые, перпендикулярные отрезки.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	9.1, 9.2, 9.4		9.23		9.3, 9.5
Урок 2	9.6, 9.8, 9.10, 9.12	9.14	9.24		9.7, 9.9, 9.11, 9.13
Урок 3	9.15, 9.16, 9.19, 9.22	9.21		Самостоятельная работа № 9: № 8, 9, 10	9.17, 9.18, 9.20

Методические комментарии

Распространённой ошибкой является считать, что угол между двумя пересекающимися прямыми — это величина острого угла, образованного этими прямыми. Следует разъяснить учащимся, что для случая, когда прямые перпендикулярны, острые углы не образуются.

Понятие угла между скрещивающимися прямыми сводится к понятию угла между пересекающимися прямыми. Поскольку для построения искомого угла в качестве вершины выбирается произвольная точка пространства, то возникает вопрос о независимости величины угла от выбора точки в пространстве. Ответ на этот вопрос даёт теорема 9.1. При доказательстве этой теоремы учащиеся должны понимать, почему следует рассмотреть отдельно случай расположения прямых в одной плоскости.

После введения определения перпендикулярных прямых, относящегося не только к пересекающимся прямым, но и к скрещивающимся, важно, чтобы учащиеся среди окружающих предметов могли находить модели перпендикулярных прямых и отрезков.

Задача, разобранная в параграфе, даёт общий метод поиска угла между прямыми в пространстве, определяемыми какими-нибудь рёбрами многогранника.

Комментарии к упражнениям

№ 9.10. Докажите, что треугольники AKB и DMC равнобедренные.

№ 9.13. Искомый угол равен углу между диагоналями прямоугольника AA_1D_1D.

№ 9.15. Точки E, F, M и K являются вершинами параллелограмма. Искомый угол равен углу MKE.

№ 9.16. Пусть точка K — середина ребра DC. Тогда треугольник MKN равнобедренный. Угол при его вершине может быть равен $30°$ или $150°$.

№ 9.18. Пусть точка M — середина ребра AB. Рассмотрите треугольник MKC_1.

№ 9.20. Пусть точка K — середина ребра BB_1. Тогда искомый угол равен величине угла NEM. Пусть точка P — середина ребра A_1C_1, а точка F — середина отрезка KP. Поскольку $MN = FE$, то четырёхугольник $FNEM$ — прямоугольник.

§ 10. Перпендикулярность прямой и плоскости

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием прямой, перпендикулярной плоскости; доказывать и применять признак и свойства прямой, перпендикулярной плоскости.

Личностные: формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием прямой, перпендикулярной плоскости; доказывать и применять признак и свойства прямой, перпендикулярной плоскости.

Основные понятия

Прямая, перпендикулярная плоскости; отрезок, перпендикулярный плоскости; признаки перпендикулярности прямой и плоскости; признак параллельности двух прямых; точки, симметричные относительно плоскости; симметрия относительно плоскости; фигуры, симметричные относительно плоскости; зеркальная симметрия.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.6, 10.7, 10.8				10.5, 10.9
Урок 2	10.10, 10.12, 10.14	10.16	10.53		10.11, 10.13, 10.15
Урок 3	10.18, 10.19, 10.20, 10.24, 10.26, 10.28	10.21, 10.23, 10.25			10.22, 10.27, 10.29

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 4	10.30, 10.31, 10.34, 10.35	10.32, 10.37	10.54		10.33, 10.36, 10.38
Урок 5	10.39, 10.41, 10.44, 10.46	10.42, 10.48, 10.49, 10.51		Самостоя-тельная работа № 10: № 5, 8	10.40, 10.45, 10.47

Методические комментарии

Определение прямой, перпендикулярной плоскости, не предоставляет эффективного механизма проверки этого свойства. Компенсирует этот недостаток признак параллельности двух плоскостей.

Формулируя признак перпендикулярности прямой и плоскости, важно не забывать условие пересечения двух прямых, лежащих в этой плоскости. Целесообразно показать учащимся контрпример, когда прямая, будучи перпендикулярной двум параллельным прямым плоскости, не является перпендикулярной этой плоскости.

Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости несложное, но многоходовое. Поэтому важно разделить доказательство на несколько этапов. Это позволит учащимся легче освоить доказательство.

Следует обратить внимание учащихся, что доказательство теоремы 10.2 основано на определении прямой, перпендикулярной плоскости.

Теорему 10.3 можно рассматривать как один из признаков параллельности двух прямых в пространстве.

Понятие перпендикулярности прямой и плоскости позволяет ввести преобразование симметрии относительно плоскости. Оно во многом аналогично преобразованию симметрии относительно прямой.

Комментарии к упражнениям

№ 10.24. Прямая a перпендикулярна прямым DF и DE, следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости DEF.

№ 10.30. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, отрезок OO_1 — перпендикуляр, опущенный от точки O на плоскость α. Этот отрезок является средней линией трапеций AA_1C_1C и BB_1D_1D.
№ 10.40. Пусть точка M — середина ребра BC. Тогда прямая CB перпендикулярна плоскости AMD. Через точку K проведите прямую KE параллельно прямой BC (точка E принадлежит ребру AC). Через точку E проведите прямую EP, перпендикулярную прямой AD (точка P принадлежит ребру AD). Тогда треугольник EPK — искомое сечение.
№ 10.48. Пусть точка K — середина отрезка CC_1. Рассмотрите треугольник AB_1K и найдите косинус угла AB_1K.
№ 10.50. Пусть точка K — середина отрезка AN. Тогда искомый угол равен углу DMK.

§ 11. Перпендикуляр и наклонная

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями перпендикуляра и наклонной, расстояния от точки до плоскости и расстояния между двумя параллельными прямыми. ***Личностные:*** формировать умение формулировать собственное мнение. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями перпендикуляра и наклонной, расстояния от точки до плоскости и расстояния между двумя параллельными прямыми.
Основные понятия	Ортогональная проекция, перпендикуляр, основание перпендикуляра, наклонная, основание наклонной, проекция наклонной, расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до параллельной ей плоскости, расстояние между двумя параллельными плоскостями, расстояние между скрещивающимися прямыми, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	11.1, 11.2, 11.3, 11.5				11.4, 11.6
Урок 2	11.7, 11.9, 11.10, 11.11, 11.12, 11.13, 11.15		11.53		11.8, 11.14
Урок 3	11.16, 11.18, 11.20, 11.24	11.22, 11.26, 11.28			11.17, 11.19, 11.21, 11.25
Урок 4	11.30, 11.32, 11.34, 11.36	11.37, 11.39	11.54		11.31, 11.33, 11.35
Урок 5	11.41, 11.43, 11.44, 11.46	11.48, 11.50, 11.52		Самостоятельная работа № 11: № 6, 8, 9	11.42, 11.45, 11.47

Методические комментарии

В начале параграфа вводится достаточно много терминов. Для их успешного запоминания целесообразно иллюстрировать новые понятия рисунками.

Понятие расстояния между двумя фигурами достаточно сложное, если о нём говорить в общем виде. Это связано с многими факторами, в частности с тем, что не для любой пары фигур существует расстояние между ними. Следовательно, строить это понятие целесообразно для частных случаев. Поэтому в параграфе вводятся такие понятия, как расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой, параллельной плоскости, и расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Особое внимание следует обратить на понятие расстояния между скрещивающимися прямыми. В отличие от расстояния между параллельными прямыми расстояние между скрещивающимися прямыми определяется длиной единственного отрезка — их общего перпендикуляра. Поиск длины этого отрезка связан с его построением. Поэтому нередко в задачах на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми пользуются специальными методами, позволяющими не строить общий перпендикуляр. Например, искать расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные скрещивающиеся прямые. При таком подходе существует бесконечно много отрезков, длины которых определяют искомое расстояние.

Желательно выделить следующие приёмы поиска расстояния между скрещивающимися прямыми:

1) построение общего перпендикуляра и нахождение его длины;

2) проведение через одну из скрещивающихся прямых плоскости, параллельной другой прямой, и поиск расстояния от прямой, параллельной плоскости;

3) проведение через данные скрещивающиеся прямые двух параллельных плоскостей и поиск расстояния между параллельными плоскостями;

4) проекция скрещивающихся прямых на плоскость, перпендикулярную одной из них, и поиск расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых, до проекции другой прямой на указанную плоскость.

Комментарии к упражнениям

№ 11.30. В этой задаче удобно построить общий перпендикуляр скрещивающихся прямых. Для этого надо провести отрезок A_1C_1.

№ 11.41. Пусть диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Опустим перпендикуляр OK на прямую B_1D. Осталось доказать, что отрезок OK — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и B_1D.

№ 11.45. Проведём перпендикуляр KE к плоскости β. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки N до прямой FE.

№ 11.47. Спроектируйте прямые DA_1 и MD_1 на плоскость AD_1C_1.

№ 11.49. Спроектируйте прямые BC и SK на плоскость SAC.

№ 11.51. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой CN. Из точки M опустите перпендикуляр ME на эту прямую. Из точки C опустите перпендикуляр CK на прямую DE. Длина отрезка CK — искомая величина.

§ 12. Теорема о трёх перпендикулярах

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказывать и применять теорему о трёх перпендикулярах.

	Личностные: развивать познавательный интерес к математике.
	Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять теорему о трёх перпендикулярах.
Основное понятие	Теорема о трёх перпендикулярах.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	12.1, 12.2, 12.6, 12.8				12.3, 12.7, 12.9
Урок 2	12.4, 12.5, 12.10, 12.12, 12.14				12.11, 12.13, 12.15
Урок 3	12.16, 12.17, 12.18, 12.20		12.36		12.19, 12.21
Урок 4	12.22, 12.23, 12.25, 12.27		12.37		12.24, 12.28
Урок 5	12.29, 12.31, 12.32, 12.33	12.35		Самостоятельная работа № 12: № 5, 7, 9	12.30, 12.34

Методические комментарии

Теорема о трёх перпендикулярах достаточно наглядна, её доказательство несложно. Однако для того, чтобы учащиеся успешно применяли её для решения задач, у них должно быть хорошо развито умение находить по условию задачи перпендикулярные прямые. При этом надо обратить внимание на то, что в стереометрии перпендикулярные прямые могут не пересекаться (т. е. быть скрещивающимися). Отработке навыков поиска перпендикулярных прямых в стереометрических фигурах и их комбинациях следует уделить достаточно внимания.

Теорема о трёх перпендикулярах является одной из центральных теорем курса стереометрии 10 класса. Она доступна для восприятия, достаточно эффективна и при этом описывает свойства часто встречающихся конфигураций.

Учащиеся должны понять, что теорема о трёх перпендикулярах состоит из двух взаимно обратных теорем. В зависимости от уровня математической подготовки класса эту теорему можно сформулировать с помощью конструкции «тогда и только тогда» или «необходимо и достаточно».

Свойство, сформулированное в ключевой задаче 1, часто применяется при решении других задач. Обратим внимание на распространённую ошибку при формулировке этого свойства: забывать указывать, что проекция точки M на плоскость многоугольника принадлежит этому многоугольнику. Например, для треугольника проекцией точки, равноудалённой от прямых, содержащих стороны, может являться не только центр вписанной окружности, но также и центр вневписанной окружности.

Ключевые задачи 2 и 3 будут нередко применяться при решении задач на многогранники.

Комментарии к упражнениям

№ 12.22. Рассмотрите проекцию прямой A_1C на плоскость $A_1B_1C_1$.
№ 12.29. Причиной двух ответов является то, что проекция точки M на плоскость ABC может принадлежать треугольнику ABC, а может и не принадлежать.
№ 12.34. Пусть проекцией точки P на плоскость ABC является точка K. Тогда точка K принадлежит медиане треугольника ABC, проведённой из вершины B, а также прямая CK перпендикулярна этой медиане.

Контрольная работа № 3

§ 13. Угол между прямой и плоскостью

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием угла между прямой и плоскостью, использовать это понятие при решении задач.

	Личностные: формировать независимость суждений. ***Метапредметные:*** формировать умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием угла между прямой и плоскостью, использовать это понятие при решении задач.
Основные понятия	Угол между прямой и плоскостью, угол между отрезком и плоскостью.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	13.1, 13.2, 13.3, 13.7				13.4, 13.8
Урок 2	13.5, 13.6, 13.9, 13.11, 13.13, 13.17	13.15			13.10, 13.12, 13.14, 13.18
Урок 3	13.19, 13.21, 13.23	13.25			13.20, 13.22, 13.24
Урок 4	13.27, 13.29, 13.31, 13.33				13.28, 13.30, 13.32
Урок 5	13.34, 13.36, 13.38, 13.40	13.41		Самостоятельная работа № 13: № 4, 6, 9	13.35, 13.37, 13.39

Методические комментарии

Следует обратить внимание учащихся на то, что определение угла между прямой и плоскостью состоит из четырёх (!) частей: прямая параллельна плоскости, прямая принадлежит плоскости, прямая перпендикулярна плоскости, прямая пересекает плоскость, не будучи ей перпендикулярной. Учащиеся должны понимать, почему понятие величины угла между прямой и плоскостью требует отдельных определений для каждого из этих четырёх различных случаев взаимного расположения прямой и плоскости.

Нередко учащиеся считают, что углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость. Однако если прямая перпендикулярна плоскости, то её проекцией является точка. Следовательно, для этого случая нужна отдельная договорённость. Поэтому по определению угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной плоскости, считают равным 90°.

В учебнике вводится определение угла между отрезком и плоскостью. Так же определяется угол между лучом и плоскостью.

Ключевая задача 1, рассмотренная в параграфе, позволит в дальнейшем изучать свойства пирамиды с равными рёбрами.

Введение понятия величины угла между прямой и плоскостью существенно расширяет круг задач, доступных учащимся. Одной из основных проблем при решении задач является то, что учащимся бывает трудно, имея в задаче отрезок и плоскость, найти на изображении (построить либо описать) именно тот угол, который представляет собой угол между данным отрезком и этой плоскостью. Здесь целесообразно найти или построить перпендикуляр, проведённый из любой точки этого отрезка к данной плоскости, и соединить основание перпендикуляра с точкой пересечения плоскости и прямой, содержащей отрезок. Также следует помнить о том, что параллельные прямые составляют с плоскостью равные углы, так что может оказаться целесообразным искать угол между данной плоскостью и не данным отрезком, а отрезком, параллельным данному.

Ключевую задачу 2 параграфа ещё называют теоремой о трёх косинусах. Её применение значительно облегчает решение целого ряда задач. Поэтому в контрольную работу № 3 под пятым номером включена задача на применение теоремы о трёх косинусах, что позволит учащимся лучше усвоить этот важный ключевой факт.

Комментарии к упражнениям

№ 13.30. Докажите, что проекция данной прямой на плоскость угла содержит биссектрису этого угла.

№ 13.33. Пусть диагонали нижнего основания куба пересекаются в точке O. Тогда прямая C_1O является проекцией прямой C_1D на плоскость ACC_1.

№ 13.35—13.37. Примените ключевую задачу 2 параграфа.

№ 13.39. Покажите, что угол DMA равен $45°$, а далее примените ключевую задачу 2 параграфа.
№ 13.42. Воспользуйтесь ключевой задачей 13.40.

§ 14. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятиями двугранного угла, угла между двумя плоскостями, измерять и сравнивать двугранные углы, углы между двумя плоскостями. ***Личностные:*** формировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями двугранного угла, угла между двумя плоскостями, измерять и сравнивать двугранные углы, углы между двумя плоскостями.
Основные понятия	Двугранный угол, грани двугранного угла, ребро двугранного угла, линейный угол двугранного угла, величина двугранного угла, угол между двумя пересекающимися плоскостями, угол между многоугольником и плоскостью, угол между двумя многоугольниками.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	14.1, 14.2, 14.4				14.3, 14.5
Урок 2	14.6, 14.8, 14.9, 14.10, 14.12, 14.13, 14.14, 14.15	14.17	14.53		14.7, 14.11, 14.16

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 3	14.19, 14.21, 14.23, 14.25	14.27	14.54		14.20, 14.22, 14.24, 14.26
Урок 4	14.29, 14.31, 14.33, 14.34	14.32, 14.36			14.30, 14.35, 14.37
Урок 5	14.38, 14.41, 14.43, 14.44, 14.48	14.39, 14.46, 14.49, 14.51		Самостоя-тельная работа № 13: № 7, 9, 11	14.40, 14.42, 14.45, 14.47, 14.50

Методические комментарии

Понятие двугранного угла вводится во многом аналогично тому, как вводилось понятие угла в курсе планиметрии 7 класса. На это следует обратить внимание учащихся.

Учащиеся должны понимать, что две полуплоскости, имеющие общую границу, делят пространство на две области. Одна из этих областей является выпуклой фигурой. В параграфе не даётся формального определения выпуклой фигуры, но фактически пояснение в тексте описывает это понятие. Для снятия многозначности договорились рассматривать только выпуклые двугранные углы.

Учащиеся должны понимать, почему величину линейного угла приняли за величину двугранного угла.

На практике при решении задач следует обращать внимание, чтобы при поисках величины двугранного угла учащиеся правильно определяли, какие именно линии в условии задачи составляют линейный угол искомого двугранного угла.

Введение понятия угла между двумя плоскостями проводится по такой же схеме, как и формирование понятия угла между двумя прямыми.

Важно обратить внимание, что величина φ двугранного угла удовлетворяет соотношению $0° < \varphi \leqslant 180°$, а угол между двумя плоскостями удовлетворяет соотношению $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Поэтому в формулировках задач следует обращать внимание на то, величину какого именно угла требуется найти. Если найдена величина некоторого двугранного угла, а требовалось найти величину угла между плоскостями, его образующими, то в случае, если найденная величина двугранного угла превышает $90°$, надо будет свести найденную величину к углу в пределах $[0°; 90°]$.

Ключевая задача 3 параграфа даёт эффективный метод поиска угла между плоскостями.

Ключевую задачу 4 параграфа ещё называют теоремой о трёх синусах. Её применение значительно облегчает решение целого ряда задач на поиск угла между плоскостями. Поэтому в контрольную работу № 4 под пятым номером включена задача на применение теоремы о трёх косинусах, что позволит учащимся лучше усвоить этот важный ключевой факт.

Комментарии к упражнениям

№ 14.35. Два ответа в этой задаче возникают не при оценке геометрической конфигурации, а в результате аналитического решения, а именно решения квадратного уравнения.
№ 14.38. Искомый угол равен величине угла MKO.
№ 14.45. Воспользуйтесь ключевой задачей 4 параграфа.
№ 14.46. Из точки B проведите перпендикуляр BM к прямой A_1D. Докажите, что угол BMA искомый.
№ 14.48. Воспользовавшись ключевой задачей 3 параграфа, покажите, что искомый угол равен углу между прямыми CA и CB_1.

§ 15. Перпендикулярные плоскости

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать понятием перпендикулярности двух плоскостей, доказывать и применять признак перпендикулярности плоскостей и свойства перпендикулярных плоскостей. ***Личностные:*** формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, делать выводы.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием перпендикулярности двух плоскостей, доказывать и применять признак и свойства перпендикулярных плоскостей.
Основные понятия	Перпендикулярные плоскости, признак перпендикулярности плоскостей, свойства перпендикулярных плоскостей.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	15.1, 15.2, 15.3, 15.5, 15.6				15.4, 15.7
Урок 2	15.8, 15.10, 15.12, 15.14	15.16	15.48		15.9, 15.11, 15.13, 15.15
Урок 3	15.18, 15.20, 15.22, 15.24, 15.28	15.26, 15.29			15.19, 15.21, 15.23, 15.25
Урок 4	15.31, 15.33, 15.36, 15.38	15.34	15.49		15.32, 15.37, 15.39
Урок 5	15.40, 15.44, 15.46	15.41, 15.42		Самостоятельная работа № 15: № 7, 9	15.43, 15.45, 15.47

Методические комментарии

Изучение этой темы проходит по стандартной схеме: определение понятия, теорема-признак, свойства понятия.

Признак перпендикулярности плоскостей довольно прозрачный, поэтому им легко пользоваться при решении задач.

Теорему 14.2 можно использовать для доказательства перпендикулярности прямой и плоскости.

Теоремы и ключевые задачи этого параграфа завершают формирование инструментария, с помощью которого учащиеся определяют взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, расстояния и углы между ними. Таким образом, полностью сформирована теоретическая база, которая в дальнейшем будет использоваться для изучения многогранников и тел вращения. Этот инструментарий постоянно надо поддерживать в рабочем состоянии с помощью решения задач.

Комментарии к упражнениям

№ 15.32. Рассмотрите треугольник MOK, где точка O — центр квадрата, точка K — середина ребра CD. Тогда длина высоты треугольника MOK, проведённой из вершины O, является искомым расстоянием.
№ 15.33. Воспользуйтесь тем, что прямая AD перпендикулярна плоскости AMB.
№ 15.45. Докажите, что прямая AK проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC.

§ 16. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение доказывать и применять теорему о площади ортогональной проекции многоугольника. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится доказывать и применять теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.
Основное понятие	Площадь ортогональной проекции выпуклого многоугольника.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повторе-ния	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	16.1, 16.2, 16.3, 16.4, 16.5				16.6, 16.28
Урок 2	16.7, 16.9, 16.11, 16.13	16.8	16.29		16.10, 16.12, 16.14
Урок 3	16.15, 16.18, 16.20, 16.22	16.17, 16.23, 16.24, 16.25, 16.27		Самостоя-тельная работа № 16: № 6, 7	16.16, 16.19, 16.21

Методические комментарии

Данная теорема связывает площадь многоугольника, площадь его ортогональной проекции и угол между плоскостями многоугольника и ортогональной проекции и предназначена для поиска одной из этих величин по двум известным величинам из этого перечня.

Следует обратить внимание учащихся на ограничение в условии теоремы: $0° < \alpha < 90°$.

В зависимости от уровня математической подготовки класса можно обсудить это ограничение, придерживаясь примерно такого плана.

Для полного рассмотрения всех возможных случаев расположения плоскости многоугольника и плоскости проектирования надо рассмотреть три случая: 1) плоскости перпендикулярны; 2) плоскости параллельны или совпадают; 3) угол α между плоскостями удовлетворяет условию $0° < \alpha < 90°$ (как рассмотрено в теореме).

Первые два случая интуитивно понятны.

При $\alpha = 0°$ формула, доказанная в теореме, также даст правильный результат, поскольку $\cos 0° = 1$. Однако здесь могут возникнуть вопросы о взаимном расположении плоскостей, угол между которыми равен $0°$: плоскость многоугольника и плоскость проекции могут быть параллельными либо могут совпадать.

Исходя из этого, в теореме 15.1 используется именно строгое неравенство, поэтому при необходимости случаи $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$ надо рассматривать отдельно.

Доказательство рассматриваемой теоремы непростое. Его надо разделить на несколько этапов:

1) проектирумая фигура — треугольник, одна из сторон которого параллельна плоскости проектирования;

2) проектируемая фигура — треугольник с произвольным расположением сторон относительно плоскости проектирования;

3) общий случай для произвольного многоугольника.

Для учащихся возможность разбиения многоугольника на треугольники является наглядно очевидным фактом. Например, это можно сделать, проведя все диагонали многоугольника из одной его вершины. Однако возможность триангулировать произвольный многоугольник — факт далеко не очевидный. Поэтому в теореме 15.1 дано искусственное ограничение на вид многоугольника. При этом замечание после доказательства теоремы снимает это ограничение.

Поскольку в формуле для нахождения площади многоугольника присутствует значение косинуса угла между плоскостями, то, зная площади проектируемого многоугольника и его проекции, можно находить угол между плоскостями. Это продемонстрировано в задаче 1 параграфа. Применение этой идеи значительно облегчает решение целого ряда задач. Поэтому в контрольную работу № 4 под шестым номером включена аналогичная задача, что позволит учащимся лучше усвоить этот важный ключевой факт.

Комментарии к упражнениям

№ 16.15. Следует обратить внимание учащихся на то, что существуют два принципиально разных положения секущей плоскости. Они определяются такими значениями угла α: $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$ или $45° < \alpha \leqslant 90°$.
№ 16.16. Условие задачи позволяет найти площадь проекции сечения. Полученная величина равна разности площадей квадрата и треугольника AMK. Эту величину легко выразить через сторону квадрата.
№ 16.21. Воспользуйтесь идеей решения задачи 1 параграфа.
№ 16.23. Воспользуйтесь результатом задачи 16.22.

§ 17. Многогранный угол. Трёхгранный угол

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями многогранного и трёхгранного углов, доказывать и применять первую теорему косинусов для трёхгранного угла и свойства трёхгранного угла.

Личностные: формировать представление о математической науке как сфере математической деятельности.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями многогранного и трёхгранного углов, доказывать и применять первую теорему косинусов для трёхгранного угла и свойства трёхгранного угла.

Основные понятия

Многогранный угол, вершина многогранного угла, грани многогранного угла, плоские углы многогранного угла, двугранный угол многогранного угла, выпуклый многогранный угол, первая теорема косинусов для трёхгранного угла, свойства трёхгранного угла.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	17.1, 17.2, 17.4, 17.6		17.31		17.3, 17.5
Урок 2	17.7, 17.9, 17.11, 17.14, 17.15	17.12	17.32		17.8, 17.10
Урок 3	17.16, 17.18, 17.20, 17.26	17.21, 17.22, 17.27, 17.28, 17.29		Самостоятельная работа № 17: № 5, 9	17.17, 17.19, 17.25

Методические комментарии

В параграфе даётся описательное определение многогранного угла. Фактически описание содержит способ построения многогранного угла.

При введении элементов многогранного угла особое внимание следует уделить понятию двугранного угла многогранного угла.

Можно обратить внимание учащихся на то, что любой двугранный угол выпуклого многогранного угла содержит многогранный угол. Невыпуклый многогранный угол таким свойством не обладает.

Формула, выражающая первую теорему косинусов для трёхгранного угла, непростая и может вызвать сложности при запоминании. Однако знать её чрезвычайно важно, поскольку эта формула связывает все важные угловые элементы трёхгранного угла. Во многих задачах на многогранники трёхгранный угол можно выделить как элемент. Поэтому первая теорема косинусов для трёхгранного угла помогает находить соотношения между угловыми элементами многогранника.

Доказательство теоремы 17.2 получается как следствие из первой теоремы косинусов для трёхгранного угла. При необходимости можно показать учащимся и геометрическое доказательство этой теоремы, когда из трёх плоских углов выбирают наибольший и в нём откладывают один из двух других плоских углов.

Теорема 17.3 имеет красивое геометрическое доказательство, основанное на неожиданном дополнительном построении.

При обобщении теоремы 17.3 на многогранный угол следует обратить внимание учащихся на необходимость дополнительного условия выпуклости многогранного угла. Это условие отсутствовало в самой теореме 17.3, поскольку трёхгранный угол является выпуклой фигурой.

Комментарии к упражнениям

№ 17.10. Примените теорему косинусов к трёхгранному углу BAD_1C.
№ 17.11. Воспользуйтесь тем, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.
№ 17.12. Пусть величины плоских углов равны по α. Докажите, что $\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} < \frac{1}{2}$.
№ 17.13. Отложите на рёбрах трёхгранного угла равные отрезки и рассмотрите тетраэдр, боковыми рёбрами которого являются отмеченные отрезки.
№ 17.16. Применяя теорему косинусов для трёхгранного угла AA_1BC, найдите один из двугранных углов при ребре AB или AC. К этой задаче также можно вернуться после решения задачи 17.26.
№ 17.20. Трёхгранный угол $MA_1B_1C_1$ называют полярным трёхгранному углу $SABC$. Они обладают полезным свойством: двугранные углы одного из них равны плоским углам другого.
№ 17.22. Воспользуйтесь результатом задачи 17.22.
№ 17.25. Воспользуйтесь результатом задачи 17.24.
№ 17.30. Воспользуйтесь результатами задач 17.28 и 17.29.

§ 18. Геометрическое место точек пространства

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием геометрического места точек пространства, находить геометрическое место точек, если множество точек удовлетворяет некоторым условиям.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием геометрического места точек пространства, находить геометрическое место точек, если множество точек удовлетворяет некоторым условиям.

Основные понятия

Геометрическое место точек, биссектор двугранного угла.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	18.1, 18.2, 18.4, 18.5		18.17		18.3, 18.6
Урок 2	18.7, 18.9, 18.10, 18.12, 18.13	18.14, 18.15	18.18	Самостоятельная работа № 18: № 4, 6	18.8, 18.11

Методические комментарии

Понятие ГМТ пространства очень близко к понятию ГМТ плоскости. Поэтому целесообразно повторить основные положения о ГМТ плоскости.

В частности, следует подчеркнуть, что не каждую геометрическую фигуру следует называть ГМТ; для доказательства того, что какая-то фигура является ГМТ, необходимо доказать две взаимно обратные теоремы: если точка принадлежит множеству, то она обладает заданным свойством, и наоборот, если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству.

В параграфе рассматривается пример ГМТ, равноудалённых от вершин данного многоугольника. Этот пример ещё важен тем, что его результат будет использован в дальнейшем при изучении многогранников, вписанных в сферу. С помощью этого ГМТ удастся получить необходимые и достаточные условия того, что многогранник можно вписать в сферу.

Теоремы 18.1 и 18.2 также будут использованы при решении целого ряда задач и доказательств теорем. Следует обратить внимание учащихся на то, что эти теоремы имеют планиметрические аналоги: теоремы о серединном перпендикуляре отрезка и биссектрисе угла.

Комментарии к упражнениям

№ 18.12. Все точки полупространства, содержащего точку B. Границей этого полупространства является плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.
№ 18.15. Прямая пересечения биссекторов двух двугранных углов трёхгранного угла.

Контрольная работа № 4

Глава 4. Многогранники

§ 19. Призма

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения распознавать многогранники и призмы, их элементы, доказывать и использовать формулы для нахождения боковой поверхности призмы.

Личностные: формировать умение контролировать процесс своей математической деятельности.

Метапредметные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать многогранники и призмы, их элементы, доказывать и использовать формулы для нахождения боковой поверхности призмы.

Основные понятия

Геометрические тела, многогранник, соседние грани, плоский угол многогранника, двугранный угол многогранника, выпуклый многогранник, площадь поверхности многогранника, теорема Эйлера, n-угольная призма, высота призмы, прямая призма, наклонная призма, правильная призма, диагональное сечение призмы, площадь боковой поверхности призмы.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	19.1, 19.2, 19.3, 19.4, 19.6				19.5, 19.7
Урок 2	19.8, 19.10, 19.12, 19.14, 19.15, 19.17	19.19, 19.21	19.47		19.13, 19.16, 19.18
Урок 3	19.23, 19.25, 19.27, 19.31	19.29	19.48		19.24, 19.26, 19.28

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 4	19.33, 19.35, 19.38, 19.40	19.36			19.34, 19.37, 19.39
Урок 5	19.41, 19.43, 19.45, 19.46			Самостоятельная работа № 19: № 7, 11	19.42, 19.44

Методические комментарии

Параграф «Призма» является первым в главе «Многогранники». Поэтому перед непосредственным изучением призмы значительная часть учебного материала посвящена расширению и уточнению представлений учащихся о многогранниках.

В учебнике не рассматривается строгое определение тела. Это понятие описывается. Здесь во многом помогают примеры стереометрических фигур, не являющихся телом. Так, рисунок 17.2 иллюстрирует то, что не всякая ограниченная фигура является телом.

В начале параграфа рассматриваются определения многогранника, выпуклого многогранника, двугранного угла при ребре многогранника. Понятие выпуклого многогранника в стереометрии является аналогом выпуклого многоугольника в планиметрии, поэтому у учащихся оно не должно вызвать затруднения. Следует подчеркнуть, что далее в школьном курсе рассматриваются только выпуклые многогранники.

Учащиеся получают краткую информацию о теореме Эйлера о многогранниках. Тем, кто хочет узнать доказательство этой теоремы, следует посоветовать принять участие в работе над проектом «Элементы теории графов».

Желательно продемонстрировать учащимся несколько макетов многогранников и предложить описать, каким образом они будут строить линейный угол двугранного угла многогранника при его ребре. Учащиеся должны хорошо усвоить, что лучи, составляющие стороны линейного угла, должны быть перпендикулярны ребру многогранника.

Понятие призмы знакомо учащимся из курса математики предыдущих классов. В 10 классе строгое определение призмы сформулировано с использованием понятий о параллельности плоскостей и прямых в пространстве.

В определении призмы отсутствует слово «выпуклый». Действительно, призма может быть и невыпуклой. Можно привести учащимся пример невыпуклой призмы, однако подчеркнуть, что это делается для общего ознакомления, в школьном курсе будут рассматриваться только выпуклые призмы.

Схема, изображённая на рисунке 19.11, включает и те знакомые учащимся виды призм, которым в данном параграфе не давались строгие определения (прямоугольный параллелепипед и куб). Для систематизации знаний учащихся полезно предложить привести примеры для каждого из множеств, изображённых на этой диаграмме. Например: «прямая призма, не являющаяся ни правильной, ни прямоугольным параллелепипедом».

В определении высоты призмы идёт речь о перпендикуляре, опущенном не на само второе основание призмы, а на плоскость второго основания призмы. Это объясняется тем, что для призмы, не являющейся прямой, не каждая точка одного основания проецируется на точку другого основания. Более того, возможен случай, когда боковые рёбра наклонены к плоскости основания под таким углом, что проекция одного из оснований призмы на плоскость второго основания вообще не будет иметь общие точки со вторым основанием. Следует акцентировать на этом внимание учащихся, а также подчеркнуть, что в силу такого определения в качестве высоты призмы можно выбирать любой удобный для рассмотрения отрезок, подходящий под определение.

В обозначении призмы принят такой подход: вначале называют последовательно вершины одного из оснований, затем, придерживаясь того же направления «обхода», — вершины другого основания, причём первой из вершин второго основания называют ту, которая соединена ребром с вершиной первого основания, с которой был начат «обход».

В параграфе не даётся строгое определение развёртки многогранника. Рассказ ведётся на интуитивно понятном уровне с привлечением средств наглядности.

Задача 3 параграфа непростая. В ней рассматривается приём поиска наименьшего пути по поверхности многогранника.

Комментарии к упражнениям

№ 19.27. Воспользуйтесь теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника.

№ 19.31. Докажите, что проекция ребра AA_1 принадлежит биссектрисе угла ABC.

№ 19.37. Применив теорему косинусов для трёхгранного угла BCB_1A, найдите угол B_1BA.
№ 19.40. Воспользуйтесь тем, что в данном многограннике количество рёбер вдвое больше количества граней.

§ 20. Параллелепипед

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения распознавать параллелепипед и его элементы, доказывать и использовать свойства параллелепипеда.
Планируемые результаты	***Личностные:*** развивать навыки самостоятельной работы, формировать умение работать в коллективе и находить согласованные решения. ***Метапредметные:*** формировать умение корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.
Основные понятия	Параллелепипед, противолежащие грани параллелепипеда, прямой параллелепипед, прямоугольный параллелепипед, измерения прямоугольного параллелепипеда, куб, свойства параллелепипеда.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	20.1, 20.3, 20.5	20.4			20.2, 20.6
Урок 2	20.7, 20.10, 20.12, 20.13	20.8	20.31		20.9, 20.11, 20.14
Урок 3	20.15, 20.17, 20.19, 20.21		20.32		20.16, 20.18, 20.20
Урок 4	20.23, 20.26, 20.28	20.29, 20.30		Самостоятельная работа № 20: № 8, 10	20.25, 20.27, 20.24

Методические комментарии

Понятие прямоугольного параллелепипеда знакомо учащимся из предыдущих классов. Однако в данном параграфе идёт речь о более общем случае — параллелепипеде. Поэтому учащиеся поначалу могут допускать ошибки, отождествляя параллелепипед с прямоугольным параллелепипедом. Профилактику этой ошибки можно провести, сопровождая каждое новое определение иллюстрацией соответствующего параллелепипеда и изображением соотношений изучаемых видов параллелепипедов с помощью диаграмм Эйлера. Как и при изучении видов призм, желательно, чтобы учащиеся могли привести примеры для всех видов параллелепипедов, изображённых на схеме на рисунке 20.3, причём надо уметь изображать и те, которые на схеме находятся внутри большего овала, но вне меньшего, например «прямой параллелепипед, не являющийся прямоугольным», «правильная четырёхугольная призма, не являющаяся кубом».

Так же как призма может быть прямой и наклонной, её частный вид — параллелепипед — также может быть прямым и наклонным. Отдельное определение наклонного параллелепипеда в параграфе не рассматривается, поскольку оно следует из определения наклонной призмы, данного в предыдущем параграфе.

Из теоремы 20.2 следует, что все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны. Учащиеся должны самостоятельно прийти к этому выводу.

В ключевой задаче 1 параграфа доказывается факт, который будет в дальнейшем использоваться во многих задачах. Здесь рассматривается чисто геометрическое доказательство. В 11 классе полезно возвратиться к этой задаче, решив её методом координат и с помощью векторов.

В параграфе показано, как вокруг произвольного тетраэдра описать параллелепипед, а также как в параллелепипеде выделить тетраэдр, вокруг которого описан данный параллелепипед. Это, казалось бы, сложное дополнительное построение поможет в дальнейшем решить ряд непростых задач.

Комментарии к упражнениям

№ 20.21. Пусть высота параллелепипеда равна d. Тогда диагонали ромба равны $\frac{S_1}{d}$ и $\frac{S_2}{d}$. Далее следует найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

№ 20.24. Следует воспользоваться тем, что проекцией вершины A_1 на плоскость основания является центр квадрата $ABCD$.

№ 20.26. Следует показать, что в данном параллелепипеде нет вершины, плоские углы при которой равны 60°, 60°, 120°. Далее можно воспользоваться теоремой косинусов для трёхгранного угла.
№ 20.29. Воспользуйтесь тем, что сумма расстояний от любой точки пространства до противоположных вершин куба не меньше диагонали куба.

§ 21. Пирамида

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умения распознавать пирамиду, её виды и элементы, доказывать и использовать свойства пирамиды, находить площадь поверхности пирамиды.

Личностные: формировать способность осознанного выбора и построения дальнейшей индивидуальной траектории.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, строить логическое рассуждение, делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать пирамиду, её виды и элементы, доказывать и использовать свойства пирамиды, находить площадь поверхности пирамиды.

Основные понятия

Пирамида, высота пирамиды, диагональное сечение пирамиды, правильная пирамида, правильный тетраэдр, апофема, площадь боковой поверхности пирамиды.

	Задания для формирования предметных результатов	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
Урок 1	21.1, 21.3, 21.5				21.2, 21.4
Урок 2	21.6, 21.8, 21.10, 21.12	21.13, 21.15	21.54		21.7, 21.9, 21.11
Урок 3	21.17, 21.19, 21.21, 21.25	21.23			21.17, 21.19, 21.21, 21.26

Окончание

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 4	21.27, 21.29, 21.31, 21.34	21.33, 21.37, 21.38, 21.39	21.55		21.28, 21.30, 21.32, 21.36
Урок 5	21.40, 21.43, 21.45, 21.46	21.41			21.42, 21.44, 21.47
Урок 6	21.48, 21.50, 21.51, 21.53			Самостоятельная работа № 21: № 5, 9	21.49, 21.52

Методические комментарии

В целом материал данного параграфа несложен. Понятия правильной пирамиды новые для учащихся, достаточно наглядны и легко усваиваются.

Для пирамиды отсутствует формальная договорённость о порядке упоминания вершин в её обозначении. Но, как правило, при обозначении пирамиды первой указывают её вершину.

Во многих случаях для того, чтобы получить наиболее наглядное изображение пирамиды, надо представлять, в какую точку основания проектируется вершина пирамиды, восстанавливать из этой точки перпендикуляр, а затем соединять верхний конец перпендикуляра с вершинами основания пирамиды. Если речь идёт о правильной пирамиде, то согласно определению основанием её высоты является центр правильного n-угольника, лежащего в её основании. Для треугольника это точка пересечения медиан, для квадрата — точка пересечения диагоналей, поэтому правильные треугольную и четырёхугольную пирамиды изобразить несложно.

Рассматривая определение апофемы правильной пирамиды, следует заметить, что боковая грань правильной пирамиды — это равнобедренный треугольник. Поэтому апофема является не только высотой боковой грани, но и её медианой и биссектрисой. Из этого следует сделать такой вывод: для построения изображения апофемы надо соединить отрезком вершину пирамиды с серединой ребра основания пирамиды.

В параграфе вводится определение правильного тетраэдра. Здесь важно, чтобы в дальнейшем учащиеся не приписывали произвольному тетраэдру свойства правильного тетраэдра.

В формулировке ключевой задачи параграфа речь идёт о равенстве двугранных углов пирамиды при рёбрах основания. Если условие равенства указанных двугранных углов заменить равенством углов между боковыми гранями и плоскостью основания, то условие задачи выполняться не будет.

Эта ситуация подробно анализируется для треугольной пирамиды, когда показывается, что если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами, то вершина пирамиды может спроектироваться не только в центр вписанной окружности основания, но и в центр вневписанной окружности треугольника основания.

Комментарии к упражнениям

№ 21.29—21.32. Можно обратить внимание на следующее обобщение, касающееся правильной пирамиды. Если в правильной пирамиде известен один из следующих элементов: двугранный угол пирамиды при ребре основания, двугранный угол пирамиды при боковом ребре, угол наклона бокового ребра к плоскости основания, плоский угол при вершине пирамиды, то любой из оставшихся элементов можно найти.

№ 21.38. Следует учесть, что двугранный угол пирамиды при ребре AB может быть равен как $30°$, так и $150°$.

№ 21.40. Воспользуйтесь результатом задачи 21.39.

№ 21.42. Пусть точки P и N — середины рёбер AF и CD соответственно, точка K_1 — проекция точки K на прямую PN. Докажите, что искомое расстояние равно расстоянию от точки O до прямой MK_1.

№ 21.46. Эта задача того же класса, что и задачи 21.45 и 21.47 (многовариантность ответа). Такие задачи полезны. Они формируют у учащихся внимательность и математическую культуру.

№ 21.48. Возможны три случая расположения секущей плоскости: 1) секущая плоскость проходит через середины боковых рёбер; 2) секущая плоскость проходит через середины двух рёбер основания и середину одного из боковых рёбер; 3) секущая плоскость проходит через середины двух рёбер основания и середины двух боковых рёбер.

§ 22. Усечённая пирамида

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты — ***Предметные:*** формировать умения распознавать усечённую пирамиду и её элементы, использовать свойства усечённой пирамиды, находить площадь поверхности усечённой пирамиды.

Планируемые результаты — ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, выдвигать гипотезы при решении задачи и понимать необходимость их проверки.

Основные понятия — Усечённая пирамида, основания усечённой пирамиды, боковые грани усечённой пирамиды, рёбра оснований усечённой пирамиды, боковые рёбра оснований усечённой пирамиды, высота усечённой пирамиды, правильная усечённая пирамида, апофема правильной усечённой пирамиды, площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	22.1, 22.3, 22.5		22.18		22.2, 22.4, 22.6
Урок 2	22.7, 22.9, 22.11, 22.13, 22.15	22.17	22.19	Самостоятельная работа № 22: № 4, 7	22.8, 22.10, 22.12, 22.14, 22.16

Методические комментарии

В параграфе описывается построение усечённой пирамиды путём проведения сечения, параллельного основанию данной пирамиды. Это наиболее наглядный, а следовательно, оптимальный способ ознакомления учащихся с этим многогранником.

Описывая элементы усечённой пирамиды, следует заметить, что боковыми гранями усечённой пирамиды являются трапеции.

При изображении усечённой пирамиды нередко возникает следующая ошибка: прямые, содержащие боковые рёбра пирамиды, не пересекаются в одной точке. Здесь помогает такой совет: вначале построить изображение пирамиды, а затем с помощью полученного рисунка строить изображение усечённой пирамиды.

Комментарии к упражнениям

№ 22.9. Боковой гранью данной усечённой пирамиды является равнобедренная трапеция, в которой известны основания и высота. Это позволяет найти диагональ трапеции.
№ 22.13. Рассмотрите вспомогательное сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два противоположных боковых ребра усечённой пирамиды.
№ 22.15. Наиболее короткое решение можно получить, применив теорему о площади ортогональной проекции многоугольника.

§ 23. Тетраэдр

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умения оперировать основными элементами геометрии тетраэдра, распознавать виды тетраэдра, доказывать и применять свойства тетраэдра.
Планируемые результаты	***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение сравнивать, анализировать, обобщать по разным основаниям, выдвигать гипотезы при решении задачи и понимать необходимость их проверки.
Основные понятия	Тетраэдр, ортоцентрический тетраэдр, достаточное условие ортоцентрического тетраэдра, средняя линия тетраэдра, свойство средней линии тетраэдра, медиана тетраэдра, свойство медианы тетраэдра, центроид, правильный тетраэдр, равногранный тетраэдр, свойства равногранного тетраэдра, теорема Менелая для тетраэдра.

	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
Урок 1	23.1, 23.3	23.5			23.2, 23.4
Урок 2	23.6, 23.8, 23.10, 23.11		23.29		23.7, 23.9, 23.12
Урок 3	23.13, 23.15, 23.16, 23.18		23.30		23.14, 23.17, 23.19
Урок 4	23.20, 23.22, 23.23, 23.24, 23.25, 23.26	23.28		Самостоятельная работа № 23: № 7, 9	23.21, 23.27

Методические комментарии

В первую очередь учащиеся должны понимать, почему именно тетраэдру среди всех многогранников отводится особое место.

В параграфе рассматриваются основные виды тетраэдров: ортоцентрический и его частный вид — прямоугольный тетраэдр, а также равногранный тетраэдр. Рассматриваются теоремы-признаки для каждого вида тетраэдров.

Все теоремы о свойствах медиан и средних линий тетраэдра доказываюся чисто геометрическими средствами. Это очень полезно, поскольку такого рода доказательства развивают пространственное воображение и геометрическое зрение.

В ряде доказательств используется дополнительное построение в виде параллелепипеда, описанного около данного тетраэдра.

Все свойства медиан и средних линий тетраэдра можно также доказать с помощью барицентрических координат. Поэтому можно предложить учащимся принять участие в работе над проектом «Геометрия масс».

Особое место в параграфе занимает теорема Менелая для тетраэдра. Теорема непростая. Она будет легче восприниматься теми учащимися, кто знаком с теоремой Менелая для треугольника — достаточным условием принадлежности одной прямой трём точкам, две из которых принадлежат треугольнику, а третья лежит на продолжении третьей стороны.

Задача 2 параграфа иллюстрирует применение теоремы Менелая для тетраэдра.

Комментарии к упражнениям

№ 23.3—23.7. Опыт показывает, что решение этих задач вызывает определённые трудности. Поэтому целесообразно повторить теорему о трёх перпендикулярах и признак перпендикулярности прямой плоскости.
№ 23.11. Воспользуйтесь методом доказательства от противного.
№ 23.12. Если обозначить длины рёбер одной из граней a, b и c, а скрещивающиеся с ними рёбра соответственно x, y и z, то несложно получить такую систему уравнений: $\begin{cases} x + z = a + c, \\ y + x = c + b, \\ z + y = b + a. \end{cases}$
№ 23.17. Следует воспользоваться теоремой о сумме квадратов сторон и диагоналей параллелограмма.
№ 23.20, 23.21. Используйте то, что медианы тетраэдра принадлежат диагоналям описанного параллелепипеда.

Контрольная работа № 5

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Аксиомы стереометрии и следствия из них. Начальные представления о многогранниках

Вариант 1

1. Даны точки A, B и C такие, что $AB = 12$ см, $BC = 19$ см, $AC = 7$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки A, B и C? Ответ обоснуйте.
2. Плоскость α проходит через вершины A и D параллелограмма $ABCD$ и точку O пересечения его диагоналей. Докажите, что прямая BC лежит в плоскости α.
3. Точки M и N принадлежат соответственно граням SAB и SAC пирамиды $SABC$ (рис. 1). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

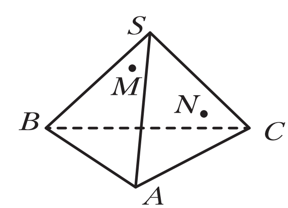

Рис. 1

4. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки D, E и F, принадлежащие соответственно рёбрам AB, BC и SC, причём прямые DE и AC не параллельны.
5. Точка M принадлежит ребру CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей A_1DM и D_1B_1A.

Вариант 2

1. Даны точки M, N и K такие, что $MN = 23$ см, $MK = 14$ см, $NK = 13$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки M, N и K? Ответ обоснуйте.
2. Точки D и E — соответственно середины сторон AB и BC треугольника ABC. Плоскость α проходит через точки B, D и E. Докажите, что прямая AC лежит в плоскости α.
3. Точки M и N принадлежат соответственно граням SAB и SBC пирамиды $SABC$ (рис. 2). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

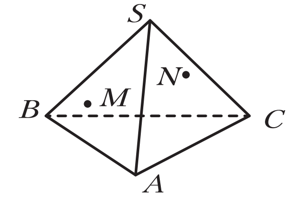

Рис. 2

4. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки M, K и N, принадлежащие соответственно рёбрам AB, BC и CC_1, причём прямые MK и AC не параллельны.
5. Точка K принадлежит ребру AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей B_1D_1K и A_1C_1B.

Вариант 3

1. Даны точки D, E и F такие, что $DE = 11$ см, $EF = 16$ см, $DF = 27$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки D, E и F? Ответ обоснуйте.
2. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD. Плоскость α проходит через точки A, C и O. Докажите, что прямая BD лежит в плоскости α.
3. Точки M и N принадлежат соответственно граням SAB и SAC пирамиды $SABC$ (рис. 3). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью SBC.

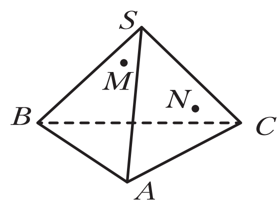

Рис. 3

4. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки M, K и N, принадлежащие соответственно рёбрам SA, SB и BC, причём прямые MK и AB не параллельны.
5. Точка N принадлежит ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей DA_1N и AD_1C.

Вариант 4

1. Даны точки B, C и D такие, что $BC = 4$ см, $CD = 16$ см, $BD = 18$ см. Сколько плоскостей можно провести через точки B, C и D? Ответ обоснуйте.
2. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Плоскость α проходит через точки D, O и C. Докажите, что прямая AB лежит в плоскости α.
3. Точки M и N принадлежат соответственно граням SAB и SBC пирамиды $SABC$ (рис. 4). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью SAC.

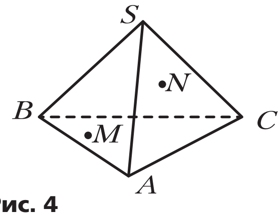

Рис. 4

4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину

B_1 и точки M и K, принадлежащие соответственно рёбрам AB и CC_1.

5. Точка F принадлежит ребру BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей B_1D_1F и A_1C_1D.

Контрольная работа № 2

Тема. Параллельность в пространстве

Вариант 1

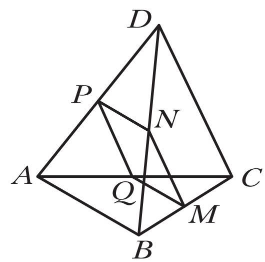

Рис. 5

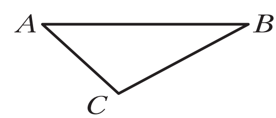

Рис. 6

1. Точки M, N, P и Q — середины отрезков BC, BD, AD и AC соответственно, $AB = 14$ см, $CD = 18$ см (рис. 5). Определите вид четырёхугольника $MNPQ$ и вычислите его периметр.
2. Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K соответственно и параллельна стороне AC, $MK = 4$ см, $MB : MA = 2 : 3$. Найдите сторону AC треугольника.
3. Треугольник ABC является изображением правильного треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Постройте изображение высоты треугольника $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1.
4. Плоскости α и β параллельны. Из точки M, не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1, а другой — в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите отрезок B_1B_2, если он на 2 см больше отрезка A_1A_2, $MB_1 = 7$ см, $A_1B_1 = 4$ см.
5. Точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трёх последовательных вершин правильного шестиугольника. Постройте изображение этого шестиугольника.
6. На рёбрах AD и AB тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки F и K так, что $AF : FD = 2 : 5$ и $BK : KA = 1 : 6$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку K параллельно прямым BD и CF. В каком отношении секущая плоскость делит ребро CB?

Вариант 2

1. Точки F, M, N и C — середины отрезков BS, DB, AD и AS соответственно, $SD = 30$ см, $AB = 36$ см (рис. 7). Определите вид четырёхугольника $FMNC$ и вычислите его периметр.

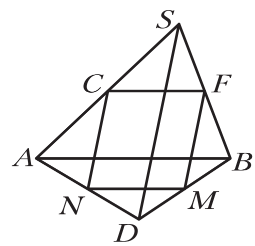

Рис. 7

2. Плоскость β пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках N и D соответственно и параллельна стороне BC, $AD = 6$ см, $DN : CB = 3 : 4$. Найдите сторону AC треугольника.

3. Треугольник MNK является изображением правильного треугольника $M_1N_1K_1$ (рис. 8). Постройте изображение биссектрисы треугольника $M_1N_1K_1$, проведённой из вершины M_1.

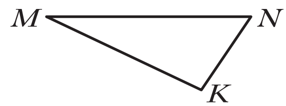

Рис. 8

4. Плоскости α и β параллельны. Через точку M, находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1, а другая — в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите отрезок A_1A_2, если он на 1 см меньше отрезка B_1B_2, $MA_2 = 4$ см, $A_2B_2 = 10$ см.

5. Точки A, B и O, не лежащие на одной прямой, являются соответственно параллельными проекциями двух вершин квадрата и его центра. Постройте изображение этого квадрата.

6. На рёбрах DC и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки N и K так, что $DN : NC = 2 : 3$ и $BK : KC = 4 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку N параллельно прямым DB и AK. В каком отношении секущая плоскость делит ребро AD?

Вариант 3

1. Точки N, M, C и K — середины отрезков BD, DF, FA и AB соответственно, $BF = 24$ см, $AD = 18$ см (рис. 9). Определите вид четырёхугольника $NMCK$ и вычислите его периметр.

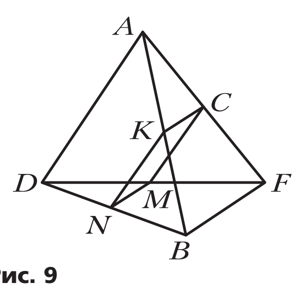

Рис. 9

2. Плоскость α пересекает стороны MF и MK треугольника MFK в точках A и B соответственно и параллельна стороне

FK, $AB = 12$ см, $AM : AF = 3 : 5$. Найдите сторону FK треугольника.

3. Треугольник ABC является изображением правильного треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 10). Постройте изображение центра вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

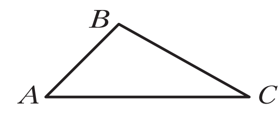

Рис. 10

4. Плоскости α и β параллельны. Из точки O, не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках C_1 и D_1, а другой — в точках C_2 и D_2 соответственно. Найдите отрезок C_1C_2, если он на 5 см меньше отрезка D_1D_2, $OC_1 = 4$ см, $C_1D_1 = 10$ см.
5. Точки A, B и O, не лежащие на одной прямой, являются соответственно параллельными проекциями двух вершин правильного треугольника и его центра. Постройте изображение этого треугольника.
6. На рёбрах AC и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MC = 1 : 5$ и $BK : KC = 2 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AB и DK. В каком отношении секущая плоскость делит ребро AD?

Вариант 4

1. Точки A, B, K и T — середины отрезков MF, PF, PN и MN соответственно, $MP = 10$ см, $FN = 16$ см (рис. 11). Определите вид четырёхугольника $ABKT$ и вычислите его периметр.

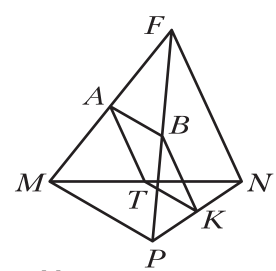

Рис. 11

2. Плоскость β пересекает стороны CF и CD треугольника CDF в точках M и N соответственно и параллельна стороне FD, $MN = 6$ см, $FD = 21$ см, $MC = 10$ см. Найдите сторону FC треугольника.
3. Треугольник ABC является изображением правильного треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 12). Постройте изображение центра описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

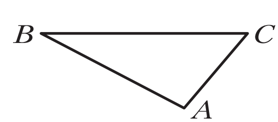

Рис. 12

4. Плоскости α и β параллельны. Через точку D, находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках M_1 и N_1, а другая — в точках M_2 и N_2 соответственно.

Найдите отрезок M_1M_2, если он на 8 см больше отрезка N_1N_2, $N_1M_1 = 30$ см, $DN_1 = 5$ см.

5. Точки A, B и M, не лежащие на одной прямой, являются соответственно параллельными проекциями двух соседних вершин параллелограмма и середины его противолежащей стороны. Постройте изображение этого параллелограмма.
6. На рёбрах DC и DA тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки N и K так, что $DN : NC = 5 : 2$ и $DK : KA = 3 : 4$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку N параллельно прямым AC и BK. В каком отношении секущая плоскость делит ребро BC?

Контрольная работа № 3

Тема. Перпендикулярность прямой и плоскости

Вариант 1

1. На рисунке 13 изображена трапеция $ABCD$, у которой боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC. Через вершину B проведена прямая BF, перпендикулярная прямой BC. Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ABF.

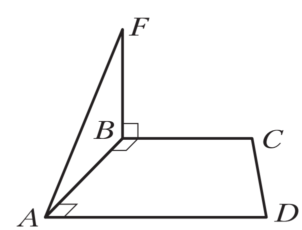

Рис. 13

2. Точка F находится на расстоянии $5\sqrt{3}$ см от каждой вершины квадрата $ABCD$, сторона которого равна 10 см. Найдите расстояние от точки F до плоскости квадрата.
3. Через вершину D прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведён перпендикуляр DE. Точка E удалена от стороны AB на 10 см, а от стороны BC — на 17 см. Найдите диагональ прямоугольника, если $DE = 8$ см.
4. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 120 см и 68 см соответственно. Точка A находится на расстоянии 25 см от каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Проекцией точки A на плоскость треугольника является точка, принадлежащая этому треугольнику. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

5. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая DA, перпендикулярная плоскости треугольника. Вычислите угол между прямыми DB и AC, если $AB = 6$ см, $DA = 8$ см.

Вариант 2

1. На рисунке 14 изображён равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), точка M — середина стороны AC. Через точку M проведена прямая MO, перпендикулярная прямой BM. Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости AOC.

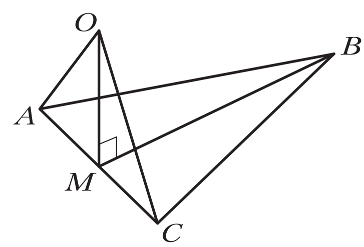

Рис. 14

2. Точка K находится на расстоянии 4 см от каждой вершины правильного треугольника ABC. Найдите сторону треугольника, если точка K удалена от плоскости ABC на 2 см.
3. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведён перпендикуляр AP. Найдите расстояние от точки P до прямой CD, если $BC = 12$ см, $BD = 13$ см, а точка P удалена от прямой BC на $\sqrt{106}$ см.
4. Основание равнобедренного треугольника и проведённая к нему высота равны 36 см и 24 см соответственно. Точка B находится на расстоянии 12 см от плоскости треугольника и равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника. Проекцией точки B на плоскость треугольника является точка, принадлежащая этому треугольнику. Найдите расстояние от точки B до сторон треугольника.
5. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая MC, перпендикулярная плоскости квадрата. Вычислите угол между прямыми AC и MD, если $AC = MC = 2$ см.

Вариант 3

1. На рисунке 15 изображён квадрат $ABCD$. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая OP, перпендикулярная прямой BD. Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости APC.

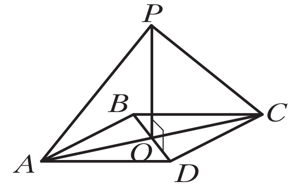

Рис. 15

2. Точка M находится на расстоянии 8 см от каждой вершины квадрата

$ABCD$. Найдите сторону квадрата, если точка M удалена от его плоскости на $4\sqrt{3}$ см.

3. Через вершину B прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведён перпендикуляр MB. Точка M удалена от стороны AD на 25 см, а от стороны CD — на $10\sqrt{5}$ см. Найдите диагональ прямоугольника, если $AB = 15$ см.
4. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 24 см и 20 см соответственно. Точка C находится на расстоянии 10 см от каждой прямой, содержащей сторону треугольника. Проекцией точки C на плоскость треугольника является точка, принадлежащая этому треугольнику. Найдите расстояние от точки C до плоскости треугольника.
5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая AK, перпендикулярная плоскости треугольника. Известно, что $AB = BC$, $AC = 2$ см, $AK = 4$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите угол между прямыми AB и KC.

Вариант 4

1. На рисунке 16 изображён прямоугольник $ABCD$. Через вершину A проведена прямая AK, перпендикулярная прямой AD. Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости AKB.

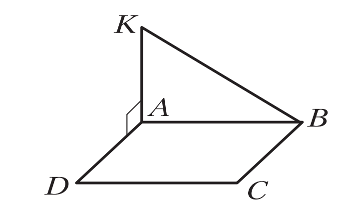

Рис. 16

2. Точка D находится на расстоянии 4 см от каждой вершины правильного треугольника ABC, сторона которого равна 6 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.
3. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведён перпендикуляр AK. Точка K удалена от стороны BC на 15 см. Найдите расстояние от точки K до стороны CD, если $BD = \sqrt{337}$ см, $AK = 12$ см.
4. Боковая сторона и высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равны 39 см и 36 см соответственно. Точка D находится на расстоянии $4\sqrt{6}$ см от плоскости треугольника и равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника. Проекцией точки D на плоскость треугольника является точка, принадлежащая этому треугольнику. Найдите расстояние от точки D до сторон треугольника.
5. Через вершину B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($AC = BC$) проведена прямая BM, перпендикулярная плоскости

треугольника. Найдите угол между прямыми CB и AM, если $BM = 6$ см, $BC = 3$ см.

Контрольная работа № 4

Тема. Угол между прямой и плоскостью.
Угол между плоскостями.
Перпендикулярные плоскости

Вариант 1

1. Из точки D, которая лежит вне плоскости α, проведены к этой плоскости наклонные DK и DB, образующие с ней углы $45°$ и $60°$ соответственно. Найдите проекцию наклонной DK на плоскость α, если $DB = 10\sqrt{3}$ см.
2. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен $45°$. Треугольник ABC — равносторонний со стороной $4\sqrt{3}$ см, треугольник ABD — равнобедренный, $AD = BD = \sqrt{14}$ см. Найдите отрезок CD.
3. Концы отрезка, длина которого равна $5\sqrt{5}$ см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов этого отрезка до линии пересечения плоскостей равны 5 см и 8 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
4. Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол $45°$. Найдите углы, которые образуют катеты треугольника с этой плоскостью.
5. Грань CC_1B_1B призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольником. Угол между прямой CB_1 и плоскостью AA_1B_1B равен α. Найдите угол между плоскостями CC_1B и AA_1B, если $CB = 5$ см, $BB_1 = 12$ см.
6. На рёбрах C_1B_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и N так, что $C_1M : MB_1 = 2 : 1$, $C_1N : ND_1 = 1 : 4$. Площадь треугольника AMN равна площади грани $ABCD$. Найдите угол между плоскостями AMN и ABC.

Вариант 2

1. Из точки K, которая лежит вне плоскости α, проведены к этой плоскости наклонные KA и KB, образующие с ней углы $45°$ и $30°$ соот-

ветственно. Найдите проекцию наклонной KB на плоскость α, если $KA = 8\sqrt{6}$ см.

2. Угол между плоскостями треугольников ABC и AKC равен $30°$, $AC = 24$ см, $BC = BA = 8\sqrt{3}$ см, $KC = KA = 15$ см. Найдите отрезок BK.
3. Концы отрезка, длина которого равна 16 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов этого отрезка до линии пересечения плоскостей равны 8 см и $8\sqrt{2}$ см. Найдите углы, которые образует отрезок с данными плоскостями.
4. Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол $30°$. Найдите синусы углов, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.
5. Грань AA_1BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольником. Угол между прямой AB_1 и плоскостью B_1BC_1C равен α. Найдите угол между плоскостями CC_1B и AA_1B, если $AB = 6$ см, $BB_1 = 8$ см.
6. На рёбрах CD и DD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и K так, что $CM : MD = 3 : 1$, $D_1K : KD_1 = 1 : 2$. Площадь треугольника B_1MK равна площади грани ABB_1A_1. Найдите угол между плоскостями B_1MK и ABB_1A_1.

Вариант 3

1. Из точки A, которая лежит вне плоскости α, проведены к этой плоскости наклонные AC и AD, образующие с ней углы $45°$ и $60°$ соответственно. Найдите проекцию наклонной AD на плоскость α, если $AC = 4\sqrt{2}$ см.
2. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен $60°$, $AC = BC = 20$ см, $AB = 24$ см, $AD = BD$, $\angle ADB = 90°$. Найдите отрезок CD.
3. Концы отрезка, длина которого равна 10 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Углы, которые образует этот отрезок с данными плоскостями, равны $45°$ и $60°$. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
4. Через катет прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол $60°$. Найдите синус угла, который образует гипотенуза треугольника с этой плоскостью.
5. Грань AA_1B_1B призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольником. Угол между плоскостями C_1CB и AA_1B_1 равен α. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью C_1CB, если $AB = 3$ см, $BB_1 = 4$ см.

6. На рёбрах CD и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и P так, что $CM : MD = 3 : 2$, $C_1P : PC = 1 : 1$. Площадь треугольника A_1MP равна площади грани ABB_1A_1. Найдите угол между плоскостями A_1MP и ABB_1A_1.

Вариант 4

1. Из точки M, которая лежит вне плоскости α, проведены к этой плоскости наклонные MN и MK, образующие с ней углы $30°$ и $45°$ соответственно. Найдите наклонную MK, если проекция наклонной MN на плоскость α равна $4\sqrt{3}$ см.
2. Угол между плоскостями треугольников ABC и ADC равен $60°$, $AB = BC = AC = 12$ см, $AD = CD$, $\angle ADC = 120°$. Найдите отрезок BD.
3. Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от его концов до линии пересечения плоскостей равны 8 см и 5 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей, равно $\sqrt{107}$ см. Найдите данный отрезок.
4. Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, которая образует с двумя остальными сторонами треугольника углы по $30°$. Найдите синус угла между плоскостью данного треугольника и проведённой плоскостью.
5. Грань AA_1C_1C призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольником. Угол между плоскостями CC_1B_1 и AA_1C_1 равен α. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью B_1BC, если $AC = 8$ см, $AA_1 = 15$ см.
6. На рёбрах AD и AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MD = 4 : 1$, $A_1K : KA = 1 : 3$. Площадь треугольника C_1MK равна площади грани BB_1C_1C. Найдите угол между плоскостями C_1MK и BB_1C_1C.

Контрольная работа № 5

Тема. Многогранники

Вариант 1

1. Боковое ребро прямой четырёхугольной призмы равно 6 см, её основание — прямоугольник, одна из сторон которого равна 12 см, а диагональ — 13 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота пирамиды — $\sqrt{13}$ см. Найдите:
   1) боковое ребро пирамиды;
   2) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 10 см и 18 см, а боковое ребро — 5 см.
4. Основанием треугольной пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите:
   1) площадь боковой поверхности пирамиды;
   2) высоту пирамиды.
5. В наклонной треугольной призме, боковое ребро которой равно 6 см, проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Это сечение является равнобедренным треугольником, боковая сторона которого равна $2\sqrt{3}$ см, а угол при вершине — $120°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы A.
6. На рёбрах AD, CD и BC тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M, N и K так, что $AM : MD = 2 : 1$, $CN : ND = 4 : 3$, $CK : KB = 2 : 5$. В каком отношении плоскость MNK делит ребро AB?

Вариант 2

1. Боковое ребро прямой треугольной призмы равно 12 см, её основание — прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 см и 4 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2 см, а высота пирамиды — $\sqrt{15}$ см. Найдите:
   1) боковое ребро пирамиды;
   2) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 18 см и 34 см, а боковое ребро — 17 см.
4. Основанием треугольной пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите:
   1) площадь боковой поверхности пирамиды;
   2) высоту пирамиды.
5. В наклонной треугольной призме, боковое ребро которой равно 8 см, проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Это сечение является равнобедренным треугольником, боковая сторона которого

равна 4 см, а угол при вершине — 90°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

6. На ребрах BD, CD и AB тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M, N и E так, что $BM : MD = 3 : 1$, $CN : ND = 1 : 6$, $AE : EB = 1 : 9$. В каком отношении плоскость MNE делит ребро AC?

Вариант 3

1. Боковое ребро прямой четырёхугольной призмы равно 9 см, её основание — прямоугольник, диагональ которого равна 10 см, а одна из сторон — 8 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро — 7 см. Найдите:
   1) высоту пирамиды;
   2) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 12 см и 22 см, а боковое ребро — 13 см.
4. Основанием четырёхугольной пирамиды является ромб с острым углом α и большей диагональю a. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите:
   1) площадь боковой поверхности пирамиды;
   2) высоту пирамиды.
5. В наклонной треугольной призме, боковое ребро которой равно 12 см, проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Это сечение является равнобедренным треугольником, основание которого равно $6\sqrt{3}$ см, а угол при вершине — 120°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
6. На рёбрах AC, CD и AB тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M, N и F так, что $AM : MC = 8 : 5$, $CN : ND = 3 : 4$, $AF : FB = 1 : 2$. В каком отношении плоскость MNF делит ребро BD?

Вариант 4

1. Боковое ребро прямой треугольной призмы равно 7 см, её основание — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 см, а один из катетов — 6 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.
2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 см, а боковое ребро пирамиды — 3 см. Найдите:
   1) высоту пирамиды;
   2) площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 16 см и 40 см, а боковое ребро — 15 см.
4. Основанием четырёхугольной пирамиды является ромб с острым углом α и меньшей диагональю a. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите:
   1) площадь боковой поверхности пирамиды;
   2) высоту пирамиды.
5. В наклонной треугольной призме, боковое ребро которой равно 10 см, проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Это сечение является равнобедренным треугольником, основание которого равно 6 см, а угол при вершине — 90°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
6. На рёбрах BD, BC и CA тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки M, F и E так, что $BM : MD = 5 : 1$, $CF : FB = 3 : 2$, $AE : EC = 4 : 5$. В каком отношении плоскость MFE делит ребро AD?

Контрольная работа № 6

Тема. Итоговая

Вариант 1

1. Точка M равноудалена от всех сторон квадрата со стороной 6 см и находится на расстоянии 9 см от плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки M до сторон квадрата.
2. Точка A находится на расстоянии 9 см от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью α углы 45° и 60° соответственно. Найдите расстояние между точками B и C, если угол между проекциями наклонных равен 150°.
3. Через вершину B треугольника ABC, в котором $AB = BC = 34$ см, $AC = 32$ см, проведён перпендикуляр DB к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями ABC и ADC, если $DB = 20$ см.
4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α. Бо́льшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
5. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат, боковые грани BCM и DCM перпендикулярны плоскости основания пирамиды, $MB = 13$ см, $MC = 12$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6. Основанием пирамиды является правильный треугольник, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ см. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

1. Точка F равноудалена от всех вершин прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см и находится на расстоянии 5 см от плоскости прямоугольника. Найдите расстояние от точки F до вершин прямоугольника.
2. Точка K находится на расстоянии 4 см от плоскости α. Наклонные KA и KB образуют с плоскостью α углы 45° и 30° соответственно, а угол между наклонными равен 135°. Найдите расстояние между точками A и B.
3. Через вершину C треугольника ABC, в котором $AC = BC$, проведён перпендикуляр KC к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями ABC и ABK, если $AB = 12$ см, $AK = 10$ см, $KC = 2$ см.
4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
5. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат, боковые грани ADM и CDM перпендикулярны плоскости основания пирамиды, $MD = 12$ см, $MA = 15$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
6. Основанием пирамиды является правильный треугольник. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный 60°. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите сторону основания пирамиды.

Вариант 3

1. Точка A равноудалена от прямых, содержащих стороны правильного треугольника со стороной 30 см, и находится на расстоянии 5 см от плоскости треугольника. Проекцией точки A на плоскость треугольника является точка, принадлежащая этому треугольнику. Найдите расстояние от точки A до сторон треугольника.
2. Точка B находится на расстоянии $3\sqrt{2}$ см от плоскости α. Наклонные BA и BC образуют с этой плоскостью углы 60° и 30° соответственно. Найдите расстояние между точками A и C, если угол между проекциями наклонных равен 120°.
3. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см, проведён перпендикуляр NA к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями ABC и NBC, если $NB = 14$ см.

4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и тупым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
5. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат со стороной 6 см, боковые грани ABM и CBM перпендикулярны плоскости основания пирамиды, $AM = 10$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
6. Основанием пирамиды является правильный треугольник, сторона которого равна 8 см. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный $30°$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 4

1. Точка D равноудалена от всех вершин правильного треугольника со стороной 12 см и находится на расстоянии 4 см от плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до вершин треугольника.
2. Точка C находится на расстоянии 3 см от плоскости α. Наклонные CA и CB образуют с плоскостью α углы $30°$ и $60°$ соответственно, а угол между наклонными равен $150°$. Найдите расстояние между точками A и B.
3. Через вершину D правильного треугольника ADB со стороной $2\sqrt{3}$ см проведён перпендикуляр PD к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями ADB и APB, если $PB = 4$ см.
4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и тупым углом α. Бóльшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
5. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат, боковые грани MAB и MAD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, $AD = 8$ см, $MA = 15$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
6. Основанием пирамиды является правильный треугольник. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол, равный $45°$. Высота пирамиды равна $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону основания пирамиды.

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Стандарта является оценка образовательных достижений обучающихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по геометрии направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным **объектом** оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность *основ гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации*, в том числе готовность к *выбору направления профильного образования*;

3) сформированность *социальных компетенций*, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным **объектом** оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и внеучебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным **объектом** оценки **предметных результатов** по математике в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по математике являются *стартовое*, *текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности обучающихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля:

Методы контроля в учебном процессе по алгебре

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест • Зачёт	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения обучающимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по математике, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по математике;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность учащихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

В целях формирования ИКТ-компетентности учащихся при обучении математике использовать средства ИКТ можно на уроках математики; во внеурочной деятельности; в учебно-исследовательской и проектной деятельности; при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики, учитель может использовать следующие *средства ИКТ*: мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур, готовые программные продукты (компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.).

Использование средств ИКТ при обучении математике способствует: повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса; расширению возможностей использования источников информации; созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения; повышению эффективности анализа результатов обучения.

Применение средств ИКТ в обучении математике формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится: использовать калькулятор для вычислений; осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора; создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц; создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ; создавать графические объекты; осуществлять поиск информации в Интернете; соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Приложение

Технологическая карта урока № ___

Тип урока

Формируемые результаты

Предметные:

Личностные:

Метапредметные:

Планируемые результаты

Основные понятия

Средства ИКТ, используемые на уроке

Программное обеспечение

Образовательные интернет-ресурсы

Организационная структура урока

Этапы проведения урока	Форма организации УД	Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов			Средства ИКТ
		Учебник	Рабочая тетрадь	Дидактические материалы	
1. Организационный этап					
2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся					
3. Актуализация знаний					
4. Изучение нового материала					
5. Первичное закрепление нового материала					
6. Итоги урока					
7. Информация о домашнем задании					

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы, с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную, творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, учащиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках геометрии направлена:

• на повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;

• развитие коммуникативных умений;

• формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;

• формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по математике учащийся научится:

• анализировать фрагменты работ учёных-математиков;

• описывать историю математических открытий;

• оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;

• представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;

• рассматривать практические приложения математических знаний;

• применять математические знания в быту и в технике;

• анализировать связь математики с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать прежде всего качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектирования учебной деятельности. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности на уроках геометрии (рекомендации для учителя)

Название проекта ____________________

Цели проекта ____________________

Планируемые результаты
Предметные: ____________________
Личностные: ____________________
Метапредметные: ____________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта ____________________

Виды деятельности учащихся ____________________
____

Форма организации ____________________

Продолжительность выполнения ____________________
____

Результат (продукт) деятельности ____________________
____

План реализации проекта

Этап	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: метод опроса, наблюдение,	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует.

Окончание

Этап	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
	изучение документации и т. д.		Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов, выводы	Анализ полученной информации, подготовка к её представлению	Анализируют полученную информацию, выполняют оформление проектной работы	Контролирует, наблюдает, советует
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью учащихся

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа ______________________________

Параметры	Само-оценка[1]	Взаимо-оценка[1]	Оценка учителя[1]	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
			Итоговый балл	

[1] Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание