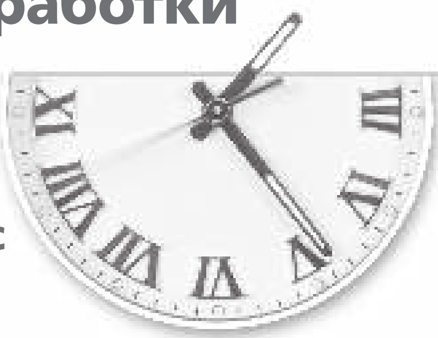
МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

Поурочные разработки

9 класс



Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Б93

16+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Бутузов В. Ф.

Б93 Геометрия. Поурочные разработки. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 160 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-043012-8.

Поурочные разработки составлены по учебнику авторского коллектива В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия. 9 класс».

В них содержатся методические рекомендации по проведению уроков, распределение задач, самостоятельных и контрольных работ по темам, приводится примерное тематическое планирование, решены некоторые задачи из учебника.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович, **Кадомцев** Сергей Борисович, **Прасолов** Виктор Васильевич

Геометрия
Поурочные разработки
9 класс

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *П. А. Бессарабова*. Младший редактор *Е. В. Трошко*. Художественный редактор *О. П. Боголюбова*. Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской, И. В. Губиной*. Технический редактор и верстальщик *Н. В. Лукина*. Корректоры *И. П. Ткаченко, М. А. Терентьева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 12.05.12. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,30. Тираж 2000 экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

ОАО ордена «Знак Почёта» «Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова». 214000, г. Смоленск, пр. Гагарина, 2.

ISBN 978-5-09-043012-8

Предисловие

Книга предназначена учителям, преподающим по учебнику В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия. 9 класс» под редакцией В. А. Садовничего (М.: Просвещение, 2012).

Поурочные разработки содержат методические рекомендации по проведению уроков. Для каждого урока указаны его задачи и приведены комментарии к теоретическому материалу, в которых обращается внимание учителя на наиболее важные моменты и особенности изложения этого материала в учебнике. При этом особое внимание уделяется тем понятиям и утверждениям, которые вводятся и обосновываются иначе, нежели в других известных учебниках геометрии. Это относится, в частности, к определению равных векторов, а также к выводу формулы площади прямоугольника. В поурочных разработках содержатся комментарии к задачам, которые рекомендуется решить на данном уроке, и приведены решения наиболее важных и наиболее трудных задач из учебника.

По каждой теме, а часто и по каждому уроку сформулированы основные требования к учащимся: что они должны уметь (формулировать, доказывать, решать, выполнять те или иные универсальные учебные действия) в результате изучения этой темы и выполнения домашнего задания.

По каждой теме предлагается провести самостоятельную работу, а по окончании изучения каждой главы и в конце учебного года — контрольную работу. Самостоятельные и контрольные работы содержатся в подготовленной авторами книге «Дидактические материалы. 9 класс» (М.: Просвещение, 2012).

Последняя глава учебника (глава 9) является введением в стереометрию. В соответствии со стандартами второго поколения материал этой главы не является обязательным для изучения, и поэтому он не включён в почасовое тематическое планирование. Вместе с тем в классах с достаточно высоким уровнем математической подготовки учитель может за счёт экономии времени на изучение основного материала (главы 7 и 8) познакомить учащихся с элементами стереометрии. Это можно сделать, например, в форме обзорных лекций учителя (или самых сильных учеников) с решением наиболее интересных задач этой главы.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, содержащиеся в книге, являются примерными. В зависимости от уровня учащихся класса учитель может вносить коррективы как в проведение уроков, так и в подбор заданий для классной и домашней работы учащихся.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами и их свойствами, с различными методами, применяемыми в геометрии, но и на решение более важной задачи — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно и точно излагать свои мысли, использовать геометрический язык для описания предметов окружающего мира, формирование представлений о математике как универсальном средстве исследования реальных явлений и процессов с помощью их математических моделей, развитие творческих способностей учащихся.

Уроки 1—4 Вводное повторение

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: используя «Введение» учебника, повторить основной материал 8 класса. К основному теоретическому материалу 8 класса относятся: признаки параллельности двух прямых, связанные с накрест лежащими, соответственными и односторонними углами; основная теорема о параллельных прямых; свойства параллельных прямых, понятие расстояния между параллельными прямыми, свойства углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами; теоремы о пересечении биссектрис треугольника и о вписанной в треугольник окружности; теоремы о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и об описанной около треугольника окружности; формула суммы углов выпуклого n-угольника; свойство сторон описанного четырёхугольника; свойство углов вписанного четырёхугольника; теоремы об окружностях, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него; свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба; понятия фигуры, симметричной относительно точки, и фигуры, симметричной относительно оси; теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции; теорема Фалеса; теоремы о пересечении медиан треугольника и о пересечении высот треугольника; понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса для углов от $0°$ до $180°$, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения; теорема Пифагора и обратная ей; теоремы синусов и косинусов; теорема о биссектрисе треугольника; признаки подобия треугольников; теорема об отрезках пересекающихся хорд и теорема о квадрате касательной.

Повторение теоретического материала, изученного в 8 классе, целесообразно сочетать с решением задач. В качестве задачного материала можно использовать приведённые ниже задачи, а также дополнительные задачи из книги «Дидактические материалы. 8 класс». На повторение материала глав 4 и 5 учебника 8 класса можно отвести по одному уроку, на повторение материала главы 6 — полтора урока, а в оставшееся время на четвёртом уроке полезно провести самостоятельную работу (возможные варианты работы приведены ниже).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4 «ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ»
(к первому уроку)

1. Параллельны ли прямые a и b, изображённые на рисунке 1, если: $\angle 1 = \angle 7$; $\angle 3 + \angle 8 = 180°$; $\angle 2 + \angle 5 = 180°$; $\angle 3 = \angle 8 = 90°$? Ответы обоснуйте.

2. Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, на $20°$ больше другого. Найдите эти углы.

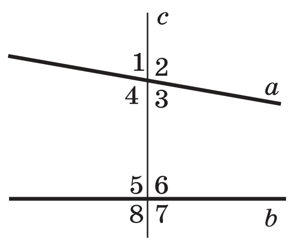


Рис. 1

3. Через точку C, лежащую на биссектрисе угла AOB, равного $78°$, проведена прямая, параллельная прямой AO. Она пересекает прямую OB в точке D. Найдите углы треугольника CDO.

4. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведённой к этой стороне.

5. Стороны AB и BC треугольника ABC касаются вписанной в него окружности в точках D и E. Докажите, что если $AD = CE$, то этот треугольник равнобедренный.

6. Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной в него и описанной около него окружностей.

7. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

8. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает биссектрису угла B в точке O, а окружность, описанную около треугольника, — в точке D. Докажите, что $\angle BOD = \angle OBD$.

Решая задачу 1, нужно вспомнить признаки параллельности двух прямых, связанные с накрест лежащими, соответственными и односторонними углами. Следует предложить учащимся самим сформулировать утверждения об этих признаках. Можно поставить перед ними вопрос так: какими утверждениями о параллельных прямых нужно пользоваться, чтобы решить задачу 1? После того как утверждения сформулированы, нужно поставить ещё один вопрос: что выражают эти утверждения — признаки или свойства параллельных прямых? Обсуждая ответ на этот вопрос, учителю следует подчеркнуть, что в любом утверждении о том или ином признаке параллельности двух прямых дано какое-то условие, а параллельность прямых вытекает из этого условия, т. е. выполнение данного условия является признаком, по которому можно сделать вывод о том, что прямые параллельны. Иными словами, упомянутое условие — это то, что дано, а параллельность прямых — это то, что требуется доказать.

В таком же ключе, решая задачу 2, можно обсудить утверждения о свойствах параллельных прямых. Следует подчеркнуть, что эти утверждения являются обратными к утверждениям о признаках параллельности прямых.

В классах с хорошей математической подготовкой учащихся полезно задать им такой вопрос: а как доказывается теорема о признаке параллельности двух прямых, связанном с накрест лежащими углами? При необходимости можно сделать подсказку — «методом от противного» — и дать на дом задание доказать самим эту теорему, не заглядывая в учебник 8 класса.

Далее на первом уроке можно решить задачи 5 и 6, вспомнив по ходу их решения теоремы о пересечении биссектрис треугольника и об окружности, вписанной в треугольник, и также теоремы о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и об окружности, описанной около треугольника. В связи с теоремой о пересечении биссектрис треугольника полезно поставить вопрос: какое свойство биссектрис угла используется при доказательстве этой теоремы? И аналогичный вопрос можно задать о свойстве серединного перпендикуляра к отрезку.

Задание на дом: введение (материал, относящийся к главам 4 и 5 учебника 8 класса); задачи 3, 4, 7, 8 из приведённых на с. 5, 6.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5 «МНОГОУГОЛЬНИКИ»
(ко второму уроку)

9. Найдите угол выпуклого восьмиугольника, все углы которого равны.

10. Докажите, что диагонали AC и AD правильного пятиугольника $ABCDE$ делят угол BAE на три равные части.

11. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности. Найдите AD, если $AB=3$, $BC=4$ и $CD=5$.

12. Диагонали параллелограмма $ABCD$, равные 12 и 14, пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника COD, если $AB=8$.

13. В окружности проведены диаметры AB и CD. Докажите, что четырёхугольник $ACBD$ — прямоугольник.

14. На параллельных сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle ADB=\angle CBD$, отмечены точки M и N так, что отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что $AM=CN$.

15. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; $AO=OD$, $BO=OC$ и $\angle BAC=\angle ACD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

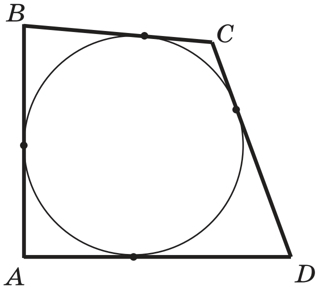
16. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка M — середина стороны AB, $AM=2$ и $OM=3$. Найдите периметр параллелограмма.

17. Ортоцентр равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равноудалён от вершины B и середины стороны AC. Найдите косинус угла B.

18. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AC. Она пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите MN, если $AC=9$ см.

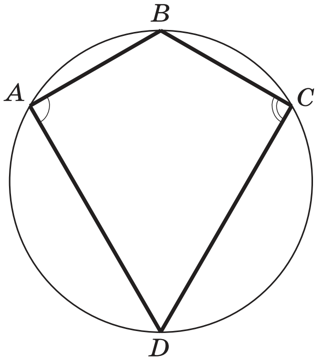
Материал главы 5 «Многоугольники» весьма обширный, поэтому по одним темам этой главы следует ограничиться только повторением теоретической части, по другим — сочетать повторение теории с решением задач.

Начать второй урок можно с решения задачи 9, вспомнив формулу суммы углов выпуклого n-угольника и в связи с этим повторив определение выпуклого многоугольника.



$AB + CD = AD + BC$

Рис. 2



$\angle A + \angle C = 180^\circ$

Рис. 3

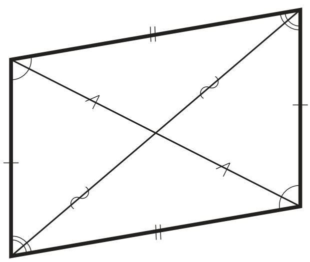


Рис. 4

Свойство сторон описанного четырёхугольника и свойство углов вписанного четырёхугольника можно проиллюстрировать заранее заготовленными рисунками (рис. 2 и 3), предложив кому-то из учащихся обосновать утверждения об этих свойствах, опираясь на рисунки.

Затем целесообразно решить задачи 12 и 13, а после этого путём коллективного обсуждения сформулировать все утверждения, связанные со свойствами и признаками параллелограмма, прямоугольника, ромба. Все свойства параллелограмма можно проиллюстрировать одним рисунком (рис. 4), отмечая равные элементы параллелограмма по ходу формулировки соответствующих утверждений. Для иллюстрации каждого из признаков параллелограмма целесообразно использовать отдельный рисунок. Обсуждая особые свойства и признаки прямоугольника (диагонали равны) и ромба (диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам), учителю следует отметить, что каждый признак параллелограмма выделяет параллелограмм из всего множества четырёхугольников, а особые признаки прямоугольника и ромба выделяют их из множества параллелограммов.

При наличии времени в конце урока можно решить задачу 16 и в связи с этим повторить теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции.

Задание на дом: введение (материал, относящийся к главам 5 и 6 учебника 8 класса); задачи 10, 11, 14, 15, 17, 18 из приведённых на с. 7.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6 «РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

(к третьему и четвёртому урокам)

19. Найдите высоту прямоугольного треугольника с катетами 15 см и 20 см, проведённую к гипотенузе.

20. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 9 см и 16 см. Найдите катеты этого треугольника.

21. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите AB, если $\angle A = 80°$ и $\angle B = 70°$.

22. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle A = 42°$, $\angle B = 18°$ и $AB = 2\sqrt{3}$.

23. Найдите косинус наименьшего угла треугольника со сторонами 4, 5 и 6.

24. Решите треугольник ABC, если $\angle A = 37°$, $\angle B = 30°$ и $AB = 10$.

25. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $\angle A = 52°$, $\angle B = 108°$ и $AC + BC = 12$.

26. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

27. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AB и CE пересекаются в точке F. Докажите, что треугольники AEF и DEC подобны.

28. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $BE : EA = BF : FC$. Докажите, что треугольники ABC и EBF подобны.

29. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $AM = 9$ см, $AB = 21$ см и $CM = 3DM$. Найдите CD.

30. Хорда CD, перпендикулярная к диаметру AB, пересекает его в точке M, $AM = 5$ см. Найдите диаметр окружности, если известно, что он равен $AM + CD$.

31. На продолжении стороны AB квадрата $ABCD$ за точку B отмечена точка P так, что $PB = AB$. Докажите, что отрезок PK касательной, проведённой через точку P к окружности, описанной около квадрата (K — точка касания), равен диаметру этой окружности.

В начале третьего урока можно обсудить решения задач 17 и 18 из домашнего задания и в связи с этим повторить теоремы о пересечении медиан треугольника и о пересечении высот треугольника.

После этого следует перейти к тригонометрическому материалу, изложенному в главе 6 учебника 8 класса. Учащиеся должны сами дать определения косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника, сформулировать теорему Пифагора и обратную ей. Далее можно решить задачу 19, а затем учителю целесообразно самому напомнить учащимся, как определялись синус и косинус угла α из промежутка $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, что такое тангенс и котангенс угла, записать формулы приведения и основное тригонометрическое тождество. Путём фронтального опроса полезно вспомнить, чему равны значения тригонометрических функций для углов в 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180° и 0°. Далее можно решить задачи 21 и 23 и по ходу их решения повторить теоремы синусов и косинусов. Целесообразно также вспомнить теорему о биссектрисе треугольника.

Задание на дом: введение (материал, относящийся к главе 6 учебника 8 класса); задачи 20, 22, 24, 25 из приведённых на с. 9.

В первой половине четвёртого урока нужно повторить определение подобных треугольников и теоремы о признаках подобия треугольников. Желательно, чтобы учащиеся сформулировали их сами; полезно обратить внимание учащихся на соответствие (аналогию) между первым и вторым признаками подобия треугольников и первым и вторым признаками равенства треугольников. Нужно также повторить теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной и решить задачи 28 и 29. При наличии времени во второй половине урока можно провести самостоятельную работу.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Через точку A проведена касательная AB к окружности радиуса 5 с центром O (B — точка касания). Найдите угол AOB, если $AB = 5\sqrt{3}$.
2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если остальные стороны равны 3 см и 5 см.
3. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 20, 20 и 24.

Вариант 2

1. Через точку A проведена касательная AB к окружности радиуса 3 (B — точка касания), отрезок BC — диа-

метр этой окружности. Найдите угол BAC, если $AC = 6\sqrt{2}$.

2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в $135°$, если две другие стороны треугольника равны 2 см и $3\sqrt{2}$ см.
3. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 15, 15 и 24.

Вариант 3

1. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности (B и C — точки касания). Найдите угол BAC, если известно, что отрезок AB равен радиусу окружности.
2. Вершина B параллелограмма $ABCD$ с углом A, равным $30°$, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD. Найдите AC, если $AB = \sqrt{7}$.
3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20 и 24.

Вариант 4

1. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Найдите угол BOC, если $AB = 5$ см, а периметр четырёхугольника $ABOC$ равен 20 см.
2. Найдите медиану AM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, равным $2\sqrt{21}$, и углом B, равным $120°$.
3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 15, 15 и 24.

Задание на дом: введение; задачи 27, 28, 30, 31 из приведённых на с. 9.

Основные требования к учащимся

В результате повторения основного теоретического материала 8 класса учащиеся должны уметь формулировать определения, теоремы и утверждения, изученные в 8 классе; различать, какие утверждения выражают признаки геометрических фигур, а в каких речь идёт о свойствах фигур; приводить примеры прямой и обратной теорем, примеры теорем, которые доказываются методом от противного; решать задачи, используя теоретический материал 8 класса. Всё это способствует формированию умения систематизировать свои знания.

Уроки 5, 6 Ось координат. Прямоугольная система координат

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие прямоугольной системы координат и доказать утверждение о координатах середины отрезка.

С понятием прямоугольной системы координат учащиеся уже знакомы. Поэтому, начиная урок, учитель может сказать, что напомнит им кое-что из того, что они уже знают из курса алгебры и будут теперь активно использовать в геометрии. Учащиеся должны твёрдо усвоить, что ось координат — это прямая, на которой выбрана точка (начало координат), разделяющая прямую на две полуоси (два луча), одна из которых называется положительной полуосью и отмечается стрелкой, а другая — отрицательной полуосью; кроме того, выбрана единица измерения отрезков. Каждой точке на оси координат соответствует определённое число — координата этой точки. Как вводятся координаты точек на оси и как они обозначаются, удобно проиллюстрировать с помощью рисунка 35 учебника или соответствующего этому рисунку плаката.

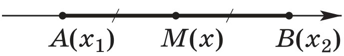


Рис. 5

Далее учителю следует сформулировать и доказать утверждение о координате середины отрезка, лежащего на оси координат. По ходу доказательства у учащихся может возникнуть вопрос: почему длина отрезка AM на рисунке 36 учебника равна $x - x_1$? (рис. 5).

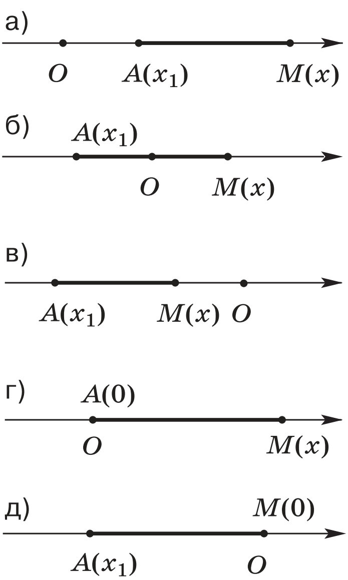


Рис. 6

Чтобы доказать справедливость равенства $AM = x - x_1$, рассмотрим все возможные случаи расположения точек A и M относительно начала координат (точки O), учитывая при этом, что в соответствии с условием $x_1 < x_2$ точка M лежит на оси правее точки A (см. рис. 5).

Если точки A и M лежат на положительной полуоси (рис. 6, *а*), то, согласно определению координаты точки, $x = OM$, $x_1 = OA$, поэтому $AM = OM - OA = x - x_1$.

Если точка A лежит на отрицательной полуоси, а точка M — на положительной полуоси (рис. 6, *б*), то $x_1 = -OA$, $x = OM$, поэтому $AM = OA + OM = -x_1 + x = x - x_1$.

Если точки A и M лежат на отрицательной полуоси (рис. 6, *в*), то $x_1 = -OA$, $x = -OM$, поэтому $AM = OA - OM = -x_1 - (-x) = x - x_1$.

Наконец, возможны случаи, когда либо точка A, либо точка M совпадает с точкой O. В первом из этих случаев (рис. 6, *г*) $x = OM$, $x_1 = 0$, поэтому $AM = OM = x = x - x_1$, а во втором случае (рис. 6, *д*) $x = 0$, $x_1 = -OA$, поэтому $AM = OA = -x_1 = x - x_1$.

Итак, в любом случае $AM = x - x_1$.

В целях экономии времени на уроке учитель может не рассказывать приведённое доказательство, а включить его в домашнее задание, пояснив, что нужно рассмотреть 5 возможных случаев расположения точек A и M относительно точки O.

Затем учителю следует разъяснить смысл замечания в конце п. 84 учебника об «отрезках», концы которых совпадают, и перейти к понятию прямоугольной системы координат.

Можно предложить учащимся прочитать самим начало текста п. 85 (до утверждения о координатах середины отрезка), а затем вызвать кого-то к доске для рассказа о том, как задаётся и обозначается прямоугольная система координат, как называются оси координат и как определяются и называются координаты точки в заданной прямоугольной системе координат.

После этого можно сформулировать утверждение о координатах середины отрезка (изучение доказательства этого утверждения полезно включить в домашнее задание). Учителю следует иметь в виду, что это утверждение будет играть важную роль в п. 87 при доказательстве теоремы о координатах равных векторов. Далее в классе решаются задачи из задания 1 (насколько позволит время).

При проведении урока можно использовать проектное задание № 1 (с. 121 учебника).

Задание на дом: пп. 84 и 85, вопросы 1—6 (с. 57); несколько задач из задания 2 (на усмотрение учителя).

Второй урок следует начать с обсуждения доказательства утверждения о координатах середины отрезка, вызвав к доске кого-то из учащихся. Следует обратить особое внимание на то, что по ходу доказательства нужно обосно-

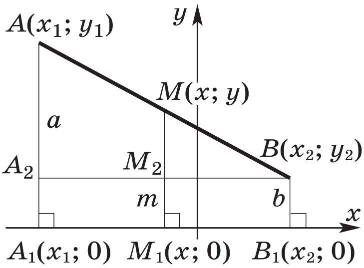


Рис. 7

вать справедливость равенства $A_1M_1 = M_1B_1$ (рис. 7). В учебнике справедливость этого равенства предлагается доказать, пользуясь теоремой Фалеса. Приведём требуемое доказательство.

По условию $AM = MB$ (поскольку M — середина отрезка AB), а прямые a, b и m проведены перпендикулярно к оси Ox. Будем считать, что точка B не лежит на оси Ox, и проведём через эту точку прямую, параллельную оси Ox. Она пересекает прямые a и m в точках A_2 и M_2 (см. рис. 7). Если прямая BA параллельна оси Ox, то она совпадает с прямой BA_2; при этом точка A совпадает с точкой A_2, а точка M — с точкой M_2, поэтому $A_2M_2 = M_2B$. Если же прямая BA не параллельна оси Ox, то равенство $A_2M_2 = M_2B$ следует из теоремы Фалеса, применённой к углу ABA_2.

Четырёхугольники $A_1A_2M_2M_1$ и $M_1M_2BB_1$ — прямоугольники (так как параллельные прямые A_1B_1 и A_2B перпендикулярны к прямым a, m и b), следовательно, $A_1M_1 = A_2M_2$ и $M_1B_1 = M_2B$ (противоположные стороны прямоугольника равны). Из этих равенств и равенства $A_2M_2 = M_2B$ следует, что $A_1M_1 = M_1B_1$.

Если же точка B лежит на оси Ox, то она совпадает с точкой B_1, поэтому $AM = MB_1$. Если при этом точка A не лежит на оси Ox, то равенство $A_1M_1 = M_1B_1$ следует из теоремы Фалеса, применённой к углу AB_1A_1, а если точка A лежит на оси Ox, то она совпадает с точкой A_1, точка M совпадает с точкой M_1, поэтому равенство $A_1M_1 = M_1B_1$ совпадает с равенством $AM = MB$. Итак, в любом случае $A_1M_1 = M_1B_1$.

Разобрав доказательство утверждения о координатах середины отрезка, нужно оставшееся время посвятить решению задач из задания 1.

Задание на дом: п. 85; вопрос 6 (с. 57); оставшиеся задачи из задания 2.

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 84 и 85 учащиеся должны уметь объяснить, что такое ось координат и координаты лежащих на ней точек; уметь формулировать и доказывать утверждение о координатах середины отрезка, лежащего на оси координат; уметь объяснить, что такое прямоугольная система координат, как вводятся и как называются координаты точки в заданной прямоугольной системе координат; уметь формулировать и доказывать утверждение о координатах середины отрезка; проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника; уметь решать задачи такого типа, как в задании 1.

Урок 7 Вектор

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие вектора, его длины (модуля), равных векторов; объяснить, что равные ненулевые векторы лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой, их длины равны и они одинаково направлены.

Изучение векторов и действий с ними в курсе геометрии позволяет достигнуть и чисто предметной цели — применение векторов при исследовании свойств геометрических фигур, при решении геометрических задач, и межпредметной цели — использование векторного аппарата в физике. Поэтому, изучая векторы, нужно в подходящих случаях обращать внимание учащихся на физические приложения векторного исчисления. В частности, начиная урок, посвящённый понятию вектора, следует отметить, что некоторые физические величины являются векторными, т. е. характеризуются не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Примерами служат скорость точки, движущейся на плоскости или в пространстве, сила (например, сила тяжести, направленная к центру Земли).

После такого вступления нужно сказать, что мы понимаем под вектором в геометрии: это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом. При изображении вектора на одном его конце рисуют стрелку, которая показывает направление вектора: от начала к концу.

Далее, опираясь на текст учебника, нужно ввести обозначения для векторов, понятие вектора, противоположного данному, нулевого вектора, длины вектора, проиллюстрировать эти понятия с помощью рисунков, например рисунка 42 учебника, и перейти к одному из важнейших понятий в векторном исчислении — понятию равных векторов.

Определение равных векторов, данное в учебнике, отличается от определений в других учебниках и от того, как определяются равные векторы в физике, где два вектора называются равными, если их длины равны и они одинаково направлены. Преимущество определения равных векторов, данного в учебнике, состоит в том, что оно позволяет весьма просто доказывать утверждения о равных векторах (в частности, теорему о координатах равных векторов в п. 87), а с другой стороны, несложные рассуждения, приведённые в учебнике, показывают, что ненулевые векторы, равные в смысле данного определения, имеют одинаковые длины и одинаково направлены. Эти рассуждения, сопровождаемые рисунком 42 учебника (или аналогичным рисунком на доске), учителю следует провести самому.

Далее нужно решить задачи из задания 3.

> Задание на дом: п. 86; вопросы 7—12 (с. 57); задание 4.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 86 учащиеся должны уметь приводить примеры физических векторных величин; формулировать определение вектора; объяснить, как обозначаются векторы, какой вектор называется противоположным данному, что такое нулевой вектор, что такое длина вектора; уметь формулировать определение равных векторов и проводить рассуждения, показывающие, как из этого определения следует, что равные (ненулевые) векторы имеют равные длины и одинаково направлены; уметь решать задачи такого типа, как в задании 3.

Уроки 8, 9 Координаты вектора

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: сформулировать определение координат вектора в заданной прямоугольной системе координат; доказать теорему о координатах равных векторов и утверждение о том, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Первый урок можно начать с повторения (путём фронтального опроса) основных понятий, введённых на предыдущем уроке: определение вектора, обозначения векторов, противоположный вектор, нулевой вектор, длина вектора, определение равных векторов. После этого нужно дать определение координат вектора в заданной прямоугольной системе координат и можно решить задачу 5 а) (её решение приведено на с. 69, 70).

Затем учитель может поставить перед учащимися вопрос: как (по их интуитивным представлениям) связаны между собой координаты равных векторов? Напрашивается ответ: координаты равных векторов равны. А как это доказать?

Выслушав возможные предложения по доказательству, учителю следует подчеркнуть, что нужно исходить из определения равных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если середины отрезков AD и BC совпадают) и записать в координатах условие совпадения середин отрезков AD и BC (равенство соответствующих координат этих середин), откуда и следует, что координаты равных векторов соответственно равны.

Вслед за этим полезно предложить учащимся сформулировать обратное утверждение (если координаты векторов соответственно равны, то эти векторы равны) и дать возможность им самим доказать это утверждение, а затем можно вызвать кого-то к доске для рассказа доказательства.

В конце урока можно решить задачу 5 б).

Задание на дом: п. 87 (до введения понятия «вектор $\vec{a}$ отложен от точки M»); вопросы 13, 14 (с. 57); задачи 6 а), 6 б).

На втором уроке нужно объяснить учащимся, что слова «вектор $\vec{a}$ отложен от точки M» означают, что точка M является началом вектора $\vec{a}$. Для проверки понимания этих слов можно задать вопрос: от какой точки отложен вектор $\overrightarrow{AB}$?

Затем целесообразно поставить такой вопрос: пусть дана точка M и дан вектор $\vec{a}$; можно ли от точки M отложить вектор, равный вектору $\vec{a}$, и если можно, то сколько таких векторов можно отложить от точки M? Полезно, чтобы учащиеся ответили сначала на этот вопрос, исходя из наглядных представлений. Можно даже предложить кому-то из учащихся построить такой вектор на доске для отмеченной точки M и изображённого на доске вектора $\vec{a}$. Итогом этих предварительных рассуждений должно явиться утверждение: от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

Но наглядных представлений о том, что это утверждение верно, недостаточно. Утверждение требуется доказать. Как это сделать?

Целесообразно, чтобы учитель начал проводить доказательство так, как это сделано в учебнике: пусть $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ — данный вектор, $M(x_2; y_2)$ — данная точка, а затем поставил вопрос: чему должны быть равны координаты $(x; y)$ точки N, чтобы вектор $\overrightarrow{MN}\{x - x_2; y - y_2\}$ был равен вектору $\vec{a}\{x_1; y_1\}$? Нетрудно догадаться (желательно, чтобы учащиеся догадались), что равенство $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ будет выполнено, если x и y выбрать так, чтобы координаты этих векторов были соответственно равны, т. е. $x - x_2 = x_1$ и $y - y_2 = y_1$, откуда находим: $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$. Тем самым доказано, что от данной точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Нужно ещё доказать, что такой вектор только один. Снова можно поставить вопрос: как это доказать?

Наряду с доказательством, приведённым в учебнике, возможно и такое рассуждение: если точка $N_1(x; y)$ отлична от точки $N(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, то хотя бы одна координата точки N_1 отлична от соответствующей координаты точки N. Пусть, например, $x \neq x_1 + x_2$. Тогда первая координата вектора $\overrightarrow{MN_1}$, равная $x - x_2$, не равна x_1, т. е. не равна первой координате вектора $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, и, следовательно, $\overrightarrow{MN_1} \neq \vec{a}$. Таким образом, от точки M можно отложить только один вектор, равный вектору $\vec{a}$, — этим вектором является вектор $\overrightarrow{MN}$.

Завершив доказательство утверждения, полезно обратить внимание на замечание в конце п. 87, связанное с терминологией, относящейся к равным векторам.

Затем следует решить задачи 5 в), 5 г), 5 д).

> Задание на дом: п. 87; вопрос 15 (с. 57); задачи 6 в), 6 г), 6 д).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 87 учащиеся должны уметь формулировать определение координат вектора в заданной прямоугольной системе координат, формулировать и доказывать теорему о координатах равных векторов; уметь объяснить смысл слов «вектор $\vec{a}$ отложен от точки M», доказывать утверждение: от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, проявив в процессе изучения интуицию и смекалку; уметь решать задачи такого типа, как в задании 5.

Урок 10 Длина вектора и расстояние между двумя точками

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: вывести формулу, выражающую длину вектора через его координаты, и формулу, выражающую расстояние между двумя точками через их координаты.

В начале урока можно проверить выполнение домашнего задания, уделив в ходе проверки особое внимание задаче 6 г). Её решение приведено на с. 70.

Затем нужно перейти к выводу формулы длины вектора, используя рисунок 46 учебника. По ходу рассказа учителю целесообразно задавать вопросы учащимся. Отложив от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}$, равный данному вектору $\vec{a}\{x; y\}$ (рис. 8, *а*), можно задать вопрос: почему координаты точки A равны $(x; y)$, т. е. равны координатам вектора $\vec{a}$? Чтобы ответить на этот вопрос, учащиеся должны вспомнить, что координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала. В данном случае каждая координата начала вектора $\overrightarrow{OA}$ (т. е. точки O) равна нулю, поэтому координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ равны соответствующим координатам точки A. С другой стороны, координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ равны координатам равного ему вектора $\vec{a}$ (равные векторы имеют соответственно равные координаты). Следовательно, координаты точки A соответственно равны координатам вектора $\vec{a}$, т. е. равны $(x; y)$. Далее можно спросить: чему равны катеты получившегося прямоугольного треугольника с гипотенузой OA? Возможен ответ: катеты равны x и y. Но числа x и y могут быть и отрицательными, как, например, на

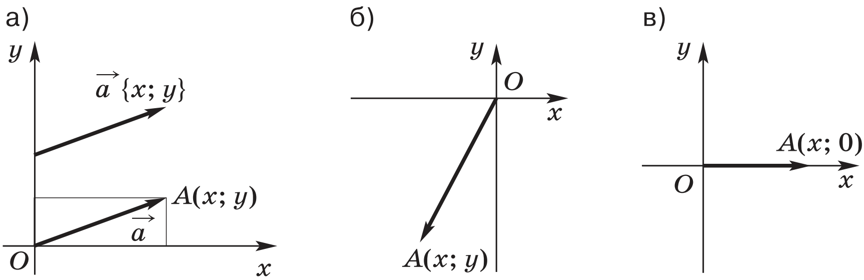


Рис. 8

рисунке 8, *б* (такой рисунок полезно нарисовать на доске), а длины катетов — положительные величины. Поэтому они равны $|x|$ и $|y|$ (а не x и y).

И наконец, полезно задать вопрос: почему формула $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$ верна и в том случае, когда точка A лежит на оси координат? Возможен такой (правильный) ответ: пусть, например, точка A лежит на оси абсцисс (рис. 8, *в*); в этом случае $y = 0$, $OA = |x|$, а так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то равенство $OA = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 0}$ также верно.

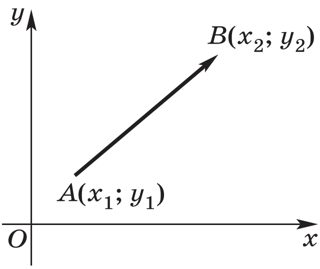


Рис. 9

Сразу после доказательства теоремы можно рассмотреть следствие из неё. Целесообразно поставить вопрос так: как вывести формулу расстояния между двумя точками с заданными координатами, используя доказанную теорему о длине вектора? В качестве подсказки можно нарисовать на доске рисунок 9.

После вывода формулы нужно решить задачи 7 а), 7 б), 7 в).

> Задание на дом: п. 88, вопросы 16, 17 (с. 58); задачи 8 а), 8 б), 8 в).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 88 учащиеся должны уметь выводить формулу, выражающую длину вектора через его координаты, и формулу, выражающую расстояние между двумя точками через их координаты, причём вторую формулу учащиеся должны вывести самостоятельно на уроке; уметь решать задачи типа 7 а), 7 б), 7 в).

Уроки 11, 12 Угол между векторами

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие угла между ненулевыми векторами, вывести формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты и, как следствие, условие перпендикулярности ненулевых векторов; провести самостоятельную работу № 1.

Вводя понятие угла между ненулевыми векторами, следует подчеркнуть, что это не геометрическая фигура (даже если векторы имеют общее начало). Под углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы понимаем градусную меру угла AMB с вершиной в произвольной точке M, построенного так, что $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ (угол AMB получается при условии, что лучи MA и MB не совпадают, рисунок 47 учебника следует нарисовать на доске; если же эти лучи совпадают, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаем равным $0°$). Введя это понятие, учитель может сказать, что нужно ещё обосновать корректность данного определения, а именно нужно доказать, что градусная мера угла AMB будет одной и той же при любом выборе точки M (в противном случае определение было бы некорректным). Обоснование корректности определения будет дано после вывода формулы, выражающей косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

Далее нужно приступить к выводу этой формулы, опираясь на текст учебника. Особое внимание нужно уделить обоснованию справедливости равенства $\cos\alpha = \frac{MA^2+MB^2-AB^2}{2MA\cdot MB}$ (равенство (6) из учебника) для случаев, когда точки M, A и B лежат на одной прямой. Таких случаев два: один получается, если $\alpha=0°$ (рис. 49, *а* учебника), а другой — если $\alpha=180°$ (рис. 49, *б* учебника). Под каждым из рисунков приведён вывод равенства $AB^2 = MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cdot\cos\alpha$, из которого и следует равенство (6). Целесообразно поручить учащимся самим разобраться в приведённых под рисунками формулах, а затем вызвать по очереди двух учеников к доске для вывода этих формул.

На следующем этапе доказательства теоремы правая часть равенства (6) выражается через координаты. При этом нужно проделать некоторые несложные вычисления, которые в учебнике опущены; учитель может поручить это сделать самим учащимся, вызвав потом кого-то к доске для проведения нужных вычислений.

Получив искомую формулу, нужно вернуться к понятию угла между ненулевыми векторами и доказать, что величина угла не зависит от выбора точки M, от которой откладываются векторы $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$. В учебнике это сделано весьма кратко, учителю следует развернуть доказательство: возьмём вместо точки M другую точку (какую-то точку N) и отложим от неё векторы $\overrightarrow{NK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{NL}=\vec{b}$. Тогда векторы $\overrightarrow{NK}$ и $\overrightarrow{NL}$ будут иметь такие же координаты, как и векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ (поскольку равные векторы имеют соответственно равные координаты). Следовательно, для косинуса угла KNL получится в точности такое же выражение через координаты векторов, какое было получено для косинуса угла AMB, т. е. косинусы этих углов равны, откуда следует, что равны и градусные меры этих углов. Таким образом, угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от выбора точки M, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Затем нужно решить задачи 7 г) и 7 д), применив выведенную формулу.

> Задание на дом: п. 89, включая определение и условие перпендикулярности ненулевых векторов; вопросы 18—20 (с. 58); задачи 8 г), 8 д).

На втором уроке нужно проверить усвоение понятия перпендикулярных векторов и умение вывести условие перпендикулярности ненулевых векторов. Следует обратить внимание учащихся на то, что уже не в первый раз в формулировке утверждения используются слова «тогда и только тогда». Тем самым здесь сформулированы два утверждения. Желательно, чтобы все учащиеся твёрдо усвоили, что в данном случае в утверждении, связанном со словом «тогда», дано равенство $x_1x_2+y_1y_2=0$ и требуется доказать, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны, а в утверждении, связанном со словами «только тогда», дано, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны, а требуется доказать, что выполняется равенство $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 1.

> Задание на дом: п. 89, в том числе доказать утверждение, содержащееся в последнем абзаце этого пункта; самостоятельно изучить п. 90 «Уравнение окружности» и решить задачи 9 а) и 9 б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 89 учащиеся должны уметь объяснить, что означают слова «угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α», выводить формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты; формулировать определение перпендикулярных векторов и выводить условие перпендикулярности двух ненулевых векторов; в ходе изучения п. 89 проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника; уметь решать задачи типа 7 г) и 7 д).

Урок 13 Уравнение окружности

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие уравнения линии в заданной прямоугольной системе координат; вывести уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке; решать задачи с использованием уравнения окружности.

С содержанием п. 90 учащиеся должны были ознакомиться самостоятельно в ходе выполнения домашнего задания, поэтому урок следует начать с опроса по материалу этого пункта. Прежде всего каждый ученик должен твёрдо усвоить, что называется уравнением данной линии в заданной прямоугольной системе координат. В связи с этим полезно обсудить такой вопрос: какое уравнение является уравнением оси абсцисс в прямоугольной системе координат Oxy? Желательно, чтобы учащиеся не только знали ответ, но и могли объяснить, почему уравнением оси абсцисс является уравнение $y=0$, т. е. могли провести рассуждение такого типа: если точка $M(x; y)$ лежит на оси абсцисс, то её ордината y равна нулю, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению $y=0$; если же точка $M(x; y)$ не лежит на оси абсцисс, то её ордината y не равна нулю и, следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $y=0$. Это и означает, что уравнением оси абсцисс является уравнение $y=0$.

Затем нужно вызвать кого-то из учащихся к доске для вывода уравнения окружности данного радиуса с центром в данной точке и проверить, как были решены задачи 9 а) и 9 б) из домашнего задания. После этого следует продолжить решение задач из задания 9, уделив особое внимание задаче 9 е) (учителю целесообразно самому рассказать её решение; при недостатке времени это можно сделать на следующем уроке).

Решения задач 9 д) и 9 е) приведены на с. 71—73.

> Задание на дом: п. 90; вопросы 21, 22 (с. 58); задачи 10 а), 10 б), 10 в), 10 г), 10 д).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 90 учащиеся должны проявить способность самостоятельно работать с текстом учебника; уметь объяснить, что называется уравнением данной линии в заданной прямоугольной системе координат; выводить уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке; уметь решать задачи такого типа, как в задании 9.

Уроки 14, 15 Уравнение прямой

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данному ненулевому вектору; ввести понятие углового коэффициента прямой и доказать утверждение о связи между угловыми коэффициентами двух прямых и их взаимным расположением; вывести уравнение прямой, проходящей через две данные точки; решать задачи с использованием уравнения прямой.

В начале первого урока путём опроса учащихся нужно вспомнить понятие уравнения линии в заданной прямоугольной системе координат и условие перпендикулярности ненулевых векторов, оно понадобится при выводе уравнения прямой.

Вывод уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному ненулевому вектору, учителю следует провести самому.

Затем нужно ввести понятие углового коэффициента прямой в данной системе координат, подчеркнув, что оно вводится только для прямых, не параллельных оси ординат. Уравнение такой прямой можно записать в виде $y = kx + c$; коэффициент k и называется угловым коэффициентом прямой в данной системе координат.

В классе с достаточно хорошим уровнем математической подготовки учащихся учитель может сообщить им более обширную информацию, связанную с угловым коэффициентом, чем та, которая содержится в учебнике. Можно отметить, что если $k = 0$, то уравнение прямой принимает вид $y = c$, а это означает, что прямая параллельна оси Ox, если $c \neq 0$, и совпадает с осью Ox, если $c = 0$. Если же $k \neq 0$, то прямая пересекает ось Ox в точке $M\left(-\frac{c}{k}; 0\right)$ (рис. 10). Обозначим буквой α угол, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки вокруг точки M, чтобы совместить её с данной прямой, и докажем, что

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

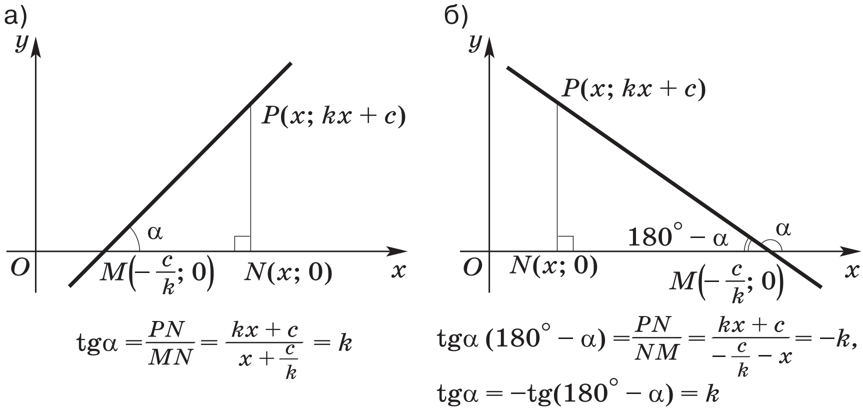


Рис. 10

Отметим на прямой какую-нибудь точку P с положительной ординатой и проведём из точки P перпендикуляр PN к оси Ox. Пусть координаты точки N равны $(x; 0)$, тогда абсцисса точки P также равна x, а поскольку точка P лежит на данной прямой, то её ордината y равна $kx + c$. Если угол α острый (рис. 10, *а*), то в прямоугольном треугольнике MNP

$$MN = x - \left(-\frac{c}{k}\right) = \frac{kx + c}{k}$$

(длина отрезка MN равна разности абсцисс точек N и M), $PN = kx + c$, поэтому $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{PN}{MN} = k$.

Если угол α тупой (рис. 10, *б*), то в прямоугольном треугольнике MNP угол PMN равен $180^\circ - \alpha$,

$$NM = -\frac{c}{k} - x = -\frac{kx + c}{k},$$

$PN = kx + c$, поэтому $\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{PN}{NM} = -k$, а так как $\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, то $\mathrm{tg}\,\alpha = k$.

Итак, угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла α. Этим и объясняется название «угловой коэффициент» — он характеризует угол наклона прямой к оси абсцисс.

В классах со средним уровнем подготовки учитель может ограничиться написанием формулы $k = \mathrm{tg}\,\alpha$, не выводя её.

После этого нужно перейти к утверждению: если угловые коэффициенты двух прямых различны, то эти прямые пересекаются, а если одинаковы, то прямые параллельны. Изучение доказательства этого утверждения, приведённого в учебнике, можно включить в домашнее задание, а в классе можно обсудить другой способ доказательства, опирающийся на геометрический смысл углового коэффициента, т. е. на формулу $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Пусть две прямые заданы уравнениями $y = k_1x + c_1$ и $y = k_2x + c_2$. Если $k_1 = k_2 = 0$, то обе прямые параллельны оси Ox, и, следовательно, они параллельны. Если $k_1 = k_2 \neq 0$, то равны тангенсы углов наклона прямых к оси Ox:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

поэтому равны и сами углы α_1 и α_2, т. е. равны соответственные углы, образованные при пересечении данных прямых осью Ox. Следовательно, данные прямые параллельны. Если же $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются. В самом деле, если бы они были параллельными, то выполнялось бы равенство $\alpha_1 = \alpha_2$ (соответственные углы равны), и тогда было бы верным равенство $k_1 = k_2$, что противоречит условию $k_1 \neq k_2$.

На первом уроке желательно решить задачу 11 а). Для её решения нужно уметь написать уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Как выводится такое уравнение в общем случае, учащимся ещё предстоит изучить, поэтому, решая данную задачу с конкретными точками, учителю нужно по существу проделать этот вывод для конкретных точек, подготовив тем самым учащихся к самостоятельному изучению общего случая. Решение задачи 11 а) приведено на с. 73.

Задание на дом: п. 91; вопросы 23—25 (с. 58); задачи 10 е), 12 а).

На втором уроке нужно обсудить вывод уравнения прямой, проходящей через две данные точки, в общем случае, решить задачи 11 б) и 11 в) и провести самостоятельную работу № 2 (при недостатке времени её можно провести на одном из следующих двух уроков).

Задание на дом: п. 91; вопросы 23—25 (с. 58); задачи 12 б) и 12 в).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 91 учащиеся должны уметь выводить уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данному ненулевому вектору, а также уравнение прямой, проходящей через две данные точки; <u>уметь</u> объяснить, что называется угловым коэффициентом прямой в данной системе координат, формулировать и доказывать утверждение о связи между угловыми коэффициентами двух прямых и их взаимным расположением; <u>уметь</u> решать задачи такого типа, как в задании 11.

Уроки 16, 17 Решение задач по теме «Координаты точки и координаты вектора»

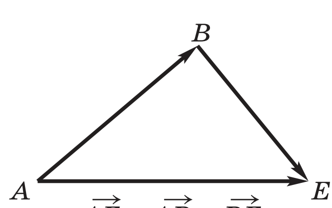
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач с использованием векторов, координат, уравнений окружности и прямой.

Для классной и домашней работы можно использовать дополнительные задачи к главе 7 (задачи 31—43), а также дополнительные задачи из дидактических материалов (на усмотрение учителя).

Уроки 18, 19 Сумма векторов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: сформулировать определение суммы и разности двух векторов; доказать теорему о координатах суммы двух векторов, следствие из неё и утверждение о координатах разности векторов; решать задачи, связанные со сложением и вычитанием векторов.

Определение суммы векторов можно предварить примером из механики, связанным с движением точки на плоскости. Пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку E. Эти перемещения можно изобразить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BE}$, а результирующее перемещение из точки A в точку E — вектором $\overrightarrow{AE}$ (рис. 11). Естественно назвать вектор $\overrightarrow{AE}$ суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BE}$.



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

Рис. 11

После этого нужно сформулировать определение суммы двух векторов, подчеркнув при этом, что суммой векторов мы называем не только построенный вектор $\overrightarrow{AE}$, но и любой вектор, равный вектору $\overrightarrow{AE}$.

Следует отметить, что введённое правило сложения двух векторов называется правилом треугольника. Рисунок 11 поясняет это название, хотя, конечно, треугольник получается не всегда. Можно задать учащимся вопрос: как должны быть расположены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BE}$ относительно друг друга, чтобы при их сложении не получилось треугольника? Забегая вперёд, учитель может сказать, что если два ненулевых вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они называются коллинеарными (это понятие понадобится немного позже). При сложении коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BE}$ точки A, B и E лежат на одной прямой, и поэтому фигура, состоящая из отрезков AB, BE и AE, не будет треугольником.

Затем нужно отметить некоторые свойства сложения векторов: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. Каждое из этих равенств следует непосредственно из определения суммы двух векторов. Желательно, чтобы учащиеся опирались на это определение, обосновывая справедливость указанных равенств.

Доказательство теоремы о координатах суммы двух векторов учителю следует провести самому, опираясь на текст учебника, а вывод следствия из этой теоремы (если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$) можно поручить провести ученикам. Желательно при этом, чтобы они не ограничились одной краткой фразой, приведённой в учебнике, а дали более развёрнутое доказательство: по определению суммы двух векторов $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$, поэтому, согласно доказанной теореме, каждая координата вектора $\overrightarrow{AC}$ равна сумме соответствующих координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, и каждая координата вектора $\overrightarrow{A_1C_1}$ равна сумме соответствующих координат векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$. Но координаты равных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ (и также равных векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$) соответственно равны (это было доказано ранее в п. 87), поэтому координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ также соответственно равны. Отсюда, согласно обратному утверждению теоремы о координатах равных векторов, следует, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, при выводе следствия используется не только теорема о координатах суммы двух векторов, но также теорема о координатах равных векторов (причём и прямое, и обратное утверждение) и формула сложения двух векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Далее можно решить несколько задач из задания 13 (насколько позволит время).

> Задание на дом: п. 92 (в том числе понятие разности векторов и утверждение о координатах разности векторов); вопросы 26—29 (с. 58); задачи 14 а), 14 б), 14 в), 14 г).

На втором уроке можно проверить, как решены задачи из домашнего задания и как усвоены понятие разности векторов и утверждение о координатах разности векторов (это также входило в домашнее задание). Для иллюстрации разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно использовать рисунок 59 учебника (или такой же рисунок на доске). Учащиеся должны усвоить, что разность данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить так: отложить от одной точки векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда разность $\vec{a} - \vec{b}$ — это вектор $\vec{c}$, началом которого является конец вектора $\vec{b}$, а концом — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 12). На рисунке 12 видно, что, согласно правилу треугольника, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, а это и означает по определению, что вектор $\vec{c}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

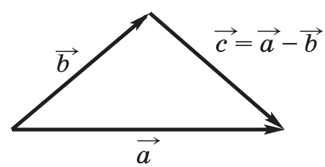


Рис. 12

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Для проведения доказательства утверждения о координатах разности векторов можно вызвать кого-то из учеников к доске (из тех, кто справился дома с этим заданием).

Приведём доказательство этого утверждения. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, и пусть вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x; y\}$. Требуется доказать, что $x = x_1 - x_2$ и $y = y_1 - y_2$. По определению разности векторов $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Согласно теореме о координатах суммы двух векторов, вектор $\vec{b} + \vec{c}$ имеет координаты $\{x_2 + x; y_2 + y\}$, а так как координаты равных векторов $\vec{b} + \vec{c}$

и $\vec{a}$ соответственно равны, то $x_2+x=x_1$ и $y_2+y=y_1$. Отсюда следуют равенства $x=x_1-x_2$ и $y=y_1-y_2$, что и требовалось доказать.

Далее нужно решить оставшиеся задачи из задания 13.

> Задание на дом: п. 92; вопросы 26—29 (с. 58); задачи 14 д), 14 е), 14 ж).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 92 учащиеся должны уметь формулировать определения суммы и разности двух векторов; строить сумму и разность двух данных векторов; уметь доказывать теорему о координатах суммы векторов, следствие из неё и утверждение о координатах разности векторов. В ходе изучения материала п. 92 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника; уметь решать задачи такого типа, как в задании 13.

Уроки 20, 21 Свойства сложения векторов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему о свойствах сложения векторов; обсудить ещё один способ построения суммы двух неколлинеарных векторов (правило параллелограмма), а также правило многоугольника построения суммы нескольких векторов; закрепить навыки решения задач, связанных со сложением и вычитанием векторов.

Первый урок нужно начать с обсуждения теоремы о свойствах сложения векторов. Учитель может сформулировать теорему и предложить учащимся доказать её, введя координаты векторов и используя теорему о координатах равных векторов и координатах суммы векторов. Затем можно вызвать к доске по очереди двух учеников для доказательства справедливости равенств 1 и 2, о которых говорится в теореме.

После этого нужно напомнить определение коллинеарных векторов, отметив, что в отношении нулевого вектора удобно считать, что он коллинеарен любому вектору, и обсудить ещё один способ обоснования равенства $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Учитель может нарисовать на доске часть рисунка 60 учебника, а именно векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (рис. 13), и далее предложить учащимся построить по правилу треугольника суммы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$ так, чтобы началом каждого из этих векторов была точка A. Это построение, с одной стороны, обосновывает справедливость равенства $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (обе суммы изображаются одним и тем же вектором $\overrightarrow{AC}$), а с другой стороны, даёт ещё один способ построения суммы двух неколлинеарных векторов, который и называется правилом параллелограмма.

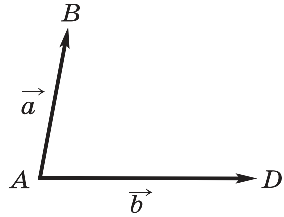


Рис. 13

Для усвоения этого правила можно решить задачу 15 а), а затем обсудить правило многоугольника построения суммы нескольких векторов. Записывая формулу

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n},$$

выражающую правило многоугольника, учитель может написать сначала только левую часть равенства и поставить вопрос: какому вектору равна написанная сумма?

В оставшееся на первом уроке время нужно продолжить решение задач из задания 15.

Задание на дом: п. 93, вопросы 30—32 (с. 58); задачи 16 а), 16 б), 16 в), 16 г).

На втором уроке нужно повторить материал, изученный на первом уроке, и решить оставшиеся задачи из задания 15.

Задание на дом: п. 93; вопросы 30—32 (с. 58); задачи 16 д), 16 е), 16 ж), 16 з).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 93 учащиеся должны уметь доказывать теорему о свойствах сложения векторов; формулировать определение коллинеарных векторов, правило параллелограмма построения суммы двух неколлинеарных векторов и правило многоугольника построения суммы нескольких векторов; уметь решать задачи такого типа, как в задании 15.

Уроки 22, 23 Произведение вектора на число

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие произведения вектора на число; доказать теорему о координатах произведения вектора на число и вывести следствия из неё; продолжить решение задач, связанных с операциями с векторами.

Определение произведения вектора на число полезно предварить примером, связанным с изображением с помощью векторов скоростей движения каких-то тел. Пусть, например, по прямолинейной дороге движется автомобиль с постоянной скоростью, которую изобразим вектором $\vec{v}$ (рис. 14). Пусть второй автомобиль движется в том же направлении со скоростью, вдвое большей, чем у первого автомобиля, а навстречу им движется третий автомобиль, у которого величина скорости такая же, как у второго автомобиля. Естественно изобразить скорость второго автомобиля вектором, направленным так же, как и вектор $\vec{v}$, но имеющим длину вдвое бо́льшую, чем длина вектора $\vec{v}$, и обозначить этот вектор $2\vec{v}$, а скорость третьего автомобиля изобразить вектором, также имеющим длину, вдвое бо́льшую, чем длина вектора $\vec{v}$, но направленным противоположно по отношению к вектору $\vec{v}$, и обозначить вектор скорости третьего автомобиля так: $-2\vec{v}$ (см. рис. 14). Естественно считать, что вектор $2\vec{v}$ получается в результате умножения вектора $\vec{v}$ на число 2, а вектор $-2\vec{v}$ получается в результате умножения вектора $\vec{v}$ на число –2. Этот наглядный пример подводит нас к определению произведения вектора на число.

Учащиеся должны усвоить приведённое в учебнике определение, т. е. уметь объяснить, как для данного ненулевого вектора $\overrightarrow{MA}$ и данного числа $k \neq 0$ построить вектор $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MA}$, и, кроме того, знать, что по определению произведение нулевого вектора на любое число и произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор. Полезно подчеркнуть, что для любого вектора $\vec{a}$ и любого числа k векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Рис. 14

Доказательство теоремы о координатах произведения вектора на число учителю целесообразно рассказать самому, обратив внимание на некоторые важные моменты доказательства.

Прежде всего нужно отметить, что в самом начале доказательства выбирается такая схема: для произвольного вектора $\overrightarrow{MA}\,\{x;\,y\}$ и произвольного числа k берётся вектор $\overrightarrow{MB}\,\{kx;\,ky\}$, и мы хотим доказать, что $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MA}$; тогда координаты вектора $k\overrightarrow{MA}$ будут равны координатам вектора $\overrightarrow{MB}$, т. е. равны $\{kx,\,ky\}$, что и требуется доказать. (В принципе возможна другая схема доказательства, в определённом смысле обратная выбранной, когда для произвольного вектора $\overrightarrow{MA}$ и произвольного числа k в соответствии с определением произведения вектора на число строится вектор $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MA}$, и далее нужно доказать, что координаты вектора $\overrightarrow{MB}$ равны $\{kx;\,ky\}$.)

В рамках выбранной схемы сначала рассматриваются простые случаи, когда $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ или $k=0$. В этих случаях оба вектора $k\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ нулевые, и, следовательно, выполняется искомое равенство $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MA}$.

Если же $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$ и $k\neq 0$, то для обоснования равенства $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MA}$ в соответствии с определением произведения вектора на число нужно доказать, во-первых, что длина вектора $\overrightarrow{MB}$ равна $|k|\cdot|\overrightarrow{MA}|$ (т. е. $MB=|k|\cdot MA$), и, во-вторых, что точка B лежит на луче MA, если $k>0$, и на продолжении луча MA, если $k<0$. Первое доказывается весьма просто, а для доказательства второго используется формула из п. 89, выражающая косинус угла между векторами через координаты этих векторов. При вычислении по этой формуле косинуса угла между векторами $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ нужно учесть, что $\sqrt{k^2}=|k|$ (следует обратить внимание учащихся на это равенство). Тогда получается равенство $\cos\alpha=\dfrac{k}{|k|}$, откуда следует, что $\cos\alpha=1$, если $k>0$, и $\cos\alpha=-1$, если $k<0$. В первом случае $\alpha=0°$, т. е. точка B лежит на луче MA (иначе говоря, лучи MA и MB совпадают), а во втором случае $\alpha=180°$, т. е. лучи MA и MB являются продолжениями один другого, и потому точка B лежит на продолжении луча MA.

После доказательства теоремы нужно сформулировать следствие из неё, выражающее свойства операции умножения вектора на число, и поручить учащимся (в качестве домашнего задания) самим доказать справедливость равенств 2 и 3 из этого следствия по аналогии с описанным в учебнике доказательством справедливости равенства 1.

Затем нужно обратить внимание учащихся на возможность преобразовывать векторные выражения по тем же правилам, что и числовые выражения, и решить несколько задач из задания 17 (насколько позволит время).

Задание на дом: п. 94; вопросы 33—36 (с. 58, 59); задачи 18 а), 18 б), 18 в), 18 г).

На втором уроке можно повторить теоретический материал п. 94, в частности, вызвать к доске по очереди двух учеников для доказательства справедливости равенств 2 и 3 из следствия теоремы о координатах произведения вектора на число, а далее нужно решать оставшиеся задачи из задания 17.

Задание на дом: п. 94; вопросы 33—36 (с. 58, 59); задачи 18 д), 18 е), 18 ж), 18 з), 18 и).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 94 учащиеся должны уметь объяснить, какой вектор называется произведением данного вектора на данное число; доказывать теорему о координатах произведения вектора на число и следствия из неё; уметь решать задачи такого типа, как в задании 17.

Уроки 24, 25 Скалярное произведение двух векторов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: сформулировать определение скалярного произведения векторов и изучить свойства скалярного произведения; решать задачи с использованием скалярного произведения векторов.

Сформулировав определение скалярного произведения двух векторов, учитель может обратить внимание учащихся на то, что название «скалярное произведение» связано с тем, что результатом введённой операции для двух данных векторов является число (скаляр). Можно также отметить, что скалярное произведение векторов используется в физике, например, работа постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку, перемещающуюся по прямой из точки A в точку B, равна скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ и вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего перемещение точки.

Затем можно решить задачу 19 а), в которой искомые скалярные произведения векторов вычисляются на основе определения, т. е. по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}}). \qquad (1)$$

После этого нужно ввести понятие скалярного квадрата вектора, записав формулу $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, которая следует непосредственно из формулы (1), и перейти к формуле, выражающей скалярное произведение двух векторов через их координаты. Целесообразно перед выводом этой формулы предложить учащимся вспомнить формулу, выражающую косинус угла между двумя векторами через координаты этих векторов. Используя формулу для косинуса угла и формулу (1), приходим к выводу: скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (2)$$

В учебнике сказано, что эта формула, очевидно, верна и в том случае, когда один из векторов нулевой. Учащиеся должны уметь обосновывать формулу (2) и в этом (очевидном) случае, т. е. уметь провести рассуждения такого типа: пусть, например, $\vec{a} = \vec{0}$; тогда, по определению скалярного произведения, $\vec{0} \cdot \vec{b} = 0$; с другой стороны, каждая координата нулевого вектора равна нулю: $x_1 = y_1 = 0$, поэтому $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Таким образом, левая и правая части в формуле (2) равны нулю, и, следовательно, равенство (2) справедливо.

На применение формулы (2) нужно решить задачу 19 б), а затем можно предложить учащимся вспомнить условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \qquad (3)$$

(это условие было получено в п. 89). Сопоставляя это условие с формулой (2), приходим к выводу: скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Здесь уместно поставить перед учащимися вопрос о том, что дано и что требуется доказать в той части этого утверждения, которая относится к слову «тогда» (к словам «только тогда»). Желательно, чтобы учащиеся не только правильно отвечали на этот вопрос, но и умели провести соответствующие доказательства. Приведём их.

В утверждении со словом «тогда» дано, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны, а требуется доказать, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Это можно сделать, используя условие перпендикулярности (3): из того, что $\vec{a}\perp\vec{b}$, следует равенство (3), в силу которого по формуле (2) получаем $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. А можно обойтись и без условия (3): из того, что $\vec{a}\perp\vec{b}$, следует, что угол α между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $90°$, поэтому $\cos\alpha=0$ и по формуле (1) получаем $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

В утверждении со словами «только тогда» дано, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, а требуется доказать, что $\vec{a}\perp\vec{b}$. Это также можно доказать двумя способами: 1) используя формулу (2) и условие (3) перпендикулярности векторов; 2) используя только формулу (1) и то условие, что $|\vec{a}|\neq 0$ и $|\vec{b}|\neq 0$.

В конце первого урока желательно решить ещё задачу 19 в) и обсудить утверждение: скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}}<90°$ ($\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}}>90°$).

> Задание на дом: п. 95, в том числе самостоятельно изучить утверждение о свойствах скалярного произведения векторов (с. 41); вопросы 37—42 (с. 59); задачи 20 а), 20 б), 20 в).

Второй урок нужно начать с обсуждения утверждения о свойствах скалярного произведения векторов, изучение которого входило в домашнее задание. Для доказательства каждого из четырёх пунктов этого утверждения можно вызвать к доске по очереди четырёх учеников.

После этого нужно решить оставшиеся задачи из задания 19. Решения некоторых из них приведены на с. 79—81.

> Задание на дом: п. 95; вопросы 37—42 (с. 59); задачи 20 г), 20 е), 20 ж), 20 з).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 95 учащиеся должны уметь объяснить, что называется скалярным произведением двух векторов; выводить формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты; формулировать (с использованием слов «тогда и только тогда») и обосновывать утверждение о взаимосвязи между знаком (обращением в нуль) скалярного произведения ненулевых векторов и углом между этими векторами; доказывать утверждение о свойствах скалярного произведения векторов; уметь решать задачи такого типа, как в задании 19. В ходе изучения материала п. 95 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника.

Уроки 26, 27 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, доказать соответствующую теорему и вывести из неё следствие (утверждение о коллинеарных векторах); провести самостоятельную работу № 3.

Первый урок можно начать с проверки выполнения домашнего задания, уделив особое внимание задаче 20 з) (её решение приведено на с. 81, 82).

Затем нужно ввести понятие разложения вектора по двум неколлинеарным векторам и доказать соответствующую теорему. Это следует сделать самому учителю, опираясь на текст учебника и дополняя его необходимыми разъяснениями. Одно из разъяснений нужно привести в связи со следующим предложением из текста доказательства: «Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому $a \neq 0$, $b_2 \neq 0$». Можно поставить перед учащимися вопрос: что будет, если допустить, что $a = 0$? Ответ: в этом случае обе координаты вектора $\vec{a}$ будут равны нулю, поэтому $\vec{a} = \vec{0}$, а нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору; таким образом, в этом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ оказались бы коллинеарными, что противоречит условию теоремы.

Второй вопрос связан с числом b_2: что будет, если допустить, что $b_2 = 0$? Для ответа на этот вопрос нужно обратиться к рисунку 65 учебника и заметить, что если $b_2 = 0$, то точка $B\,(b_1; b_2)$ будет ле-

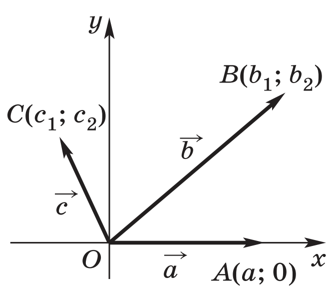


Рис. 15

жать на оси абсцисс (рис. 15), и, следовательно, снова векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ будут коллинеарными, что противоречит условию теоремы.

Другое разъяснение нужно сделать по поводу равносильности векторного равенства

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b} \qquad (3)$$

и двух числовых равенств, связывающих координаты $(c_1; c_2)$ вектора $\vec{c}$ с координатами $(a; 0)$ и $(b_1; b_2)$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$c_1=xa+yb_1,\ c_2=yb_2. \qquad (4)$$

Следует подчеркнуть, что если выполнено равенство (3), то будут выполнены и равенства (4), и обратно, если выполнены равенства (4), то будет выполнено и равенство (3) (это следует из теоремы о координатах равных векторов), а поскольку система уравнений (4) имеет единственное решение относительно x и y, то существует единственная пара чисел x и y, для которой выполнено равенство (3).

Сразу же после завершения доказательства теоремы целесообразно вывести из неё следствие (его можно назвать утверждением о коллинеарных векторах): если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует, и притом только одно, такое число x, что $\vec{c}=x\vec{a}$.

После этого полезно решить задачи 21 а), 21 б).

Задание на дом: п. 96; вопросы 43—45 (с. 59); задачи 22 а), 22 б).

На втором уроке нужно решить задачи 21 в), 21 г) и провести самостоятельную работу № 3.

Задание на дом: п. 96; вопросы 43—45 (с. 59); задачи 22 в), 22 г).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 96 учащиеся должны уметь объяснить, что означают слова «данный вектор разложен по двум данным неколлинеарным векторам»; доказывать соответствующую теорему и выводить следствие из неё (утверждение о коллинеарных векторах); уметь решать задачи такого типа, как в задании 21.

Уроки 28, 29 Решение задач по теме «Операции с векторами»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач, в которых используются операции с векторами.

Для классной и домашней работы можно использовать дополнительные задачи к главе 7 (задачи 44—62), а также дополнительные задачи из дидактических материалов (на усмотрение учителя).

Урок 30 Осевая симметрия

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие отображения плоскости на себя и осевой симметрии; доказать, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние между точками; обсудить утверждение: осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию; решить некоторые задачи, связанные с осевой симметрией.

Урок следует начать с введения понятия отображения плоскости на себя. В учебнике это понятие вводится одновременно с рассмотрением конкретного примера — осевой симметрии. Можно разделить введение этих понятий и сначала сказать о том, что такое отображение плоскости на себя: если каждой точке M плоскости сопоставлена (поставлена в соответствие) некоторая точка M_1 так, что при этом каждая точка M_1 плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке M, то такое сопоставление мы и называем отображением плоскости на себя.

Примером отображения плоскости на себя является осевая симметрия. При введении этого понятия нужно вспомнить, какие две точки называются симметричными относительно данной прямой (определение таких точек было дано в 8 классе; желательно, чтобы учащиеся сами вспомнили его).

Далее нужно сформулировать, разъяснить и доказать утверждение: осевая симметрия является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния между точками.

Для доказательства этого утверждения в учебнике вводится прямоугольная система координат Oxy так, что-

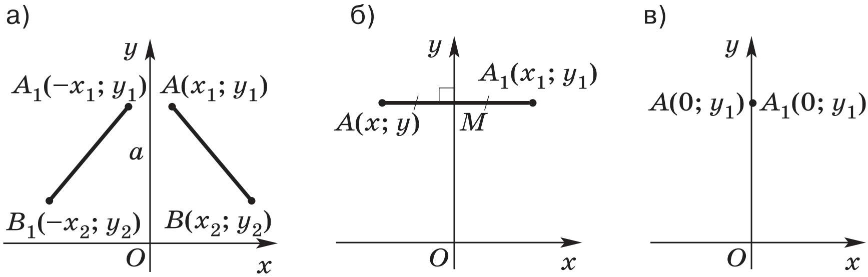


Рис. 16

бы ось Oy совпадала с прямой a (рис. 16, *а*, повторяющий рис. 68 учебника), и применяется формула расстояния между двумя точками. Предварительно можно доказать, что если две произвольные точки A и B имеют координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то симметричные им точки A_1 и B_1 относительно прямой a (т. е. относительно оси Oy) будут иметь координаты $(-x_1; y_1)$ и $(-x_2; y_2)$ (см. рис. 16, *а*). Проведём доказательство, например, для точек A и A_1. Обозначим координаты точки A_1 через $(x; y)$ (рис. 16, *б*). Нужно доказать, что

$$x = -x_1,\ y = y_1. \tag{1}$$

Если точка A лежит на оси Oy, то $x_1 = 0$ и точка $A_1\,(x; y)$ совпадает с точкой A (рис. 16, *в*), поэтому $x = 0$, $y = y_1$, и равенства (1), очевидно, выполняются. Пусть точка A не лежит на оси Oy (рис. 16, *б*). Так как точки A и A_1 симметричны относительно оси Oy, то ось Oy является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1, т. е. $AA_1 \perp Oy$ и $A_1M = MA$, где M — точка пересечения отрезка AA_1 с осью Oy. Из того, что $AA_1 \perp Oy$, следует, что вектор $\vec{n}\,\{0; 1\}$ перпендикулярен к прямой AA_1, поэтому уравнение этой прямой имеет вид $0 \cdot (x - x_1) + 1 \cdot (y - y_1) = 0$ (п. 91) или $y = y_1$, а так как точка $A\,(x; y)$ лежит на этой прямой, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е. $y = y_1$. Точка M — середина отрезка AA_1, поэтому для её абсциссы, равной нулю, выполняется равенство $0 = \frac{x + x_1}{2}$ (п. 85), откуда следует, что $x = -x_1$. Итак, оба равенства (1) выполняются, что и требовалось доказать.

В учебнике сказано, что при осевой симметрии каждый отрезок отображается на равный ему отрезок, прямая — на прямую, луч — на луч, а треугольник — на равный ему треугольник. Поэтому и угол отображается на равный ему угол.

Перечислив эти утверждения, учитель может сказать, что такие же утверждения верны для любого отображения плоскости на себя, сохраняющего расстояния (а не только для осевой симметрии), и мы докажем их при изучении следующего пункта учебника. Можно отметить, забегая вперёд, что каждое такое отображение плоскости на себя (т. е. сохраняющее расстояния между точками) называется движением плоскости. Свойства движений и их виды будут изучаться на следующих двух уроках.

Далее, используя рисунок 69 учебника (или такой же рисунок на доске), нужно разъяснить смысл утверждения: осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию, а затем перейти к решению задач из задания 23. Если какие-то из этих задач не будут решены из-за недостатка времени, то их можно будет порешать на уроках 36—38, отведённых специально для решения задач по материалу главы 7. То же самое относится к задачам из заданий 25 и 27, выполняемых на следующих уроках.

При проведении урока можно также использовать проектное задание № 2 (с. 121 учебника).

Задание на дом: п. 97; вопросы 46—49 (с. 59); задачи из задания 24.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 97 учащиеся должны уметь объяснить, что означают слова «задано отображение плоскости на себя»; какое отображение плоскости на себя называется осевой симметрией; доказывать, что при осевой симметрии сохраняется расстояние между точками; понимать и уметь объяснить, что означают слова «осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию»; уметь решать задачи такого типа, как в задании 23.

Уроки 31, 32 Движения

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: ввести понятие движения плоскости; доказать, что результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельный перенос на вектор, перпендикулярный к осям, а с пересекающимися осями — поворот плоскости вокруг точки пересечения осей; изучить свойства движений; рассмотреть задачи на применение движений.

На первом уроке нужно сформулировать определение движения плоскости, отметив, что примером движения является уже знакомая нам осевая симметрия. Сразу же вслед за этим полезно решить задачу 25 а). Её решение и также решения ряда других задач из заданий 25 и 26, в которых рассматриваются свойства движений, приведены на с. 85, 86.

В задаче 25 а) требуется доказать, что при движении отрезок отображается на равный ему отрезок. Пусть при заданном движении точки A и B переходят в точки A_1 и B_1. Из определения движения следует, что длины отрезков AB и A_1B_1 равны, но это ещё не означает, что отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1. Очень важно, чтобы учащиеся поняли следующее: чтобы доказать, что отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1, нужно доказать, что любая точка M отрезка AB переходит при данном движении в некоторую точку M_1 отрезка A_1B_1, и обратно: в каждую точку M_1 отрезка A_1B_1 переходит некоторая точка M отрезка AB. Целесообразно доказательство первого утверждения провести учителю, а аналогичное доказательство обратного утверждения учащиеся могут провести сами.

В классах с достаточно высоким уровнем математической подготовки учащихся учитель может рассказать о связи между движениями плоскости и наложениями. Можно напомнить, что с помощью понятия наложения определялось равенство геометрических фигур в 7 классе, при этом сами наложения воспринимались на наглядном уровне. В учебнике 8 класса в приложении «Об аксиомах и основных понятиях планиметрии» говорится о том, что в нашем курсе понятие наложения относится к основным понятиям, а свойства основных понятий выражены в аксиомах. Одна из них (аксиома 5) гласит: любое наложение является отображением плоскости на себя. В другой аксиоме (аксиома 8) говорится: если при наложении совмещаются концы отрезков, то совмещаются и сами отрезки. Отсюда можно сделать вывод: при наложении отрезок отображается на равный ему отрезок. Это означает, что любое наложение является движением плоскости. Можно доказать, что верно и обратное утверждение: любое движение плоскости является наложением (доказательство приведено, например, в учебнике Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7—9»).

Далее можно решить задачи 25 б), 25 в) и 25 г) (решения первых двух основаны на утверждении задачи 25 а)).

После этого можно отметить, что результат последовательного выполнения двух движений (и также любого числа движений) является движением (учащиеся должны уметь это обосновать), и рассмотреть последовательное выполнение двух осевых симметрий в том случае, когда оси этих симметрий параллельны. Учителю следует самому рассказать об этом случае, опираясь на текст учебника. В конце рассказа следует сформулировать определение параллельного переноса на данный вектор. Изучение случая, когда оси пересекаются, целесообразно включить в домашнее задание.

> Задание на дом: п. 98; вопросы 50—52 (с. 59), задачи из задания 26.

На втором уроке следует проверить выполнение домашнего задания, вызывая учеников к доске для решения некоторых домашних задач и рассказа о том, что получится в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий в том случае, когда оси симметрий пересекаются. В результате рассмотрения этого случая вводится ещё один вид движений — поворот плоскости вокруг данной точки на данный угол. Следует особо выделить поворот вокруг данной точки O на $180°$. При этом движении каждая точка M плоскости переходит в точку M_1, симметричную точке M относительно точки O. Поэтому это движение называется центральной симметрией, а точка O — центром симметрии.

После этого можно решить несколько задач из задания 27 (насколько позволит время). Решения некоторых из них приведены на с. 87.

При проведении урока можно использовать также проектное задание № 3 (с. 121 учебника).

> Задание на дом: п. 98; вопросы 50—52 (с. 59); несколько задач из задания 28 (на усмотрение учителя).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 98 учащиеся должны <u>уметь</u> формулировать определение движения плоскости и объяснять, какое движение называется параллельным переносом на данный вектор, поворотом вокруг данной точки на данный угол, центральной симметрией; доказывать, что результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий является параллельный перенос, если оси параллельны, и поворот, если оси пересекаются; решать задачи такого типа, как в заданиях 25 и 27. В ходе изучения п. 98 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника.

Уроки 33, 34 Центральное подобие

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: провести самостоятельную работу № 4; ввести понятие центрального подобия (гомотетии), доказать утверждения об основном свойстве центрального подобия и других его свойствах; решить задачи на применение центрального подобия.

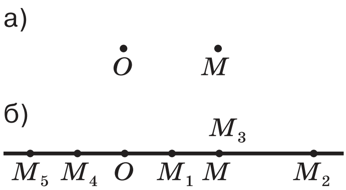


Рис. 17

Первый урок можно начать с самостоятельной работы № 4, а затем следует перейти к определению центрального подобия. Для усвоения учащимися этого понятия можно предложить им такую задачу: на рисунке изображены точки O и M (рис. 17, *а*). Требуется изобразить на этом рисунке такие точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, в которые переходит точка M при центральных подобиях с центром O и коэффициентами $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = -\frac{1}{2}$, $k_5 = -1$ (рис. 17, *б*). По ходу последовательного выполнения этого задания можно ставить такие вопросы: 1) в какую точку переходит точка O при этих центральных подобиях? (ответ: в точку O); 2) что представляет собой центральное подобие с коэффициентом $k_3 = 1$? (ответ: это тождественное отображение, т. е. отображение, при котором каждая точка плоскости переходит в себя); 3) что представляет собой центральное подобие с коэффициентом $k_5 = -1$? (ответ: это центральная симметрия с центром O).

Затем можно решить задачу 29 а) и рассмотреть основное свойство центрального подобия, опираясь на рисунок 72 учебника. Обоснования утверждений о других свойствах центрального подобия можно предложить провести наиболее сильным учащимся в качестве домашнего задания.

При проведении урока можно использовать проектное задание № 4 (с. 121 учебника).

Задание на дом: п. 99 (самостоятельно изучить материал, изложенный на с. 52 учебника); вопрос 53 (с. 59); задачи 29 б), 30 а), 30 б).

Второй урок можно начать с обсуждения доказательств некоторых утверждений о свойствах центрального подобия. Желательно, чтобы учитель сам доказал два утверждения: 1) при центральном подобии с коэффициентом k отрезок длины a отображается на отрезок длины $|k|a$; 2) при центральном подобии треугольник отображается на подобный ему треугольник.

Приведём доказательства этих утверждений.

1) Пусть длина отрезка AB равна a и пусть при центральном подобии с центром O и коэффициентом k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1. Отметим произвольную точку M, лежащую на отрезке AB между точками A и B (рис. 18). Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, то, согласно утверждению о коллинеарных векторах (п. 96), существует такое число m, что $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$. Очевидно также, что $0 < m < 1$. Пусть при данном центральном подобии точка M переходит в точку M_1. Тогда $\overrightarrow{A_1M_1} = k\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$ (основное свойство центрального подобия). Из написанных векторных равенств получаем $\overrightarrow{A_1M_1} = k\,(m\overrightarrow{AB}) = m\,(k\overrightarrow{AB}) = m\overrightarrow{A_1B_1}$. Из равенства $\overrightarrow{A_1M_1} = m\overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что векторы $\overrightarrow{A_1M_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарны, а так как $0 < m < 1$, то точка M_1 лежит между точками A_1 и B_1 (см. рис. 18). Тем самым мы доказали, что произвольная точка M отрезка AB переходит при данном центральном подобии в некоторую точку M_1, отрезка A_1B_1. Таким же образом доказывается, что в произвольную точку M_1 отрезка A_1B_1 переходит при этом центральном подобии некоторая точка M отрезка AB. Это означает, что отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, а из равенства $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$ следует, что $A_1B_1 = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |k|a$, т. е. длина отрезка A_1B_1 равна $|k|a$. Утверждение 1 доказано.

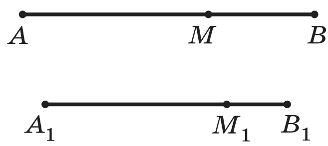


Рис. 18

2) Утверждение 2 непосредственно следует из утверждения 1. Если при центральном подобии с коэффициентом k вершины A, B и C треугольника ABC переходят в точки A_1, B_1 и C_1, то, согласно утверждению 1, стороны AB, BC и CA треугольника ABC переходят соответственно в отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1, причём $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = |k|$.

Таким образом, треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, который подобен треугольнику ABC (по определению подобных треугольников).

Из утверждения 2 следует, в свою очередь, что центральное подобие сохраняет величины углов. Это означает, что если точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят при центральном подобии в точки A_1, B_1 и C_1, то $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Далее нужно обсудить решения задач 29 б) и 30 б) из домашнего задания, а также приведённое в учебнике решение задачи на построение квадрата, вписанного в данный остроугольный треугольник.

Задание на дом: п. 99; вопрос 53 (с. 59); задачи 29 в), 30 в).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 99 учащиеся должны уметь формулировать определение центрального подобия (гомотетии), доказывать утверждения об основном свойстве центрального подобия и некоторых других его свойствах; уметь решать задачи такого типа, как в задании 29.

Урок 35 О подобии произвольных фигур

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие преобразования подобия; сформулировать определение и рассмотреть примеры подобных фигур; провести самостоятельную работу № 5.

В первой половине урока, опираясь на текст учебника, учитель может ввести понятие преобразования подобия, отметив при этом, что центральное подобие с коэффициентом k является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$, а любое движение является преобразованием подобия с коэффициентом $k = 1$. Далее нужно сформулировать определение подобных фигур и привести несколько различных примеров подобных фигур. Следует отметить, что для треугольников данное определение подобия равносильно определению из п. 78 учебника 8 класса, т. е. если два треугольника подобны по общему определению подобных фигур, то они подобны и по определению из п. 78 (это доказывается весьма просто), и обратно: если два треугольника подобны по определению из п. 78, то они подобны и по общему определению (обратное утверждение можно предложить доказать наиболее подготовленным учащимся при выполнении домашнего задания). Доказательства обоих утверждений содержатся в решении задачи 68 на с. 107, 108.

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 5.

Задание на дом: п. 100; вопрос 54 (с. 59); оставшиеся нерешёнными задачи из заданий 27—30.

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 100 учащиеся должны уметь формулировать определение преобразования подобия и подобных фигур; приводить различные примеры подобных фигур; уметь доказывать, что если два треугольника подобны по общему определению подобных фигур, то они подобны и по определению из п. 78 учебника 8 класса.

Уроки 36—38 Решение задач по теме «Векторы и координаты»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач с использованием векторов и координат, движений и преобразований подобия; подготовиться к контрольной работе № 1.

Для классной и домашней работы можно использовать дополнительные задачи к главе 7 (задачи 31—68) и дополнительные задачи из дидактических материалов (на усмотрение учителя). Желательно прорешать все основные задачи из заданий 1—30, которые остались нерешёнными. На одном из уроков нужно провести математический диктант № 1.

Урок 39 Контрольная работа № 1

Ответы и указания

Вар. 1. **1.** (3; 0) и (0; –2). **2.** (2; 1). **3.** $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **4.** $\vec{n}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Вар. 2. **1.** (–3; 0) и (0; 4). **2.** (–3; 3). **3.** $(x+4)^2+(y+4)^2=16$. **4.** $\vec{n}=4\vec{a}+\vec{b}$.

Вар. 3. **1.** $2x-5y-6=0$. **2.** $(x-1)^2+y^2=25$. Указание. Учесть, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы. **3.** 0. **4.** Указание. Рассмотреть параллельный перенос, отображающий одну окружность на другую.

Вар. 4. **1.** $3x-4y+9=0$. **2.** $(x+1)^2+y^2=25$. Указание. См. указание к задаче 2 варианта 3. **3.** 0. **4.** Указание. См. указание к задаче 4 варианта 3.

Урок 40 Равносоставленные многоугольники. Площадь многоугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: ввести понятие и рассмотреть примеры равносоставленных многоугольников; ввести понятие площади многоугольника и рассмотреть основные свойства площадей; познакомить учащихся с теоремой Бойяи — Гервина.

Сформулировав определение равносоставленных многоугольников, нужно с помощью рисунков, картонных моделей или компьютерных программ проиллюстрировать это понятие, а затем, используя рисунок 78 учебника (или плакат, выполненный по этому рисунку), доказать, что треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна половине периметра треугольника, а другая — радиусу вписанной в него окружности.

После этого можно решить задачу 69 а), а затем перейти к обсуждению понятия площади многоугольника. Учителю следует рассказать самому, опираясь на текст учебника, о процедуре измерения площади многоугольника и основных свойствах площадей, используя рисунки 79, 80 учебника. Следует подчеркнуть, что измерение площади многоугольника аналогично измерению отрезка — и в том и в другом случае выбирается единица измерения (например, сантиметр при измерении отрезков, квадратный сантиметр при измерении площадей) и далее в результате процедуры измерения для данного отрезка (многоугольника) получается положительное число, которое показывает, сколько единиц измерения укладывается в данном отрезке (многоугольнике). Этим числом и выражается длина отрезка (площадь многоугольника) при выбранной единице измерения.

В заключение рассказа о понятии площади нужно ввести определение равновеликих многоугольников и отметить, что любые два равносоставленных многоугольника равновелики (это следует, очевидно, из основных свойств площадей), и обратно: любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (теорема Бойяи — Гервина). Эта теорема не очевидна. Желающие познакомиться с её доказательством могут обратиться к дополнительной литературе, например к книге [2] из списка литературы (с. 140 учебника). Можно отметить и такой факт: Ф. Бойяи был отцом Яноша Бойяи, который, как и Н. И. Лобачевский, пришёл к выводу о возможности неевклидовой геометрии, но опубликовал свои результаты позднее Н. И. Лобачевского.

Задание на дом: пп. 101, 102; вопросы 1—5 (с. 84); задача 70 а).

Основные требования к учащимся

В результате изучения пп. 101 и 102 учащиеся должны уметь формулировать определения равносоставленных и равновеликих многоугольников и теорему Бойяи — Гервина; доказывать утверждение о равносоставленности треугольника и прямоугольника, одна из смежных сторон которого равна половине периметра треугольника, а другая — радиусу вписанной в него окружности; уметь объяснить, как производится измерение площади многоугольника и какие свойства площадей называются основными; уметь решать задачи типа 69 а).

Уроки 41, 42 Площадь многоугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: доказать теорему о площади прямоугольника и вывести два следствия из неё; использовать формулу площади прямоугольника при решении задач; доказать, что отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Формула площади прямоугольника знакома учащимся по курсу математики 5—6 классов. Поэтому учитель может отметить, что теперь мы не только вспомним эту формулу, но и обоснуем её. Обоснование формулы, т. е. доказательство теоремы о площади прямоугольника, учителю следует провести самому, опираясь на текст учебника. Приведённое в учебнике доказательство отличается от того, как выводится эта формула в других учебниках (например, в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия. 7—9» или в учебнике Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7—9»). Главное отличие состоит в том, что здесь не рассматриваются отдельно случаи, когда стороны прямоугольника выражаются рациональными и иррациональными числами, предложенный способ одинаков для обоих случаев и основан на описанных ранее процедуре измерения площадей и процедуре измерения отрезков.

Важно, чтобы учащиеся поняли, что единица измерения площадей (т. е. квадрат со стороной 1) и её части (прямоугольники с двумя сторонами, равными AB_1, и двумя другими сторонами, равными $\frac{1}{10}AD_1$, $\frac{1}{100}AD_1$ и т. д.)

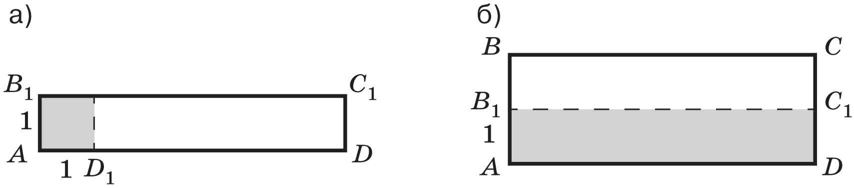


Рис. 19

укладываются в прямоугольнике AB_1C_1D столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (отрезок AD_1) и её части ($\frac{1}{10}AD_1$, $\frac{1}{100}AD_1$ и т. д.) укладываются в отрезке AD (рис. 19, *а*), а прямоугольник AB_1C_1D и его части (прямоугольники с двумя сторонами, равными AD, и двумя другими сторонами, равными $\frac{1}{10}AB_1$, $\frac{1}{100}AB_1$ и т. д.) укладываются в прямоугольнике $ABCD$ столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (отрезок AB_1) и её части укладываются в отрезке AB (рис. 19, *б*).

Таким образом, измерение площади прямоугольника $ABCD$ производится в два этапа, причём на каждом этапе измерению площади соответствует измерение отрезка: на первом этапе попутно с измерением площади прямоугольника AB_1C_1D с помощью квадрата со стороной 1 идёт процесс измерения отрезка AD с помощью равного 1 отрезка AD_1, а на втором этапе попутно с измерением площади прямоугольника $ABCD$ с помощью прямоугольника AB_1C_1D идёт процесс измерения отрезка AB с помощью равного 1 отрезка AB_1. В итоге этих двух этапов и получается формула $S = AB \cdot AD = ab$.

После доказательства теоремы можно решить задачи 69 б), 69 в), 69 г), а затем предложить учащимся такой вопрос: как, используя формулу площади прямоугольника, вывести формулу площади прямоугольного треугольника с катетами, равными a и b? В качестве подсказки можно нарисовать на доске прямоугольный треугольник, а затем дорисовать его до прямоугольника со смежными сторонами, равными a и b (рис. 82 учебника). Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно обосновали формулу площади прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$ (следствие 1 из теоремы о площади прямоугольника).

Изучение следствия 2 и утверждения об отношении площадей подобных многоугольников полезно включить в домашнее задание.

Задание на дом: п. 103; вопросы 6—9 (с. 84); задачи 70 б), 70 в), 70 г).

На втором уроке, вызвав кого-то из учеников к доске, можно обсудить следствие 2 из теоремы о площади прямоугольника (в связи с этим нужно вспомнить утверждение из п. 101 о равносоставленности треугольника и прямоугольника), а затем обсудить утверждение об отношении площадей подобных многоугольников.

В классе решаются задачи 69 д), 69 е), 69 ж).

Задание на дом: п. 103, вопросы 6—9 (с. 84); задачи 70 д), 70 е), 70 ж).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 103 учащиеся должны уметь доказывать теорему о площади прямоугольника и выводить два следствия из неё, доказывать утверждение об отношении площадей подобных многоугольников; уметь решать задачи такого типа, как в задании 69; в ходе изучения п. 103 проявить умение самостоятельно выводить простые формулы.

Уроки 43, 44 Площадь треугольника

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести несколько формул площади треугольника; рассмотреть задачи, в которых используются эти формулы.

Начиная первый урок, учитель может напомнить, что две формулы площади треугольника уже были получены на предыдущих двух уроках; одна из них относится к прямоугольным треугольникам: $S = \frac{1}{2}ab$, где a и b — длины катетов, а вторая формула верна для любого треугольника: $S = pr$, где p — половина периметра (полупериметр) треугольника, r — радиус вписанной в треугольник окружности. Забегая вперёд, можно сказать, что на ближайших уроках мы получим ещё несколько формул площади произвольного треугольника.

Далее нужно сказать о том, что часто, когда речь идёт о площади треугольника, выбирают одну из его сторон и называют её основанием, а под словом «высота» подразумевают тогда ту из высот треугольника, которая проведена к выбранному основанию. Используя эту терминологию, нужно сформулировать теорему: площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

Полезно предложить учащимся самим доказать эту теорему с помощью уже известной им формулы, выражающей площадь прямоугольного треугольника через его катеты. Можно вызвать кого-то к доске для выполнения нужных рисунков и далее отыскивать доказательство путём коллективного обсуждения. В ходе обсуждения выяснится, что нужно рассмотреть три случая в зависимости от того, лежит ли точка H высоты AH, проведённой к основанию BC, между точками B и C, на продолжении стороны BC или совпадает с какой-то из точек B и C. Для каждого случая нужно сделать свой рисунок, с помощью которого, используя формулу площади прямоугольного треугольника, вывести формулу $S = \frac{1}{2}ah$, где $a = BC$ — основание треугольника, $h = AH$ — его высота.

Завершив коллективное доказательство теоремы, можно решить задачи 71 а) и 71 б), а затем перейти к следствию из доказанной теоремы: площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон, умноженной на синус угла между этими сторонами. Здесь так же, как и в доказательстве теоремы, нужно рассмотреть три случая, соответствующие рисункам 83, *а*, 83, *б* и 83, *в* учебника. В каждом из этих случаев нужно сначала доказать, что $AH = AB \cdot \sin B$. Для одного из них, например для случая, которому соответствует рисунок 83, *б*, учитель может провести доказательство сам, а рассмотрение двух других случаев целесообразно поручить учащимся в качестве домашнего задания.

При наличии времени можно решить задачу 71 в).

> Задание на дом: п. 104; вопросы 10—12 (с. 84); задачи 72 а),72 б), 72 в).

Второй урок можно начать с обсуждения вывода следствия в тех двух случаях, которые не были рассмотрены на первом уроке, а затем нужно решать оставшиеся задачи из задания 71. Особое внимание следует уделить задаче 71 ж), в которой требуется обосновать формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны a, b, c и радиус R описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$. Желательно, чтобы учащиеся запомнили эту красивую формулу.

> Задание на дом: п. 104; вопросы 10—12 (с. 84); задачи 72 г), 72 д), 72 е), 72 ж), 72 з).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 104 учащиеся должны проявить умение самостоятельно и путём коллективного обсуждения находить доказательства новых утверждений; уметь доказывать теорему о площади треугольника и выводить следствие из неё; уметь решать задачи такого типа, как в задании 71; знать разные формулы площади треугольника, в том числе формулы, выражающие площадь треугольника через его стороны и радиус описанной (вписанной) окружности.

Урок 45 Площадь параллелограмма

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА: доказать теорему о площади параллелограмма и вывести следствие из неё; использовать их при решении задач.

Урок можно начать с проверки выполнения домашнего задания, обратив особое внимание на задачу 72 ж), в которой требуется обосновать формулу, выражающую площадь S треугольника ABC через радиус R описанной окружности и углы треугольника:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Можно отметить, что среди разнообразных формул площади треугольника эта формула интересна тем, что в неё входят (и притом равноправно) все углы треугольника.

Далее полезно вспомнить (путём опроса учащихся), какой четырёхугольник называется параллелограммом и каковы его свойства, а затем нужно ввести понятие основания и высоты параллелограмма и, нарисовав на доске рисунок, аналогичный рисунку 84 учебника (рис. 20), можно поставить перед учащимися вопрос: как, по их мнению, выражается площадь параллелограмма $ABCD$ через основание AD и высоту BH?

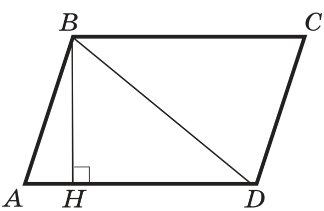


Рис. 20

Желательно, чтобы учащиеся не только дали правильный ответ, но и обосновали его, опираясь на то, что диагональ BD разделяет параллелограмм на два равных треугольника (нужно требовать от учащихся обоснование того, что $\triangle ABD = \triangle BCD$), и уже известную формулу площади треугольника: $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot BH$.

Следующий вопрос, который можно поставить перед учащимися: как выражается площадь параллелограмма $ABCD$ через стороны AB и AD и синус угла A? Здесь также желательно, чтобы учащиеся сами обосновали ответ на этот вопрос.

Оставшуюся часть урока нужно посвятить решению задач из задания 73 (насколько позволит время). Те задачи, которые не удастся решить на этом уроке, можно будет прорешать на уроках 50—51, специально отведённых для решения задач.

Задание на дом: п. 105; вопросы 13—15 (с. 84, 85); задачи из задания 74.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 105 учащиеся должны проявить умение самостоятельно доказывать новые утверждения; уметь доказывать теорему о площади параллелограмма и выводить следствие из неё; уметь решать задачи такого типа, как в задании 73.

Уроки 46, 47 Площадь трапеции

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести формулу площади трапеции и использовать её при решении задач; провести самостоятельную работу № 6.

В начале первого урока полезно вспомнить (путём опроса учащихся), какой четырёхугольник называется трапецией и как называются его стороны, какая трапеция называется прямоугольной и какая — равнобедренной. Затем можно перейти к понятию высоты трапеции, поставив перед учащимися вопрос: какой отрезок они назвали бы высотой трапеции? В ходе обсуждения этого вопроса следует вспомнить, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой (это было доказано в 8 классе), а расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми. Поэтому можно сказать, что длина отрезка, который мы назвали высотой трапеции, равна расстоянию между прямыми, содержащими её основания.

После этого нужно перейти к теореме о площади трапеции. Сформулировав теорему и нарисовав на доске рисунок, повторяющий рисунок 85 учебника, учитель может предложить учащимся самим провести доказательство теоремы. При необходимости можно сделать подсказку: воспользуйтесь тем, что диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника.

Получив формулу площади трапеции, следует приступить к решению задач из задания 75.

Задание на дом: п. 106; вопрос 16 (с. 85); несколько задач из задания 76 (на усмотрение учителя).

На втором уроке нужно продолжить решение задач из задания 75, а во второй половине урока следует провести самостоятельную работу № 6.

Задание на дом: п. 106; вопрос 16 (с. 85); оставшиеся задачи из задания 76.

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 106 учащиеся должны проявить умение самостоятельно выводить новые формулы; уметь доказывать теорему о площади трапеции и решать задачи такого типа, как в задании 75.

Уроки 48, 49 Площадь четырёхугольника.* Формула Герона

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести формулу, выражающую площадь четырёхугольника через его диагонали и угол между ними, а также формулу Герона, выражающую площадь треугольника через его стороны; провести самостоятельную работу № 7.

Хотя п. 107 отмечен звёздочкой, целесообразно его изучить. Учитель может сам доказать теорему о площади четырёхугольника для случая, когда четырёхугольник выпуклый и, следовательно, его диагонали пересекаются. После этого полезно предложить учащимся самим провести аналогичное доказательство для второго случая, когда четырёхугольник невыпуклый. Для того чтобы убедиться в полезности выведенной формулы, можно обратиться ещё раз к задаче 69 ж), которая уже была решена на одном из предыдущих уроков, а теперь (с помощью новой формулы) решается совсем просто.

При наличии времени на первом уроке можно разобрать решение некоторых задач из домашних заданий.

Задание на дом: п. 107, самостоятельно изучить п. 108; вопрос 17 (с. 85); несколько задач из числа дополнительных к главе 8 (задачи 81—102), на усмотрение учителя.

На втором уроке нужно вывести формулу Герона. Можно вызвать кого-то из достаточно сильных учеников к доске для выполнения алгебраических преобразований, связанных с вычислением синуса угла A треугольника ABC. Полезно обратить внимание учащихся на то, что формула Герона выражает площадь треугольника только через его стороны, причём все три стороны входят в эту формулу равноправно.

Целесообразно выписать все изученные в данной главе формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C = pr = \frac{abc}{4R} =$$
$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Во второй половине урока можно провести самостоятельную работу № 7.

Задание на дом: п. 108; вопрос 17 (с. 85); несколько задач из числа дополнительных к главе 8 (на усмотрение учителя).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения пп. 107 и 108 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника, проводить преобразования, связанные с вычислением геометрических величин; уметь выводить формулу Герона и использовать полученные формулы при решении задач.

Уроки 50, 51 Решение задач по теме «Площадь многоугольника»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач, в которых используются различные формулы площадей треугольников и четырёхугольников.

Для классной и домашней работы можно использовать неразобранные ранее задачи из заданий 69—76, дополнительные задачи к главе 8 (задачи 81—102), а также дополнительные задачи из дидактических материалов (на усмотрение учителя).

Уроки 52, 53 Некоторые формулы, связанные с правильными многоугольниками

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: для правильных n-угольников, вписанного в данную окружность и описанного около неё, вывести формулы, связывающие периметры этих многоугольников, их площади и радиус окружности.

В начале первого урока полезно вспомнить (проведя опрос учащихся), какой многоугольник называется правильным, чему равен угол правильного n-угольника, как формулируются теоремы об окружности, описанной около правильного многоугольника, и об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Затем нужно приступить к выводу формул для площади и периметра правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R (формулы (1) и (2) из п. 109 учебника). Желательно, чтобы учащиеся приняли активное участие в выведении этих формул при некоторых (в случае необходимости) указаниях учителя. Можно нарисовать на доске рисунок, повторяющий рисунок 87, *а* учебника (рис. 21, *а*), и, отметив длины сторон треугольника (R, R и a), но не отмечая пока величину угла $\left(\frac{360°}{n}\right)$, задать вопрос: чему равен угол, противолежащий стороне a, если это сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R? Отметив величину этого угла, нужно поставить задачу: выразить сторону a через радиус R и указанный угол. Возможно, что кто-то предложит сделать это с помощью теоремы косинусов:

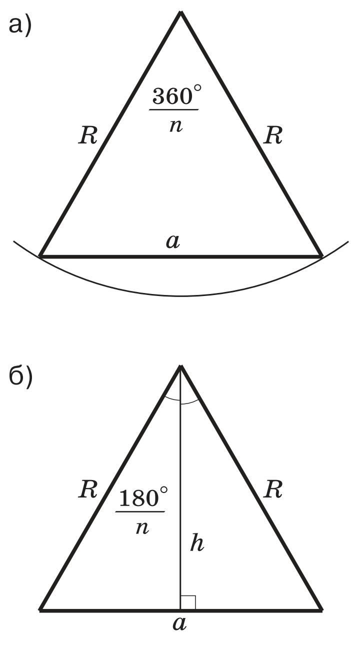


Рис. 21

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\frac{360°}{n} = 2R^2\left(1 - \cos\frac{360°}{n}\right),$$

откуда

$$a = R\sqrt{2\left(1-\cos\frac{360^\circ}{n}\right)}. \qquad (1')$$

Такой способ не следует отвергать, но нужно предложить учащимся выразить a через R другим способом. При необходимости можно сделать подсказку: давайте проведём высоту треугольника к стороне a (рис. 21, *б*). Желательно, чтобы дальнейшие рассуждения учащиеся провели сами: поскольку высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является биссектрисой и медианой, то в каждом из получившихся прямоугольных треугольников с гипотенузой R и общим катетом, обозначенным на рисунке буквой h, другой катет равен $\frac{a}{2}$, а угол, противолежащий этому катету, равен $\frac{180^\circ}{n}$. Поэтому $\frac{a}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$, откуда

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}. \qquad (2')$$

Естественно возникает вопрос: как из формулы (1′) получить формулу (2′)? Полезно этот вопрос поставить перед учащимися. Ответ на него связан с формулой $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, полученной ещё в 8 классе. Так как $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (в силу основного тригонометрического тождества), то $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Если $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, то $1 - \cos\frac{360^\circ}{n} = 2\sin^2\frac{180^\circ}{n}$, поэтому

$$\sqrt{2\left(1-\cos\frac{360^\circ}{n}\right)} = \sqrt{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = 2\sin\frac{180^\circ}{n},$$

и теперь из формулы (1′) следует формула (2′).

С помощью формулы (2′) получаем формулу для периметра P правильного вписанного n-угольника (формула (1) из п. 109 учебника):

$$P = na = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}. \qquad (1)$$

Далее нужно перейти к выводу формулы для площади S правильного вписанного n-угольника. Можно поставить перед учащимися такие вопросы: 1) Какую часть площади правильного n-угольника составляет площадь равнобедренного треугольника, изображённого на рисунке? 2) Чему равна площадь этого равнобедренного треугольника? Ответы на эти вопросы приводят к формуле для площади S (формула (2) из п. 109 учебника):

$$S = n \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(na) \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}PR\cos\frac{180^\circ}{n}. \qquad (2)$$

В качестве применения формул (1) и (2) можно найти периметры P_3, P_4 и P_6 и площади S_3, S_4 и S_6 правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, вписанных в окружность радиуса R:

$$P_3 = 3\sqrt{3}R,\ P_4 = 4\sqrt{2}R,\ P_6 = 6R,$$

$$S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,\ S_4 = 2R^2,\ S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Полезно отметить, что сторона правильного шестиугольника равна R, т. е. равна радиусу описанной окружности. При недостатке времени на уроке можно включить вычисление этих величин в домашнее задание. Кроме того, в домашнее задание нужно включить самостоятельное изучение второй части п. 109.

Задание на дом: п. 109; вопросы 18, 19 (с. 85).

Второй урок нужно посвятить выводу формул (3)—(6) из п. 109. Поскольку изучение этих формул входило в домашнее задание, можно нескольких учеников вызвать к доске для последовательного вывода формул (3)—(6).

В классе (при наличии времени) или в виде домашнего задания полезно поручить учащимся найти по формулам (3) и (5) периметры Q_3, Q_4 и Q_6 и площади S_3', S_4' и S_6' правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, описанных около окружности радиуса R.

Задание на дом: п. 109; вопросы 18, 19 (с. 85).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 109 учащиеся должны проявить умение выводить новые формулы на основе накопленных знаний; уметь выводить формулы (1)—(6) данного пункта и проводить по ним вычисления для конкретных значений n.

Уроки 54, 55 Длина окружности

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести формулу длины окружности данного радиуса и формулу длины дуги окружности с данной градусной мерой; решать задачи с применением этих формул.

На первом уроке, опираясь на текст учебника, учителю следует рассказать самому, как получается формула длины окружности радиуса R: $C = 2\pi R$, и что такое число π. После этого нужно решить задачи 77 а) (устно), 77 б), а затем можно предложить учащимся самостоятельно вывести формулу длины дуги окружности радиуса R с заданной градусной мерой α градусов и обсудить вывод этой формулы, вызвав кого-то к доске.

Задание на дом: п. 110, в том числе самостоятельно изучить замечание в конце этого пункта (более сильным учащимся можно предложить изучить приложение «О длине окружности» на с. 123, 124); вопросы 20—22 (с. 85); задачи 78 а), 78 б).

На втором уроке нужно обсудить замечание, сделанное в конце п. 110. В замечании утверждается, что

$$Q_n \to 2\pi R \text{ при } n \to \infty, \qquad (1)$$

где Q_n — периметр правильного 2^n-угольника, описанного около окружности радиуса R. Для обоснования этого утверждения используется формула

$$P_n = Q_n \cos\frac{180^\circ}{2^n}, \qquad (2)$$

где P_n — периметр правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса R (эта формула следует из полученной в п. 109 формулы (4), если заменить n на 2^n), а также два предельных соотношения:

$$P_n \to 2\pi R \text{ при } n \to \infty \qquad (3)$$

и

$$\cos\frac{180^\circ}{2^n} \to 1 \text{ при } n \to \infty. \qquad (4)$$

Соотношение (3) следует из самого определения длины окружности: $P_n \to C$ при $n \to \infty$ (обоснование этого предельного соотношения приведено в приложении «О длине окружности» на с. 123, 124 учебника, оно ориентировано на наиболее подготовленных учащихся), а соотношение (4) обосновано в замечаниях 1 и 2 в конце упомянутого приложения. При наличии времени можно попросить кого-то из сильных учеников, разобравшихся в этих замечаниях, рассказать, как обосновывается соотношение (4).

Из формулы (2) с учётом соотношений (3) и (4) непосредственно следует соотношение (1). Можно отметить, что оно будет использоваться в следующем пункте при выводе формулы площади круга.

Далее нужно решить оставшиеся задачи из задания 77.

Задание на дом: п. 110; вопросы 20—22 (с. 85); задачи 78 в), 78 г), 78 д).

Основные требования к учащимся

В ходе и результате изучения п. 110 учащиеся должны проявить умение самостоятельно работать с текстом учебника; уметь объяснить, что принимают за длину окружности, выводить (так же, как в п. 110) формулу длины окружности данного радиуса и формулу длины дуги окружности с заданной градусной мерой; знать, что такое число π и каково его приближённое значение; уметь решать задачи такого типа, как в задании 77.

Уроки 56, 57 Площадь круга

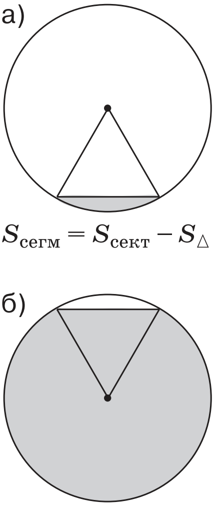
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: вывести формулу площади круга данного радиуса и формулу площади сектора; использовать эти формулы при решении задач; познакомить учащихся с одной из самых древних задач на построение — «задачей о квадратуре круга»; провести самостоятельную работу № 8.

На первом уроке, опираясь на текст учебника, учителю следует вывести формулу площади круга данного радиуса R. При этом нужно обратить внимание учащихся на два предельных соотношения: $\cos\frac{180^\circ}{2^n} \to 1$ и $Q_n \to 2\pi R$ при $n \to \infty$, которые играют важную роль при выводе формулы площади круга. Оба эти соотношения обсуждались на предыдущем уроке.

После этого можно решить задачи 79 а), 79 б), 79 в), а затем, сформулировав определение сектора, предложить учащимся самим вывести формулу площади сектора с дугой α градусов и радиусом R.

Задание на дом: п. 111 (в том числе самостоятельно изучить абзац текста, относящийся к сегменту); вопросы 23—25 (с. 85); задачи 80 а), 80 б), 80 в).

а)



$S_{сегм} = S_{сект} - S_{\triangle}$

б)

$S_{сегм} = S_{сект} + S_{\triangle}$

Рис. 22

На втором уроке можно вызвать кого-то к доске, чтобы выслушать определение сегмента и рассказ о вычислении его площади. В учебнике написано, как вычислить площадь сегмента, если его дуга меньше 180° (рис. 22, *а*). В этом случае из площади сектора с той же самой дугой нужно вычесть площадь треугольника, сторонами которого являются хорда и два радиуса.

Если же дуга сегмента больше 180° (рис. 22, *б*), то к площади сектора с той же самой дугой нужно прибавить площадь соответствующего треугольника.

Далее нужно решить задачу 79 г) — это задача на построение с помощью циркуля и линейки.

Рассказывая про «задачу о квадратуре круга», учитель может напомнить, что с одной из неразрешимых задач на построение учащиеся уже знакомы — это задача о трисекции угла: с помощью циркуля и линейки невозможно разделить произвольный угол на три равных угла (об этом говорилось ещё в 7 классе).

Во второй половине урока нужно провести самостоятельную работу № 8.

Задание на дом: п. 111; вопросы 23—25 (с. 85); задача 80 г), а также несколько задач из числа дополнительных к главе 8 на усмотрение учителя (задачи 103—116).

Основные требования к учащимся

В результате изучения п. 111 учащиеся должны уметь выводить формулы площади круга и площади сектора; уметь объяснить, как вычислить площадь сегмента; уметь решать задачи такого типа, как в задании 79; знать, какая задача называется «задачей о квадратуре круга».

Уроки 58, 59 Решение задач по теме «Площадь»

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКОВ: закрепить навыки решения задач с использованием разнообразных формул площадей многоугольников, а также формул длины окружности и площади круга; подготовиться к контрольной работе № 2.

Для классной и домашней работы можно использовать дополнительные задачи к главе 8 (задачи 81—116) и дополнительные задачи из дидактических материалов (на усмотрение учителя). Желательно прорешать все основные задачи из заданий 69—80, которые остались нерешёнными. На одном из уроков нужно провести математический диктант № 2.

Урок 60 Контрольная работа № 2

Ответы и указания

Вар. 1. **1.** 15 см^2. **2.** 55 см^2. **3.** 10π см^2. **4.** 1.
Вар. 2. **1.** 3 см^2. **2.** 42 см^2. **3.** 5π см^2. **4.** 2,3.

Вар. 3. **1.** 36 см^2. **2.** $\frac{a}{a+b}S$. **3.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **4.** 10 см^2. Указание. Воспользоваться тем, что $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$, поэтому $S_{ABD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

Вар. 4. **1.** 6 см. **2.** $\left(1+\frac{a}{b}\right)S$. **3.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **4.** 2 см^2. Указание. См. указание к задаче 4 варианта 3.

Уроки 61—67 Итоговое повторение. Решение задач

Урок 68 Контрольная работа № 3

Ответы и указания

Вар. 1. **1.** $3x+2y-7=0$. **2.** (3; 1). **3.** $18\sqrt{2}$ см^2.

Вар. 2. **1.** $2x+3y-9=0$. **2.** (3; 3). **3.** $18\sqrt{3}$ см^2.
Вар. 3. **1.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ или $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **2.** $x+2y-0{,}75=0$. **3.** 3,5. Указание. Провести через данные точки прямые, параллельные осям координат. **4.** 48 см^2. Указание. Продолжить медиану на отрезок, равный медиане.
Вар. 4. **1.** 1 или 5. **2.** $2x+y+1{,}25=0$. **3.** 5. Указание. См. указание к задаче 3 варианта 3. **4.** 48 см^2. Указание. См. указание к задаче 4 варианта 3.

Почасовое тематическое планирование учебного материала

Содержание материала	Кол-во уроков	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Вводное повторение	4	
Глава 7. Векторы и координаты	**35**	Объяснять, что такое ось координат, начало координат, положительная полуось, отрицательная полуось, что называется координатой точки на оси; формулировать и доказывать утверждение о координате середины отрезка, лежащего на оси координат; объяснять, как задаётся, изображается и обозначается прямоугольная система координат, как называются оси координат, что такое координаты точки в заданной прямоугольной системе координат и как они называются; формулировать и доказывать утверждение о координатах середины отрезка. Объяснять, что такое вектор, как изображаются и обозначаются векторы, какой вектор называется противоположным данному вектору, что такое нулевой вектор, что такое длина вектора; приводить примеры физических векторных величин; формулировать определение равных векторов и объяснять, как из этого определения следует, что равные ненулевые векторы имеют равные длины и одинаково направлены. Формулировать определение координат вектора в данной прямоугольной системе координат, формулировать и доказывать теорему о координатах равных векторов; выводить формулу, выражающую длину вектора через его координаты, и формулу расстояния между двумя точками через их координаты; объяснять и иллюстрировать понятие угла между векторами, выводить фор-
§ 19. Координаты точки и координаты вектора	13	
84. Ось координат	2	
85. Прямоугольная система координат		
86. Вектор	1	
87. Координаты вектора	2	
88. Длина вектора и расстояние между двумя точками	1	
89. Угол между векторами	2	
90. Уравнение окружности	1	
91. Уравнение прямой	2	
Решение задач	2	

§ 20. Операции с векторами	12	мулу, выражающую косинус угла между векторами через их координаты, и, как следствие из неё, условие перпендикулярности двух ненулевых векторов. Выводить уравнение окружности и уравнение прямой в заданной прямоугольной системе координат; объяснять, что называется угловым коэффициентом прямой и как связаны угловые коэффициенты двух данных прямых с их взаимным расположением.
92. Сумма векторов	2	
93. Свойства сложения векторов	2	
94. Произведение вектора на число	2	Объяснять, как определяются сумма и разность двух векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение двух векторов, иллюстрировать операции с векторами, формулировать и доказывать утверждения о свойствах этих операций; формулировать и доказывать теорему о разложении любого вектора по двум данным неколлинеарным векторам.
95. Скалярное произведение векторов	2	
96. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	2	Решать задачи, используя координатно-векторный аппарат и компьютерные программы.
Решение задач	2	Объяснять понятия отображения плоскости на себя, движения, осевой симметрии, параллельного переноса на данный вектор, поворота вокруг данной точки на данный угол, центральной симметрии, иллюстрировать указанные виды движений, в том числе с помощью компьютерных программ; формулировать и доказывать утверждение о результате последовательного выполнения двух осевых симметрии. Формулировать определение центрального подобия (гомотетии), формулировать и доказывать утверждения о его свойствах; формулировать определения преобразования подобия и подобных фигур.
§ 21. Геометрические преобразования	6	
97. Осевая симметрия	1	
98. Движения	2	
99. Центральное подобие	2	
100. О подобии произвольных фигур	1	Решать задачи на построение и доказательство с помощью геометрических преобразований, используя в подходящих случаях компьютерные иллюстрации
Решение задач по теме «Векторы и координаты»	3	
Контрольная работа № 1	1	

Продолжение

Содержание материала	Кол-во уроков	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава 8. Площадь	**21**	Объяснять, как производится измерение площадей многоугольников, какие два многоугольника называются равновеликими и какие равносоставленными; формулировать утверждения об основных свойствах площадей. Выводить формулы площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции, четырёхугольника (через диагонали и угол между ними), формулу Герона. Для правильных n-угольников, вписанного в данную окружность и описанного около неё, выводить формулы, связывающие периметры этих многоугольников, их площади и радиус окружности. Объяснять, как вводится понятие длины окружности, и выводить формулу длины окружности данного радиуса, а также формулу длины дуги этой окружности; выводить формулу площади круга данного радиуса, а также формулу площади сектора. Решать задачи на вычисление и доказательство с использованием формул площадей
§ 22. Площадь многоугольника	12	
101. Равносоставленные многоугольники	1	
102. Площадь многоугольника		
103. Площадь прямоугольника	2	
104. Площадь треугольника	2	
105. Площадь параллелограмма	1	
106. Площадь трапеции	2	
107. Площадь четырёхугольника*	2	
108. Формула Герона		
Решение задач	2	
§ 23. Длина окружности и площадь круга	6	

109. Некоторые формулы, связанные с правильными многоугольниками	2	
110. Длина окружности	2	
111. Площадь круга	2	
Решение задач по теме «Площадь»	2	
Контрольная работа № 2	1	
Итоговое повторение. Решение задач	7	
Контрольная работа № 3	1	
Всего	**68**	

Решение некоторых задач

Глава 7

1.

г) Дано: параллелограмм $ABCD$; $A\,(0;\,0)$, $B\,(3;\,4)$, $C\,(5;\,9)$.

Найти: координаты вершины D.

Решение. Обозначим искомые координаты точки D через $(x;\,y)$, а точку пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма обозначим буквой M. Так как точка M — середина отрезка AC (поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), то каждая координата точки M равна полусумме соответствующих координат точек A и C, т. е. координаты точки M равны $\left(\frac{5}{2};\,\frac{9}{2}\right)$. Но точка M является также серединой отрезка BD, поэтому каждая координата точки M равна полусумме соответствующих координат точек B и D, т. е. справедливы равенства

$$\frac{5}{2}=\frac{3+x}{2},\quad \frac{9}{2}=\frac{4+y}{2}.$$

Отсюда находим координаты точки D: $x=2$, $y=5$.

Ответ: $D\,(2;\,5)$.

3.

а) Дано: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Доказать: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}$.

Решение. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то середины отрезков AD и BC совпадают (согласно определению равных векторов). В свою очередь, равенство $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}$ выполняется, если середины отрезков DA и CB совпадают. Но DA и CB — это те же самые отрезки, что AD и BC, середины которых совпадают.

Итак, середины отрезков DA и CB совпадают, поэтому $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}$, что и требовалось доказать.

г) Дано: четырёхугольник $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, прямая MN проходит через точку O, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (рис. 23).

Доказать: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.

Решение. 1) Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, то середины отрезков AC и BD совпадают (согласно определению равных векторов). Следовательно, точка O (общая точка отрезков AC и BD) является серединой этих отрезков. Поскольку диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм (по признаку параллелограмма), поэтому $AD \parallel BC$.

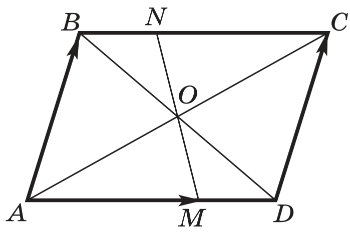


Рис. 23

2) $\triangle AOM=\triangle CON$ по стороне ($AO=OC$) и двум прилежащим к ней углам ($\angle OAM=\angle OCN$, так как эти углы накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC, а углы AOM и CON равны, как вертикальные).

Следовательно, $OM=ON$, т. е. точка O — середина отрезка MN.

3) Так как середины отрезков AC и MN совпадают, то $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ (по определению равных векторов), что и требовалось доказать.

Замечание. В ходе решения задачи мы доказали, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и точки A, B, C и D не лежат на одной прямой, то $ABCD$ — параллелограмм.

5.

а) Вопрос: как связаны между собой ненулевые координаты векторов $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

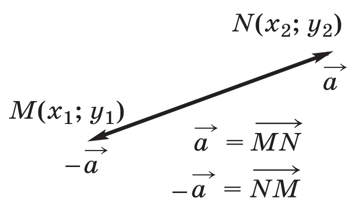


Рис. 24

Решение. Пусть точки $M\,(x_1; y_1)$ и $N\,(x_2; y_2)$ — начало и конец вектора $\vec{a}$ (рис. 24), тогда противоположным вектору $\vec{a}$ (т. е. вектором $-\vec{a}$) является вектор $\overrightarrow{NM}$, и эти векторы имеют следующие координаты: $\vec{a}\,\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$, $-\vec{a}\,\{x_1-x_2; y_1-y_2\}$.

Если какая-то из координат вектора $\vec{a}$ равна нулю (например, $x_1-x_2=0$), то соответствующая координата вектора $-\vec{a}$ также равна нулю ($x_2-x_1=0$), а если какая-то координата вектора $\vec{a}$ не равна нулю (например, $x_1-x_2\neq 0$), то соответствующая координата вектора $-\vec{a}$ равна ей по модулю ($|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$) и противопоможна по знаку $(x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2))$.

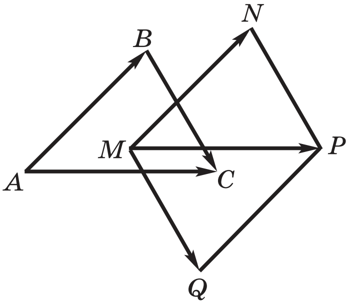


Рис. 25

Ответ: ненулевые координаты противоположных векторов равны по модулю и противоположны по знаку.

г) Дано: треугольник ABC, точка M лежит внутри треугольника, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 25).

Доказать: $MNPQ$ — параллелограмм.

Решение. 1) Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Тогда точки A, C и B имеют координаты: $A\,(0; 0)$, $C\,(c; 0)$, $B\,(b; d)$, где c, b и d — некоторые числа, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют следующие координаты: $\overrightarrow{AB}\,\{b; d\}$, $\overrightarrow{AC}\,\{c; 0\}$, $\overrightarrow{BC}\,\{c - b; -d\}$.

2) Координаты точки M обозначим $(x; y)$. Используя равенства $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$, находим координаты точек P и Q: $P\,(x + c; y)$ и $Q\,(x + c - b; y - d)$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{QP}$ имеет координаты $\{b; d\}$, т. е. такие же координаты, как и вектор $\overrightarrow{AB}$. Поэтому $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB}$.

3) Из равенств $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB}$ следует, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Кроме того, точки M, N и P, очевидно, не лежат на одной прямой. Поэтому $MNPQ$ — параллелограмм (см. замечание в конце решения задачи 3 г)), что и требовалось доказать.

6.

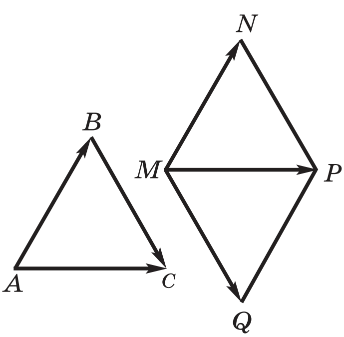


Рис. 26

г) Дано: равносторонний треугольник ABC, точка M лежит вне треугольника, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 26).

Доказать: $MP \perp NQ$.

Решение. В точности так же, как в задаче 5 г), доказывается, что $MNPQ$ — параллелограмм, а так как $MN = AB$ и $MQ = BC$ (это следует из равенств $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC}$) и, кроме того, $AB = BC$, то

$MN = MQ$. Следовательно, $MNPQ$ — ромб, поэтому $MP \perp NQ$ (диагонали ромба взаимно перпендикулярны), что и требовалось доказать.

9.

д) Дано: точки $A\,(1;\,3)$, $B\,(-1;\,1)$ и $C\,(2;\,2)$.

Определить: вид треугольника ABC.

Найти: координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. 1-й способ. 1) По формуле расстояния между двумя точками находим стороны треугольника ABC:

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Так как $BC^2 = AB^2 + AC^2$, то треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой BC.

2) Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы. Её координаты $(x_0;\, y_0)$ находим по формулам координат середины отрезка:

$$x_0 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2},\quad y_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

3) Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен MA, где $M\,(x_0,\, y_0)$ — середина гипотенузы. Вычисляем MA:

$$MA = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ответ: треугольник ABC прямоугольный, точка $M\left(\frac{1}{2};\,\frac{3}{2}\right)$ — центр описанной окружности, $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ — радиус описанной окружности.

Замечание. В данной задаче треугольник ABC оказался прямоугольным, и это упростило нахождение координат центра и радиуса описанной около него окружности. Рассмотрим другой способ решения, не связанный с тем, что треугольник прямоугольный (этот способ пригоден для любого треугольника).

2-й способ. Уравнение искомой окружности запишем в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Требуется найти x_0, y_0 и R.

Так как точки A, B и C лежат на окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению (1). Это даёт систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} (1 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2 = R^2, \\ (-1 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2, \\ (2 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Её несложно решить. Вычитая первое уравнение из второго, а затем из третьего, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 4x_0 + 4y_0 = 8, \\ -2x_0 + 2y_0 = 2. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, найдём x_0 и y_0: $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{3}{2}$.

Подставив эти значения x_0 и y_0 в любое из уравнений системы (2), получим $R^2 = \frac{10}{4}$, откуда $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

е) Дано: C — середина отрезка AB, $AB = 4$.
Найти: множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 35$.

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс (рис. 27). Тогда точки A, B и C имеют координаты: $A\,(-2; 0)$, $B\,(2; 0)$, $C\,(0; 0)$.

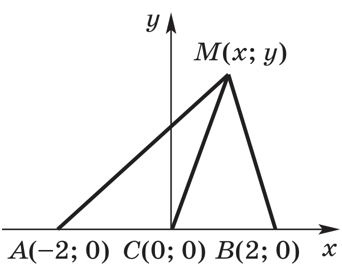


Рис. 27

Пусть $M\,(x; y)$ — произвольная точка. Квадраты её расстояний от точек A, B, C выражаются формулами

$$AM^2 = (x + 2)^2 + y^2,$$
$$BM^2 = (x - 2)^2 + y^2, \; CM^2 = x^2 + y^2.$$

Если точка $M\,(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 35$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$((x + 2)^2 + y^2) + ((x - 2)^2 + y^2) + (x^2 + y^2) = 35, \qquad (1)$$

а если точка $M\,(x; y)$ не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, уравнение (1) является уравнением искомого множества. Раскрыв скобки и разделив обе части уравнения на 3, приходим к равносильному уравнению

$$x^2 + y^2 = 9,$$

которое является уравнением окружности радиуса 3 с центром в начале координат (т. е. в точке C).

Ответ: окружность с центром C радиуса 3.

11.

а) Дано: точки А (1; –1), B (–3; 2), C (2; 5) и D (5; 2).

Найти: уравнения прямых AB и CD и угловые коэффициенты этих прямых.

Вопрос: пересекаются ли эти прямые?

Решение. 1) Вектор $\overrightarrow{AB}\{-4; 3\}$ лежит на прямой AB, а вектор $\vec{n}\{3; 4\}$ перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{AB}$ (поскольку выполнено условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}$: $(-4) \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 0$). Следовательно, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к прямой AB. Запишем уравнение прямой AB как уравнение прямой, проходящей через точку A (1; –1) перпендикулярно к вектору $\vec{n}\{3; 4\}$:

$$3(x-1)+4(y+1)=0.$$

Итак, уравнение прямой AB имеет вид $3x+4y+1=0$.

2) Аналогично находим уравнение прямой CD, как уравнение прямой, проходящей через точку C (2; 5) перпендикулярно к вектору $\vec{n_1}\{3; 3\}$ ($\vec{n_1} \perp \overrightarrow{CD}\{3; -3\}$):

$$3(x-2)+3(y-5)=0 \text{ или } x+y-7=0.$$

3) Записав уравнения прямых AB и CD в виде

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} \text{ и } y=-x+7,$$

находим угловые коэффициенты этих прямых: $k_1=-\frac{3}{4}$ для прямой AB, $k_2=-1$ для прямой CD.

4) Так как $k_1 \neq k_2$, то прямые AB и CD пересекаются.

Ответ. Уравнения прямых AB и CD: $3x+4y+1=0$ и $x+y-7=0$. Угловые коэффициенты прямых AB и CD равны $-\frac{3}{4}$ и -1. Прямые AB и CD пересекаются.

в) Дано: прямая $y-x-4=0$ и окружность $x^2+y^2=8$.

Вопрос: каково взаимное расположение данных прямой и окружности?

Решение. Если данные прямая и окружность имеют общую точку $M(x; y)$, то координаты этой точки удовлетворяют как уравнению прямой, так и уравнению окружности, т. е. являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y-x-4=0, \\ x^2+y^2=8, \end{cases} \qquad (1)$$

и обратно, если система уравнений (1) имеет решение $(x; y)$, то точка M с координатами $(x; y)$ является общей точкой прямой и окружности.

Из первого уравнения системы (1) выразим y через x $(y = x + 4)$ и подставим во второе уравнение: $x^2 + (x + 4)^2 = 8$, откуда $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Последнее уравнение имеет только один корень: $x = -2$.

Найденному значению x соответствует $y = 2$.

Итак, система уравнений (1) имеет единственное решение: $x = -2$, $y = 2$. Следовательно, точка $M(-2; 2)$ является единственной общей точкой данных прямой и окружности, т. е. прямая и окружность касаются в точке M.

Ответ: прямая и окружность касаются в точке $M(-2; 2)$.

13.

д) Дано: параллелограмм $ABCD$ (рис. 28).

Найти: вектор с началом A, равный вектору $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

Решение. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то середины отрезков BD и AC совпадают, поэтому $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

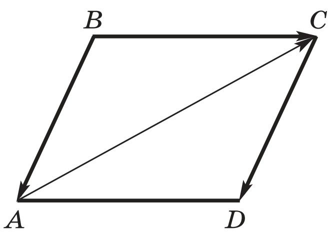


Рис. 28

Поскольку $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, то, согласно определению разности векторов, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$, и, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

Таким образом, вектором с началом A, равным вектору $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$, является вектор $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: $\overrightarrow{AC}$.

15.

в) Дано: параллелограмм $ABCD$, M — точка пересечения его диагоналей (рис. 29).

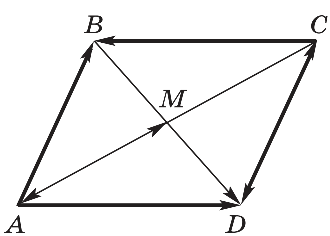


Рис. 29

Доказать: $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}|$.

Решение. Сумму векторов в левой части искомого равенства запишем в виде $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$. Согласно правилу многоугольника, эта сумма равна $\overrightarrow{AB}$.

Сумма векторов в правой части равенства равна $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Таким образом, нужно доказать, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, т. е. $AB = CD$. Это равенство, очевидно, выполняется (так как противоположные стороны параллелограмма равны), что и требовалось доказать.

ж) Дано: параллелограмм $ABCD$, O — произвольная точка (рис. 30).

Выразить: вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

Решение. Так как $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, а поскольку $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (это следует из того, что $ABCD$ — параллелограмм), то $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Из этого равенства получаем

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

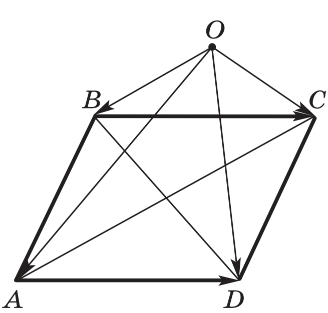


Рис. 30

Ответ: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

з) **Дано:** $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^\circ$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$, $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Доказать: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Решение. 1) Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и построим по правилу параллелограмма вектор $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 31). Так как $|\vec{b}| = |\vec{c}|$, то $OB = OC$, поэтому $OBDC$ — ромб, в котором $\angle BOD = \angle COD = 60^\circ$. Следовательно, $\angle AOD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, поэтому точки A, O и D лежат на одной прямой.

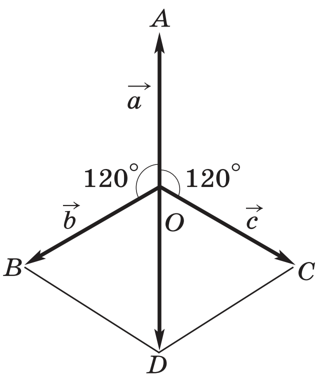


Рис. 31

2) Так как $\angle OBD = 180^\circ - \angle BOC = 60^\circ$ и $OB = BD$, то треугольник OBD равносторонний, поэтому $|\overrightarrow{OD}| = OD = OB = |\vec{b}|$, а поскольку $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ по условию, то $|\overrightarrow{OD}| = |\vec{a}|$, т. е. $|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}|$.

Итак, векторы $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a}$ равны по модулю и противоположны по направлению, следовательно, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

17.

б) Дано: C — середина отрезка AB, O — произвольная точка.

Доказать: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Решение. 1-й способ. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс (рис. 32, *а*). Тогда точки A, B, C имеют следующие координаты: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; 0)$, где a — некоторое число.

Пусть O — произвольная точка с координатами $(x; y)$. Тогда векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ имеют следующие координаты: $\overrightarrow{OA}\{-a-x; -y\}$, $\overrightarrow{OB}\{a-x; -y\}$ и $\overrightarrow{OC}\{-x; -y\}$, а вектор $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ имеет координаты $\left\{\frac{(-a-x)+(a-x)}{2}; \frac{-y+(-y)}{2}\right\} = \{-x; -y\}$. Таким образом, координаты вектора $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ равны соответственно координатам вектора $\overrightarrow{OC}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, что и требовалось доказать.

2-й способ. Для случая, когда точка O не лежит на прямой AB, приведём другое доказательство, не связанное с введением системы координат.

Достроим треугольник AOB до параллелограмма $AOBD$ (рис. 32, *б*). Тогда точка C будет серединой диагонали OD, поэтому $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, а по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Следовательно, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, что и требовалось доказать.

г) Вопрос: коллинеарны ли векторы $\vec{a}\{3; 6\}$ и $\vec{b}\{6; 12\}$; $\vec{c}\{1; -1\}$ и $\vec{d}\{2; 3\}$?

Решение. 1) Так как каждая координата вектора $\vec{b}$ вдвое больше соответствующей координаты вектора $\vec{a}$,

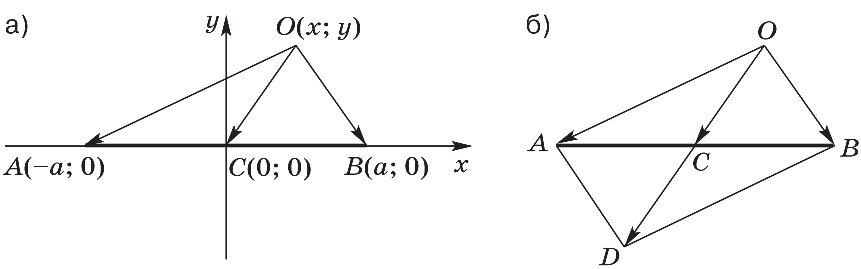


Рис. 32

то $\vec{b} = 2\vec{a}$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

2) Возьмём какой-нибудь ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к вектору $\vec{c}\{1; -1\}$, например $\vec{n}\{1; 1\}$ (векторы $\vec{c}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, поскольку удовлетворяют условию перпендикулярности: $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$). Если бы векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ были коллинеарны, то вектор $\vec{n}$ был бы перпендикулярен также и к вектору $\vec{d}\{2; 3\}$, и тогда было бы выполнено равенство (условие перпендикулярности векторов $\vec{n}$ и $\vec{d}$): $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 0$. Но это равенство не выполняется, поэтому векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны.

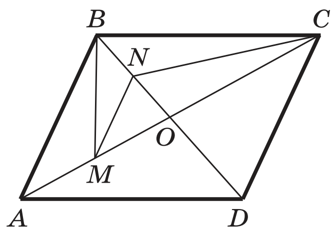


Рис. 33

Ответ: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны.

з) Дано: параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, M и N — середины отрезков OA и OB (рис. 33).

Найти (если это возможно): число k, для которого выполняется равенство: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{BM} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO})$; $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AO}$.

Решение. 1) Отрезок NM является средней линией треугольника AOB, поэтому $NM = \frac{1}{2}AB$ и $NM \parallel AB$. Отсюда, учитывая, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{NM}$ коллинеарны и направлены противоположно, приходим к равенству $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{NM}$, т. е. $k = -2$.

2) Так как $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AM}$, то равенство $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{CA}$ будет выполнено, если $k\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AM}$. Поскольку $AC = 4AM$ и векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CA}$ коллинеарны и направлены противоположно, то нужно взять $k = \frac{1}{4}$. При таком выборе k получаем $\overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$, т. е. искомое равенство выполнено.

3) Так как $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC}$ (см. рис. 33), то искомое равенство $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM}$ будет выполнено, если найдётся

такое k, для которого $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AC}$. Поскольку $MC = \frac{3}{4}AC$ и векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и направлены одинаково, то нужно взять $k = \frac{3}{4}$.

4) Так как точка M — середина отрезка AO, то $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO})$ (см. задачу 17 б)), поэтому нужно взять $k = \frac{1}{2}$.

5) Так как $MC = 3AM$ и векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AM}$ коллинеарны и направлены одинаково, то для выполнения равенства $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$ нужно взять $k = 3$.

6) Так как $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{NM}$ (см. 1), то равенство $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AO}$ равносильно равенству $(-2 - k)\,\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AO}$. Если бы нашлось такое число k, для которого выполняется последнее равенство, то векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{AO}$ были бы коллинеарными. Но это не так (см. рис. 33), и, следовательно, искомое k не существует.

Ответ: -2; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; 3; не существует.

и) Дано: четырёхугольник $ABCD$, точки M и N — середины сторон AB и CD (рис. 34, *а*).

Доказать (используя векторы): $MN \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC)$, причём знак равенства имеет место только в том случае, когда $AD \parallel BC$.

Решение. По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \text{ и } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, получаем

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

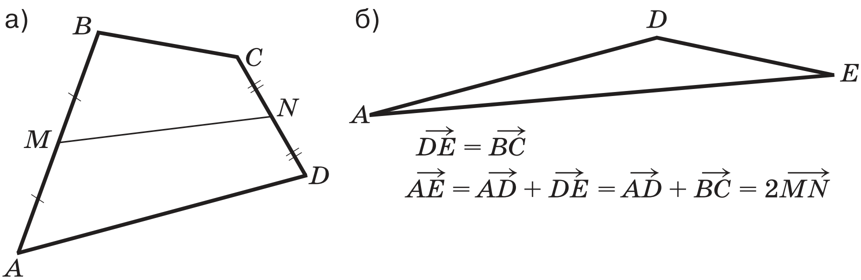


Рис. 34

Отложим от точки D вектор $\overrightarrow{DE}$, равный $\overrightarrow{BC}$ (рис. 34, *б*). Тогда $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ и $DE = BC$. Если векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны (т. е. прямые AD и BC не параллельны), то точки A, D и E не лежат на одной прямой, поэтому, согласно неравенству треугольника, $AE < AD + DE$, т. е. $|\overrightarrow{AE}| = |2\overrightarrow{MN}| \leqslant AD + DE = AD + BC$, откуда получаем

$$MN < \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Если же $MN = \dfrac{1}{2}(AD + BC)$, то $2MN = AD + BC$ или $AE = AD + DE$, поэтому точки A, D и E лежат на одной прямой, откуда следует, что векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, и, значит, $AD \parallel BC$, что и требовалось доказать.

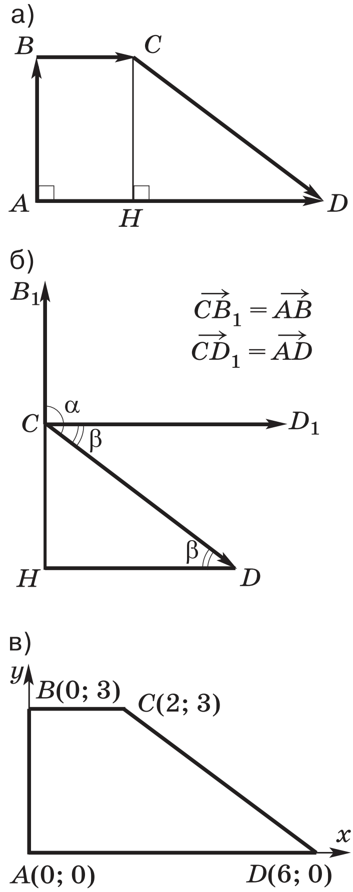


Рис. 35

19.

е) Дано: трапеция $ABCD$, AD и BC — основания, $AD = 6$, $BC = 2$, $\angle A = 90°$, $AB = 3$ (рис. 35, *а*).

Найти: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Решение. 1-й способ. 1) Проведём высоту CH трапеции (см. рис. 35, *а*). Так как $CH = AB = 3$, $HD = AD - AH = AD - BC = 6 - 2 = 4$, то, согласно теореме Пифагора,

$$CD = \sqrt{CH^2 + HD^2} = 5.$$

Далее $\cos \angle HCD = \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{3}{5}$, а угол α между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен $180° - \angle HCD$ (рис. 35, *б*), поэтому $\cos\alpha = -\cos\angle HCD$ (по формуле приведения), т. е. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -9.$$

2) Угол β между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен $\angle HDC$ (см. рис. 35, *б*), поэтому $\cos\beta = \cos\angle HDC = \frac{HD}{CD} = \frac{4}{5}$,

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\beta = 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = 24.$$

3) Угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен $0°$, поэтому

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 0° = 2\cdot 6\cdot 1 = 12.$$

2-й способ. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 35, *в*. Тогда точки A, B, C и D будут иметь координаты, указанные на этом рисунке. По известным координатам точек находим координаты векторов: $\overrightarrow{AB}\{0; 3\}$, $\overrightarrow{CD}\{4; -3\}$, $\overrightarrow{AD}\{6; 0\}$, $\overrightarrow{BC}\{2; 0\}$, а по формуле, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты, получаем

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0\cdot 4 + 3\cdot(-3) = -9,$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = 6\cdot 4 + 0\cdot(-3) = 24,$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 2\cdot 6 + 0\cdot 0 = 12.$$

Ответ: –9; 24; 12.

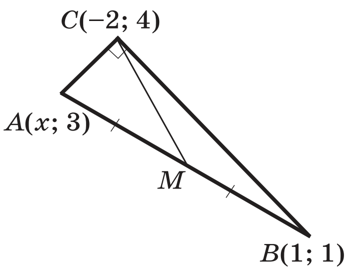


Рис. 36

ж) Дано: $\triangle ABC$, $A(x; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$, $\angle ACB = 90°$, отрезок CM — медиана треугольника ABC (рис. 36).

Найти: x и косинус острого угла между стороной AB и медианой CM.

Решение. 1) По координатам точек A, B и C находим координаты векторов: $\overrightarrow{CA}\{x+2; -1\}$, $\overrightarrow{CB}\{3; -3\}$. Так как $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ (по условию), то $(x+2)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) = 0$ (условие перпендикулярности ненулевых векторов), откуда $x = -3$.

2) По координатам точек $A(-3; 3)$ и $B(1; 1)$ находим координаты середины M отрезка AB: $M(-1; 2)$, а затем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$: $\overrightarrow{AB}\{4; -2\}$ и $\overrightarrow{CM}\{1; -2\}$. Так как $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} = 4\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) = 8$, а, с другой стороны, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CM}|\cdot\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$, то

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CM}|} = \frac{8}{\sqrt{4^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = 0{,}8.$$

Поскольку $\cos\alpha > 0$, то α и есть искомый острый угол между стороной AB и медианой CM.

Ответ: –3; 0,8.

з) Дано: диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 37).

Доказать: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CB}^2$.

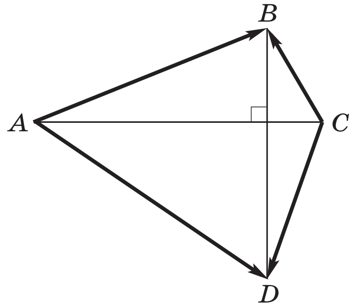


Рис. 37

Решение. Представляя векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CD}$ в виде $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$, получаем

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})=$$
$$=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CB}^2+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BD}.$$

Учитывая, что $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ (по условию диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны), приходим к искомому равенству.

20.

з) Дано: трапеция $ABCD$ с основанием AD (рис. 38).

Доказать: $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AD}^2+$ $+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.

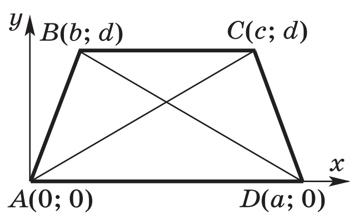


Рис. 38

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы точка D лежала на оси абсцисс. Тогда ордината точки D равна нулю, а ординаты точек B и C одинаковы, поэтому точки A, B, C и D имеют координаты, указанные на рисунке 38, где a, b, c и d — некоторые числа.

По координатам точек A, B, C и D находим координаты векторов: $\overrightarrow{AC}\,\{c;\,d\}$, $\overrightarrow{BD}\,\{a-b;\,-d\}$, $\overrightarrow{AD}\,\{a;\,0\}$, $\overrightarrow{BC}\,\{c-b;\,0\}$, $\overrightarrow{AB}\,\{b;\,d\}$, $\overrightarrow{DC}\,\{c-a;\,d\}$.

Применяя формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты, получаем

$$\overrightarrow{AC}^2=c^2+d^2,\ \overrightarrow{BD}^2=(a-b)^2+d^2,$$
$$\overrightarrow{AD}^2=a^2,\ \overrightarrow{BC}^2=(c-b)^2,$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=b\,(c-a)+d^2.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = c^2 + d^2 + (a-b)^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 - 2ab,$$

$$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = a^2 + (c-b)^2 + 2b\,(c-a) + 2d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 - 2ab.$$

Таким образом, $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$, что и требовалось доказать.

21.

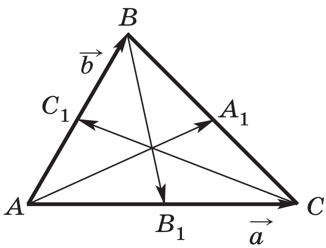


Рис. 39

б) Дано: $\triangle ABC$, отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы (рис. 39).

Разложить: векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. 1) Так как точка A_1 — середина отрезка BC, то $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ (задача 17 б)),

т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\,\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b}$.

2) Аналогично $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, а так как $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{a}$, то

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\,(-\vec{b} - \vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\,\vec{a} - \vec{b}.$$

3) $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\,(-\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\,(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b}$.

Ответ: $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\,\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\,\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b}$.

г) Дано: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где $\vec{i}\,\{x_1;\,y_1\}$, $\vec{j}\,\{x_2;\,y_2\}$.

Доказать: $\vec{a}\vec{p} = y\,(\vec{j}\vec{p})$ и $\vec{a}\,\vec{q} = x\,(\vec{i}\,\vec{q})$, где $\vec{p}\,\{y_1;\,-x_1\}$, $\vec{q}\,\{y_2;\,-x_2\}$.

Решение. 1) $\vec{a}\,\vec{p} = (x\vec{i} + y\vec{j})\,\vec{p} = x\,(\vec{i}\,\vec{p}) + y\,(\vec{j}\,\vec{p})$, а так как $\vec{i}\,\vec{p} = x_1y_1 + y_1\,(-x_1) = 0$, то $\vec{a}\,\vec{p} = y\,(\vec{j}\,\vec{p})$.

2) Аналогичным образом получаем второе искомое равенство: $\vec{a}\,\vec{q} = (x\vec{i} + y\vec{j})\,\vec{q} = x\,(\vec{i}\,\vec{q}) + y\,(\vec{j}\,\vec{q}) = x\,(\vec{i}\,\vec{q})$, поскольку $\vec{j}\,\vec{q} = 0$.

23.

б) Доказать: при осевой симметрии прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси.

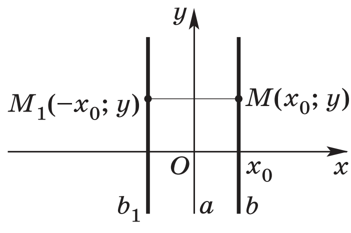


Рис. 40

Решение. Пусть прямая a — ось симметрии, а прямая b параллельна прямой a. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Oy совпадала с прямой a (рис. 40). Поскольку прямая b параллельна оси Oy, то её уравнение будет иметь вид $x = x_0$, где x_0 — некоторое число.

Пусть $M(x_0; y)$ — произвольная точка прямой b. Симметричная ей относительно прямой a (т. е. относительно оси Oy) точка M_1 имеет координаты $(-x_0; y)$ (см. рис. 40). Следовательно, точка M_1 лежит на прямой b_1, уравнение которой имеет вид $x = -x_0$. Таким образом, любая точка M прямой b при данной осевой симметрии переходит в точку M_1, лежащую на прямой b_1. Очевидно, что верно и обратное: в любую точку $M_1(-x_0, y)$ прямой b_1 при данной осевой симметрии переходит точка $M(x_0; y)$, лежащая на прямой b. Это означает, что при данной осевой симметрии прямая b переходит в прямую b_1, причём прямая b_1 параллельна оси Oy, т. е. параллельна оси симметрии, что и требовалось доказать.

в) Дано: прямая a и точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой a (рис. 41, a).

Построить (с помощью циркуля и линейки): на прямой a точку M, для которой сумма $MA + MB$ принимает наименьшее значение.

Решение. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a, и проведём отрезок A_1B. Он пе-

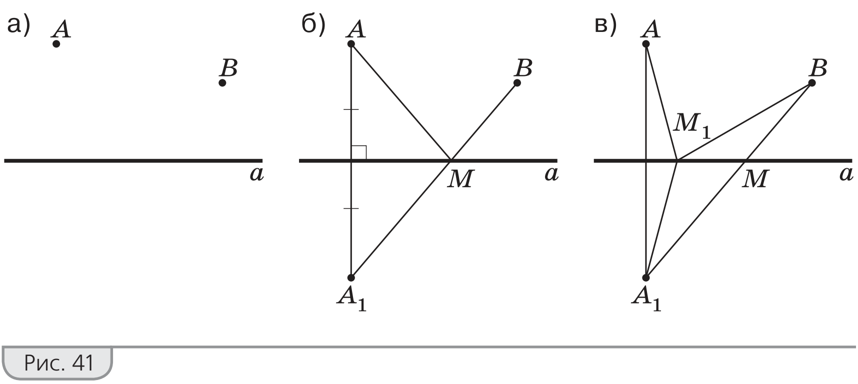


Рис. 41

ресекается с прямой a в некоторой точке M (рис. 41, *б*). Докажем, что точка M искомая.

Так как точки A и A_1 симметричны относительно прямой a, а точка M симметрична самой себе относительно этой прямой, то $AM = A_1M$, поэтому

$$AM + MB = A_1M + MB = A_1B.$$

Возьмём на прямой a любую точку M_1, отличную от точки M (рис. 41, *в*). Согласно неравенству треугольника применительно к треугольнику A_1M_1B справедливо неравенство $A_1M_1 + M_1B > A_1B$, а поскольку $A_1M_1 = AM_1$ и $A_1B = AM + MB$, то $AM_1 + M_1B > AM + MB$.

Таким образом, для любой точки M_1 прямой a, отличной от точки M, сумма $AM_1 + M_1B$ больше, чем такая же сумма для точки M, т. е. точка M — искомая.

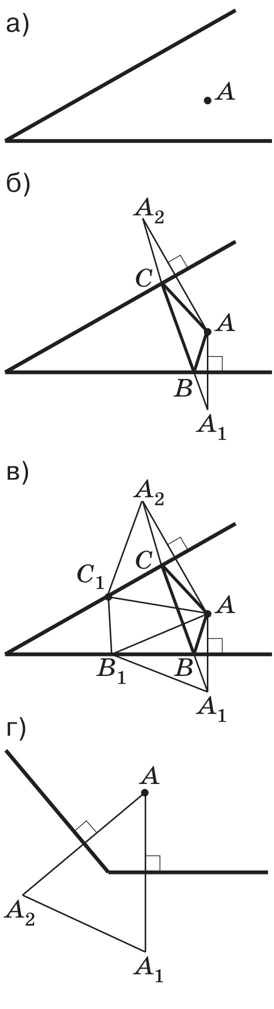


Рис. 42

24.

в) Дано: острый угол и точка A внутри его (рис. 42, *а*).

Построить: на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC принимал наименьшее значение.

Решение. 1) Построим точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно прямых, содержащих стороны данного угла (рис. 42, *б*). Отрезок A_1A_2 пересекает стороны угла в некоторых точках B и C (см. рис. 42, *б*). Докажем, что точки B и C искомые, т. е. периметр треугольника ABC имеет наименьшее значение по отношению к любому другому выбору точек на сторонах угла.

2) Так как $AB = A_1B$ и $AC = A_2C$, то $AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 = A_1A_2$, т. е. периметр треугольника ABC равен длине отрезка A_1A_2.

Возьмём вместо точки B какую-нибудь другую точку B_1 на той же стороне угла, а вместо точки C — другую точку C_1. (рис. 42, *в*). Периметр треугольника $AB_1C_{1\text{ы}}$ равен $AB_1 + B_1C_1 + C_1A = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2$, т. е. равен длине ломаной $A_1B_1C_1A_2$ с концами A_1 и A_2. Но длина этой ломаной больше длины отрезка A_1A_2. Действительно, $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2 \geqslant A_1C_1 + C_1A_2 \geqslant A_1A_2$, причём первое неравенство строгое, когда точка B_1 не лежит на отрезке A_1C_1, а второе — когда точка C_1 не лежит на отрезке A_1A_2. Таким образом, периметр треугольника AB_1C_1 больше периметра треугольника ABC.

Итак, построенные точки B и C искомые.

Замечание. По условию данный угол острый. Если взять прямой или тупой угол, то отрезок A_1A_2 может не пересекать стороны угла (рис. 42, *г*). Наиболее сильным учащимся можно предложить доказать, что в случае острого угла отрезок A_1A_2 пересекает стороны угла.

25.

а) Доказать: при движении отрезок отображается на равный ему отрезок.

Решение. Рассмотрим произвольный отрезок AB. Пусть при движении точка A переходит в точку A_1, точка B — в точку B_1. Докажем, что при этом движении отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1.

Для этого нужно доказать два утверждения: 1) любая точка M отрезка AB переходит в некоторую точку M_1 отрезка A_1B_1, и 2) обратно: в любую точку M_1 отрезка A_1B_1 переходит при данном движении некоторая точка M отрезка AB.

1) Пусть точка M отрезка AB переходит в точку M_1. Докажем, что точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1.

Согласно определению движения справедливы равенства

$$A_1B_1 = AB,\ A_1M_1 = AM,\ M_1B_1 = MB, \tag{1}$$

а поскольку точка M взята на отрезке AB, то

$$AM + MB = AB. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$A_1M_1 + M_1B_1 = A_1B_1, \tag{3}$$

а равенство (3) выполняется только тогда, когда точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1. Тем самым первое утверждение доказано.

2) Пусть точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1 и пусть при движении в неё переходит точка M. Докажем, что точка M лежит на отрезке AB.

Снова, согласно определению движения, справедливы равенства (1), а поскольку точка M_1 взята на отрезке A_1B_1, то выполняется равенство (3). Из (1) и (3) следует равенство (2), которое показывает, что точка M лежит на отрезке AB. Таким образом, второе утверждение также доказано.

в) Доказать: при движении прямая отображается на прямую.

Решение. Отметим на данной прямой точки A и B. Пусть при данном движении они переходят в точки A_1 и B_1. Докажем, что прямая AB отображается на прямую A_1B_1.

Согласно утверждению задачи 25 а) отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1. Возьмём на прямой AB произвольную точку C, не лежащую на отрезке AB. Пусть, например, точка B лежит между точками A и C, и пусть точка C переходит при данном движении в точку C_1. Тогда

$$AB + BC = AC \text{ и } A_1B_1 = AB,\ B_1C_1 = BC,\ A_1C_1 = AC.$$

Из этих равенств следует равенство

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1,$$

которое показывает, что точка C_1 лежит на прямой A_1B_1.

Аналогично доказывается, что в любую точку C_1 прямой A_1B_1 переходит некоторая точка C прямой AB. Тем самым доказано, что прямая AB при данном движении отображается на прямую A_1B_1.

г) Доказать: при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны и пусть при данном движении прямые a и b отображаются на прямые a_1 и b_1. Докажем, что $a_1 \parallel b_1$.

Допустим, что это не так. Пусть M_1 — общая точка прямых a_1 и b_1, и пусть при данном движении в точку M_1 переходит точка M. Тогда точка M лежит на прямой a (поскольку прямая a отображается на прямую a_1), и также точка M лежит на прямой b. Получилось, что прямые a и b имеют общую точку M. Но это противоречит условию $a \parallel b$. Следовательно, $a_1 \parallel b_1$, что и требовалось доказать.

26.

в) Доказать: при движении угол отображается на равный ему угол.

Решение. Пусть дан угол с вершиной C и пусть при данном движении точка C переходит в точку C_1. Так как при движении луч отображается на луч (задача 26 б)), то при данном движении угол с вершиной C отображается на угол с вершиной C_1.

Докажем, что эти углы равны. Отметим на сторонах угла с вершиной C какие-нибудь точки A и B. При данном движении они переходят в некоторые точки A_1 и B_1, лежащие на сторонах угла с вершиной C_1. Согласно утверждению задачи 25 б), треугольник ABC отображается на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. Поэтому $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, что и требовалось доказать.

27.

б) Дано: параллелограмм $ABCD$, на сторонах AB и CD построены квадраты с центрами O_1 и O_2 так, как показано на рисунке 43.

Доказать: $O_1O_2 = AD$ и $O_1O_2 \parallel AD$.

Решение. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$. При этом параллельном переносе точка A переходит в точку D, а так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, то точка B переходит в точку C.

Треугольники AO_1B и DO_2C равны (так как это равнобедренные прямоугольные треугольники с равными гипотенузами AB и DC), а поскольку при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AD}$ треугольник AO_1B отображается на равный ему треугольник и при этом точка A переходит в точку D, точка B — в точку C, а точки O_1 и O_2 расположены так, как показано на рисунке 43, то треугольник AO_1B отображается на треугольник DO_2C, в частности точка O_1 переходит в точку O_2. Следовательно, $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD}$. Отсюда следует что $O_1O_2 = AD$ и $O_1O_2 \parallel AD$, что и требовалось доказать.

г) Дано: равносторонний треугольник ABC; на сторонах AB, BC и CA отмечены точки L, M и N так, что $LM \parallel AC$ и $MN \parallel AB$; P и Q — середины отрезков BN и LC (рис. 44).

Доказать: $\triangle MPQ$ — равносторонний.

Решение. Так как треугольник ABC равносторонний, а $LM \parallel AC$ и $MN \parallel AB$, то треугольники LBM и MCN также равносторонние. Рассмотрим поворот вокруг точки M на угол $60°$, при котором точка B перейдёт в точку L, а точка N — в точку C. Поскольку поворот является движением, то при указанном повороте отрезок BN отобразится на равный ему отрезок LC, а середина отрезка BN (точка P) перейдёт в середину отрезка LC (точку Q). Следовательно, $MP = MQ$ и $\angle PMQ = 60°$. Отсюда следует, что треугольник MPQ равносторонний, что и требовалось доказать.

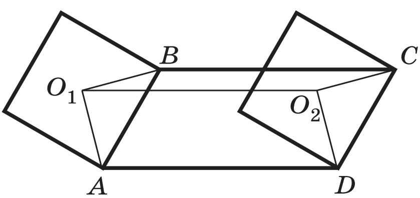


Рис. 43

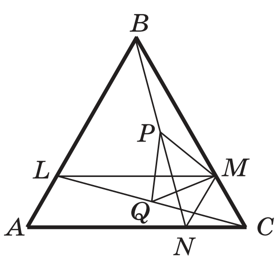


Рис. 44

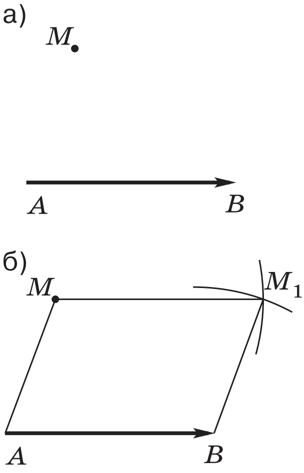


Рис. 45

28.

а) Дано: точка M и вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 45, *а*).

Построить: используя только циркуль (и не используя линейку): точку M_1, в которую переходит точка M при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Решение. 1) Пусть точка M не лежит на прямой AB (см. рис. 45, *а*). Построим окружность с центром M, радиус которой равен AB, и окружность с центром B, радиус которой равен AM (рис. 45, *б*, на этом рисунке проведены дуги указанных окружностей). Обозначим через M_1 такую точку пересечения построенных окружностей, для которой фигура, составленная из отрезков AM, MM_1, M_1B и BA является четырёхугольником. Так как в этом четырёхугольнике противоположные стороны равны ($MM_1 = AB$ и $BM_1 = AM$), то четырёхугольник AMM_1B — параллелограмм. Поэтому $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB}$, и, следовательно, M_1 — искомая точка.

2) Если точка M лежит на прямой AB, но сама прямая AB не дана, а дан только вектор $\overrightarrow{AB}$, то нужно взять какую-нибудь точку N, не лежащую на прямой AB, далее построить точку N_1, для которой $\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{AB}$ (как это сделать, описано в 1), а затем построить (снова так же, как в 1) точку M_1, для которой $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Так как $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{AB}$, то M_1 — точка, в которую переходит точка M при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$, т. е. M_1 — искомая точка.

б) Построить: трапецию по её основаниям и диагоналям.

Решение. По условию даны четыре отрезка: M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, M_4N_4 (рис. 46, *а*), и нужно построить трапецию $ABCD$, у которой основания BC и AD равны M_1N_1 и M_2N_2, а диагонали AC и BD равны M_3N_3 и M_4N_4.

Анализ. Предположим, что искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 46, *б*). Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$. При этом параллельном переносе точка B перейдёт в точку C, а точка D — в такую точку E, что

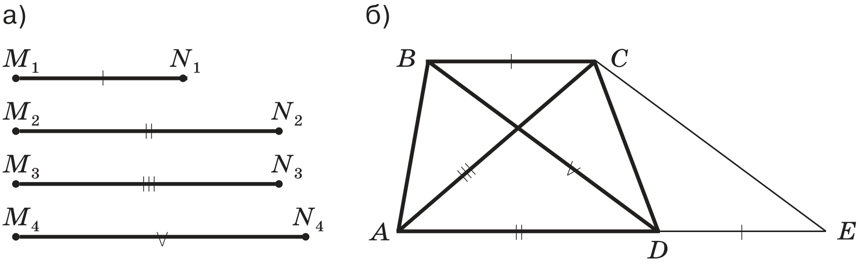


Рис. 46

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$. Следовательно, отрезок BD отобразится на отрезок CE, поэтому $CE = BD = M_4N_4$, а так как $DE = BC$, то $AE = AD + DE = AD + BC = M_2N_2 + M_1N_1$. Таким образом, получился треугольник ACE с тремя известными сторонами: $AC = M_3N_3$, $CE = M_4N_4$, $AE = M_2N_2 + M_1N_1$.

Проведённый анализ указывает способ построения искомой трапеции.

Построение. 1) Строим треугольник ACE по трём сторонам.

2) На луче EA откладываем отрезок $ED = M_1N_1$.

3) Через точку C проводим прямую, параллельную AE, и откладываем на ней отрезок CB, равный M_1N_1, так, чтобы точки A и B лежали по одну сторону от прямой CD.

4) Проводим отрезки AB и CD и получаем искомую трапецию $ABCD$.

Доказательство. По построению $BC = M_1N_1$, $AD = M_2N_2$, $AC = M_3N_3$, а так как $BC = DE$ и $BC \parallel DE$, то четырёхугольник $BCED$ — параллелограмм, поэтому $BD = CE = M_4N_4$. Таким образом, построенная трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Очевидно, искомую трапецию $ABCD$ можно построить в том и только том случае, когда можно построить треугольник ACE. В свою очередь, этот треугольник можно построить тогда и только тогда, когда наибольшая из его сторон меньше суммы двух других, т. е. наибольшая из величин $M_2N_2 + M_1N_1$, M_3N_3 и M_4N_4 меньше суммы двух остальных. Если это условие выполнено, то задача имеет единственное решение.

В самом деле, пусть наряду с построенной трапецией $ABCD$ существует трапеция $A_1B_1C_1D_1$, удовлетворяющая таким же условиям, как и трапеция $ABCD$, т. е. $B_1C_1 = M_1N_1$, $A_1D_1 = M_2N_2$, $A_1C_1 = M_3N_3$, $B_1D_1 = M_4N_4$. Продолжим основание A_1D_1 за точку D_1 на отрезок D_1E_1, равный B_1C_1. Треугольник $A_1C_1E_1$ равен треугольнику ACE по трём сторонам.

Рассмотрим наложение, при котором совмещаются соответственные вершины этих треугольников: A и A_1, C и C_1, E и E_1. При этом наложении луч CB совместится с лучом C_1B_1 (поскольку точки A, B и также точки A_1, B_1 лежат по одну сторону от совместившихся прямых CE и C_1E_1), а так как $CB = C_1B_1$, то точка B совместится с точкой B_1.

Таким образом, при указанном наложении вершины трапеции $ABCD$ совместятся с соответствующими вершинами трапеции $A_1B_1C_1D_1$, поэтому трапеции полностью совместятся, и, следовательно, они равны. Это доказывает единственность решения задачи.

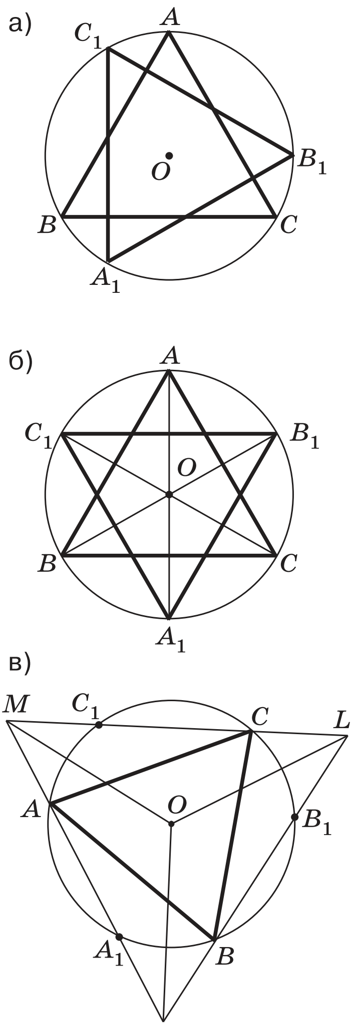


Рис. 47

г) Дано: окружность с центром O, равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в эту окружность, причём направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1 (рис. 47, *а*).

Доказать: прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через центр окружности, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

Решение. 1) Пусть точки A и A_1 являются диаметрально противоположными, т. е. отрезок AA_1 — диаметр окружности (рис. 47, *б*).

В этом случае $\smile AA_1 = 180°$, а поскольку $\smile AB = 120°$, то $\smile BA_1 = 180° - 120° = 60°$. Поэтому $\smile BB_1 = \smile BA_1 + \smile A_1B_1 = 60° + 120° = 180°$, т. е. точки B и B_1 также являются диаметрально противоположными. Аналогично доказывается, что точки C и C_1 тоже диаметрально противоположны. Следовательно, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через центр окружности.

2) Пусть теперь точки A и A_1 не являются диаметрально противоположными и пусть

прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются попарно в точках K, L и M (рис. 47, *в*). Докажем, что треугольник KLM равносторонний.

Рассмотрим поворот вокруг точки O на угол в $120°$, при котором точка A переходит в точку B. Так как каждая из дуг BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 также равна $120°$ и направление обхода по дуге ABC от A к C такое же, как и направление обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от A_1 к C_1, то при данном повороте точка B перейдёт в точку C, точка C — в точку A, а точки A_1, B_1 и C_1 перейдут соответственно в точки B_1, C_1 и A_1. Из того что точки A и A_1 переходят соответственно в точки B и B_1, следует (поскольку поворот является движением), что прямая AA_1 отображается на прямую BB_1. Аналогично прямые BB_1 и CC_1 отображаются соответственно на прямые CC_1 и AA_1. Следовательно, общая точка прямых AA_1 и BB_1 (точка K на рисунке 47, *в*) перейдёт в точку L — общую точку прямых BB_1 и CC_1, точка L перейдёт в точку M — общую точку прямых CC_1 и AA_1, а точка M перейдёт в точку K.

Итак, при повороте вокруг точки O на угол в $120°$ точки K, L и M переходят соответственно в точки L, M и K. Отсюда следует, что $OK = OL = OM$ и $\angle KOL = \angle LOM = \angle MOK = 120°$, поэтому $\triangle KOL = \triangle LOM = \triangle MOK$, и, следовательно, $KL = LM = MK$, т. е. треугольник KLM равносторонний, что и требовалось доказать.

Замечание. Наиболее сильным ученикам можно предложить доказать, что в случае, когда точки A и A_1 не являются диаметрально противоположными, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 попарно пересекаются. В нашем решении мы приняли это без доказательства.

д) Дано: параллелограмм $ABCD$, на стороне BC отмечена точка M (рис. 48, *а*).

Построить (используя только линейку): точку, симметричную точке M относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма.

Решение. Проведём диагонали AC и BD и точку их пересечения обозначим буквой O (рис. 48, *б*). Затем проведём прямую MO. Она пересекает сторону AD параллелограмма в некоторой точке M_1. Докажем, что точка M_1 — искомая.

Для этого нужно доказать, что $OM = OM_1$. Рассмотрим треуголь-

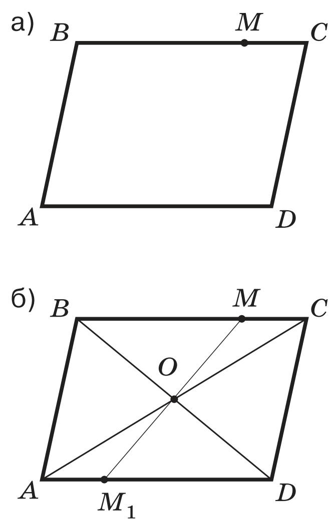


Рис. 48

ники BOM и DOM_1. Они равны по стороне ($BO = OD$, поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам) и двум прилежащим к ней углам ($\angle BOM = \angle DOM_1$, так как эти углы вертикальные, $\angle MBO = \angle M_1DO$, поскольку эти углы накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей BD). Из равенства треугольников BOM и DOM_1 следует равенство $OM = OM_1$, что и требовалось доказать.

29.

б) Дано: треугольник ABC, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M, точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков A_1M, B_1M и C_1M (рис. 49).

Доказать: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Решение. Рассмотрим центральное подобие с центром M и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Так как точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA_1, MB_1 и MC_1, то при этом центральном подобии точка A_1 перейдёт в точку A_2, точка B_1 — в точку B_2, точка C_1 — в точку C_2. Поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ отобразится на треугольник $A_2B_2C_2$, и, следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны, что и требовалось доказать.

в) Дано: стороны неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$ (рис. 50).

Доказать: существует центральное подобие, при котором один из треугольников отображается на другой.

Решение. 1-й способ. Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ коллинеарны, то существуют такие

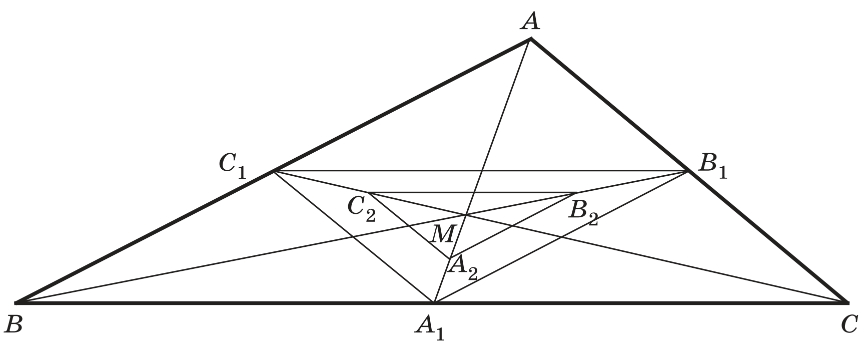


Рис. 49

числа k, l и m, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = l\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = m\overrightarrow{AC}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$, приходим к равенству $m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{BC}$, т. е. $(m-k)\overrightarrow{AB} + (m-l)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Учитывая, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не являются коллинеарными, приходим к выводу: $k = l = m$. Итак, $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{BC}$, где $|k| \neq 1$ (в противном случае $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, что противоречит условию задачи).

Проведём прямые AA_1 и BB_1. Они пересекаются в некоторой точке O (рис. 50, *а*). Действительно, если допустить $AA_1 \parallel BB_1$, то получится параллелограмм с противоположными сторонами A_1B_1 и AB, в котором $A_1B_1 = AB$, а это противоречит равенству $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$, где $|k| \neq 1$.

Так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ коллинеарны, то существуют такие числа p и q, что $\overrightarrow{OA_1} = p\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = q\overrightarrow{OB}$. Следовательно, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = q\overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OA}$. С другой стороны, $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$. Приравнивая два выражения для $\overrightarrow{A_1B_1}$, приходим к равенству $(q-k)\overrightarrow{OB} + (k-p)\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, откуда $p = q = k$. Таким образом, $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$, поэтому $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{OC}$. Из полученных равенств следует, что при центральном подобии с центром O и коэффициентом k треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$.

2-й способ. 1) Докажем сначала, что $\triangle ABC \backsim \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Так как стороны угла A треугольника ABC соответственно параллельны сторонам угла A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то либо $\angle A = \angle A_1$, либо $\angle A = 180^\circ - \angle A_1$. Анало-

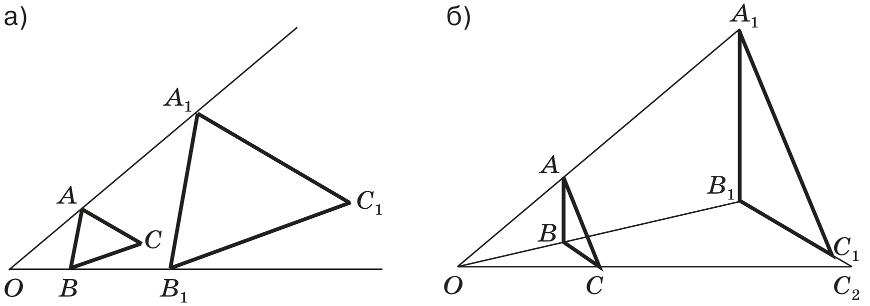


Рис. 50

гично либо $\angle B = \angle B_1$, либо $\angle B = 180^\circ - \angle B_1$, и также либо $\angle C = \angle C_1$, либо $\angle C = 180^\circ - \angle C_1$.

Докажем, что

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1 \text{ и } \angle C = \angle C_1. \qquad (1)$$

Заметим, что если выполнены два из трёх равенств (1), то выполнено и третье. Допустим, что два равенства не выполняются, например, $\angle A \neq \angle A_1$ и $\angle B \neq \angle B_1$. Тогда $\angle A = 180^\circ - \angle A_1$ и $\angle B = 180^\circ - \angle B_1$, откуда следует, что $\angle A + \angle B = (180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1) + 180^\circ > 180^\circ$, чего не может быть.

Итак, если стороны треугольника ABC соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, то выполняются равенства (1), и, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}, \qquad (2)$$

причём эти отношения не равны 1, поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не равны.

2) Проведём прямые AA_1 и BB_1. Они пересекаются в некоторой точке O (рис. 50, *б*). Действительно, если допустить, что $AA_1 \parallel BB_1$, то получится параллелограмм AA_1B_1B, и тогда будет выполнено равенство $AB = A_1B_1$, что противоречит неравенству $\frac{AB}{A_1B_1} \neq 1$.

Пусть точка A лежит между точками O и A_1, как показано на рисунке 50, *б* (другие случаи взаимного расположения точек A, O и A_1 рассматриваются аналогично). Так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$, откуда следуют пропорции

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}. \qquad (3)$$

3) Проведём прямую OC и докажем, что она пересекает прямую B_1C_1 в точке C_1. Обозначим точку пересечения прямых OC и B_1C_1 через C_2 (см. рис. 50, *б*). Так как $BC \parallel B_1C_2$, то $\triangle OBC \sim \triangle OB_1C_2$, поэтому $\frac{OC}{OC_2} = \frac{BC}{B_1C_2} = \frac{OB}{OB_1}$, а так как $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (см. (3) и (2)), то $\frac{BC}{B_1C_2} = \frac{BC}{B_1C_1}$, и, следовательно, $B_1C_2 = B_1C_1$. Из этого равенства и того факта, что обе точки C_1 и C_2 лежат на луче B_1C_1, следует, что точка C_2 совпадает с точкой C_1, поэтому

$$\frac{OC}{OC_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1}. \qquad (4)$$

Таким образом, справедливы равенства (см. (3) и (4)):

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1}.$$

Эти равенства означают, что при центральном подобии с центром O и коэффициентом подобия, равным $\frac{OA}{OA_1}$, точки A_1, B_1 и C_1 переходят в точки A, B и C, и, следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник ABC. Тем самым утверждение задачи доказано.

30.

б) Дано: треугольник ABC, AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, M — точка пересечения медиан (рис. 51).

Доказать: точка M и центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, лежат на одной прямой.

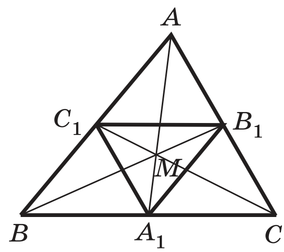


Рис. 51

Решение. Рассмотрим центральное подобие с центром M и коэффициентом, равным $-\frac{1}{2}$. При этом центральном подобии точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1, и, следовательно, треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$.

Так как при центральном подобии сохраняются величины углов, то биссектрисы треугольника ABC отображаются на биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$, и, следовательно, точка O пересечения биссектрис треугольника ABC (т. е. центр вписанной в треугольник ABC окружности) перейдёт в точку O_1 пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ (т. е. в центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности). Таким образом, справедливо равенство $\overrightarrow{MO_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, из которого следует, что точки M, O и O_1 лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

в) Дано: две окружности.

Доказать: существует такое центральное подобие, при котором одна из окружностей отображается на другую.

Решение. Пусть точки C_1 и C_2 — центры первой и второй данных окружностей радиусов R_1 и R_2.

1) Если точки C_1 и C_2 совпадают (при этом $R_1 \neq R_2$, иначе окружности совпадают, рис. 52, *а*), то при централь-

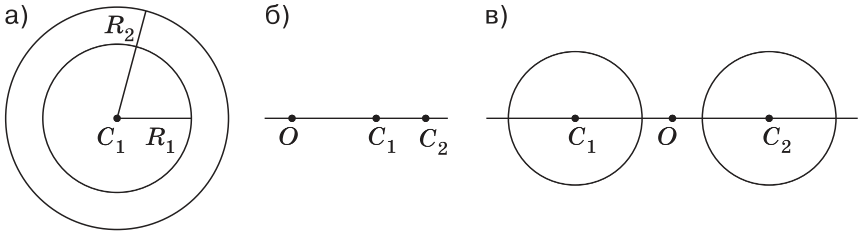


Рис. 52

ном подобии с центром C_1 и коэффициентом $k = \frac{R_2}{R_1}$ первая окружность отображается, очевидно, на вторую окружность, и также при центральном подобии с центром C_1 и коэффициентом $k = -\frac{R_2}{R_1}$ первая окружность отображается на вторую.

При центральном подобии с центром C_1 и коэффициентами $\frac{R_1}{R_2}$ и $-\frac{R_1}{R_2}$ вторая окружность отображается на первую. Таким образом, существуют четыре центральных подобия, при которых одна из данных окружностей отображается на другую.

2) Пусть точки C_1 и C_2 не совпадают (рис. 52, *б*) и $R_1 \neq R_2$. Согласно утверждению п. 99 при центральном подобии с центром O и коэффициентом k окружность радиуса R_1 с центром C_1 (первая окружность) отображается на окружность радиуса R_2 с центром C_2 (вторую окружность), если $R_2 = |k| \cdot R_1$, и точка C_1 при этом центральном подобии переходит в точку C_2, т. е. справедливо равенство $\overrightarrow{OC_2} = k \cdot \overrightarrow{OC_1}$. Отсюда следует, что либо $k = \frac{R_2}{R_1}$, либо $k = -\frac{R_2}{R_1}$. Для каждого из этих значений k найдём положение точки O, используя равенство $\overrightarrow{OC_2} = k \cdot \overrightarrow{OC_1}$.

Так как $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2}$, то $\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = k \cdot \overrightarrow{OC_1}$, откуда $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{C_1C_2}$, и, следовательно, $\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{C_1C_2}$. Таким образом, чтобы получить точку O, нужно от точки C_1 отложить вектор, равный $\frac{1}{1-k}\overrightarrow{C_1C_2}$. Конец этого вектора и есть точка O (положение точки O на рисунке 52, *б* соответствует случаю $k > 1$).

Убедимся в том, что при центральном подобии с центром O и коэффициентом $k = \frac{R_2}{R_1}$ (и также $k = -\frac{R_2}{R_1}$) первая окружность отображается на вторую. Так как $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{C_1C_2}$, то $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = k\left(\frac{1}{k-1}\overrightarrow{C_1C_2}\right) = k\overrightarrow{OC_1}$, и, следовательно, при данном центральном подобии точка C_1 переходит в точку C_2, а первая окружность отображается на окружность с центром C_2 и радиусом, равным $|k| \cdot R_1 = R_2$, т. е. первая окружность отображается на вторую.

Аналогично в данном случае (когда точки C_1 и C_2 не совпадают и $R_1 \neq R_2$) существуют два центральных подобия, при каждом из которых вторая окружность отображается на первую.

3) Если точки C_1 и C_2 не совпадают и $R_1 = R_2$ (рис. 52, *в*), то для $k = \frac{R_2}{R_1} = 1$ формула $\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{C_1C_2}$ теряет смысл, а для $k = -\frac{R_2}{R_1} = -1$ она остаётся в силе, причём в этом случае $\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}$, т. е. точка O является серединой отрезка C_1C_2. При центральном подобии с центром O и коэффициентом $k = -1$ (это центральное подобие является центральной симметрией) первая окружность отображается на вторую, а вторая на первую.

Итак, в любом случае существует центральное подобие, при котором одна из данных окружностей отображается на другую, причём в первых двух случаях таких центральных подобий четыре, а в третьем случае одно.

Замечание. Проведение подробного исследования всех возможных случаев можно требовать только от наиболее сильных учащихся.

35.

Дано: точки $A\ (-3; -1)$, $B\ (1; 2)$, $C\ (5; -1)$ (рис. 53).

Найти: уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение. 1) Так как $AB = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = 5$ и $BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5$, то треугольник ABC равнобедренный. Поэтому медиана BM треугольника является его биссектрисой, центр O вписанной окружности лежит на

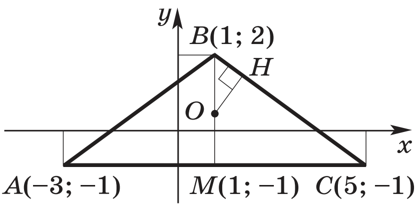


Рис. 53

отрезке BM (см. рис. 53), и вписанная окружность касается стороны AC в точке M (1; –1).

2) Проведём перпендикуляр OH к прямой BC. Тогда $OM = OH = r$, где r — радиус вписанной окружности, $BO = BM - OM = 3 - r$, а $MC = 4$.

Прямоугольные треугольники BOH и BCM подобны (так как имеют общий острый угол B), поэтому

$$\frac{OH}{CM} = \frac{BO}{BC} \text{ или } \frac{r}{4} = \frac{3-r}{5},$$

откуда находим r: $r = \dfrac{4}{3}$.

3) Координаты точки O равны, очевидно, $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$. Следовательно, искомое уравнение вписанной в треугольник ABC окружности имеет вид $(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

Ответ: $(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

43.

Дано: окружность с центром в начале координат; хорда AB, лежащая на прямой $4y + 3x - 12 = 0$, равна 2 (рис. 54).

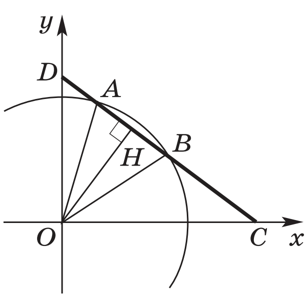


Рис. 54

Найти: уравнение данной окружности.

Решение. 1) Проведём перпендикуляр OH к прямой AB. Он является медианой равнобедренного треугольника OAB, поэтому $AH = \dfrac{1}{2}AB = 1$.

2) Используя уравнение прямой, находим координаты точек C и D, в которых прямая пересекается с осью Ox и осью Oy: C (4; 0) и D (0; 3). Следовательно, $OC = 4$ и $OD = 3$, а $CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

3) Прямоугольные треугольники OHD и COD подобны (поскольку имеют общий острый угол D), поэтому

$$\frac{OH}{OC} = \frac{OD}{CD}, \text{ откуда } OH = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{12}{5}.$$

4) В прямоугольном треугольнике OHA

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 1} = \frac{13}{5}.$$

5) Итак, радиус данной окружности равен $\frac{13}{5}$, поэтому её уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$.

Ответ: $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$.

45.

Дано: векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

Доказать: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$x_1y_2 = x_2y_1. \qquad (1)$$

Решение. 1-й способ. 1) Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если хотя бы один из них нулевой, то его координаты равны нулю, и равенство (1), очевидно, выполняется (обе его части равны нулю). Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то, согласно утверждению из п. 96, найдётся такое число $k \neq 0$, что $\vec{b} = k\vec{a}$. Отсюда следуют равенства для координат векторов: $x_2 = kx_1$ и $y_2 = ky_1$. Умножая левую часть первого равенства на правую часть второго и наоборот, приходим к равенству $x_2ky_1 = kx_1y_2$, откуда, сократив на k, приходим к равенству (1).

2) Пусть выполнено равенство (1). Если при этом $x_1 = y_1 = 0$ или $x_2 = y_2 = 0$, то один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является нулевым, и, следовательно, эти векторы коллинеарны. Пусть у каждого из векторов хотя бы одна координата отлична от нуля (т. е. оба вектора ненулевые). Пусть, например, $x_1 \neq 0$. Тогда из равенства (1) получаем $y_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot y_1$.

Если $y_1 = 0$, то $y_2 = 0$, поэтому векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$, и, следовательно, $\vec{b} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \vec{a}$, откуда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если же $y_1 \neq 0$, то, разделив обе части неравенства (1) на y_1, приходим к равенству $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$. В этом случае снова справедливо равенство $\vec{b} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \vec{a}$, показывающее, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Итак, если выполняется равенство (1), то векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ коллинеарны.

Замечание. Утверждение, доказанное в первом пункте решения, относится к словам «только тогда», а доказанное во втором пункте — к слову «тогда».

2-й способ. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда квадрат их скалярного произведения равен произведению квадратов их модулей (это верно как для нулевых, так и для ненулевых векторов):

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2).$$

Раскрывая скобки и перенося все слагаемые в правую часть, приходим к равенству $0=(x_1y_2-x_2y_1)^2$, которое равносильно равенству (1).

51.

Дано: шестиугольник $ABCDEF$, $AB \parallel DE \parallel CF$, $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel FA$ (рис. 55).

Доказать (используя векторы): $BE \parallel AF$.

Решение. 1) Прямые AD и CF пересекаются в некоторой точке K (см. рис. 55), поскольку параллельные им прямые BC и AB пересекаются (в точке B).

Так как $BC \parallel AK$ и $AB \parallel KC$ (согласно условию задачи), то четырёхугольник $ABCK$ — параллелограмм, откуда следует, что $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AK}$. Аналогично, так как $KF \parallel DE$ и $DK \parallel EF$, то четырёхугольник $KFED$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{KF}$.

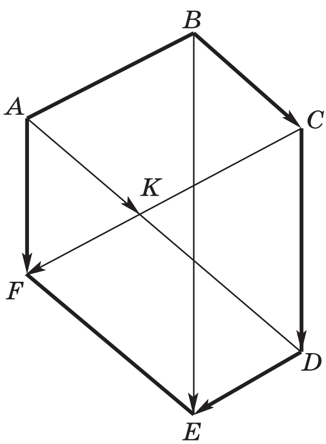


Рис. 55

2) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$, а поскольку $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{KF}$, то $\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}$.

3) Так как $CD \parallel FA$ (по условию), то векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, поэтому векторы $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AF}$ также коллинеарны, т. е. коллинеарны векторы $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AF}$. Отсюда следует, что $BE \parallel AF$, что и требовалось доказать.

53.

Дано: трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC (пусть $AD > BC$), точки M и N — середины диагоналей AC и BD (рис. 56).

Доказать: $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

Решение. Запишем два выражения для вектора $\overrightarrow{MN}$ (см. рис. 56):

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \text{ и}$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}.$$

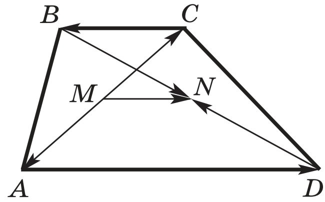


Рис. 56

Складывая эти равенства и учитывая, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BN} = \vec{0}$ (поскольку точки M и N — середины отрезков AC и BD), получаем

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC},$$

откуда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$.

Поскольку векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны и одинаково направлены, то из последнего равенства следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

58.

Дано: точки A, B и C, $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2$.

Доказать: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Решение. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})^2$, т. е. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$. Заменяя AB^2 на $2(AC^2 + BC^2)$ (согласно условию задачи), приходим к равенству $AC^2 + BC^2 + 2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0$. Это равенство можно записать в виде $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})^2 = 0$, откуда следует, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

59.

Дано: трапеция $ABCD$, $\angle A = \angle B = 90°$, $AC \perp BD$ (рис. 57).

Доказать: $AB = \sqrt{AD \cdot BC}$.

Решение. Так как $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, то $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 0$ или $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 0$. Перемножив почленно, приходим к равенству

$$-(\overrightarrow{AB})^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

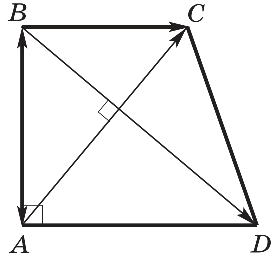


Рис. 57

Так как $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$, то второе и третье слагаемые в левой части равенства равны нулю. Кроме того, $(\overrightarrow{AB})^2 = AB^2$ и $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = BC \cdot AD$ (поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и одинаково направлены). Следовательно, $-AB^2 + BC \cdot AD = 0$, откуда получаем искомое равенство $AB = \sqrt{AD \cdot BC}$.

60.

Дано: треугольник ABC, AM — медиана, точка D лежит на стороне AB, $CD \perp AM$, $AD : DB = 3 : 1$, $AC = 3$, $\angle C = 60°$ (рис. 58).

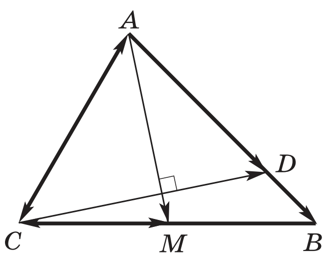


Рис. 58

Найти: BC.

Решение. 1) Выразим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CD}$ через $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} =$$

$$= -\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\,\overrightarrow{BC}.$$

2) По условию $CD \perp AM$, поэтому $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, т. е. $\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) = 0$. Перемножив почленно, умножив на 8 и учтя, что $(\overrightarrow{AC})^2 = AC^2 = 9$, приходим к равенству

$$-18 - 5\,(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) + 3BC^2 = 0. \qquad (1)$$

3) Угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ равен углу C, т. е. равен $60°$. Поэтому $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = AC \cdot BC \cdot \cos 60° = \frac{3}{2}\,BC$.

Подставляя это значение $\frac{3}{2}BC$ вместо $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ в уравнение (1), получаем квадратное уравнение относительно BC:

$$3BC^2 - \frac{15}{2}BC - 18 = 0,$$

откуда находим: $BC = 4$.

Ответ: 4.

64*.

Дано: прямоугольник $ABCD$, на стороне AB построен треугольник ABE, $CF \perp AE$, $DF \perp BE$ (рис. 59, *а*).

Доказать (используя параллельный перенос): $EF \perp AB$.

Решение. 1) Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$. При этом параллельном переносе точка B переходит в точку C, точка A — в точку D, а точка E переходит в такую точку E_1, что $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 59, *б*). Поэтому прямые AE и BE переходят в соответственно параллельные им прямые DE_1 и CE_1.

2) Так как $CF \perp AE$ (по условию) и $DE_1 \parallel AE$, то $CF \perp DE_1$. Точка пересечения прямых CF и DE_1 обозначена на рисунке 59, *б* буквой H. Аналогично, так как $DF \perp BE$ (по условию) и $CE_1 \parallel BE$, то $DF \perp CE_1$. Точка пересечения прямых DF и CE_1 обозначена на рисунке 59, *б* буквой K.

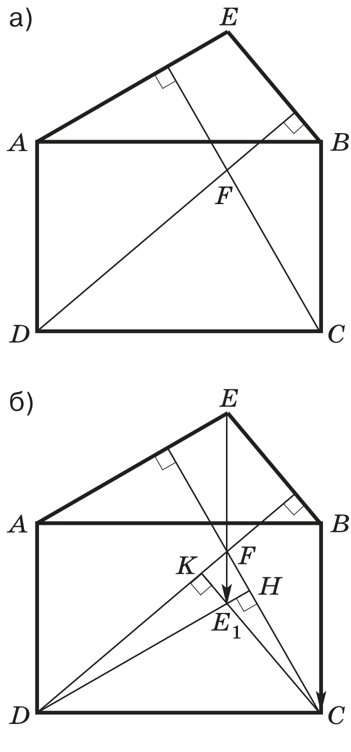


Рис. 59

3) Отрезки DH и CK — высоты треугольника DFC, пересекающиеся в точке E_1. Поэтому и высота, проведённая из точки F, проходит через точку E_1, т. е. $FE_1 \perp CD$, а так как $CD \parallel AB$, то $FE_1 \perp AB$.

4) Поскольку $EE_1 \parallel BC$ (это следует из равенства $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{BC}$) и $BC \perp AB$, то $EE_1 \perp AB$. Таким образом, прямые FE_1 и EE_1, проходящие через точку E_1, перпендикулярны к прямой AB. Следовательно, эти прямые совпадают, поэтому $EF \perp AB$, что и требовалось доказать.

65*.

Дано: точки A и B, прямая a пересекает отрезок AB, причём прямые a и AB не перпендикулярны (рис. 60, *а*).

Построить: треугольник ABC, биссектриса угла C которого лежит на прямой a.

Решение. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a, и проведём прямую A_1B. Если

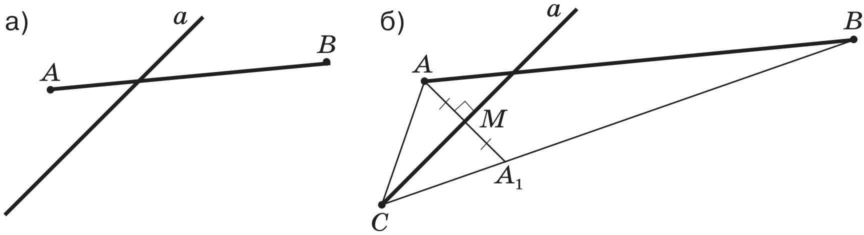


Рис. 60

прямая A_1B пересекает прямую a в некоторой точке C (рис. 60, *б*), то треугольник ABC искомый.

В самом деле, прямоугольные треугольники CMA и CMA_1 равны по двум катетам ($MA = MA_1$, CM — общий катет), поэтому $\angle ACM = \angle A_1CM$, т. е. луч CM — биссектриса угла C треугольника ABC, и этот луч лежит на прямой a.

Если же прямая A_1B параллельна прямой a (так будет, если прямая a проходит через середину отрезка AB), то задача не имеет решений.

66*.

Дано: $b \parallel c$, $A \notin b$, $A \notin c$ (рис. 61, *а*).

Построить (используя поворот): равносторонний треугольник ABC так, чтобы $B \in b$ и $C \in c$.

Вопрос: сколько решений имеет задача?

Решение. Анализ. Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 61, *б*). Заметим, что при повороте вокруг точки A на угол в $60°$ (против часовой стрелки) вершина B, лежащая на прямой b, переходит в вершину C, лежащую на прямой c. При этом повороте прямая b переходит в некоторую прямую b_1 и, следовательно, вершина C лежит также на прямой b_1. Таким образом, вершина C является общей точкой прямых b_1 и c. Проведённый анализ указывает путь решения задачи.

Построение. 1) Построим прямую b_1, в которую переходит прямая b при повороте вокруг точки A на угол в $60°$. Это можно сделать таким образом: отметим на прямой b какую-нибудь точку M, от луча AM отложим (в нужную сторону) угол в $60°$ (как это сделать, мы знаем) и на второй стороне угла отложим от точки A отрезок AM_1, равный AM (рис. 61, *в*). Очевидно, что при повороте вокруг точки A на угол в $60°$ (против часовой стрелки) точка M переходит в точку M_1.

Затем отметим на прямой b ещё одну точку (точка N на рисунке 61, *в*) и таким же образом построим точку N_1, в которую переходит точка N при повороте вокруг точки A на угол в 60°. Прямая M_1N_1 и есть искомая прямая b_1, в которую переходит прямая b при указанном повороте.

2) Точку пересечения прямых b_1 и c обозначим буквой C, проведём луч AC и от луча AC отложим угол в 60° так, как показано на рисунке 61, *г*. Точку пересечения второй стороны этого угла (отличной от AC) с прямой b обозначим буквой B.

3) Проводим отрезок BC и получаем искомый треугольник ABC.

Доказательство. Докажем, что построенный треугольник ABC является равносторонним.

Так как $\angle BAC = 60^\circ$, то при повороте вокруг точки A на угол в 60° (против часовой стрелки) точка B перейдёт в точку, лежащую на луче AC. С другой стороны, так как точка B лежит на прямой b, а прямая b при указанном

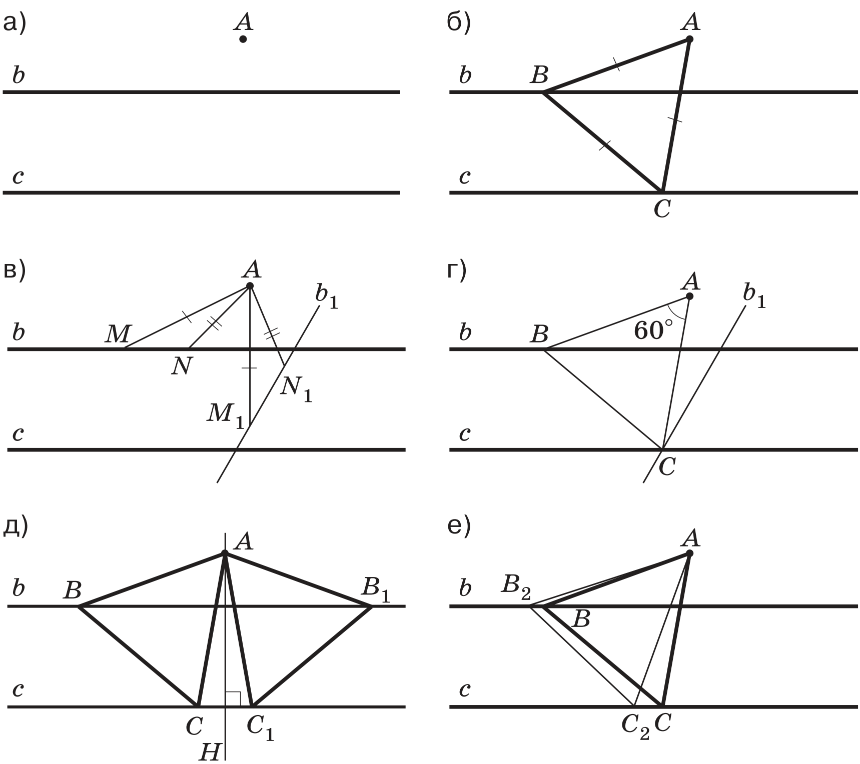


Рис. 61

повороте переходит в прямую b_1, то точка B переходит в точку, лежащую на прямой b_1. Следовательно, точка B переходит в общую точку луча AC и прямой b_1, т. е. в точку C, поэтому $AB = AC$. Итак, $AB = AC$ и $\angle BAC = 60°$. Отсюда следует, что треугольник ABC равносторонний.

Исследование. Проведём прямую AH, перпендикулярную к прямым b и c (рис. 61, *д*). Треугольник AB_1C_1, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AH, удовлетворяет, очевидно, всем условиям задачи: он равносторонний, так как равен треугольнику ABC, и его вершины B_1 и C_1 лежат на прямых b и c.

Других решений, кроме указанных двух, задача не имеет. В самом деле, допустим, что существует равносторонний треугольник AB_2C_2, причём поворот вокруг точки A на угол в $60°$ для совмещения отрезка AB_2 с отрезком AC_2 совершается против часовой стрелки, а точка C_2 отлична от точки C (рис. 61, *е*). Тогда при указанном повороте точка B_2 переходит, с одной стороны, в точку C_2, а с другой — в точку пересечения прямых b_1 и c, т. е. в точку C. Полученное противоречие доказывает, что задача имеет ровно два решения.

Ответ: два решения.

67*.

Доказать: любое преобразование подобия можно представить как последовательное выполнение центрального подобия и движения.

Решение. Рассмотрим преобразование подобия с коэффициентом k. Обозначим его P_k и докажем, что преобразование P_k можно представить как последовательное выполнение центрального подобия с произвольным центром и коэффициентом k и движения.

Возьмём какие-нибудь три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть при преобразовании P_k они переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Тогда, согласно определению преобразования подобия,

$$A_1B_1 = k \cdot AB,\ B_1C_1 = k \cdot BC \text{ и } C_1A_1 = k \cdot CA, \qquad (1)$$

откуда следует, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Рассмотрим теперь центральное подобие с центром в какой-нибудь точке и коэффициентом k. Обозначим его H_k. Пусть при преобразовании H_k точки A, B и C переходят соответственно в точки A_2, B_2 и C_2. Тогда

$$A_2B_2 = k \cdot AB,\ B_2C_2 = k \cdot BC \text{ и } C_1A_2 = k \cdot CA. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по трём сторонам). Поэтому существует наложение, при котором треугольник $A_2B_2C_2$ совмещается с треугольником $A_1B_1C_1$, причём вершины A_2, B_2 и C_2 совмещаются соответственно с вершинами A_1, B_1 и C_1. Обозначим это наложение буквой G.

Любое наложение является движением. Это следует из того, что если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки, и, следовательно, при наложении сохраняются расстояния между точками. А это и означает, что любое наложение является движением.

Итак, в результате последовательного выполнения центрального подобия H_k и движения G точки A, B и C переходят, как и при преобразовании подобия P_k, соответственно в точки A_1, B_1 и C_1.

Докажем, что и любая точка M как при преобразовании подобия P_k, так и при последовательном выполнении центрального подобия H_k и движения G переходит в одну и ту же точку. Это и будет означать, что преобразование P_k можно представить как последовательное выполнение центрального подобия H_k и движения G.

Пусть произвольная точка M при преобразовании P_k переходит в точку M_1, а при центральном подобии H_k — в точку M_2. Тогда

$$A_1M_1 = k \cdot AM,\ B_1M_1 = k \cdot BM \text{ и } C_1M_1 = k \cdot CM, \quad (3)$$

$$A_2M_2 = k \cdot AM,\ B_2M_2 = k \cdot BM \text{ и } C_2M_2 = k \cdot CM. \quad (4)$$

Пусть при движении G точка M_2 переходит в точку M_3. Нам нужно доказать, что точки M_1 и M_3 совпадают.

Так как при движении G точки A_2, B_2 и C_2 переходят в точки A_1, B_1 и C_1, то

$$A_2M_2 = A_1M_3,\ B_2M_2 = B_1M_3 \text{ и } C_2M_2 = C_1M_3. \quad (5)$$

Из равенств (3)—(5) следует, что

$$A_1M_1 = A_1M_3,\ B_1M_1 = B_1M_3 \text{ и } C_1M_1 = C_1M_3. \quad (6)$$

Допустим, что точки M_1 и M_3 не совпадают. Тогда в силу равенств (6) каждая из точек A_1, B_1 и C_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_3, и, следовательно, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Но это противоречит тому, что они являются вершинами треугольника $A_1B_1C_1$.

Полученное противоречие означает, что точки M_1 и M_3 совпадают, что и требовалось доказать.

68*.

Доказать: применительно к треугольникам общее определение подобия (п. 100 учебника) равносильно определению, данному в п. 78 учебника 8 класса.

Решение. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по общему определению. Это означает, что существует преобразование подобия, при котором один из треугольников отображается на другой. Пусть при преобразовании подобия с коэффициентом k треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда, согласно определению преобразования подобия, справедливы равенства

$$A_1B_1 = k \cdot AB,\ B_1C_1 = k \cdot BC,\ C_1A_1 = k \cdot CA. \qquad (1)$$

Равенства (1) показывают, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по определению из п. 78.

2) Пусть теперь треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по определению из п. 78, т. е. справедливы равенства (1). Рассмотрим какое-нибудь преобразование подобия P_k с коэффициентом k. Пусть при этом преобразовании точки A, B и C переходят в точки A_2, B_2 и C_2. Тогда

$$A_2B_2 = k \cdot AB,\ B_2C_2 = k \cdot BC,\ C_2A_2 = k \cdot CA. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ и $C_1A_1 = C_2A_2$, поэтому $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ (по трём сторонам). Следовательно, существует наложение G (оно является движением, см. решение задачи 67), при котором треугольник $A_2B_2C_2$ совмещается с треугольником $A_1B_1C_1$. Таким образом, в результате последовательного выполнения преобразования подобия P_k и движения G треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Но последовательное выполнение преобразования подобия P_k и движения G является преобразованием подобия. Обозначим его Q_k.

Итак, существует преобразование подобия Q_k, при котором треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Это означает, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по общему определению подобных фигур.

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

Глава 8

69.

е) Дано: квадрат и прямоугольник, отличный от квадрата, периметры которых равны.

Вопрос: площадь какой из этих фигур больше?

Решение. Пусть сторона квадрата равна a, а стороны прямоугольника равны b и c, причём $b \neq c$. Нужно сравнить площадь квадрата с площадью прямоугольника, т. е. сравнить величины a^2 и bc.

По условию $2(b+c) = 4a$, т. е. $b + c = 2a$. Возведя последнее равенство в квадрат и учтя, что $b^2 + c^2 > 2bc$ (это следует из того, что $(b-c)^2 > 0$, если $b \neq c$), получим $4a^2 = (b+c)^2 = (b^2 + c^2) + 2bc > 4bc$, откуда $a^2 > bc$. Таким образом, площадь квадрата больше площади прямоугольника.

Ответ: площадь квадрата больше площади прямоугольника.

71.

д) Дано: равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, точка M — произвольная точка на стороне AC, $MH \perp AB$, $MK \perp BC$ (рис. 62).

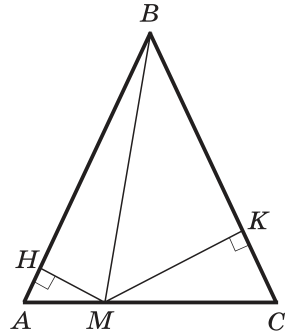


Рис. 62

Доказать: сумма $MH + MK$ не зависит от положения точки M.

Решение. Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABM и CBM, которые соответственно равны $\frac{1}{2}AB \cdot MH$ и $\frac{1}{2}BC \cdot MH$. По условию $BC = AB$, поэтому $S = \frac{1}{2}AB \cdot MH + \frac{1}{2}AB \cdot MK = \frac{1}{2}AB\,(MH + MK)$, откуда получаем $MH + MK = \frac{2S}{AB}$.

Правая часть этого равенства не зависит от положения точки M на стороне AC. Следовательно, и сумма $MH + MK$ не зависит от положения точки M, что и требовалось доказать.

е) Дано: трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, $OH \perp AB$, $OH = 6$ см, $AB = 5$ см (рис. 63).

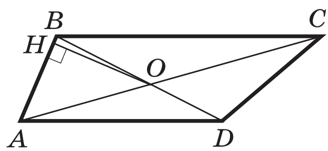


Рис. 63

Найти: площадь треугольника COD.

Решение. Площадь треугольника COD обозначим S_{COD} и аналогичные обозначения будем использовать для площадей других треугольников.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты, проведённые из вершин B и C (поскольку $BC \parallel AD$), поэтому $S_{ABD} = S_{ACD}$.

Так как $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD}$ и $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$, то $S_{AOB} = S_{COD}$. Но $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = 15$ см^2, поэтому и $S_{COD} = 15$ см^2.

Ответ: 15 см^2.

ж) Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

Решение. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$, а $\sin C = \frac{c}{2R}$, то $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, что и требовалось доказать.

з) Дано: диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 64).

Доказать: $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$.

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда $\angle COD = \alpha$, $\angle AOD = \angle BOC = 180° - \alpha$ (см. рис. 64). Используя равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, получаем

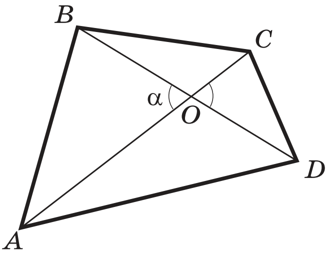


Рис. 64

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \alpha.$$

Перемножая первое и второе равенства и также третье и четвёртое, приходим к равенствам

$$S_{AOB} \cdot S_{COD} = \frac{1}{4} OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \sin^2 \alpha,$$

$$S_{AOD} \cdot S_{BOC} = \frac{1}{4} OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \sin^2 \alpha,$$

откуда следует, что $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$, что и требовалось доказать.

72.

ж) Дано: $\triangle ABC$, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Решение. Воспользуемся формулой $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$, а также формулами $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$. Тогда получим искомую формулу: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

73.

г) Дано: параллелограмм $ABCD$ (рис. 65).

Доказать: $S^2_{ABCD} = AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2$.

Решение. 1) Пусть $\angle BAD = \alpha$ (см. рис. 65). Так как $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD \sin \alpha$, то $S^2_{ABCD} = AB^2 \cdot AD^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$, поэтому $AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2 = AB^2 \cdot AD^2 (1 - \cos^2\alpha) = AB^2 \cdot AD^2 \times \sin^2\alpha$.

3) Из полученных равенств следует, что $S^2_{ABCD} = AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2$, что и требовалось доказать.

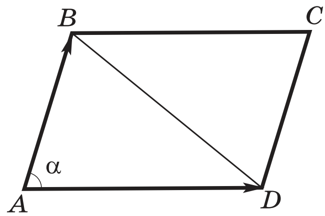


Рис. 65

74.

г) Дано: параллелограмм $ABCD$, $\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{AD}\{x_2; y_2\}$.
Доказать: $S_{ABCD} = |x_1y_2 - x_2y_1|$.
Решение. Воспользуемся формулой из задачи 73 г):

$$S^2_{ABCD} = AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2.$$

Так как $AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $AD^2 = x_2^2 + y_2^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = x_1x_2 + y_1y_2$, то, подставив эти выражения в формулу для S^2_{ABCD}, получим

$$S^2_{ABCD} = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 =$$
$$= x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Отсюда следует искомая формула

$$S_{ABCD} = |x_1y_2 - x_2y_1|.$$

75.

д) Дано: диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 63).
Доказать: треугольники ABO и CDO равновелики.
Решение. Равенство $S_{ABO} = S_{CDO}$ было установлено при решении задачи 71 е). Это равенство и означает, что треугольники ABO и CDO равновелики.

е) Дано: равнобедренная трапеция $ABCD$ с высотой h, $AC \perp BD$ (рис. 66).
Найти: S_{ABCD}.
Решение. Проведём высоту HK трапеции через точку O пересечения диагоналей (см. рис. 66). Так как трапеция равнобедренная и $AC \perp BD$, то $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ — равнобедренные прямоугольные треугольники. Поэтому $OH = \frac{1}{2}AD$ и $OK = \frac{1}{2}BC$, т. е. $AD = 2OH$ и $BC = 2OK$.

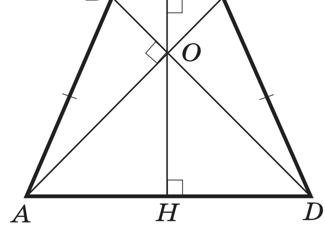


Рис. 66

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2}(2OH + 2OK) \cdot h =$$
$$= (OH + OK) \cdot h = h^2.$$

Ответ: h^2.

76.

е) Дано: трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, $M \in AB$, $N \in CD$, $MN \parallel AD$, $S_{AMND} = S_{MBCN}$ (рис. 67).

Найти: MN.

Решение. 1) Пусть $MN = x$, а высоты трапеций $AMND$ и $MBCN$ равны h_1 и h_2 (см. рис. 67). Тогда $S_{AMND} = \frac{1}{2}(a + x)h_1$ и $S_{MBCN} = \frac{1}{2}(b + x)h_2$.

2) По условию $\frac{1}{2}(a + x)h_1 = \frac{1}{2}(b + x)h_2$, откуда следует равенство (после деления обеих частей на $\frac{1}{2}h_1$):

$$a + x = (b + x) \cdot k, \qquad (1)$$

где $k = \frac{h_2}{h_1}$.

3) Так как (согласно условию) $S_{ABCD} = 2S_{AMND}$, то $\frac{1}{2}(a + b)(h_1 + h_2) = (a + x)h_1$, откуда следует равенство (после деления обеих частей на $\frac{1}{2}h_1$):

$$(a + b)(1 + k) = 2(a + x). \qquad (2)$$

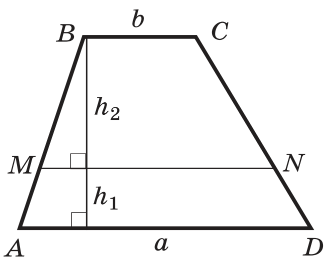


Рис. 67

Из равенства (1) получаем $k = \frac{a + x}{b + x}$. Подставляя это выражение для k в равенство (2), приходим к уравнению

$$(a + b)\left(1 + \frac{a + x}{b + x}\right) = 2(a + x).$$

Раскрывая скобки и приводя к общему знаменателю, получаем уравнение $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, откуда находим x:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Итак, $MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

77.

д) Дано: на прямой отмечены точки A, B, C и D, на окружностях с диаметрами AB, BC, CD и AD отмечены точки K, L, M и N (рис. 68).

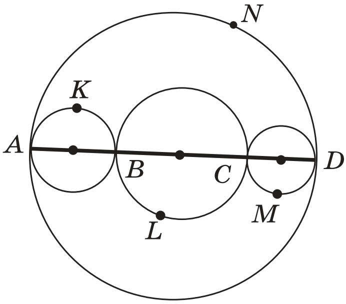


Рис. 68

Доказать: путь от точки A до точки D по дугам AKB, BLC и CMD равен пути по дуге AND.

Решение. Пусть $AB = 2x$, $BC = 2y$, $CD = 2z$. Тогда радиусы окружностей с диаметрами AB, BC, CD и AD равны соответственно x, y, z и $x + y + z$. Поэтому путь от точки A до точки D по дугам AKB, BLC и CMD равен сумме длин трёх полуокружностей с радиусами x, y и z, т. е. равен $\pi x + \pi y + \pi z = \pi(x + y + z)$, а путь от точки A до точки D по дуге AND равен длине полуокружности с радиусом $x + y + z$, т. е. равен $\pi(x + y + z)$. Очевидно, эти пути равны, что и требовалось доказать.

78.

д) Дано: окружность с центром в точке O_1 касается двух окружностей с общим центром в точке O_2 (рис. 69).

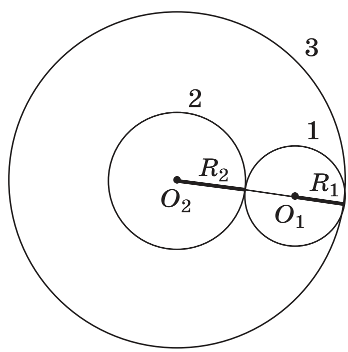


Рис. 69

Доказать: длина одной из этих окружностей равна полуразности длин двух других.

Решение. Обозначим данные окружности цифрами 1, 2 и 3 так, как показано на рисунке 69. Пусть их радиусы равны соответственно R_1, R_2 и R_3. Тогда $R_3 = R_2 + 2R_1$ (см. рис. 69). Поэтому длины первой, второй и третьей окружностей равны соответственно $2\pi R_1$, $2\pi R_2$ и $2\pi R_3 = 2\pi(R_2 + 2R_1)$. Отсюда следует, что

$$2\pi R_1 = \frac{1}{2}(2\pi R_3 - 2\pi R_2),$$

т. е. длина первой окружности равна полуразности длин третьей и второй окружностей, что и требовалось доказать.

80.

г) Дано: окружность с центром O (на рисунке 70, *а* она обозначена цифрой 1).

Построить: окружность с центром O (на рисунке 70, *а* она обозначена цифрой 2) так, чтобы площадь ограниченного ею круга равнялась площади кольца между ней и данной окружностью.

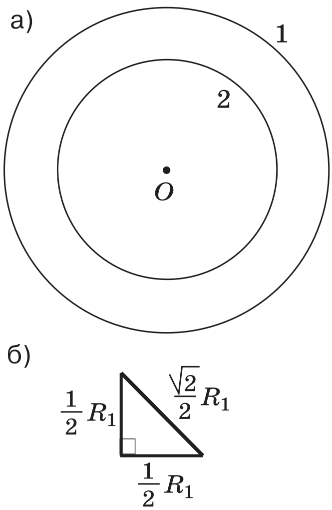


Рис. 70

Решение. Пусть радиус данной окружности равен R_1, а радиус искомой окружности равен R_2. По условию $\pi R_2^2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2$, т. е. $2\pi R_2^2 = \pi R_1^2$, откуда следует, что $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_1$.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы по данному отрезку R_1 построить отрезок длины $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_1$. Для этого можно разделить отрезок длины R_1 пополам и построить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными $\frac{1}{2}R_1$ (как это сделать, мы знаем). Гипотенуза этого прямоугольного треугольника будет равна $\frac{\sqrt{2}}{2}R_1$ (рис. 70, *б*).

Остаётся провести окружность с центром O радиуса $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_1$, и задача решена.

82.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, окружность касается стороны AB и продолжений сторон BC и CA (рис. 71).

Доказать: треугольник ABC равновелик прямоугольнику, одна из смежных сторон которого равна $\frac{1}{2}(a + b - c)$, а другая — радиусу окружности.

Решение. Обозначим центр окружности буквой O и проведём радиусы OK, OL и OM, где K, L и M — точки касания окружности со стороной AB и продолжениями сторон CA и BC (см. рис. 71). Тогда $OK \perp AB$, $OL \perp CA$ и $OM \perp BC$. Площадь треугольника ABC представим в виде

$$S_{ABC} = S_{COL} + S_{COM} - (S_{AOL} + S_{AOK} + S_{BOK} + S_{BOM}). \qquad (1)$$

Пусть радиус окружности равен R. Каждое слагаемое в правой части равенства (1) вычислим по формуле площади прямоугольного треугольника (половина произведения катетов):

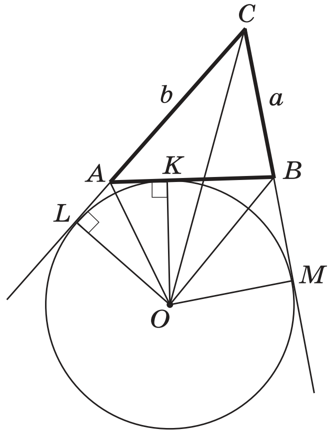


Рис. 71

$$S_{COL} = \frac{1}{2}CL \cdot R = \frac{1}{2}(b + AL) \cdot R,$$

$$S_{COM} = \frac{1}{2}(a + BM) \cdot R,$$

$$S_{AOL} = \frac{1}{2}AL \cdot R,\ S_{AOK} = \frac{1}{2}AK \cdot R,$$

$$S_{BOK} = \frac{1}{2}KB \cdot R,\ S_{BOM} = \frac{1}{2}BM \cdot R.$$

Подставив эти выражения в правую часть (1), получим:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a + b - (AK + KB))R = \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot R, \qquad (2)$$

поскольку $AK + KB = AB = c$.

Равенство (2) показывает, что площадь треугольника ABC равна площади прямоугольника, смежные стороны которого равны $\frac{1}{2}(a + b - c)$ и R, т. е. треугольник ABC равновелик этому прямоугольнику, что и требовалось доказать.

86.

Дано: выпуклый четырёхугольник $ABCD$, $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см (рис. 72).

Найти: S_{ABCD}.

Решение. 1) Так как $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ($13^2 = 5^2 + 12^2$), то треугольник ABC прямоугольный, и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ AB \cdot AC = 30 \text{ см}^2.$$

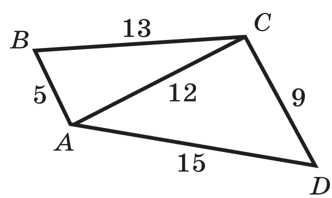


Рис. 72

2) Поскольку $AD^2 = AC^2 + CD^2$ ($15^2 = 12^2 + 9^2$), то треугольник ACD также прямоугольный, и

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\ AC \cdot CD = 54 \text{ см}^2.$$

3) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 84$ см^2.

Ответ: 84 см^2.

88.

Дано: $\triangle ABC$, на его сторонах отмечены точки L, M и N так, что $AL : LB = BM : MC = CN : NA = 1 : 2$; $S_{ABC} = S$ (рис. 73).

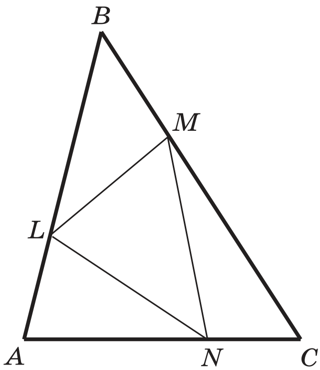


Рис. 73

Найти: S_{LMN}.

Решение. 1) Пусть $AB = c$, $AC = b$. Тогда $AL = \frac{1}{3}c$, $AN = \frac{2}{3}b$, поэтому $S_{ALN} = \frac{1}{2} AL \cdot AN \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{2}{3}b \cdot \sin A = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}bc \sin A\right) = \frac{2}{9}S$, поскольку $S = S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$.

2) Аналогично получаются равенства $S_{BML} = S_{CNM} = \frac{2}{9}S$.

3) $S_{LMN} = S_{ABC} - (S_{ALN} + S_{BML} + S_{CNM}) = S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S$.

Ответ: $\frac{1}{3}S$.

94.

Дано: равнобедренная трапеция $ABCD$, K — середина AC, $AM = 5$ см, $DM = 12$ см, $AB = 10$ см (рис. 74, *а*).

Найти: S_{BDM}.

Решение. 1) $\triangle AKM = \triangle CKB$ по стороне ($AK = KC$ по условию) и прилежащим к ней углам ($\angle AKM = \angle CKB$, так как это вертикальные углы; $\angle KAM = \angle KCB$, поскольку это накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC). Следовательно, $BC = AM = 5$ см.

2) Проведём высоты BH и CK трапеции (рис. 74, б). Прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по ги-

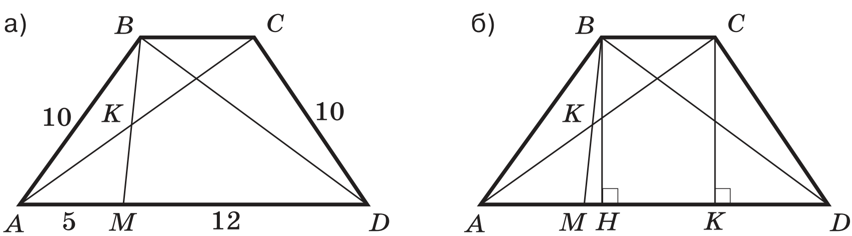


Рис. 74

потенузе ($AB = CD$, поскольку трапеция равнобедренная) и катету ($BH = CK$). Следовательно, $AH = KD = \frac{1}{2}(AD - HK) = \frac{1}{2}(AD - BC) = 6$ см.

3) Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$ см.

4) $S_{BDM} = \frac{1}{2} DM \cdot BN = 48$ см^2.

Ответ: 48 см^2.

98.

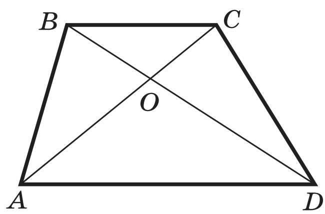


Рис. 75

Дано: диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O (рис. 75), $S_{AOD} = 12$ см^2, $S_{BOC} = 3$ см^2.

Найти: S_{ABCD}.

Решение. Так как $S_{AOB} = S_{COD}$ (см. задачу 75 д)) и $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$ (см. задачу 71 з)), то $S^2_{AOB} = 12 \cdot 3 = 36$ см^4. Следовательно, $S_{AOB} = S_{COD} = 6$ см^2 и $S_{ABCD} = 12 + 3 + 6 + 6 = 27$ см^2.

Ответ: 27 см^2.

99.

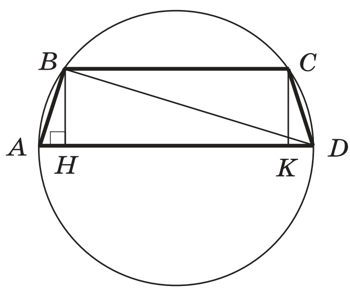


Рис. 76

Дано: окружность с диаметром AD описана около трапеции $ABCD$ (рис. 76), $BD = 6$, $S_{ABCD} = 9$.

Найти: углы трапеции.

Решение. 1) Так как трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то эта трапеция равнобедренная. Проведём высоты BH и CK трапеции (см. рис. 76). Так как $AH = KD$ и $HK = BC$, то $AD + BC = AH + HK + KD + BC = 2HK + 2KD = 2HD$, а $\frac{1}{2}(AD + BC) = HD$.

2) $\angle ABD = 90°$, поскольку этот вписанный угол опирается на полуокружность. Так как $\angle A + \angle ABH = 90°$ и также $\angle DBH + \angle ABH = \angle ABD = 90°$, то $\angle DBH = \angle A$.

В прямоугольном треугольнике BHD

$$HD = BD \cdot \sin \angle DBH = 6 \sin A, \; BH = 6 \cos A.$$

3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = HD \cdot BH = 36 \sin A \cos A = 9$. Из последнего равенства, учитывая, что $2 \sin A \cos A = \sin 2A$, получаем $\sin 2A = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что либо $2\angle A = 30°$, либо $2\angle A = 150°$, поэтому либо $\angle A = 15°$, либо $\angle A = 75°$. Поскольку вписанный угол A опирается на дугу BCD (см. рис. 76), которая больше четверти окружности (т. е. больше $90°$), то $\angle A > 45°$, и, следовательно, $\angle A = 75°$.

Зная угол A, находим остальные углы трапеции: $\angle B = 180° - \angle A = 105°$, $\angle C = \angle B = 105°$, $\angle D = \angle A = 75°$.

Ответ: $75°$, $105°$, $105°$, $75°$.

102*.

Доказать: а) из всех треугольников с данной стороной и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник; б) из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение. а) Стороны произвольного треугольника обозначим буквами a, b и c. Пусть заданы сторона a и периметр $2p = a + b + c$. Докажем, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a и периметр равен $2p$, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник, у которого $b = c = p - \frac{a}{2}$.

Площадь S треугольника со сторонами a, b и c выражается формулой Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

В подкоренном выражении первые два сомножителя p и $p - a$ постоянны, поэтому площадь S будет иметь наибольшее значение, если произведение $(p - b)(p - c)$ имеет наибольшее значение. Так как $b = 2p - a - c$, то $p - b = c + a - p$, а $(p - b)(p - c) = (c + a - p)(p - c)$. Полученное выражение представляет собой квадратный трёхчлен относительно c, корни которого равны $p - a$ и p, поэтому наибольшее значение этот квадратный трёхчлен принимает при $c = \frac{(p-a)+p}{2} = p - \frac{a}{2}$. Если $c = p - \frac{a}{2}$, то $b = 2p - a - c = p - \frac{a}{2} = c$.

Таким образом, из всех треугольников с заданной стороной a и заданным периметром $2p$ наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник, у которого каждая из двух боковых сторон равна $p - \frac{a}{2}$. Утверждение доказано.

б) Рассмотрим всевозможные треугольники с заданным периметром, равным $2p$. Если задать также одну из сторон, положив её равной a, то из всех таких треугольников, согласно доказанному в пункте а), наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными $p-\frac{a}{2}$. Найдём площадь этого треугольника по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)\left(p-\left(p-\frac{a}{2}\right)\right)\left(p-\left(p-\frac{a}{2}\right)\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)a^2},$$

а далее найдём такое значение a, при котором величина $(p-a)\,a^2$ наибольшая. Тем самым будет найден треугольник, площадь которого является наибольшей из всех треугольников с периметром, равным $2p$.

Если все стороны нашего треугольника равны a, то $a+a+a=2p$, т. е. $a=\frac{2}{3}p$. Положим $a=\frac{2}{3}p+x$. Тогда

$$(p-a)a^2=\left(-x+\frac{1}{3}p\right)\left(x^2+\frac{4}{3}px+\frac{4}{9}p^2\right)=-x^3-px^2+\frac{4}{9}p^3=$$

$$=-x^2(x+p)+\frac{4}{9}p^3.$$

Подставляя сюда $x=a-\frac{2}{3}p$, приходим к равенству

$$(p-a)a^2=\frac{4}{27}p^3-\left(\frac{1}{3}p+a\right)\left(a-\frac{2}{3}p\right)^2.$$

Так как $\left(\frac{1}{3}p+a\right)\left(a-\frac{2}{3}p\right)^2\geqslant 0$, то наибольшее значение величина $(p-a)\,a^2$ имеет тогда, когда $\left(\frac{1}{3}p+a\right)\left(a-\frac{2}{3}p\right)^2=0$, т. е. когда $a=\frac{2p}{3}$. При этом каждая из двух других сторон треугольника равна $p-\frac{a}{2}=p-\frac{p}{3}=$ $=\frac{2p}{3}$, и, следовательно, этот треугольник равносторонний.

Итак, из всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник. Утверждение доказано.

104.

Дано: окружность с центром O, отрезки MA и MB — отрезки касательных, проведённые к этой окружности,

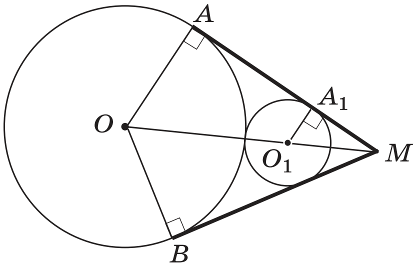


Рис. 77

окружность с центром O_1 касается дуги AB и отрезков MA и MB (рис. 77), $\smile AB = 120°$, длина дуги AB равна l.

Найти: длину окружности с центром O_1.

Решение. 1) Так как $\smile AB = 120°$, то $\angle AOB = 120°$, поэтому $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB = 60°$, а $\angle AMO = 90° - \angle AOM = 30°$.

2) Пусть $OA = R$, $O_1A_1 = R_1$. Так как $OA = \frac{1}{2}OM$ и $O_1A_1 = \frac{1}{2}O_1M_1$ (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы), то $OM = 2OA = 2R$ и $O_1M = 2R_1$.

3) С другой стороны, $OM = OO_1 + O_1M = R + R_1 + 2R_1 = R + 3R_1$. Таким образом, $2R = OM = R + 3R_1$, откуда $R_1 = \frac{1}{3}R$.

4) Так как $\smile AB = 120°$, то её длина l равна одной трети длины окружности с центром O, т. е.

$$l = \frac{1}{3}2\pi R, \text{ откуда } R = \frac{3l}{2\pi}, \text{ а } R_1 = \frac{1}{3}R = \frac{l}{2\pi}.$$

5) Длина окружности с центром O_1 равна $2\pi R_1$, т. е. равна $2\pi \cdot \frac{l}{2\pi} = l$.

Ответ: l.

111.

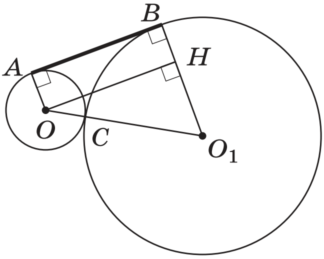


Рис. 78

Дано: окружности с центрами O и O_1 радиусов r и $3r$ касаются друг друга в точке C, отрезок AB — отрезок их общей касательной (рис. 78).

Найти: площадь фигуры, ограниченной отрезком AB и двумя дугами окружностей, меньшими полуокружностей.

Решение. 1) Проведём перпендикуляр OH к прямой O_1B

(см. рис. 78). Тогда $O_1H = O_1B - HB = O_1B - OA = 3r - r = 2r$, а так как $OO_1 = OC + CO_1 = r + 3r = 4r$, то $\sin\angle HOO_1 = \frac{O_1H}{OO_1} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}$, откуда следует, что $\angle HOO_1 = 30°$, поэтому $\angle HO_1O = 60°$ и $OH = OO_1 \cdot \sin 60° = 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}r$.

2) Вычислим площади трапеции $OABO_1$ и круговых секторов с дугами AC и CB: $S_{OABO_1} = \frac{1}{2}(OA + O_1B) \cdot OH = \frac{1}{2}(r + 3r) \cdot 2\sqrt{3}r = 4\sqrt{3}r^2$, $S_{OAC} = \frac{1}{3}\pi r^2$ и $S_{O_1CB} = \frac{1}{6}\pi(3r)^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$.

3) Искомая площадь равна $S_{OABO_1} - S_{OAC} - S_{O_1CB} = 4\sqrt{3}r^2 - \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi\right)r^2$.

Ответ: $\left(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi\right)r^2$.

112.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $AC = b$, $BC = a$, CH — высота треугольника (рис. 79), l — длина окружности, вписанной в треугольник ACH.

Доказать: площадь круга, вписанного в треугольник BCH, равна $\frac{a^2l^2}{4\pi b^2}$.

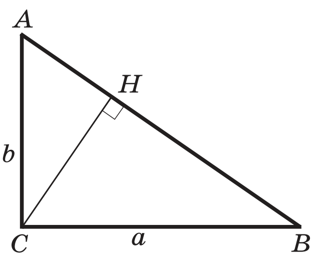


Рис. 79

Решение. Радиус r окружности, вписанной в треугольник ACH, равен $\frac{l}{2\pi}$, а отношение радиуса r_1 окружности, вписанной в треугольник BCH, к радиусу окружности, вписанной в треугольник ACH, равно коэффициенту k подобия этих треугольников. Так как $k = \frac{a}{b}$ (отношение гипотенуз подобных прямоугольных треугольников), то $r_1 = kr = \frac{a}{b} \cdot \frac{l}{2\pi}$. Поэтому искомая площадь равна $\pi r_1^2 = \pi\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^2l^2}{4\pi b^2}$, что и требовалось доказать.

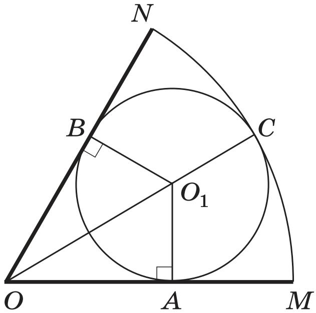


Рис. 80

113.

Дано: окружность с центром O_1 касается радиусов OM и ON кругового сектора OMN и его дуги в точках A, B и C (рис. 80), $OM = R$, $\angle MON = 60°$.

Найти: площадь фигуры, ограниченной отрезками OA и OB и дугой ACB.

Решение. 1) Пусть $O_1A = O_1B = O_1C = R_1$ (см. рис. 80). Так как $\angle O_1OA = \frac{1}{2}\angle MON = 30°$, то $O_1A = \frac{1}{2}OO_1$ (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы), поэтому $OO_1 = 2R_1$, а $OC = OO_1 + O_1C = 3R_1$. С другой стороны, $OC = R$, поэтому $3R_1 = R$, откуда $R_1 = \frac{1}{3}R$.

2) Из треугольника OO_1A находим: $OA = OO_1 \cdot \cos 30° = 2R_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}R$, $\angle AO_1O = 90° - \angle O_1OA = 60°$, поэтому $\angle AO_1B = 2\angle AO_1O = 120°$, $\smile AB = 120°$, а $\smile ACB = 240°$.

3) $S_{OAO_1B} = 2S_{OAO_1} = 2 \cdot \frac{1}{2}OA \cdot O_1A = \frac{\sqrt{3}}{3}R \cdot \frac{1}{3}R = \frac{\sqrt{3}}{9}R^2$,

$S_{O_1ACB} = \frac{240}{360}\pi R_1^2 = \frac{2}{3}\pi\frac{R^2}{9} = \frac{2}{27}\pi R^2$, а искомая площадь S равна сумме найденных площадей:

$$S = S_{OAO_1B} + S_{O_1ACB} = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{27}R^2.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{27}R^2$.

115.

Дано: фигура, ограниченная двумя окружностями, одна из которых лежит внутри другой (рис. 81, *а*).

Построить: границу круга, равновеликого данной фигуре.

Решение. Пусть радиусы данных окружностей равны R_1 и R_2 (см. рис. 81, *а*). Тогда площадь данной фигуры равна $\pi(R_1^2 - R_2^2)$.

По известным радиусам R_1 и R_2 построим отрезок, равный $\sqrt{R_1^2 - R_2^2}$. Это можно сделать так: построим пря-

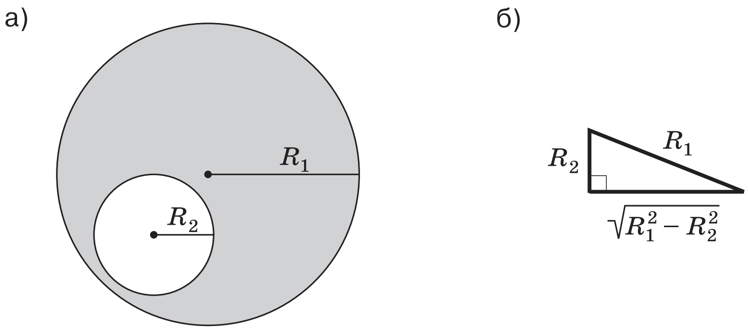


Рис. 81

моугольный треугольник с гипотенузой, равной R_1, и катетом, равным R_2 (рис. 81, *б*). Тогда второй катет будет равен $\sqrt{R_1^2 - R_2^2}$.

Остаётся провести окружность, радиус которой равен $\sqrt{R_1^2 - R_2^2}$. Это и есть искомая окружность. Площадь ограниченного ею круга равна $\pi (R_1^2 - R_2^2)$, т. е. этот круг равновелик данной фигуре.

Задачи повышенной трудности

151.

Дано: три точки A, B и C.

Доказать: точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C тогда и только тогда, когда для любой точки M имеет место равенство

$$MA^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2 \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA. \qquad (1)$$

Решение. 1) Докажем первую часть утверждения (связанную со словом «тогда»). В этом случае дано, что для любой точки M выполнено равенство (1), и требуется доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.

Возьмём в качестве точки M точку B и запишем равенство (1) для такого выбора точки M, учитывая, что при этом $MA = AB$, $MC = BC$, $MB = 0$. Получим равенство

$$AB^2 \cdot BC + BC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot CA.$$

Разделив обе его части на $AB \cdot BC$, приходим к равенству

$$AB + BC = CA,$$

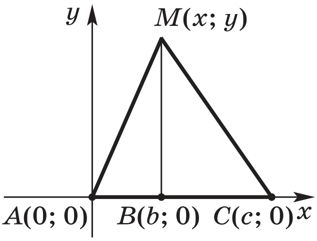


Рис. 82

откуда следует, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.

2) Докажем вторую часть утверждения (связанную со словами «только тогда»). В этом случае дано, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C, и требуется доказать, что для любой точки M имеет место равенство (1).

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 82. Пусть $AB = b$, $AC = c$, тогда $BC = c - b$, и, кроме того, точки A, B и C имеют следующие координаты: $A\,(0; 0)$, $B\,(b; 0)$ и $C\,(c; 0)$ (см. рис. 82).

Возьмём произвольную точку M с координатами $(x; y)$. По формуле расстояния между двумя точками

$$MA^2 = x^2 + y^2,\; MB^2 = (x - b)^2 + y^2,\; MC^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Используя эти выражения, получаем

$$MA^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2 \cdot CA =$$
$$= (x^2 + y^2)\,(c - b) + ((x - c)^2 + y^2) \cdot b - ((x - b)^2 + y^2) \cdot c =$$
$$= c^2b - b^2c = b\,(c - b)\,c = AB \cdot BC \cdot CA,$$

т. е. для любой точки M выполняется равенство (1), что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение называется теоремой Стюарта в честь шотландского математика и астронома Мэтью Стюарта (1717—1785).

152.

Дано: параллелограммы $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ и $BIJC$.

Доказать: четырёхугольник $AFHG$ — параллелограмм.

Решение. Воспользуемся тем, что если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то справедливы векторные равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 83, *а*). Перечислим данные параллелограммы в таком порядке: $AEFG$, $FIJE$, $BIJC$, $ABCD$, $ADFH$ и запишем для каждого из них соответствующее векторное равенство:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF},\; \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{JI},\; \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CB},\; \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA},\; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FH}.$$

Из этой цепочки равенств следует, что $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FH}$. Кроме того, точки A, F, H и G не лежат на одной прямой,

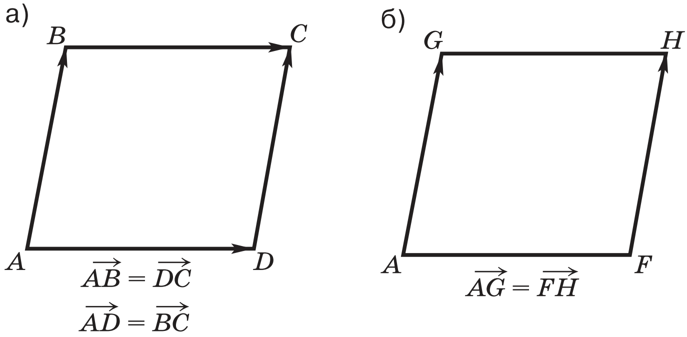


Рис. 83

поскольку четырёхугольник $ADFH$ — параллелограмм (по условию), и, следовательно, его вершины A, F и H не лежат на одной прямой.

Из равенства $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FH}$ и того факта, что точки A, F, H и G не лежат на одной прямой, следует, что четырёхугольник $AFHG$ — параллелограмм (рис. 83, *б*), что и требовалось доказать.

154.

Дано: K, L, M и N — середины отрезков AB, CD, BC и DE; F и G — середины отрезков KL и MN (рис. 84).

Доказать: отрезки FG и AE либо параллельны, либо лежат на одной прямой, и $FG = \frac{1}{4}AE$.

Решение. Воспользуемся следующими равенствами (см. рис. 84):

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.$$

С их помощью получаем

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG} =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{KL} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} =$$

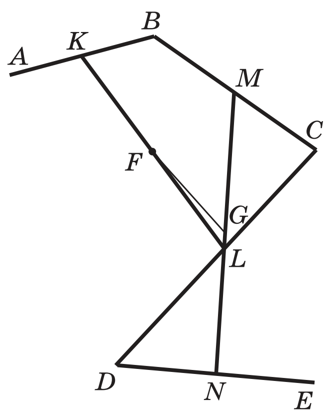


Рис. 84

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Итак, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, откуда следует, что отрезки FG и AE либо параллельны, либо лежат на одной прямой, и $FG = \frac{1}{4}AE$.

156.

Дано: точки A и B и положительное число $k \neq 1$.

Доказать: а) множество всех точек M, удовлетворяющих равенству $AM = k \cdot BM$, есть окружность; б) эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведённые в точку пересечения, перпендикулярны.

Решение. а) Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 85, *а*. Тогда точки A и B имеют следующие координаты: $A\,(0;\,0)$ и $B\,(a;\,0)$, где $a = AB$. Для произвольной точки $M\,(x;\,y)$ расстояния AM и BM выражаются формулами

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2},\ BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Если точка $M\,(x;\,y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM = k \cdot BM$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то $AM \neq k \cdot BM$, поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, уравнение (1) является уравнением искомого множества точек в заданной системе координат.

Возведя обе части уравнения (1) в квадрат (при этом получится равносильное уравнение) и сгруппировав слагаемые соответствующим образом, приведём уравнение к виду

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2, \qquad (2)$$

где $x_0 = \frac{k^2a}{k^2-1}$, $R = \frac{ka}{|k^2-1|}$.

Уравнение (2) является уравнением окружности радиуса R с центром $C\left(\frac{k^2a}{k^2-1};\,0\right)$. Тем самым утверждение а) доказано.

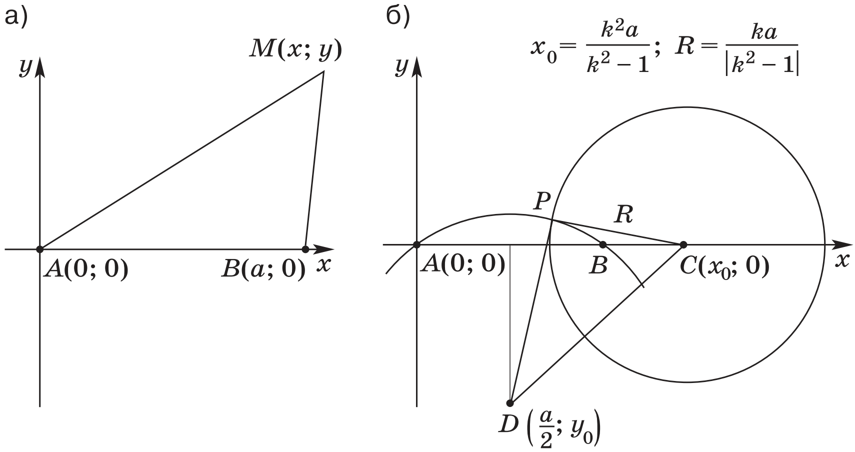


Рис. 85

На рисунке 85, *б* изображена окружность Аполлония для некоторого $k > 1$ с центром C.

Замечание. Обозначим через S_k ту окружность Аполлония, для точек M которой выполняется равенство $AM = kBM$. Пусть прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Если $k < 1$, то окружность S_k лежит в той же полуплоскости с границей l, что и точка A, а если $k > 1$, то окружность S_k лежит в той же полуплоскости с границей l, что и точка B. Для любой точки M серединного перпендикуляра, как известно, выполняется равенство $AM = BM$ (т. е. $k = 1$). Отметим также, что если $k_1 < k_2 < 1$, то окружность S_{k_1} лежит внутри круга с границей S_{k_2}, а если $k_2 > k_1 > 1$, то окружность S_{k_2} лежит внутри круга с границей S_{k_1}. Отсюда следует, что для любой точки M, лежащей внутри (вне) круга с границей S_k при $k < 1$ выполняется неравенство $\frac{AM}{BM} < k$ $\left(\frac{AM}{BM} > k\right)$, а при $k > 1$ — неравенство $\frac{AM}{BM} > k$ $\left(\frac{AM}{BM} < k\right)$.

Все эти утверждения можно предложить доказать учащимся, проявляющим особый интерес к геометрии. Они понадобятся при решении задачи 159.

б) Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через точки A и B. Обозначим её центр буквой D, а точку пересечения с окружностью Аполлония буквой P (рис. 85, *б*). Требуется доказать, что $CP \perp DP$, т. е. $\angle CPD = 90°$.

Так как точка D равноудалена от точек A и B, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Поэтому точка D имеет координаты $\left(\frac{a}{2}; y_0\right)$, где y_0 — некоторое число. Используя координаты точек A, D и C, получаем $DP^2 = DA^2 = \left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + (0 - y_0)^2 = \frac{a^2}{4} + y_0^2$,

$$DC^2 = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + (0 - y_0)^2 = \left(\frac{k^2a}{k^2-1} - \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2 =$$
$$= \left(\frac{k^4a^2}{(k^2-1)^2} - 2\frac{k^2a}{k^2-1}\cdot\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a^2}{4} + y_0^2\right) =$$
$$= \frac{k^2a^2}{(k^2-1)^2} + \left(\frac{a^2}{4} + y_0^2\right) = R^2 + DP^2 = CP^2 + DP^2.$$

Итак, $DC^2 = CP^2 + DP^2$. Отсюда следует (согласно теореме, обратной теореме Пифагора), что треугольник CPD прямоугольный, и $\angle CPD = 90°$, что и требовалось доказать.

159.

Дано: две точки A и B и прямая a, не перпендикулярная к прямой AB.

Построить: на прямой a такие точки M_1 и M_2, в которых отношение $AM : BM$ $(M \in a)$ принимает наибольшее и наименьшее значения.

Решение. Анализ. На рисунке 86, а изображены данные точки A и B, данная прямая a и две окружности Аполлония (S_1 и S_2) для точек A и B, которые касаются прямой a в точках P и Q. Точки C_1 и C_2 — центры этих окружностей.

Пусть отношение $AM : BM$ для точек M окружности S_1 равно k_1, а для точек окружности S_2 равно k_2. Вос-

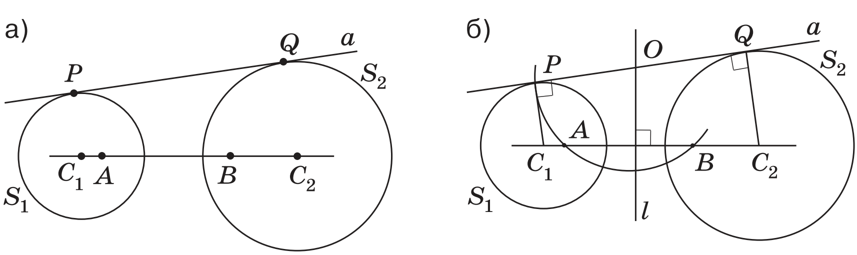


Рис. 86

пользуемся замечанием, сделанным после решения задачи 156 а). Согласно этому замечанию $k_1 < 1$, $k_2 > 1$ и для любой точки M, лежащей вне кругов с границами S_1 и S_2, выполняются неравенства $k_1 < \frac{AM}{BM} < k_2$. Поскольку все точки прямой a, за исключением точек P и Q, лежат вне этих кругов, то отношение $\frac{AM}{BM}$ для точек прямой a принимает наименьшее значение, равное k_1, в точке P и наибольшее значение, равное k_2, в точке Q. Таким образом, задача сводится к построению точек P и Q, в которых прямая a касается двух окружностей Аполлония.

Чтобы найти способ построения точек P и Q, воспользуемся утверждением задачи 156 б), согласно которому радиус OP окружности, проходящей через точки A, B и P, перпендикулярен к радиусу C_1P окружности S_1 (рис. 86, *б*), а поскольку $a \perp C_1P$, то точка O лежит на прямой a. Кроме того, точка O равноудалена от точек A и B и потому лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AB. Следовательно, точка O является точкой пересечения прямых a и l. Повторяя такие же рассуждения в отношении точки Q, приходим к выводу: центром окружности, проходящей через точки A, B и Q, является также точка O.

Построение. Из проведённых рассуждений следует, что построение точек P и Q можно произвести следующим образом. Строим серединный перпендикуляр l к отрезку AB, отмечаем точку O пересечения прямых a и l, а затем проводим окружность с центром O радиуса OA. Точки пересечения этой окружности с прямой a и есть искомые точки.

Доказательство. Радиус OP построенной окружности перпендикулярен к радиусу C_1P окружности Аполлония S_1, проходящей через точку P, т. е. $a \perp C_1P$. Отсюда следует, что прямая a — касательная к окружности S_1. Точно так же доказывается, что прямая a — касательная к окружности Аполлония S_2, проходящей через точку Q. Следовательно (согласно проведённым выше рассуждениям), для точек M прямой a отношение $\frac{AM}{BM}$ принимает наименьшее значение в точке P, а наибольшее значение в точке Q.

Для завершения доказательства отметим, что никакая другая окружность Аполлония для точек A и B, кроме окружностей S_1 и S_2, не является касательной к прямой a, так как либо такая окружность S лежит внутри круга с границей S_1 или круга с границей S_2 (и тогда прямая a и окружность S не имеют общих точек), либо окружность S_1 или окружность S_2 лежит внутри круга с границей S (и тогда прямая a пересекается с окружностью S в двух точках).

Замечание. Если прямая a перпендикулярна к прямой AB и не совпадает с серединным перпендикуляром l к отрезку AB, то она касается только одной окружности Аполлония для точек A и B. Точкой касания является точка пересечения прямых a и AB, и в этой точке отношение $AM : BM$ принимает наименьшее значение для точек M прямой a, если прямая a лежит в той же полуплоскости с границей l, что и точка A, и принимает наибольшее значение, если прямая a лежит в другой полуплоскости с границей l.

163.

Дано: точка $M\ (x_0, y_0)$ и прямая p, заданная уравнением $ax + by + c = 0$.

Найти: расстояние от точки M до прямой p.

Решение. Пусть точка M не лежит на данной прямой p. Проведём перпендикуляр MH к этой прямой (рис. 87). Требуется найти его длину.

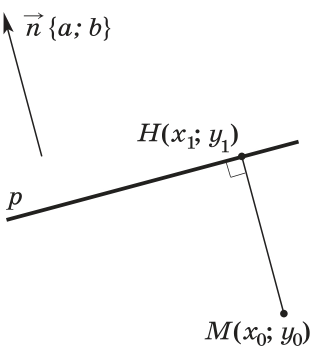


Рис. 87

Координаты точки H обозначим $(x_1; y_1)$. Векторы $\vec{n}\,\{a; b\}$ и $\overrightarrow{MH}\,\{x_1 - x_0; y_1 - y_0\}$ перпендикулярны к прямой p и, следовательно, коллинеарны. Поэтому существует такое число k, что $\overrightarrow{MH} = k \cdot \vec{n}$, откуда следуют равенства

$$x_1 - x_0 = ka, \quad y_1 - y_0 = kb. \qquad (1)$$

По формуле расстояния между двумя точками получаем

$$MH = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = |k| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Для нахождения числа k воспользуемся тем, что точка $H\ (x_1; y_1)$ лежит на прямой p и, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т. е.

$$ax_1 + by_1 + c = 0. \qquad (3)$$

Из равенств (1) следует, что $x_1 = x_0 + ka$, $y_1 = y_0 + kb$. Подставляя эти выражения в равенство (3), получаем уравнение относительно k, из которого находим:

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Используя это значение k и формулу (2), находим MH:

$$MH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (4)$$

Отметим, что если точка $M\ (x_0;\ y_0)$ лежит на прямой p, то расстояние от этой точки до прямой равно нулю. Такой же результат получается по формуле (4), поскольку в этом случае координаты точки M удовлетворяют уравнению прямой p, т. е. $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Ответ: $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

168.

Дано: три прямые p_1, p_2 и p_3, пересекающиеся в точке O, и точка A на прямой p_1 (рис. 88, *а*).

Построить: треугольник ABC, биссектрисы которого лежат на прямых p_1, p_2 и p_3.

Решение. Анализ. Так как по условию биссектрисы искомого треугольника лежат на данных прямых p_1, p_2 и p_3, а во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, то точка O должна быть точкой пересечения биссектрис искомого треугольника. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 88, *б*). Тогда лучи AO, BO и CO являются биссектрисами его углов. Отсюда, в частности, следует, что лучи BA и BC симметричны относительно прямой BO (т. е. прямой p_2), и потому точка A_2, симметричная точке A относительно прямой p_2, лежит на луче BC. Аналогично точка A_3, симметричная точке A относительно прямой CO (т. е. прямой p_3), лежит

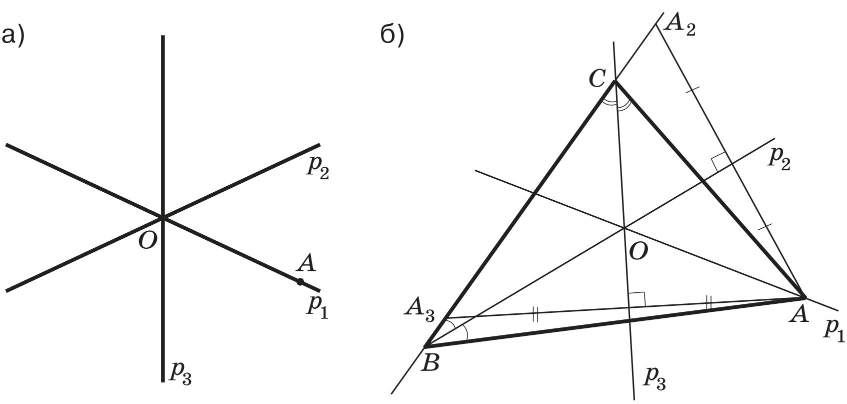


Рис. 88

на луче CB. Таким образом, вершины B и C искомого треугольника лежат на прямой A_2A_3 (см. рис. 88, *б*).

Построение. Из проведённого анализа следует, что построение искомого треугольника можно выполнить следующим образом: строим точки A_2 и A_3, симметричные точке A относительно прямых p_2 и p_3; проводим прямую A_2A_3 и обозначаем буквами B и C точки пересечения этой прямой с прямыми p_2 и p_3. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Согласно построению, луч BC симметричен лучу BA относительно прямой p_2, поэтому луч BO, лежащий на прямой p_2, является биссектрисой угла B построенного треугольника ABC. Аналогично луч CO, лежащий на прямой p_3, является биссектрисой угла C треугольника ABC, а так как три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то луч AO, лежащий на прямой p_1, является биссектрисой угла A треугольника ABC. Таким образом, биссектрисы треугольника ABC лежат на данных прямых p_1, p_2 и p_3, т. е. построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

170.

Дано: на сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки L, M и N.

Доказать: периметр треугольника LMN будет наименьшим в том случае, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC.

Выразить: наименьший периметр треугольника LMN через углы треугольника ABC и радиус R описанной около него окружности.

Решение. Пусть M — какая-то точка, отмеченная на стороне BC (рис. 89, *а*). Выясним сначала, при каком рас-

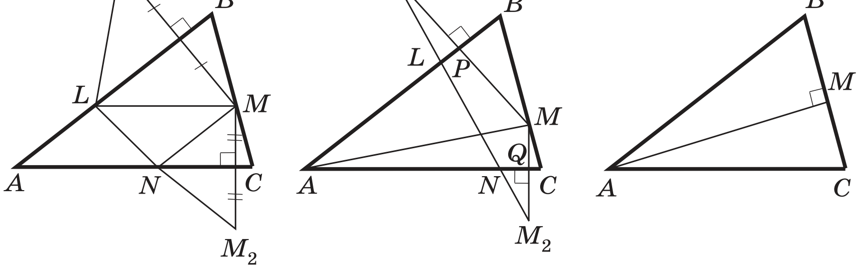


Рис. 89

положении точек L и N на сторонах AB и AC периметр треугольника LMN будет наименьшим.

Рассмотрим точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно прямых AB и AC. Поскольку $ML = M_1L$ и $MN = M_2N$ (см. рис. 89, *а*), то периметр треугольника LMN равен длине ломаной M_1LNM_2. Следовательно, наименьшее значение он принимает тогда, когда L и N — точки пересечения сторон AB и AC с прямой M_1M_2 (рис. 89, *б*). В этом случае периметр треугольника LMN равен M_1M_2.

Выясним теперь, при каком положении точки M величина M_1M_2 имеет наименьшее значение. Заметим, что в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями AB и AC точка M_1 переходит в точку M_2. Следовательно, $\angle M_1AM_2 = 2\angle A$ (см. п. 98 учебника) и, кроме того, $AM_1 = AM = AM_2$. Справедливость равенств следует также из равенств прямоугольных треугольников APM_1 и APM, AQM и AQM_2 (см. рис. 89, *б*).

В равнобедренном треугольнике M_1AM_2

$$M_1M_2 = 2AM_1 \sin\frac{2A}{2} = 2AM \sin A.$$

Поскольку величина угла A задана, то M_1M_2 принимает наименьшее значение тогда, когда длина отрезка AM равна кратчайшему расстоянию от точки A до прямой BC, т. е. когда точка M является основанием высоты треугольника ABC. В этом случае $AM = AB \sin B$ (рис. 89, *в*), а так как $AB = 2R \sin C$, то

$$M_1M_2 = 2AB \sin B \sin A = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Итак, наименьший из периметров треугольников LMN равен $4R \sin A \sin B \sin C$, причём если точка M не является основанием высоты, то периметр больше этой величины. Аналогично доказывается, что если точки L и N не являются основаниями высот треугольника ABC, то периметр треугольника LMN больше указанной величины. Следовательно, периметр треугольника LMN принимает наименьшее значение, равное $4R \sin A \sin B \sin C$, в том случае, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC.

Ответ: $4R \sin A \sin B \sin C$.

173.

Дано: на сторонах остроугольного треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1 (рис. 90).

Доказать: а) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен 60°; б) три окруж-

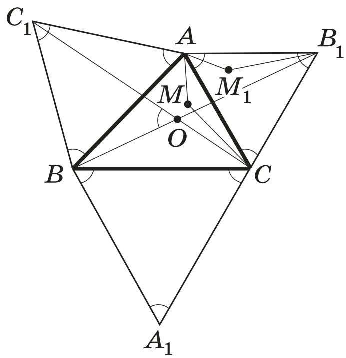


Рис. 90

ности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O; в) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 также пересекаются в точке O; г) каждая сторона треугольника ABC видна из точки O под углом 120°; д) точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение.

Решение. а) Рассмотрим поворот плоскости вокруг точки A на угол 60°, при котором точка C_1 переходит в точку B. При этом повороте точка C переходит в точку B_1 и, следовательно, отрезок C_1C переходит в отрезок BB_1. Поэтому $BB_1 = CC_1$, и угол между этими отрезками равен 60°. Аналогично доказывается, что $AA_1 = CC_1$ (тем самым $AA_1 = BB_1 = CC_1$) и угол между любыми двумя из трёх отрезков равен 60°.

б) Пусть O — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1 (см. рис. 90).

Согласно доказанному в пункте а) угол BOC_1 равен 60°, а поскольку угол BAC_1 также равен 60°, то окружность, описанная около треугольника ABC_1, проходит через точку O. Аналогично доказывается, что через точку O проходит и окружность, описанная около треугольника CAB_1.

Так как $\angle BOC = 180^\circ - \angle BOC_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, то $\angle BOC + \angle BA_1C = 180^\circ$. Следовательно, около четырёхугольника A_1BOC можно описать окружность, а это означает, что окружность, описанная около треугольника BAC_1, проходит через точку O.

Итак, все три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в точке O.

в) Из пункта б) следует, что прямые BB_1 и CC_1 проходят через точку O пересечения трёх окружностей, описанных около равносторонних треугольников. Аналогично доказывается, что через эту точку проходят прямые AA_1 и CC_1. Тем самым все три прямые пересекаются в точке O.

г) В пункте б) было установлено, что $\angle BOC = 120^\circ$. Аналогично доказывается, что $\angle AOB = 120^\circ$ и $\angle AOC = 120^\circ$. Следовательно, каждая сторона треугольника ABC видна из точки O под углом 120°.

д) Пусть M — произвольная точка плоскости (см. рис. 90). Снова рассмотрим поворот вокруг точки A на

$60°$, при котором точка C переходит в точку B_1. При этом повороте треугольник AMC переходит в треугольник AM_1B_1, причём $AM_1 = AM$ и $B_1M_1 = CM$ (если точка M лежит на прямой AC, то нужно рассмотреть поворот на $60°$ вокруг какой-нибудь другой вершины треугольника ABC).

В равнобедренном треугольнике AMM_1 угол A равен $60°$, поэтому этот треугольник равносторонний и $AM = M_1M$. Следовательно,

$$CM + AM + BM = B_1M_1 + M_1M + MB.$$

Ясно, что эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда точки M и M_1 лежат на отрезке BB_1, причём точка M лежит между точками B и M_1. В этом случае углы AMB и AM_1B_1 равны $120°$ (как внешние углы равностороннего треугольника AMM_1), а поскольку $\angle AOB = 120°$, то точка M совпадает с точкой O.

Тем самым последнее утверждение доказано.

Замечание. Точку O часто называют точкой Ферма в честь французского математика и юриста Пьера Ферма (1601—1665), автора знаменитой Великой теоремы Ферма, а иногда эту точку называют точкой Торричелли в честь итальянского математика и физика Эванжелисты Торричелли (1608—1647).

176.

Доказать (используя центральное подобие): теорему о пересечении высот треугольника.

Решение. На рисунке 91 изображён треугольник ABC, в котором проведены высота AK, медиана AM и отмечена точка G пересечения медиан. Требуется доказать, что прямая AK и ещё две прямые, на которых лежат высоты треугольника, проведённые к сторонам AB и AC, пересекаются в одной точке.

Рассмотрим центральное подобие с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Поскольку точка G делит медиану AM в отношении $AG : GM = 2 : 1$, то при этом центральном подобии точка A перейдёт в точку M. Точка K перейдёт в некоторую точку K', причём, согласно основному свойству центрального подобия, $\overrightarrow{MK'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Отсюда следует, что прямые MK' и AK параллель-

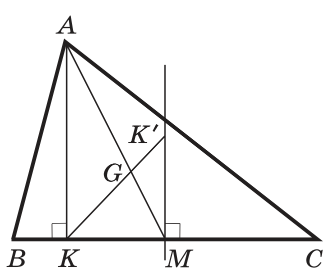


Рис. 91

ны (см. рис. 91), и, следовательно, прямая MK' — серединный перпендикуляр к стороне BC.

Аналогично доказывается, что прямые, содержащие высоты треугольника, проведённые к сторонам AB и AC, перейдут в серединные перпендикуляры к этим сторонам. Но три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — в центре O описанной около треугольника окружности. Отсюда следует, что точка H, которая переходит в точку O при данном центральном подобии, лежит на каждой из трёх прямых, содержащих высоту треугольника, т. е. эти три прямые пересекаются в точке H, что и требовалось доказать.

178.

Дано: на сторонах треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1 (рис. 92), точки G_C, G_A и G_B — центры этих треугольников.

Доказать: треугольник $G_AG_BG_C$ равносторонний, и его центр совпадает с точкой G пересечения медиан треугольника ABC (это утверждение иногда называют теоремой Наполеона).

Решение. Проведём доказательство для случая остроугольного треугольника ABC (см. рис. 92); для других случаев проведение доказательства можно поручить учащимся, проявляющим особый интерес к геометрии.

Рассмотрим центральное подобие с центром в середине стороны BC и коэффициентом $\frac{1}{3}$. При этом преобразовании подобия точка A переходит в точку G, а точка A_1 — в точку G_A. Поэтому прямые GG_A и AA_1 параллельны или совпадают и $GG_A = \frac{1}{3}AA_1$. Аналогично доказывается, что прямые GG_B и BB_1, а также прямые GG_C и CC_1 параллельны или совпадают, и $GG_B = \frac{1}{3}BB_1$, $GG_C = \frac{1}{3}CC_1$.

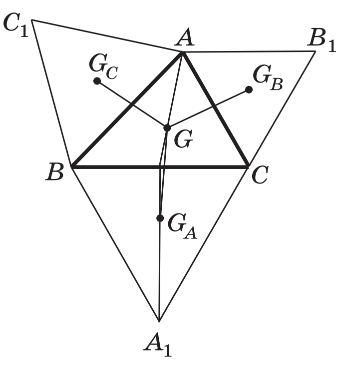


Рис. 92

Так как отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен 60° (см. задачу 173), то отрезки GG_A, GG_B и GG_C также равны и образуют между собой углы по 120°

(см. рис. 92). Из этого следует, что треугольник $G_AG_BG_C$ равносторонний, и точка G — его центр.

182.

Дано: каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника.

Вопрос: следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной a и равнобедренный треугольник с основанием $2b$, где $b > a$, и высотой h (рис. 93). Так как $b > a$ и боковая сторона равнобедренного треугольника больше b, то каждая сторона второго треугольника больше любой стороны первого треугольника.

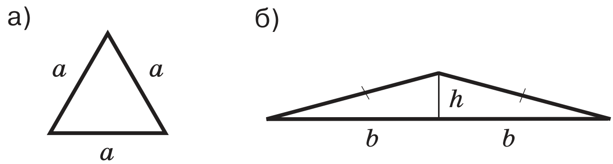


Рис. 93

Площадь S_1 первого треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а площадь S_2 второго треугольника равна bh. При заданных a и b, где $b > a$, можно взять высоту h столь малой, что будет выполнено неравенство $bh < \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, т. е. $S_2 < S_1$.

Таким образом, из того, что каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника, не следует, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника.

Ответ: нет.

185.

Дано: $\triangle ABC$; отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы (рис. 94, *а*).

Доказать: существует треугольник, стороны которого равны AA_1, BB_1 и CC_1.

Найти: площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC, если $S_{ABC} = S$.

Решение. 1) На продолжении отрезка C_1B_1 за точку B_1 отметим точку D так, что $B_1D = C_1B_1$, и проведём отрезки AD, A_1D и CD (рис. 94, *б*). Так как отрезок C_1B_1 — сред-

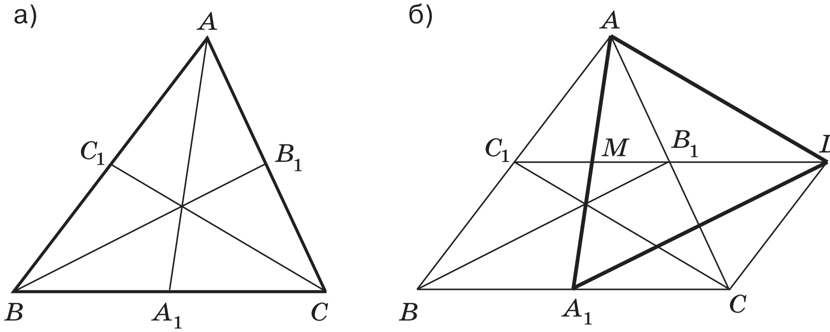


Рис. 94

няя линия треугольника ABC, то $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC = BA_1$ и $C_1B_1 \parallel BA_1$. Поэтому $B_1D = BA_1$ и $B_1D \parallel BA_1$, откуда следует, что четырёхугольник BB_1DA_1 — параллелограмм. Следовательно, $A_1D = BB_1$.

2) В четырёхугольнике C_1ADC диагонали C_1D и AC пересекаются в точке B_1 и делятся этой точкой пополам ($C_1B_1 = B_1D$ и $AB_1 = B_1C$), поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм, и, следовательно, $AD = CC_1$.

Таким образом, в треугольнике AA_1D сторона AA_1 является медианой данного треугольника ABC, а стороны A_1D и AD равны соответственно двум другим его медианам: $A_1D = BB_1$ и $AD = CC_1$. Тем самым доказано, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника ABC.

3) Пусть M — точка пересечения отрезков AA_1 и C_1B_1 (см. рис. 94, *б*). Тогда $AM = MA_1$ и $C_1M = MB_1$ (эти равенства следуют, например, из того, что четырёхугольник $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм, а M — точка пересечения его диагоналей). Поэтому $S_{AMD} = S_{A_1MD}$, и, следовательно, $S_{AA_1D} = 2S_{AMD}$, а также справедливы равенства $MD = 3MB_1 = \frac{3}{2}C_1B_1$, откуда следует, что $S_{AMD} = \frac{3}{2}S_{AB_1C_1}$. Но $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}S$ (поскольку треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$). Таким образом, $S_{AA_1D} = 2S_{AMD} = 3S_{AB_1C_1} = \frac{3}{4}S$.

Ответ: $\frac{3}{4}S$.

186.

Дано: на сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N (рис. 95) так, что $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Доказать: хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника $KLMN$ параллельна одной из сторон параллелограмма.

Решение. Пусть $BL=a_1$, $LC=a_2$, $AN=a_3$, $ND=a_4$, $BC=AD=a$. Тогда $a_1+a_2=a_3+a_4=a$.

Проведём из точек K и M перпендикуляры к прямым BC и AD и обозначим их длины через h_1, h_2 и h_3, h_4 (см. рис. 95). Очевидно, что $h_1+h_3=h_2+h_4=h$, где h — высота параллелограмма.

Из условия задачи следует, что сумма площадей треугольников KBL, LCM, MDN и NAK равна половине площади параллелограмма, т. е.

$$\frac{1}{2}(a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+a_4h_4)=\frac{1}{2}ah. \qquad (1)$$

Поскольку $a_2=a-a_1$ и $a_4=a-a_3$, то равенство (1), сократив на $\frac{1}{2}$, можно записать в виде

$$a_1h_1+(a-a_1)\,h_2+a_3h_3+(a-a_3)\,h_4=ah,$$

откуда получаем

$$a_1\,(h_1-h_2)+a_3\,(h_3-h_4)+a\,(h_2+h_4)=ah.$$

Но $h_2+h_4=h$, и, следовательно, приходим к равенству

$$a_1\,(h_1-h_2)+a_3\,(h_3-h_4)=0.$$

Из этого равенства следует (с учётом того, что $h_3=h-h_1$ и $h_4=h-h_2$):

$$a_1\,(h_1-h_2)+a_3\,(h-h_1-h+h_2)=0,$$

т. е. $(a_1-a_3)\,(h_1-h_2)=0$.

Итак, хотя бы один из сомножителей a_1-a_3 и h_1-h_2 равен нулю. Если a_1-a_3 равно нулю, т. е. $a_1=a_3$, то в че-

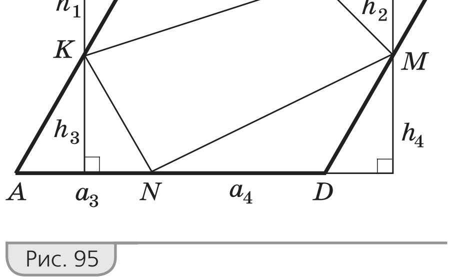


Рис. 95

тырёхугольнике $ABLN$ противоположные стороны AN и BL равны и параллельны (см. рис. 95), поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм, и, следовательно, $LN \parallel AB$. Таким образом, в этом случае диагональ LN четырёхугольника $KLMN$ параллельна стороне AB данного параллелограмма $ABCD$.

Если $h_1 - h_2$ равно нулю, т. е. $h_1 = h_2$, то точки K и M находятся на одинаковом расстоянии от прямой BC, поэтому $KM \parallel BC$. Тем самым в этом случае диагональ KM четырёхугольника $KLMN$ параллельна стороне BC данного параллелограмма $ABCD$.

Итак, хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника $KLMN$ параллельна одной из сторон данного параллелограмма $ABCD$, что и требовалось доказать.

189.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD, прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках E и F (рис. 96, *а*).

Доказать: $S_{ABF} = S_{CDE}$.

Решение. Проведём перпендикуляры AH и CK к прямой EF и рассмотрим случай, когда прямые AC и EF не перпендикулярны (рис. 96, *б*). Прямоугольные треугольники AHM и CKM равны по гипотенузе ($AM = MC$ по условию) и острому углу ($\angle AMH = \angle CMK$, так как эти углы вертикальные). Следовательно, $AH = CK$, т. е. равны высоты в треугольниках AEF и CEF, проведённые к стороне EF. Поэтому $S_{AEF} = S_{CEF}$.

Аналогично доказывается равенство $S_{BEF} = S_{DEF}$.

Если $AC \perp EF$, то эти равенства для площадей также верны (докажите это).

Так как $S_{ABF} = S_{AEF} + S_{BEF}$ и $S_{CDE} = S_{CEF} + S_{DEF}$ (см. рис. 96, *а*), то из полученных равенств следует искомое равенство $S_{ABF} = S_{CDE}$.

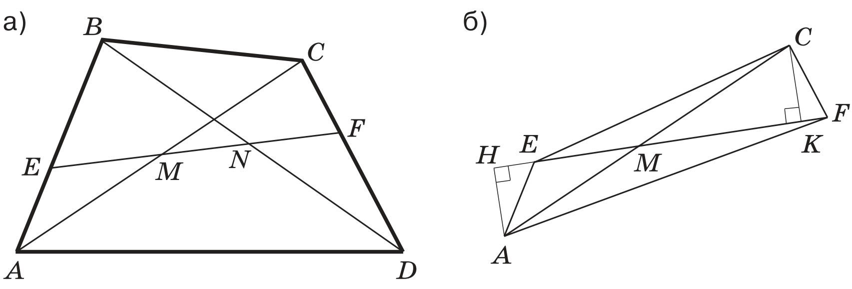


Рис. 96

190.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, внутри треугольника отмечена точка M так, что $S_{ABM} = S_{BCM} = S_{CAM}$ (рис. 97).

Найти: $\dfrac{AM^2 + BM^2}{CM^2}$.

Решение. Проведём высоты MH и MK треугольников CAM и BCM (см. рис. 97). Пусть $MH = x$, $MK = y$, $BC = a$, $AC = b$. Тогда $S_{CAM} = \dfrac{1}{2}bx$, $S_{BCM} = \dfrac{1}{2}ay$, $S_{ABM} = S_{ABC} - (S_{CAM} + S_{BCM}) = \dfrac{1}{2}ab - \left(\dfrac{1}{2}bx + \dfrac{1}{2}ay\right)$. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}bx = \dfrac{1}{2}ay, \\ \dfrac{1}{2}bx = \dfrac{1}{2}ab - \left(\dfrac{1}{2}bx + \dfrac{1}{2}ay\right). \end{cases}$$

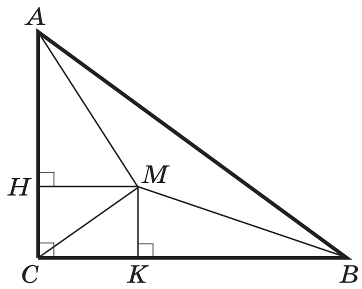


Рис. 97

Из этой системы двух уравнений находим: $x = \dfrac{a}{3}$, $y = \dfrac{b}{3}$, т. е. $MH = \dfrac{a}{3}$, $MK = \dfrac{b}{3}$. Следовательно, $AH = AC - HC =$ $= AC - MK = \dfrac{2b}{3}$, $BK = BC - CK = BC - MH = \dfrac{2a}{3}$.

По теореме Пифагора применительно к треугольникам AMH, BMK и CMK находим:

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9}a^2,$$

$$BM^2 = BK^2 + MK^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2,$$

$$CM^2 = CK^2 + MK^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2.$$

Следовательно, $\dfrac{AM^2 + BM^2}{CM^2} = \dfrac{\frac{5}{9}(a^2 + b^2)}{\frac{1}{9}(a^2 + b^2)} = 5.$

Ответ: 5.

195.

Дано: трапеция $ABCD$, M — середина боковой стороны CD, $MH \perp AB$ (рис. 98).

Доказать: $S_{ABCD} = AB \cdot MH$.

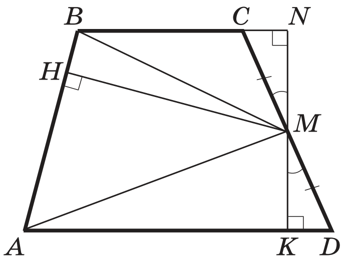


Рис. 98

Решение. 1) Проведём через точку M прямую, перпендикулярную к прямой AD. Пусть она пересекает прямую AD в точке K, а прямую BC в точке N (см. рис. 98). Так как $BC \parallel AD$, то $KN \perp BC$.

Прямоугольные треугольники MKD и MNC равны (по гипотенузе и острому углу, см. рис. 98), поэтому $MK = MN = \frac{1}{2}KN$.

2) $S_{BMC} = \frac{1}{2}BC \cdot MN = \frac{1}{4}BC \cdot KN$, $S_{AMD} = \frac{1}{2}AD \cdot MK = \frac{1}{4}AD \cdot KN$, следовательно,

$$S_{BMC} + S_{AMD} = \frac{1}{4}(AD + BC) \cdot KN = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

3) $S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{BMC} + S_{AMD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. С другой стороны, $S_{AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MH$. Таким образом, $\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB \cdot MH$, т. е. $S_{ABCD} = AB \cdot MH$, что и требовалось доказать.

197.

Дано: диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 99); $\frac{1}{2}(S_{BOC} + S_{AOD}) = S_1$, $\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} = S_2$.

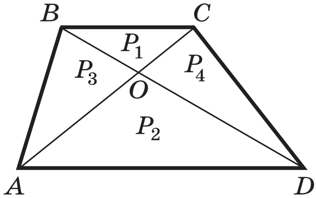


Рис. 99

Найти: S_{ABCD}.

Решение. 1) Введём обозначения $S_{BOC} = P_1$, $S_{AOD} = P_2$, $S_{AOB} = P_3$, $S_{COD} = P_4$ (см. рис. 99). Тогда, согласно условию задачи, справедливы равенства

$$P_1 + P_2 = 2S_1, \ \sqrt{P_1P_2} = S_2.$$

2) Так как $P_3P_4 = P_1P_2$ (задача 71 з)) и $P_3 = P_4$ (задача 75 д)), то $P_3^2 = P_1P_2 = S_2^2$, откуда $P_3 = S_2$ и также $P_4 = S_2$.

3) $S_{ABCD} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2S_1 + S_2 + S_2 = 2\,(S_1 + S_2)$.

Ответ: $2\,(S_1 + S_2)$.

198.

Дано: диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 100).

Доказать:

$$S_{ODC} = \sqrt{S_{OBC} \cdot S_{OAD}} \qquad (1)$$

тогда и только тогда, когда $AD \parallel BC$.

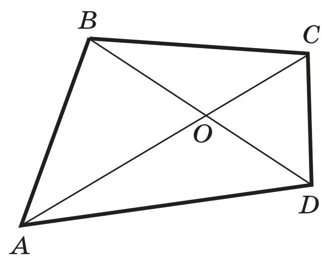


Рис. 100

Решение. 1) Пусть $AD \parallel BC$. Тогда четырёхугольник $ABCD$ либо трапеция, либо параллелограмм.

В первом случае $S_{OAB} = S_{ODC}$ (задача 75 д)), и так как

$$S_{OAB} \cdot S_{ODC} = S_{OBC} \cdot S_{OAD} \qquad (2)$$

(задача 71 з)), то $S_{ODC}^2 = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$, откуда следует искомое равенство (1).

Во втором случае (когда $ABCD$ — параллелограмм) $S_{OAB} = S_{ODC} = S_{OBC} = S_{OAD}$, и, следовательно, равенство (1) также выполняется.

2) Обратно, пусть выполнено равенство (1). Тогда из (1) и (2) получим

$$S_{OAB} = \sqrt{S_{OBC} \cdot S_{OAD}} = S_{ODC}.$$

Треугольники OAB и ODC имеют по равному углу с вершиной O, поэтому, согласно утверждению задачи 71 в),

$$\frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}, \text{ т. е. } \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = 1.$$

Отсюда следует пропорция $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OC}{OB}$. Из этой пропорции и равенства вертикальных углов AOD и COB вытекает подобие треугольников AOD и COB (по второму признаку), а из их подобия следует, что $\angle OAD = \angle OCB$, т. е. равны накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых AD и BC секущей AC. Следовательно, $AD \parallel BC$, что и требовалось доказать.

Замечание. В первом пункте решения мы доказали утверждение задачи, относящееся к слову «тогда», а во втором пункте — утверждение, относящееся к словам «только тогда».

199.

Дано: окружность описана около четырёхугольника $ABCD$; точка M лежит на окружности; отрезки MH, MP, MK и MQ — перпендикуляры к прямым AB, BC, CD и AD (рис. 101).

Доказать: $MH \cdot MK = MP \cdot MQ$.

Решение. 1) Обозначим радиус окружности буквой R и напишем два выражения для площади треугольника ABM: $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot MH$ и $S_{ABM} = \frac{MA \cdot MB \cdot AB}{4R}$ (задача 71 ж)).

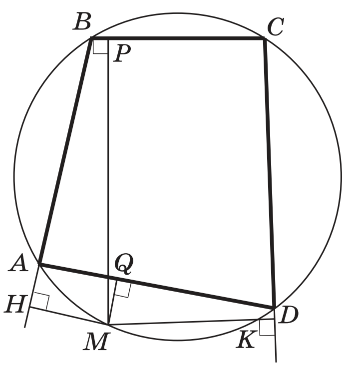


Рис. 101

Приравнивая эти выражения, получаем

$$MH = \frac{MA \cdot MB}{2R}.$$

2) Аналогично получаем равенства

$$MP = \frac{MB \cdot MC}{2R}, \; MK = \frac{MC \cdot MD}{2R},$$

$$MQ = \frac{MA \cdot MD}{2R}.$$

3) Перемножая выражения для MH и MK и также для MP и MQ, приходим к искомому равенству $MH \cdot MK = MP \cdot MQ$.

201.

Дано: прямоугольная трапеция $ABCD$, $AD = a$, $CD = 2a$, точка M — середина стороны CD, $\angle CBM = \alpha$ (рис. 102).

Найти: S_{ABCD}.

Решение. 1) Проведём перпендикуляры DH и MK к прямой BC. Так как $MK \parallel DH$ и $CM = MD$, то отрезок MK является средней линией треугольника CDH. Пусть $DH = h$, $HK = x$, тогда $MK = \frac{h}{2}$, $KC = x$. Кроме того, $BH = AD = a$. Искомая площадь S_{ABCD} выражается формулой

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot DH = (a + x)\, h. \qquad (1)$$

2) Из треугольника CDH по теореме Пифагора получаем $DH^2 = CD^2 - HC^2$, т. е.

$$h^2 = 4\,(a^2 - x^2). \qquad (2)$$

3) В прямоугольном треугольнике BMK $MK = BK \cdot \operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\frac{h}{2} = (a + x)\operatorname{tg}\alpha$, откуда

$$h = 2\,(a + x)\operatorname{tg}\alpha.$$

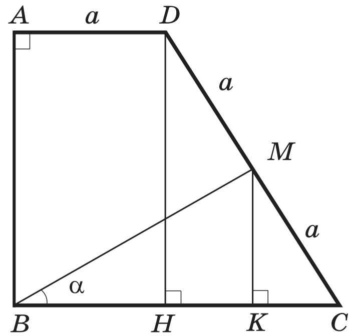


Рис. 102

4) Подставляя это выражение для h в уравнение (2), приходим к уравнению

$$4\,(a + x)^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 4\,(a^2 - x^2),$$

из которого после сокращения обеих частей на $4\,(a + x)$ получается линейное уравнение относительно x:

$$(a + x)\operatorname{tg}^2\alpha = a - x.$$

Из него находим x:

$$x = \frac{a\,(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

5) Следовательно, $a + x = a\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right) = \frac{2a}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, $h = 2\,(a + x)\operatorname{tg}\alpha = \frac{4a\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, и по формуле (1) получаем

$$S_{ABCD} = \frac{8a^2\operatorname{tg}\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2)^2}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha$ записать в виде $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и далее воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, то для S_{ABCD} получится выражение

$$S_{ABCD} = 8a^2 \sin\alpha\cos^3\alpha.$$

Ответ: $8a^2 \sin\alpha\cos^3\alpha$.

206.

Дано: четырёхугольник $ABCD$ с площадью S и сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (рис. 103, a).

Доказать: $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

Решение. Пусть диагональ AC разделяет четырёхугольник $ABCD$ на два треугольника (напомним, что

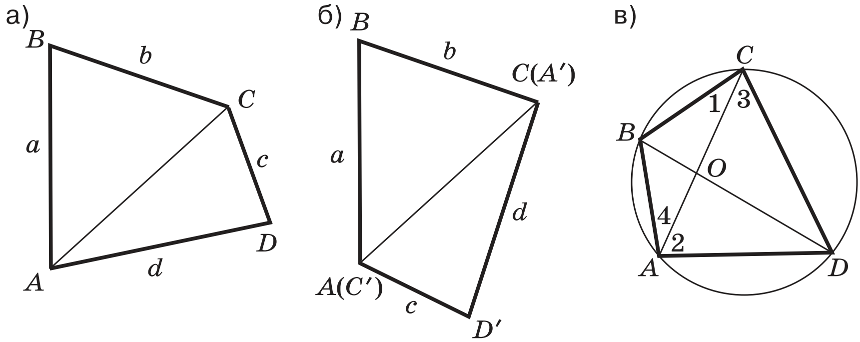


Рис. 103

в выпуклом четырёхугольнике любая диагональ разделяет его на два треугольника, а в невыпуклом — только одна из диагоналей). Разрежем четырёхугольник $ABCD$ по диагонали AC, перевернём треугольник ACD и приложим к треугольнику ABC так, как показано на рисунке 103, *б* (новые положения вершин A, C и D треугольника ACD обозначим A', C' и D').

Ясно, что $S_{ABCD} = S_{ABCD'}$. Проведём отрезок BD' и воспользуемся тем, что $S_{ABCD'} \leqslant S_{BAD'} + S_{BCD'}$ (знак меньше будет здесь в том случае, когда отрезки BD' и AC не пересекутся). Поскольку $S_{BAD'} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle BAD' \leqslant \frac{1}{2}ac$ и также $S_{BCD'} \leqslant \frac{1}{2}bd$, то $S_{ABCD'} \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$. Таким образом, $S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Идею решения этой задачи можно положить в основу доказательства теоремы Птолемея: *произведение диагоналей четырёхугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений его противоположных сторон.* На рисунке 103, *в* изображён вписанный четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Угол AOB равен полусумме дуг AB и CD, т. е. равен сумме $\angle 1 + \angle 2$, а смежный с ним угол BOC равен полусумме дуг AD и BC, т. е. равен сумме $\angle 3 + \angle 4$. Поскольку синусы смежных углов равны, то $\sin(\angle 1 + \angle 2) = \sin(\angle 3 + \angle 4)$.

Площадь S четырёхугольника $ABCD$ выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\, AC \cdot BD \cdot \sin(\angle 1 + \angle 2).$$

Разрежем четырёхугольник $ABCD$ по диагонали AC, перевернём треугольник ACD и приложим его к треугольнику ABC так, чтобы образовался четырёхугольник с углами $\angle 3+\angle 4$, $\angle B$, $\angle 1+\angle 2$ и $\angle D$. Ясно, что площадь образовавшегося четырёхугольника также равна S. Найдём её так. Разрежем новый четырёхугольник по диагонали, отличной от AC, и сложим площади получившихся треугольников:

$$S=\frac{1}{2}\,AB\cdot CD\cdot\sin(\angle 3+\angle 4)+\frac{1}{2}\,AD\cdot BC\cdot\sin(\angle 1+\angle 2)=$$
$$=\frac{1}{2}\,(AB\cdot CD+AD\cdot BC)\sin(\angle 1+\angle 2).$$

Приравнивая два выражения для S, приходим к равенству

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC,$$

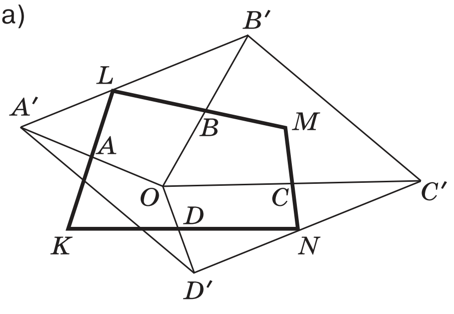
что и требовалось доказать.

208.

Дано: четырёхугольник $KLMN$ с площадью S, точки A, B, C и D — середины его сторон, O — произвольная точка, точки A', B', C' и D' симметричны точке O относительно точек A, B, C и D (рис. 104, *а*).

Найти: $S_{A'B'C'D'}$.

Решение. 1) Пусть угол между прямыми KM и LN равен α (рис. 104, *б*). Тогда $S_{KLMN}=\frac{1}{2}\,KM\cdot LN\cdot\sin\alpha$ (см. п. 108 учебника). Так как $AB\parallel KM$ и $AD\parallel LN$, то $\angle BAD=\alpha$ (см. рис. 104, *б*), а поскольку $AB=\frac{1}{2}KM$, $AD=\frac{1}{2}LN$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то



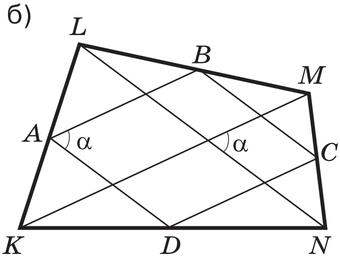


Рис. 104

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{4} KM \cdot LN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} S_{KLMN} = \frac{1}{2} S.$$

2) Рассмотрим центральное подобие с центром O и коэффициентом 2. При этом центральном подобии точка A переходит в точку A', B — в B', C — в C', D — в D', и, следовательно, параллелограмм $ABCD$ переходит в подобный ему параллелограмм $A'B'C'D'$. Поэтому $S_{A'B'C'D'} = 2^2 \cdot S_{ABCD} = 4\frac{1}{2}S = 2S$.

Ответ: $2S$.

211.

Дано: остроугольный $\triangle ABC$, AM и CN — высоты, O — центр описанной окружности (рис. 105), $\angle ABC = \beta$, $S_{NOMB} = S$.

Найти: AC.

Решение. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Поскольку угол O равнобедренного треугольника BOC равен $2\angle A$ (это следует из теоремы о вписанном угле), то расстояние от точки O до прямой BC равно $R\cos A$. Поэтому если сторону $BM = AB\cos B = 2R\sin C\cos B$ треугольника BMO принять за основание, то его высота окажется равной $R\cos A$. Следовательно,

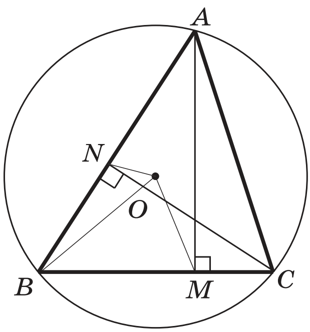


Рис. 105

$$S_{BMO} = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin C\cos B \cdot R\cos A =$$

$$= R^2 \cos B \cos A \sin C.$$

Аналогично получаем

$$S_{BNO} = R^2 \cos B \sin A \cos C.$$

Таким образом,

$$S = S_{NOMB} = S_{BNO} + S_{BMO} =$$

$$= R^2 \cos B(\sin A\cos C + \cos A\sin C) = R^2 \cos B\sin B.$$

Из этого следует, что $R = \sqrt{\dfrac{S}{\cos B\sin B}}$. Учитывая, что $AC = 2R\sin B$ и $\angle B = \beta$, приходим к выводу: $AC = 2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

Ответ: $2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

213.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, окружность с центром O описана около треугольника ABC, две полуокружности с диаметрами AC и BC расположены вне треугольника и вместе с дугой ACB окружности ограничивают две луночки (рис. 106, на этом рисунке луночки закрашены).

Доказать: $S_1 + S_2 = S_{ABC}$, где S_1 и S_2 — площади луночек.

Решение. 1) Обозначим площади секторов с дугами AC и BC через S_3 и S_4. Тогда площади сегментов с этими дугами равны $S_3 - S_{AOC}$ и $S_4 - S_{BOC}$.

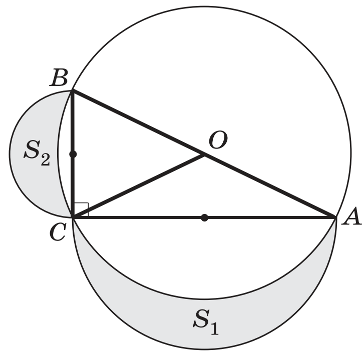


Рис. 106

2) Пусть $AC = a$, $BC = b$. Тогда площади полукругов с диаметрами AC и BC равны $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (S_3 - S_{AOC}), \\ S_2 &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (S_4 - S_{BOC}), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{8}\pi\,(a^2 + b^2) - (S_3 + S_4) + (S_{AOC} + S_{BOC}).$$

3) Так как $a^2 + b^2 = AB^2$ (по теореме Пифагора), $S_3 + S_4 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot AB^2$ (площадь полукруга с радиусом $\frac{AB}{2}$) и $S_{AOC} + S_{BOC} = S_{ABC}$, то из равенств (1) получаем

$$S_1 + S_2 = S_{ABC},$$

что и требовалось доказать.

217.

Дано: угол BAC и точка M внутри угла (рис. 107, *а*).

Построить: прямую, проходящую через точку M так, чтобы эта прямая отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

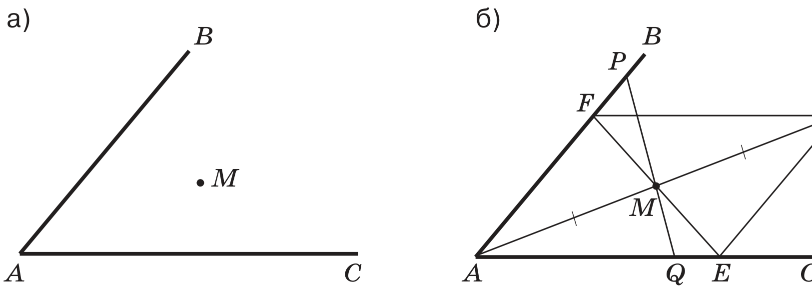


Рис. 107

Решение. 1) Проведём луч AM и отметим на нём точку D так, что $MD = AM$ (рис. 107, *б*).

2) Через точку D проведём прямые DE и DF, параллельные лучам AB и AC (см. рис. 107, *б*).

3) Прямая EF искомая. В самом деле, поскольку диагонали параллелограмма $AFDE$ точкой пересечения делятся пополам, то точка M является серединой стороны EF треугольника AEF. Отсюда следует (согласно утверждению задачи 187), что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей стороны угла BAC в точках P и Q (см. рис. 107, *б*), площадь треугольника APQ больше площади треугольника AEF, и, следовательно, прямая EF отсекает от угла BAC треугольник наименьшей площади.

221.

Дано: тетраэдр $ABCD$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$ (рис. 108, *а*).

Доказать:

$$S^2_{ABC} = S^2_{ADB} + S^2_{ADC} + S^2_{BDC}. \qquad (1)$$

Решение. 1-й способ. Пусть $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ (см. рис. 108, *а*).

1) Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то

$$S^2_{ADB} + S^2_{ADC} + S^2_{BDC} = \frac{1}{4}\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (2)$$

2) С помощью теоремы Пифагора находим:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},\ BC = \sqrt{b^2 + c^2},\ AC = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

По трём сторонам треугольника ABC можно найти его площадь (например, по формуле Герона). В результате вычислений (проделайте их самостоятельно) получим

$$S^2_{ABC} = \frac{1}{4}\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (3)$$

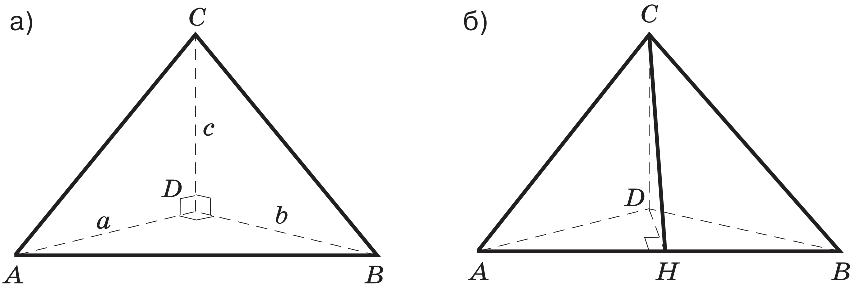


Рис. 108

Сравнивая выражения (2) и (3), приходим к равенству (1).

2-й способ. В треугольнике ADB проведём высоту DH (рис. 108, *б*). Так как $DH \cdot AB = AD \cdot BD$ (каждое из этих произведений равно удвоенной площади треугольника ADB), то $DH = \dfrac{AD \cdot BD}{AB} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

В курсе стереометрии будет доказано, что $CD \perp DH$, откуда следует, что $CH^2 = CD^2 + DH^2 = c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2+b^2}$. Тогда же будет доказано, что $CH \perp AB$, и поэтому $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CH$,

$$S^2_{ABC} = \frac{1}{4} AB^2 \cdot CH^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2} =$$
$$= \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Таким образом, мы снова получили равенство (3), и, следовательно, справедливо равенство (1).

222.

Дано: в тетраэдре $ABCD$ (рис. 109, *а*) сумма углов с вершиной A равна $180°$ (т. е. $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = 180°$), и также суммы углов с вершинами B и C равны $180°$.

Доказать: грани этого тетраэдра равны друг другу, т. е. $\triangle ABC = \triangle ABD = \triangle BCD = \triangle CAD$.

Решение. 1) Разрежем тетраэдр $ABCD$ по рёбрам AD, BD, CD и повернём треугольники ABD, BCD и CAD вокруг рёбер AB, BC и CA так, чтобы эти треугольники оказались лежащими в плоскости треугольника ABC. Новые положения точки D обозначим через D_1, D_2 и D_3

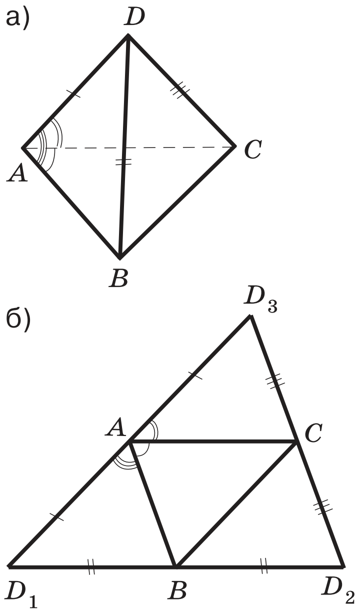


Рис. 109

(рис. 109, *б*). Изображённая на рисунке 109, *б* фигура, составленная из четырёх треугольников, равных соответственно граням тетраэдра $ABCD$, называется развёрткой этого тетраэдра.

2) Поскольку $\angle BAC + \angle CAD_3 + \angle D_1AB = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = 180^\circ$ (см. рис. 109, *б*), то точки D_1, A и D_3 лежат на одной прямой.

3) Аналогично доказывается, что точки D_1, B, D_2 и также точки D_2, C, D_3 лежат на одной прямой. Следовательно, точки A, B и C являются серединами сторон треугольника $D_1D_2D_3$ (см. рис. 109, *б*). Поэтому $\triangle ABC = \triangle ABD_1 = \triangle BCD_2 = \triangle CAD_3$, т. е. выполняются равенства

$$\triangle ABC = \triangle ABD = \triangle BCD = \triangle CAD,$$

что и требовалось доказать.

229.

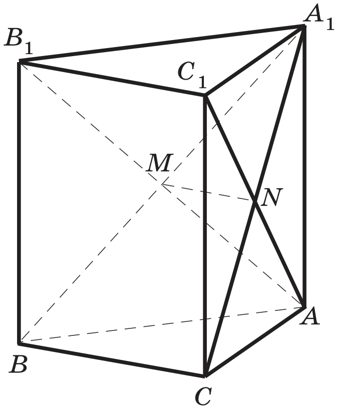


Рис. 110

Дано: треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, плоскости AB_1C_1 и A_1BC разделяют её на четыре части (рис. 110).

Найти: отношение объёмов этих частей.

Решение. Обозначим буквами M и N точки пересечения диагоналей граней ABB_1A_1 и ACC_1A_1 (см. рис. 110). Плоскости AB_1C_1 и A_1BC пересекаются по прямой MN и разделяют призму на четыре части: тетраэдр A_1AMN, четырёхугольная пирамида $A_1B_1MNC_1$, четырёхугольная пирамида $ABMNC$ и многогранник с вершинами B, C, B_1, C_1, M и N (у этого многогранника пять граней). Обозначим объёмы этих частей (в порядке перечисления) через V_1, V_2, V_3 и V_4, а объём всей призмы — буквой V.

Объединение частей с объёмами V_1 и V_2 представляет собой тетраэдр $AA_1B_1C_1$. Высота h этого тетраэдра, проведённая из вершины A, равна высоте призмы, поэтому

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1} \cdot h = \frac{1}{3}V.$$

Аналогично получается равенство

$$V_1 + V_3 = \frac{1}{3}V.$$

Из этих равенств следует, что $V_2 = V_3$.

Сравним теперь объёмы V_1 и V_2. Тетраэдр A_1AMN и четырёхугольная пирамида $A_1B_1MNC_1$ имеют общую высоту, проведённую из вершины A_1, а площадь треугольника AMN в три раза меньше площади четырёхугольника B_1MNC_1 (это следует из того, что отрезок MN — средняя линия треугольника AB_1C_1, поскольку диагональ AB_1 параллелограмма AA_1B_1B точкой пересечения с диагональю A_1B делится пополам, и также точка N делит отрезок AC_1 пополам). Поэтому $V_1 = \frac{1}{3}V_2$ или $V_2 = 3V_1$, и равенство $V_1 + V_2 = \frac{1}{3}V$ можно теперь записать в виде $4V_1 = \frac{1}{3}V$, откуда получаем $V_1 = \frac{1}{12}V$. Следовательно, $V_2 = V_3 = 3V_1 = \frac{3}{12}V$, $V_4 = V - (V_1 + V_2 + V_3) = \frac{5}{12}V$.

Таким образом, $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1 : 3 : 3 : 5$.

Ответ: 1 : 3 : 3 : 5.

230.

Дано: конус с вершиной O и высотой OH (рис. 111); наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через точку O, в два раза больше площади сечения, содержащего высоту OH.

Найти: угол между осью конуса и образующей, т. е. угол AOH на рисунке 111.

Решение. На рисунке 111 изображены два сечения конуса плоскостями, проходящими через

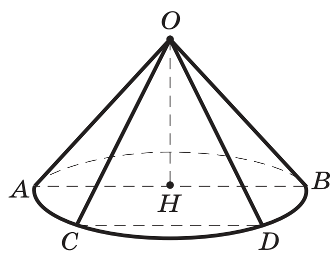


Рис. 111

вершину O: треугольник AOB, содержащий высоту OH конуса, и треугольник COD, не содержащий высоту OH. Пусть образующая конуса равна l. Тогда

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}l^2 \sin\angle AOB, \quad S_{COD} = \frac{1}{2}l^2 \sin\angle COD. \qquad (1)$$

С помощью теоремы косинусов из треугольников AOB и COD находим:

$$\cos\angle AOB = \frac{2l^2 - AB^2}{2l^2}, \quad \cos\angle COD = \frac{2l^2 - CD^2}{2l^2}.$$

Так как $CD < AB$ (хорда CD меньше диаметра AB), то $\cos\angle AOB < \cos\angle COD$, откуда следует неравенство

$$\angle COD < \angle AOB. \qquad (2)$$

Если угол AOB острый или прямой, то угол COD острый, и тогда из неравенства (2) следует, что $\sin\angle COD < \sin\angle AOB$. Поэтому, в силу равенств (1), $S_{AOB} > S_{COD}$, т. е. наибольшую площадь имеет сечение конуса, содержащее высоту OH, что противоречит условию задачи.

Следовательно, угол AOB тупой, а наибольшую площадь имеет то сечение (треугольник COD), у которого $\angle COD = 90^\circ$. Для этого сечения

$$S_{COD} = \frac{1}{2}l^2 \sin 90^\circ = \frac{1}{2}l^2.$$

По условию $\frac{1}{2}l^2 = 2S_{AOB} = l^2 \sin\angle AOB$, поэтому $\sin\angle AOB = \frac{1}{2}$, и поскольку угол AOB тупой, то $\angle AOB = 150^\circ$, а $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB$ (см. рис. 111), т. е. $\angle AOH = 75^\circ$.

Ответ: 75°.

Задачи с практическим содержанием

Глава 7

2.

Дано: $\vec{v}_1$ — вектор скорости пловца (по отношению к стоячей воде), $\vec{v}_2$ — вектор скорости течения реки, $\vec{v}$ — вектор скорости результирующего движения пловца (с учётом сноса по течению), $|\vec{v}_1| = 1$ м/с, $|\vec{v}_2| = \frac{1}{2}|\vec{v}_1|$, $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (рис. 112).

Найти: угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Вопрос: окажется ли пловец на другом берегу через 2 мин после старта, если ширина реки равна 90 м?

Решение. В прямоугольном треугольнике PQR катет QR равен половине гипотенузы PQ, поэтому $\angle QPR = 30°$, а искомый угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равен 120°.

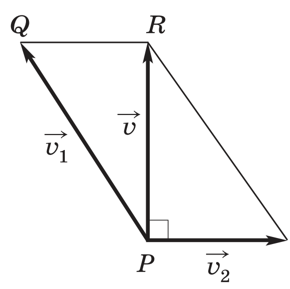


Рис. 112

Кроме того, $|\vec{v}| = PR = PQ \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ м/с. Если ширина реки равна 90 м, то пловец переплывёт её за время $90 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 60 \cdot \sqrt{3}$ с, что меньше двух минут. Следовательно, через 2 мин пловец будет на другом берегу.

6.

Вопрос: чего в году больше и на сколько: звёздных суток или солнечных?

Решение. На рисунке 113 A — ближайшая к Солнцу точка Земли в положении 1, A_2 и A_3 — положения точки A соответственно через звёздные и солнечные сутки после положения 1. Пусть $\angle O_2OO_1 = \alpha$ и $\angle O_3OO_2 = \beta$.

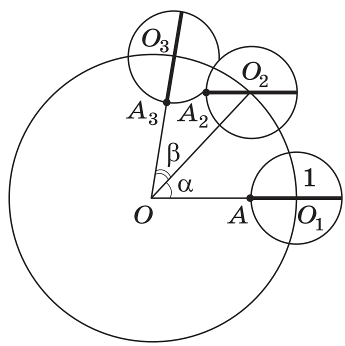


Рис. 113

Обозначим число звёздных и солнечных суток в году буквами Z и S. Тогда $Z = \frac{360°}{\alpha}$, $S = \frac{360°}{\alpha + \beta}$ (см. рис. 113), поэтому

$$Z - S = \frac{360°}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

При перемещении центра Земли из точки O_1 в точку O_2 Земля делает один оборот вокруг своей оси, т. е. поворачивается на 360°, и при этом отрезок OO_1 поворачивается на угол α, а при перемещении центра Земли из точки O_2

в точку O_3 Земля поворачивается на угол, равный $\angle O_3OO_1 = \alpha + \beta$, и при этом отрезок OO_2 поворачивается на угол β. Следовательно,

$$\frac{360^\circ}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Используя это равенство, из (1) получаем: $Z - S = 1$, т. е. число звёздных суток в году на 1 больше числа солнечных суток.

Глава 8

3.

Вопрос: верно ли, что площадь штрафной площадки футбольного поля превосходит площадь вратарской площадки (рис. 121 учебника): а) более чем в 6 раз; б) более чем в 7 раз? Нужно ответить на вопрос, не вычисляя точные значения площадей.

Решение. Разделим штрафную площадку на 7 прямоугольников, как показано на рисунке 114. Три из них, с площадью s каждый, равны вратарской площадке. У четырёх других прямоугольников одна из сторон равна 5,5 м, а другая — 16,5 м, поэтому отношение суммы их площадей к площади s равно $\frac{16{,}5\cdot 4}{5{,}5+7{,}32+5{,}5} = \frac{66}{18{,}32}$. Это число больше трёх, но меньше четырёх, поэтому сумма площадей этих четырёх прямоугольников больше $3s$, но меньше $4s$. Следовательно, площадь S штрафной площадки удовлетворяет неравенствам $6s < S < 7s$, откуда $6 < \frac{S}{s} < 7$. Таким образом, площадь штрафной площадки превосходит площадь вратарской площадки более чем в 6 раз, но менее чем в 7 раз.

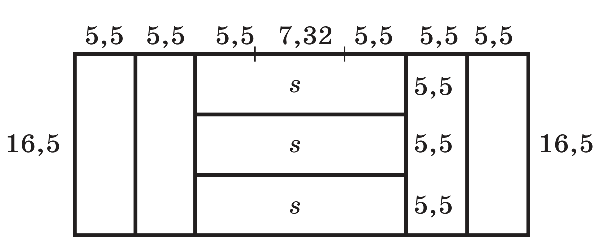


Рис. 114

5.

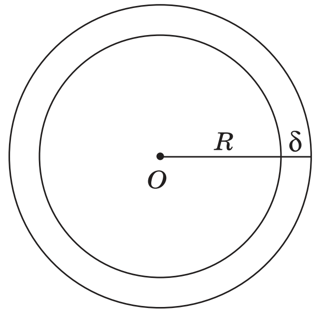


Рис. 115

Вопрос: если обтянуть земной шар по экватору верёвкой, а затем увеличить её длину на 1 м, то сможет ли между верёвкой и землёй проскочить мышь?

Решение. На рисунке 115 окружность радиуса R с центром O изображает экватор, а окружность радиуса $R+\delta$ — верёвку, длина которой на 1 м больше экватора. Следовательно, справедливо равенство

$$2\pi\,(R+\delta)-2\pi R=1 \text{ м},$$

откуда находим $\delta = \dfrac{1}{2\pi}$ м ≈ 16 см. Очевидно, в такой зазор между верёвкой и землёй мышь проскочит.

Глава 9

1.

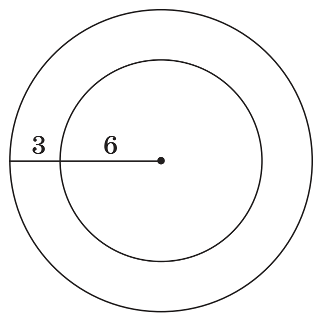


Рис. 116

Дано: полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого равна 3 см, плавает в воде, причём из воды выступает половина шара.

Найти: плотность материала, из которого изготовлен шар (плотность воды равна 1 г/см^3).

Решение. На рисунке 116 изображён данный полый шар. Объём V стенок шара равен разности объёмов двух шаров с радиусами 9 см и 6 см, т. е.

$$V=\frac{4}{3}\pi(9^3-6^3)=540\pi \text{ см}^3,$$

а масса m шара выражается формулой

$$m=\rho V=540\pi\rho \text{ г},$$

где ρ г/см^3 — искомая плотность материала, из которого изготовлен шар.

По закону Архимеда на шар действует выталкивающая сила, равная весу воды, вытесненной шаром, т. е. весу воды, объём которой, согласно условию, равен объёму половины шара радиуса 9 см. Масса m_1 вытесненной воды равна $\dfrac{2}{3}\pi 9^3\cdot 1=486\pi$ г.

Выталкивающая сила уравновешивает вес шара. Это означает, что $m = m_1$, т. е. $540\pi\rho = 486\pi$, откуда находим $\rho = \dfrac{486}{540} = 0{,}9$ г/см^3.

5.

Сделать: рисунок пробки, которой можно заткнуть отверстия трёх видов: треугольное, квадратное и круглое.

Решение. Возьмём пробку в форме цилиндра, у которого диаметр AB основания равен высоте BC цилиндра (рис. 117, *а*). Этой пробкой можно закрыть квадратное отверстие, равное квадрату $ABCD$, и круглое отверстие с диаметром, равным AB.

Проведём теперь диаметр MN верхнего основания цилиндра, перпендикулярный к AB (рис. 117, *б*), и проведём две секущие плоскости: через диаметр MN и точку C, а также через диаметр MN и точку D. Отбросим те части цилиндра, которые расположены выше этих плоскостей. Получится пробка, изображённая на рисунке 117, *в*. Ею можно по-прежнему закрыть квадратные отверстия, равные квадрату $MNPQ$ (это такой же квадрат, как квадрат $ABCD$ на рисунке 117, *а*), и круглое отверстие с диаметром PQ, равным AB, а кроме того, можно закрыть треугольное отверстие, равное треугольнику CKD, где точка K — середина MN (см. рис. 117, *в*).

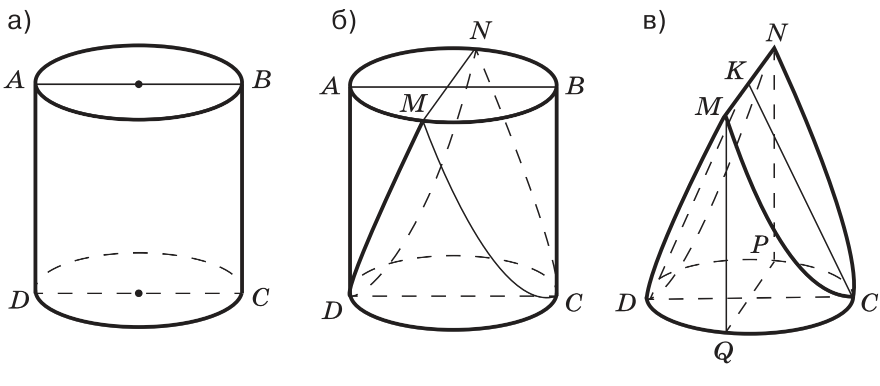


Рис. 117

Содержание