Математический анализ

Курс Широкова Н.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Норма линейного отображения

1.1. Определение и свойства нормы

Определение 1.1 (Линейный оператор). $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, если $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$A(px_1 + qx_2) = pA(x_1) + qA(x_2)$$

$$A \leftrightarrow \tilde{A}_{n\times m} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad A(X) = \tilde{A}_{n\times m}X \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Замечание. Н.А. размерность матриц обозначал $m \times n$, подразуемвая n строк и m столбцов. Кажется, было так только 1 раз и именно на этом моменте.

Определение 1.2 (Норма линейного отображения).

$$||A|| \overset{def}{=} \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} ||AX||_{\mathbb{R}^n} \tag{1}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nm}x_m \end{bmatrix}$$

$$||AX||^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}x_1 + ... a_{km}x_n)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}^2 + ... + a_{km}^2)\underbrace{(x_1^2 + ... x_m^2)}_{=||X||^2_{\mathbb{R}^n}} \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k1}^2 + ... + a_{km}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl}^2 = ||A||_2^2 \qquad (2)$$

$$(2) \implies ||A|| \leqslant ||A||_2 \geqslant 0$$

Свойства нормы линейного отображения

Теорема 1.1. $||A|| \geqslant 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{0}$

Доказательство. Пусть $||A|| = 0$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$

$1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$ не зависят друг от друга.

$e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i}, ... 0)$ $f_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$||A|| = 0 \implies Af_j = \mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}$. $Af_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ Теперь рассмотрим $e_i \underbrace{(Af_j)}_{\mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}} =$

$(0 ... 1 ...) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{ij} = 0$ ∎

$A, c \in \mathbb{R}, (cA(X)) \overset{def}{=} c(A(X))$

Теорема 1.2. $||cA|| = |c| \cdot ||A||$

Доказательство.

$$||cA|| = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} ||cA(X)||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} ||c(AX)||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} |c| \cdot ||AX||_{\mathbb{R}^n}$$

■

$A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Теорема 1.3. $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$

Доказательство.

$$||A + B|| = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} ||(A + B)X||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\dots} ||AX + BX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\sup(\underbrace{||AX||}_{\leqslant ||A||_2} + \underbrace{||BX||}_{\leqslant ||B||_2})}_{M} \leqslant \sup_{\dots} ||AX||_{\mathbb{R}^n} + \sup_{\dots} ||BX||_{\mathbb{R}^n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}^m, ||x_1||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1 \text{ и } ||Ax_1|| + ||Bx_1|| > M - \varepsilon \tag{3}$$

(3) $\implies M - \varepsilon < ||A|| + ||B|| \Rightarrow \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} (||AX||_{\mathbb{R}^n} + ||BX||_{\mathbb{R}^n}) \leqslant$ $||A|| + ||B||$ ■

Теорема 1.4. $||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||A|| \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m}$

Доказательство.

$$X \neq \mathbb{0}_m \Leftrightarrow ||X||_{\mathbb{R}^m} \overset{def}{=} t > 0$$
$$X_0 = \frac{1}{t} X$$
$$||X_0||_{\mathbb{R}^m} = ||\frac{1}{t} X||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} ||X||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} \cdot t = 1 \implies$$
$$||AX_0||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||A|| \tag{5}$$

(5) $\implies ||AX_0||_{\mathbb{R}^n} = ||A\left(\frac{1}{t}X\right)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||A|| \implies 4.$ ■

Теорема 1.5.

$$c > 0, \forall X \in \mathbb{R}^m$$

$$||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c||X||_{\mathbb{R}^m} \forall X \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

$$\implies ||A|| \leqslant c \tag{6'}$$

Доказательство.

$$(6) \implies \text{при } ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1 \text{ имеем}$$

$$||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \leqslant c \implies \sup_{||X|| \leqslant 1} ||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c \implies (6')$$

■

Теорема 1.6.

$$E = \{c \in \mathbb{R}, > 0 : \forall X \in \mathbb{R}^m \text{ имеем } ||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c||X||_{\mathbb{R}^m}\} \tag{7}$$

$$\inf E \overset{def}{=} m \geqslant 0$$

$$\text{В случае } A \neq 0$$

$$||A|| \in E, ||A||_2 \in E \implies E \neq \varnothing, \text{ тогда}$$

$$||A|| = \inf E \tag{8}$$

Доказательство. $m = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_1 \in E : c_1 < \varepsilon$$

$$(7) \implies ||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c_1 ||X||_{\mathbb{R}^m} \forall X \in \mathbb{R}^m \implies ||A|| \leqslant c_1 < \varepsilon$$

$$\implies ||A|| = 0$$

$m > 0$

$$||A|| \in E, m \leqslant ||A||$$

$$\text{пусть } m < ||A|| \implies \exists c_2 : m < c_2 < ||A||$$

$$(7) \implies ||AX||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c_2 ||X||_{\mathbb{R}^m} \forall X \in \mathbb{R}^m \tag{9}$$

$$(9) \implies ||A|| \leqslant c_2 \text{ противоречие}$$

■

Теорема 1.7.

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$
$$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

$$LX = B(A(X))$$

Каждая норма соответствует своей паре пространств!

$$||L|| \leqslant ||A|| \cdot ||B|| \tag{10}$$

Доказательство.

$$\forall X \in \mathbb{R}^m \ ||LX||_{\mathbb{R}^k} = ||B(AX)||_{\mathbb{R}^k} \leqslant ||B|| \cdot ||AX||_{\mathbb{R}^n}$$
$$\leqslant \underbrace{||B|| \cdot ||A||}_{c} \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \tag{11}$$

по свойству 5 (11) $\implies$ (10) ■

1.2. Дифференцируемость суперпозиции линейных отображений

Определение 1.3 (Дифференцируемость)**.** Отображение дифференцируемо в x_0, если $\exists A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \quad \forall H \in \mathbb{R}^m : x_0 + H \in \Omega$

$$F(x_0 + H) - F(x_0) = AH + r(H) \quad r(H) \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

$$\frac{||r(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||H||_{\mathbb{R}^m}} \underset{H \to \mathbb{0}_m}{\longrightarrow} 0 \tag{13}$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m, m \geqslant 1$$
$$X_0 \in \Omega - \text{ внутрення точка}$$
$$G \subset \mathbb{R}^n, Y_0 \in G, Y_0 - \text{ внутренняя точка в } G$$
$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \forall X \in \Omega \; F(X) \subset G, F(X_0) = Y_0$$
$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_k(y) \end{bmatrix} : G \to \mathbb{R}^k$$

$A = DF(X_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X_0) & ... & f'_{1x_m}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{nx_1}(X_0) & ... & f'_{nx_m}(X_0) \end{bmatrix}$ – матрица Якоби отображения F в X_0

$$\exists P : \Omega \to \mathbb{R}^k, P(X) \overset{def}{=} \Phi(F(X)) \tag{15}$$

Теорема 1.8. F дифференцируема в X_0, Φ дифференцируема в $Y_0 \implies P$ дифференцируемо в X_0 и

$$DP(X_0) = D\Phi(Y_0) \cdot DF(X_0) \tag{16}$$

Доказательство.

$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) = B\lambda + \rho(\lambda) \tag{17}$$

$$B = D\Phi(Y_0), \rho(\lambda) \in \mathbb{R}^k \text{ и } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow[\lambda \to \mathbb{0}_n]{} 0 \tag{18}$$

$$\lambda = \mathbb{0}_n, \Phi(Y_0) - \Phi(Y_0) = \mathbb{0}_k + \rho(\mathbb{0}_n) \implies \rho(\mathbb{0}_n) = \mathbb{0}_k$$
$$\forall \eta > 0 \exists \delta_1 > 0 :$$

$$(18) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq \mathbb{0}_n \text{ и } ||\lambda||_{\mathbb{R}_n} < \delta_1 \text{ будет } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}_k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} < \eta \tag{19}$$

и

$$(19) \implies ||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k} \leqslant \eta \cdot ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \qquad (19')$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_2 > 0 : \forall H \in \mathbb{R}^m, ||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_2 \text{ имеем}$$

$$||r(H)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (21)$$

$$H \in \mathbb{R}^m, x_0 + H \in \Omega \text{ возможно т.к. внутрення точка}$$

$$F(X_0) = Y_0$$

$$\text{определим } F(x_0 + H) - F(x_0) = \lambda \qquad (22)$$

$$F(x_0 + H) - Y_0 = \lambda \qquad (22')$$

$$P(x_0 + H) - P(x_0) = \Phi(F(x_0 + H)) - \Phi(F(x_0)) \overset{(22')}{=}$$
$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) \overset{(17)}{=} B\lambda + \rho(\lambda) \overset{(12),(22)}{=}$$
$$B(AH + r(H)) + \rho(AH + r(H)) =$$

$$= \overbrace{(BA)}^{P(x_0+H)-P(x_0)} H + \overbrace{Br(H) + \rho(AH + r(H))}^{r_1(H)} \qquad (23')$$

$$||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_2 \to ||r(H)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (23)$$

$$\eta = \varepsilon \quad \exists\delta_1 : \text{ выполнено (20) при } ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$$
$$||\lambda||_{\mathbb{R}^n} = ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}$$
$$\overset{(22)}{\leqslant} ||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} = (||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_1$$

то есть

$$|H||_{\mathbb{R}^m} < \frac{\delta_1}{||A|| + \varepsilon} \qquad (24)$$

$$\delta_0 = \min(\delta_2, \frac{\delta_1}{||A|| + \varepsilon}) \qquad (25)$$

и полагаем $||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_0$

$$\begin{gathered}
\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_0 (26) \implies ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k} \leqslant ||Br(H)||_{\mathbb{R}^k} + \\
+ ||\rho(AH + r(H))||_{\mathbb{R}^k} \leqslant ||B|| \cdot ||r(H)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n} \\
\overset{(20),(23)}{\leqslant} ||B|| \cdot \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}) \leqslant \\
\leqslant ||B|| \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m}) = \\
= \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (27) \\
P(X_0 + H) - P(X_0) = (BA)H + r_1(H) \qquad (27') \\
\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_0 \text{ имеем } ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k} \leqslant \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (27'') \\
(27'') \implies \frac{||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k}}{||H||_{\mathbb{R}^m}} \underset{H \to \mathbb{0}_m}{\longrightarrow} 0 \qquad (28) \\
(23'), (27'), (28) \implies (16)
\end{gathered}$$

■

Конкретные выражения элементов матрицы P

$$P(X) = \begin{bmatrix} P_1(X) \\ \vdots \\ P_K(X) \end{bmatrix} \quad DP(X_0) = \begin{bmatrix} P'_{1x_1}(X_0) & \vdots & P'_{1x_m}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P'_{kx_1}(X_0) & \ldots & P'_{kx_m}(X_0) \end{bmatrix}$$

$$1 \leqslant l \leqslant k \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

$$P'_{lx_j}(X_0) = \varphi'_{ly_1}(Y_0) \cdot f'_{1x_j}(X_0) + \varphi'_{ly_2}(Y_0) \cdot f'_{2x_j}(X_0) + \ldots + \varphi'_{ly_n}(Y_0) \cdot f_{nx_j}(X_0)$$

Глава 2

Частные производные

2.1. Частные производные второго порядка

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2$$
$$x_0 \in E \quad x_0 - \text{ внутренняя точка}$$
$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant n \quad x_0 \in W \subset E$$
$$\forall x \in W \quad \exists f'_{x_i}(x)$$
$$g(x) = f'_{x_i}(x) \quad g : W \to \mathbb{R} \quad \exists g'_{x_j}(x_0)$$
$$f''_{x_i x_j}(x_0) \overset{def}{=} g'_{x_j}(x_0)$$
$$i \neq j \quad \forall x \in W \quad \exists f'_{x_j}(x)$$
$$h : W \to \mathbb{R} \quad h(x) \overset{def}{=} f'_{x_j}(x)$$
$$\exists h'_{x_i}(x_0)$$
$$f''_{x_j x_i}(x_0) \overset{def}{=} h'_{x_i}(x_0)$$

Пример 2.1.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{если } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{если } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

$$|f(...)| \leqslant \frac{|x_1|^3 |x_2|}{x_1^2} = |x_1||x_2| \underset{(x_1,x_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$f'_{x_1}(...) = \frac{3x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - 2\frac{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{3x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^4 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$f'_{x_1}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \left(\left(\frac{x_1^3 \cdot 0}{x_1^2 + 0} - 0 \right) \frac{1}{x_1} \right) = 0$$

$$\left| \frac{3x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| = 3|x_2| \underset{(x_1,x_2)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$x_2 \neq 0$$

$$f'_{x_1}(0, x_2) = 0$$

$$f''_{x_1 x_2}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f'_{x_1}(0, x_2) - f'_{x_1}(0,0)}{x_2} = 0$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)'_{x_2} = \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} - 2\frac{x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$f'_{x_2}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \left(\left(\frac{0 \cdot x_2}{0 + x_2^2} - 0 \right) \frac{1}{x_2} \right) = 0$$

$$\left| \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leqslant |x_1| \underset{(x_1,x_2)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$-2\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$f''_{x_2 x_1}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f'_{x_2}(x_1, 0) - f'_{x_2}(0,0)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1}{x_1} = 1$$

$$f'_{x_2}(x_1, 0) = x_1$$

2.2. Теорема о смешанных производных

$$E \subset \mathbb{R}^2 - \text{ открытое множество} \quad f : E \to \mathbb{R} \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in E$$
$$f \in C(E) \forall x \in E \quad \exists f'_{x_1}(x) \quad f'_{x_2}(x)$$
$$f'_{x_1}, f'_{x_2} \in C(E)$$
$$\forall x \in E \quad \exists f''_{x_1 x_2}(x) \quad \exists f''_{x_2 x_1}(x)$$
$$f''_{x_1 x_2} \text{ и } f''_{x_2 x_1} \text{ непрерывны в } x_0$$
$$\implies f''_{x_1 x_2}(x_0) = f''_{x_2 x_1}(x_0)$$

Доказательство.

$$\exists r > 0 \quad B_{2r}(x_0) = \{(x_1, x_2) : (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < 4r^2\}$$
$$B_{2r}(x_0) \subset E \text{ и}$$
$$|x_1 - x_1^0| \leqslant r \text{ и } |x_2 - x_2^0| \leqslant r \implies$$
$$\implies (x_1, x_2) \in B_{2r}(x_0)$$
$$0 < h \leqslant r$$
$$g(h) = \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} \quad (1)$$
$$\varphi(x_2) = \frac{f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{h} \quad (2)$$
$$x_2 \in [x_2^0 - r, x_2^0 + r] \quad (1),(2) \implies g(h) = \frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} \quad (3)$$
$$(2) \implies \forall x_2 \in [x_2^0 - r, x_2^0 + r] \quad \exists \varphi'(x_2) = \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)}{h} \quad (4)$$
$$\text{по теореме Лагранжа } \exists h_2 \quad 0 < h_2 < h :$$
$$\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0) = \varphi'(x_2^0 + h_2) \cdot h \quad (5)$$

$$(3),(5) \implies g(h) = \varphi'(x_2^0 + h_2) \tag{6}$$

$$(4),(6) \implies g(h) = \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} \tag{7}$$

$$\forall x_1 \in [x_1^0 - r, x_1^0 + r] \quad \exists (f'_{x_2}(x_1, x_2^0 + h_2))'_{x_1} = f''_{x_2x_1}(x_1, x_2^0 + h_2) \tag{8}$$

$$\exists 0 < h_1 < h : f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2) =$$
$$= f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \cdot h \tag{9}$$

$$(7),(9) \implies g(h) = f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \tag{10}$$

$$\psi(x_1) = \frac{f(x_1, x_2^0 + h) - f(x_1, x_2^0)}{h} \tag{11}$$

$$x_1 \in [x_1^0 - r, x_1^0 + r]$$
$$g(h) = \frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} \tag{12}$$

$$(11) \implies \forall x_1 \in [x_1^0 - r, x_1^0 + r] \exists \psi'(x_1) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0)}{h} \tag{13}$$

$$\exists \overline{h_1} \quad 0 < \overline{h_1} < h$$
$$(13) \implies \psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0) = \psi'(x_1^0 + \overline{h}_1)h \tag{14}$$

$$(12),(14) \implies g(h) = \psi'(x_1^0 + \overline{h_1}) =$$
$$= \frac{f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0)}{h} \tag{15}$$
$$f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h}, x_2)$$

$$(15) \implies \exists \overline{h_2}, 0 < \overline{h_2} < h : \frac{f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0)}{h} =$$
$$= f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \tag{16}$$

$$(15),(16) \implies g(h) = f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \tag{17}$$

$$f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \underset{h \to 0}{\to} f''_{x_2x_1}(x_1^0, x_2^0) \tag{18}$$

$$f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \underset{h \to 0}{\to} f''_{x_1x_2}(x_1^0 x_2^0) \tag{19}$$

$$(10),(17),(18),(19) \implies f''_{x_1x_2}(x_0) = f''_{x_2x_1}(x_0)$$

■

Теорема 2.1.

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 3 \quad x_0 = (x_1^0 \dots x_i^0 \dots x_j^0 \dots x_n^0) \in E$$
$$f : E \to \mathbb{R} \quad f \in C(E) \quad \forall X \in E \quad \exists f'_{x_i}(X), f' x_j(X)$$
$$f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in C(E) \quad \exists f''_{x_i x_j}(X) f''_{x_j x_i}(X)$$
$$f''_{x_i x_j}(X) \text{ и } f''_{x_j x_i}(X) \text{ непрерывны в } X_0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0)$$

Доказательство.

$$B_r(X_0) \subset E \quad F(x_i, x_j) = f(x_1^0 \dots x_i \dots x_j \dots x_n^0)$$
$$K_r(x_i^0, x_j^0) = \{(x_i - x_i^0)^2 + (x_j - x_j^0)^2 < r^2\}$$
$$\forall (x_i, x_j) \in K_r(x_i^0, x_j^0) \quad X = (x_1^0 \dots x_i \dots x_j \dots x_n^0)$$
$$F''_{x_i x_j}(x_i, x_j) = f''_{x_i x_j}(X)$$
$$F''_{x_j x_i}(x_i, x_j) = f''_{x_j x_i}(X)$$
$$F''_{x_i x_j}(x_i^0, x_j^0) = F''_{x_j x_i}(x_i^0, x_j^0)$$

$$\left.\begin{array}{c} E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad i \neq j \\ f : E \to \mathbb{R} \\ f, f'_{x_i}, f'_{x_j}, f''_{x_j x_j}, f''_{x_j x_i} \in C(E) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in E \quad f''_{x_i x_j}(X) = f''_{x_j x_i}(X)$$

■

2.3. Частные производные третьего и более порядков

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad x_0 \in E \quad f : E \to \mathbb{R}$$
$$1 \leqslant i, j, k \leqslant n \quad \forall x \in E \quad \exists f''_{x_i x_j}(X)$$
$$\exists (f''_{x_i x_j})'{}_{x_k}(X_0) \overset{def}{=} f'''_{x_i x_j x_k}(X_0)$$
$$1 \leqslant i_1 \dots i_m \leqslant n \quad f^{(m)}_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}(X) \forall X \in E$$
$$1 \leqslant i_{m+1} \leqslant n$$
$$\exists (f^{(m)}_{x_{i_1} \dots x_{i_m}})'_{x_{i_{m+1}}}(X_0) \overset{def}{=} f^{(m+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{m+1}}}(X_0)$$
$$C^r(E) \quad r \geqslant 1 \quad e \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2$$

$f \in$ классу $C^1(E)$, если $f \in C(E) \forall x \in E$ и $\forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \exists f'_{x_i}(X)$ т.ч. $f'_{x_i} \in C(E)$. $f \in C^{r+1}(E)$, если $f'_{x_i} \in C^r(E) \quad 1 \leqslant i \leqslant n$. $f \in C^2(E) \Leftrightarrow f'_{x_i} \in C^1(E) \quad 1 \leqslant i \leqslant n$. $f'_{x_i} \in C^1(E) \Leftrightarrow \forall i, j \quad f''_{x_i x_j}(X) \in C(E) \implies$ при $i \neq j \quad f''_{x_i x_j}(X) = f''_{x_j x_i}(X)$

Теорема 2.2.

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad r \geqslant 2 \quad 1 \leqslant i_1 \dots i_r \leqslant n \quad 1 \leqslant j_1 \dots j_r \leqslant n$$
$$f \in C^r(E) \quad \forall X \in E \quad f^{(r)}_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}(X) = f^{(r)}_{x_{j_1} \dots x_{j_r}}(X)$$

Доказательство (по индукции).

$$r = 2 \text{ – уже рассмотрено.}$$
$$i_1, \dots, i_{r-1}, i_r, i_{r+1}$$
$$j_1, \dots, j_{r-1}, i_{r+1}, i_r$$
$$i_r \neq i_{r+1}$$
$$f \in C^{r+1}(E) \implies f \in C^{r-1}(E)$$
$$F(X) = f^{(r-1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}}}(X) = f^{(r-1)}_{x_{j_1} \dots x_{j_{r-1}}}(X) \forall X \in E$$
$$f^{(r+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} x_{i_r} x_{i_{r+1}}}(X) = F''_{x_{i_r} x_{i_{r+1}}}(X)$$
$$f^{(r+1)}_{x_{j_1} \dots x_{j_{r-1}} x_{i_{r+1}} x_{i_r}}(X) = F''_{x_{i_{r+1}} x_{i_r}}(X)$$
$$F''_{x_{i_r} x_{i_{r+1}}} \in C(E) \quad F''_{x_{i_{r+1}} x_{i_r}} \in C(E)$$
$$\implies F''_{x_{i_r} x_{i_{r+1}}}(X) = F''_{x_{i_{r+1}} x_{i_r}}(X)$$
$$f^{(r+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} x_{i_r} x_{i_{r+1}}}(X) = f^{(r+1)}_{x_{j_1} \dots x_{j_{r-1}} x_{i_{r+1}} x_{i_r}}(X)$$
$$1 \leqslant k < r$$
$$i_1 i_{k-1} i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{r+1} \dots i_n$$
$$j_1 j_{k-1} i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{r+1} \dots i_n$$
$$\Phi(X) = f^{(k+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{i_{k+1}}}(X) = f^{(k+1)}_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} x_{i_{k+1}} x_{i_k}}(X)$$
$$f^{(r+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{r+1}}}(X) = \Phi^{(r-k)}_{x_{i_{k+2}} \dots x_{i_{r+1}}}(X)$$
$$f^{(r+1)}_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} x_{i_{k+1}} x_{i_k} x_{i_{k+2}} \dots x_{i_{r+1}}}(X) = \Phi^{(r-k)}_{x_{i_{k+2}} \dots x_{i_{r+1}}}(X)$$

■

$$E \quad f \in C^r(E) \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2$$

$$\forall x \in E \quad f^{(r)}_{x_{i_1} \dots x_{i_r}} = f^{(r)}_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{P_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{P_2} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{P_n}}$$

$$n \geqslant 2 \quad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \quad \alpha_j \geqslant 0 \quad \alpha_j \in \mathbb{Z} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! \stackrel{def}{=} \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$|\alpha| = r > 0 \quad C_r^\alpha \stackrel{def}{=} \frac{r!}{\alpha!} = \frac{r!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

$$X = (X_1 \dots X_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$X^\alpha \stackrel{def}{=} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

$$0^0 \stackrel{def}{=} 1$$

$$\partial^\alpha f(x) \stackrel{def}{=} f^{|\alpha|}_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_n}}$$

Теорема 2.3 (О сложной функции специального вида).

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad X_0 \in E \quad H \in \mathbb{R}^n \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

$$X_0 + t_0 H \in E \quad f : E \to \mathbb{R} \quad f \in C^r(E) \quad r \geqslant 1$$

$$g(t) = f(X_0 + tH) \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad g \in C^r((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$$

$$g^{(r)}(t_0) = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(X_0 + t_0 H) H^\alpha \tag{1}$$

Доказательство (по индукции).

$$\text{пусть } r = 1 \quad f \in C^1(E)$$
$$P(t) = t \to X_0 + tH \quad (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$$
$$f : E \to \mathbb{R}^1 \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad ... = X_0 + t_0 H$$
$$Dg(t_0) = \underbrace{Df(X_0 + t_0 H)}_{=(f'_{x_1}(...),...,f'_{x_n}(...))} \underbrace{DP(t_0)}_{=H} \tag{2}$$
$$(2) \implies g'(t_0) = (f'_{x_1}(...), \dots, f'_{x_n}(...)) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} =$$
$$= f'_{x_1}(...)h_1 + ... + f'_{x_n}(...)h_n \tag{3}$$
$$f'_{x_j}(X_0 + tH) \in C((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$$
$$\sum_{\alpha:|\alpha|=1} C_1^\alpha \partial^\alpha f(...) H^\alpha = \sum_{j=1}^n f'_{x_j}(...)h_j \tag{4}$$
$$\tilde{\alpha} = (1, 0, \dots, 0)$$
$$C_1^{\tilde{\alpha}} = \frac{1!}{1!0! \dots 0!} = 1$$
$$H^{\tilde{\alpha}} = h_1^1 h_2^0 \dots h_n^0 = h_1$$

База доказана. Теперь переход.

$$f \in C^{r+1}(E)$$

$$g^{(r)}(t_0) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(X_0 + t_0 H) H^\alpha \tag{5}$$

$$g^{(r+1)}(t_0) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha (\partial^\alpha f(X_0 + t_0 H))'_t H^\alpha \overset{(3)}{=}$$

$$\partial^\alpha f(X_0 + tH) \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha \left(\sum_{j=1}^n (\partial^\alpha f(X_0 + t_0 H)'_{x_j} h_j) \right) H^\alpha =$$

$$e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0) \quad h_j = H_{e_j}$$

$$(\partial^\alpha f(\dots))'_x = \partial^{\alpha+e_j} f(\dots)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^{\alpha+e_j} f(\dots) H^{\alpha+e_j} =$$

$$\{\beta : \beta = \alpha + e_j, |\alpha| = r, 1 \leqslant j \leqslant n\} \quad |\beta| = r+1 \text{ множество всех } \beta : |\beta| = r+1$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad |\beta| = r+1$$

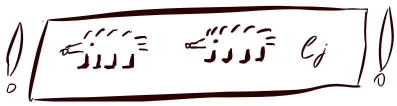
$$\beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_m} \neq 0$$

$$\alpha = (0, 0, \beta_{k_1} - 1, \dots, \beta_{k_m}, \dots 0)$$

$$\beta_j = 0 \text{ если } j \neq k_1, \dots, k_m$$

$$(0, 0 \dots, \beta_{k_1}, \beta_{k_2} - 1, \dots, \beta_{k_m}, 0) \quad (0, 0, \dots, \beta_{k_1} \dots, \beta_{k_m} - 1)$$

$$= \sum_{\beta:|\beta|=r+1} \partial^\beta f(\dots) H^\beta \sum_{\alpha, e_j : \alpha + e_j = \beta} C_r^\alpha =$$



$$\beta_{k_1} + \ldots + \beta_{k_m} = |\beta| = r + 1$$

$$\sum_{\alpha, j : \alpha + e_j = \beta} C_r^\alpha = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{r! \cdot \beta_{k_\nu}}{\beta_{k_1}!(\beta_{k_\nu} - 1)! \ldots \beta_{k_m}!} = \frac{r!}{\beta!} \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{k\nu} =$$

$$(0, \beta_{k_1}, \ldots, \beta_{k_\nu} - 1, \ldots, \beta_{k_m}, 0) = \gamma_\nu \quad |\gamma_\nu| = r$$

$$= \frac{r!|\beta|}{\beta!} = \frac{(r+1)!}{\beta!} \tag{6}$$

$$= \sum \partial^\beta f(X_0 + t_0 H) H^\beta \frac{(r+1)!}{\beta!}$$

■

2.4. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остатком в форме Лагранжа

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad X_0 \in E \quad H \in \mathbb{R}^n \quad H \neq \mathbb{0}_n$$
$$t \in \mathbb{R} \quad t \neq 0 \quad X_0 + tH \in E \quad X_0 + \tau H \in E \text{ при } 0 \leqslant |\tau| \leqslant |t| \quad t\tau > 0$$
$$[X_0, X_0 + tH] \subset E \quad r \geqslant 1 \quad f \in C^{r+1}(E)$$
$$\exists c \quad 0 < c < 1$$

$$f(X_0 + tH) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha : |\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0)(tH)^\alpha + \\ + \sum_{\alpha : |\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + ctH)(tH)^\alpha \tag{7}$$

Доказательство.

$$(tH)^\alpha = t^{|\alpha|}H^\alpha \quad tH = \tilde{H} \quad g(S) = f(X_0 + S\tilde{H}) \quad 0 \leqslant S \leqslant 1$$
$$g \in C^{r+1}([0,1]) \quad g \in C^{r+1}((-\varepsilon, 1+\varepsilon))$$
$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \cdot 1^k + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) 1^{r+1} \tag{8}$$
$$\exists c \quad 0 < c < 1$$
$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \tag{8'}$$
$$(8) \implies (8')$$
$$g(0) = f(X_0) \tag{9'}$$
$$g^{(k)}(0) = \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C_k^\alpha \partial^\alpha f(X_0) \tilde{H}^\alpha \tag{9''}$$
$$g^{(r+1)}(c) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha (X_0 + c\tilde{H}) \tilde{H}^\alpha \tag{9'''}$$
$$g(1) = f(X_0 + \tilde{H}) \tag{9}$$
$$\frac{1}{k!} C_k^\alpha = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha!} \tag{10}$$
$$(8'), (9), (9') \ldots (10) \implies (7)$$

■

2.5. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остатком в форме Пеано

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad f : E \to \mathbb{R} \quad f \in C^r(E) \quad r \geqslant 1$$
$$X_0 \in E \quad X_0 + H \in E \quad H \neq \mathbb{0}_n \quad X_0 + tH \in E \forall t \in [0,1]$$
$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + R(H) \tag{11}$$
$$\frac{|R(H)|}{||H||_{\mathbb{R}^n}^r} \underset{H \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} 0 \tag{12}$$

$r = 1$

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(X_0)h_j + R(H) \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{13'}$$

$$\frac{|R(H)|}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{h \to \mathbb{0}_n}{\to} 0 \tag{13}$$

$r \geqslant 2 \quad r - 1 \geqslant 1$

$$\exists c \quad 0 < c < 1 \text{ т.ч.}$$

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \\ + \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha = \\ = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)) H^\alpha}_{R(H)} \end{aligned} \tag{14}$$

$$f \in C^r(E) \implies \forall \alpha, |\alpha| = r \quad \partial^\alpha f \in C(E) \implies$$

$$|\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)| \underset{H \to \mathbb{0}_n}{\to} 0 \tag{15}$$

$$|H^\alpha| = |h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}| \leqslant ||H||^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot ||H||^{\alpha_n} = ||H||_{\mathbb{R}^n}^{|\alpha|} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} (15), (16) \implies \frac{|(\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)) H^\alpha|}{||H||_{\mathbb{R}^n}^r} \leqslant \\ \leqslant |\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)| \underset{H \to \mathbb{0}_n}{\to} 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$(14), (17) \implies (11), (12)$

2.6. Дифференциалы второго и последующих порядков

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 1 \quad E - \text{открытое} \quad X_0 \in E \quad f : E \to \mathbb{R}$$

$$f \text{ дифференцируема в } X_0$$

$$df(X_0, H) = f'_{x_1}(X_0)h_1 + ... + f'_{x_n}(X_0)h_n = \sum_{\alpha:|\alpha|=1} 1 \cdot \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad H \in \mathbb{R}^n \quad d^1 f(X_0, H) \stackrel{def}{=} df(X_0, H) \quad f \in C^r(E) \quad r \geqslant 1$$

$$\forall X \in E \text{ и } \forall H \in \mathbb{R}^n \quad d^r f(X_0, H) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} A_{r,\alpha} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha \qquad (1)$$

$$f \in C^{r+1}(E)$$

$$d^{r+1} f(X_0, H) \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha:|\alpha|=r} A_{r,\alpha} d(\partial^\alpha f(X_0, H)) H^\alpha \qquad (2)$$

Теорема 2.4.

$$A_{r,\alpha} = C_r^\alpha \qquad (3)$$

Доказательство (по индукции). $r = 1$ справедливо. Предположим, верно для $r \geqslant 1$

$$(2) \implies d^{r+1} f(X_0, H) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha d(\partial^\alpha f(X_0, H)) H^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha \left(\sum_{j=1}^{n} (\partial^\alpha f(X_0))'_{x_j} h_j \right) H^\alpha = \sum_{\beta:|\beta|=r+1} C_{r+1}^\beta \partial^\beta f(X_0) H^\beta$$

■

$$(1), (2), (3) \implies d^r f(X_0, H) = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha = \sum_{\alpha:|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha \qquad (4)$$

Пример 2.2 (Вычисление второго диференциала).

$$(4) \implies f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} d^k f(X_0, H) + R(H) \tag{5}$$

$$\frac{|R(H)|}{||H||^r_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{0}_n}{\to} 0 \tag{6}$$

$$(4) \implies d^2 f(X_0, H) = \sum_{\alpha:|\alpha|=2} C_2^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha \tag{7}$$

$$H^\alpha = h_i h_j \quad (0 \dots \underbrace{1}_{i} \dots \underbrace{1}_{j} \dots 0) \quad C_2^\alpha = \frac{2!}{0! \dots 1! \dots 1! \dots 0!} = 2$$

$$H^\alpha = h_k^2 \qquad (0 \dots \underbrace{2}_{k} \dots 0) \quad C_2^\alpha = \frac{2!}{0! \dots 2! \dots 0!} = 1$$

$$(7) \implies d^2 f(X_0, H) = \sum_{i<j} 2 f''_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j + \sum_{k=1}^{n} f''_{x_k x_k}(X_0) h_k^2 =$$

$$2 f''_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j = f''_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j + f''_{x_j x_i}(X_0) h_j h_i \tag{8}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X_0) h_i h_j$$

2.7. Локальные экстремумы

$$n \geqslant 2 \quad a_{ik} \in \mathbb{R} \quad 1 \leqslant i, k \leqslant n \quad a_{ik} = a_{ki} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$A(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k$ называется положительно определённой, если $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq \mathbb{0}_n \quad A(X) > 0$. $B(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} x_i x_k$ – отрицательно определённой, если $B(X) < 0$. $C(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} x_i x_k$ – неопределённой, если $\exists x_1, x_2$ т.ч. $C(x_1) > 0, C(X_2) < 0$. $\widetilde{A}(X) \geqslant 0$ – неотрицательно определённая. $\widetilde{B}(X) \leqslant 0$ – неположительно определённая.

$x^2 + y^2$ – положительно определена
$x^2 - y^2$ – не определена
$-x^2 - y^2$ – отрицательно определена

$x^2 - 2xy - y^2$ – неотрицательна
$-x^2 + 2xy - y^2$ – не положительна

$$A(X) > 0 \Leftrightarrow -A(X) < 0$$

$$A(X) \text{ положительно определена } \exists 0 < m \leqslant M : \forall X \in \mathbb{R}^n$$
$$m||X||^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant A(X) \leqslant M||X||^2_{\mathbb{R}^n} \tag{1}$$
$$B(X) \text{ отрицательно определена } \exists 0 < m_1 \leqslant M_1 : \forall X \in \mathbb{R}^n$$
$$-M_1||X||^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant B(X) \leqslant -m_1||X||^2_{\mathbb{R}^n} \tag{2}$$

$$S_n = \{X \in \mathbb{R}^n : ||X||_{\mathbb{R}^n} = 1\}$$
$$A(X) \in C(S_n)$$

По второй теореме Вейерштрасса

$$\exists X_- \in S_n \text{ и } \exists X_+ \in S_n : \forall X \in S_n$$
$$A(X_-) \leqslant A(X) \leqslant A(X_+) \tag{3'}$$
$$m = A(X_-) > 0 \quad M = A(X_+) \implies \text{соотношение (1) справедливо} \tag{3}$$

$$X \neq \mathbb{0}_n \quad t = ||X||_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad X_0 = \frac{1}{t}X$$
$$||X_0||_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{t}||X||_{\mathbb{R}^n} = \frac{t}{t} = 1, \text{ то есть } X_0 \in S_n$$
$$(3),(3') \implies A(X) = A(tX_0) = t^2A(X_0) \geqslant m||X||^2_{\mathbb{R}^n}$$
$$A(X) = A(tX_0) \leqslant M||X||^2_{\mathbb{R}^n}$$

$$\text{неопределённая форма } C(X) \quad \exists m_2, M_2 > 0 \quad X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R} \neq 0$$
$$C(tX_1) = -m_2t^2$$
$$C(tX_2) = M_2t^2$$
$$-m_2 = C(X_1) < 0$$
$$M_2 = C(X_2) > 0$$
$$d^2f(X,H) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f''_{x_ix_k}(X)h_ih_k \text{ квадратичная форма} \tag{4}$$

2.8. Достаточное условие наличия или отсутствия локального экстремума

Теорема 2.5.

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad f : E \to \mathbb{R} \quad x_0 \in E$$
$$X_0 \in W \subset E \quad f \in C^2(W)$$
$$df(X_0, H) \equiv 0 \tag{5}$$

Если $d^2 f(X_0, H)$ положительно определена $\implies$ X_0 строгий локальный минимум. Если $d^2 f(X_0, H)$ отрицательно определена $\implies$ X_0 строгий локальный максимум. Если не определена $\implies$ в X_0 нет локального экстремума.

Доказательство.

$$H \neq \mathbb{0}_n, X_0 + H \in W, X_0 + tH \in W \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$
$$f(X_0 + H) = f(X_0) + df(X_0, H) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) + r(H) \tag{6}$$
$$\frac{|r(H)|}{||H||^2_{\mathbb{R}^n}} \underset{H \to \mathbb{0}_n}{\to} 0 \tag{7}$$

$d^2 f$ положительно определена

$$\exists m > 0 : d^2 f(X_0, H) \geqslant m ||H||^2_{\mathbb{R}^n} \tag{8}$$
$$(7) \implies \exists \delta > 0 : \text{ при } H \neq \mathbb{0}_n \quad ||H|| < \delta$$
$$\text{выполнено } |r(H)| < \frac{m}{4} ||H||^2 \tag{9}$$

$$(5), (6), (8), (9) \implies f(X_0 + H) \geqslant f(X_0) + \frac{m}{2} ||H||^2 - |r(H)| \geqslant$$
$$\geqslant f(X_0) + \frac{m}{2} ||H||^2 - \frac{m}{4} ||H||^2 = f(X) + \frac{m}{4} ||H||^2 > f(X_0)$$

$$f_1, f_2 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (af_1 + bf_2)'_{x_i} = a{f_1}'_{x_i} + b{f_2}'_{x_i}$$
$$((af_1 + bf_2)'_{x_i})'_{x_k} = (a{f_1}'_{x_i} + b{f_2}'_{x_i})'_{x_k} = a{f_1}''_{x_i x_k} + b{f_2}''_{x_i x_k}$$
$$d^2(-f(X_0, H)) = -d^2 f(X_0, H) \tag{10}$$

отрицательно определена

$$g(x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -g(x)$$

$$(10) \implies d^2g(X_0, H) = -d^2f(X_0, H) \quad X_0 \text{ – локальный минимум } g \tag{10'}$$

не определена

$$\exists H_1 \text{ и } m_1 > 0 : d^2f(X_0, tH_1) = m_1t^2 \tag{11}$$

$$\exists H_2 \text{ и } m_2 > 0 : d^2f(X_0, tH_2) = -m_2t^2 \tag{12}$$

$$m = \min(m_1, m_2) > 0$$

$$f(X_0 + tH) = f(X_0) + \frac{1}{2}t^2d^2f(X_0, H) + r(tH) \tag{13}$$

$$\frac{|r(tH)|}{|t|^2} \underset{t\to 0}{\to} 0 \quad |t|||H|| = ||tH|| \tag{14}$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |r(tH)| < \varepsilon|t|^2||H||^2 \tag{15}$$

$$|t|||H_1|| < \delta$$

$$\varepsilon||H_1||^2 \leqslant \frac{m}{4} \tag{17}$$

$$(5), (11), (15) \implies f(X_0+tH_1) \geqslant f(X_0)+\frac{1}{2}m_1t^2-|r(tH_1)| > f(X_0)+\frac{m_1}{2}t^2- \\ - \varepsilon t^2||H_1||^2 \geqslant f(X_0) + \frac{m}{4}t^2 > f(X_0) \tag{16}$$

$$(5), (15), (12) \implies f(X_0 + tH) \leqslant f(X_0) - \frac{1}{2}m_2t^2 + |r(tH_2)| \leqslant \\ \leqslant f(X_0) - \frac{1}{2}m_2t^2 + \varepsilon t^2||H_2||^2 \leqslant f(X_0) - \frac{1}{2}m_2t^2 + \frac{1}{4}m_2t^2 \leqslant \\ \leqslant f(X_0) - \frac{1}{4}m_2t^2 < f(X_0) \tag{18}$$

■

2.9. Теорема Лагранжа для вектор-функций

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$x \text{ – фиксированная точка } \in [a, b] \quad DF(x) = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{bmatrix} = F'(x)$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \underset{h \to 0}{\to} F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \\ \vdots \\ \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$$\forall k \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \forall x \in (a, b) \quad \exists f_k'(x)$$

$$F \in C([a, b]) \Leftrightarrow f_k \in C([a, b]) \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$\implies c \in (a, b) : ||F(b) - F(a)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||F'(c)||_{\mathbb{R}^n}(b - a) \tag{3}$$

Пример 2.3 (Важный!).

$$x \in [0, 2\pi] \quad F(X) = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} \quad F'(x) = \begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \quad ||F'(x)||_{\mathbb{R}^n} = 1$$

$$F(2\pi) - F(0) = \mathbb{0}_2$$

$$F(b) \neq F(a)$$

Доказательство.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)(f_k(b) - f_k(a)) \tag{4}$$

$$g \in C([a, b]) \forall x \in (a, b) \quad \exists g'(x)$$

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)(f_k(b) - f_k(a)) \tag{5}$$

$$\exists c \in (a, b) : g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \tag{6}$$

$$(4) \implies g(b)-g(a) = \sum_{k=1}^{n} f_k(b)(f_k(b)-f_k(a)) - \sum_{k=1}^{n} f_k(a)(f_k(b)-f_k(a)) = \\ = \sum_{k=1}^{n}(f_k(b)-f_k(a))^2 = ||F(b)-F(a)||^2_{\mathbb{R}^n} \quad (7)$$

$$(5) \implies |g'(c)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f'_k(c)(f_k(b)-f_k(a))\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(f'_k(c))^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(f_k(b)-f_k(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = ||F'(c)||_{\mathbb{R}^n} \cdot ||F(b)-F(a)||_{\mathbb{R}^n} \quad (8)$$

$$(6),(7),(8) \implies ||F(b)-F(a)||^2 \leqslant ||F'(c)|| \cdot ||F(b)-F(a)||(b-a) \implies (3)$$

■

Глава 3

Теорема об обратном отображении

Линейные отображения

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \quad A \quad \exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad I_n(X) = (X)$
Необходимо и достаточно $\det A \neq 0$

Замечание.

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad Y = A^{-1}X \Leftrightarrow X = AY$$

$$||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||A^{-1}||||X||_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{\alpha}||X||_{\mathbb{R}^n} \implies ||X||_{\mathbb{R}^n} \geqslant \alpha||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||AY||_{\mathbb{R}^n} \geqslant \alpha||Y||_{\mathbb{R}^n} \tag{2}$$

Теорема 3.1.

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad ||B - A|| = \beta < \alpha \tag{3'}$$

$$\implies \exists B^{-1} \quad ||B^{-1}|| \leqslant \frac{1}{\alpha - \beta} \tag{3}$$

$$||B^{-1} - A^{-1}|| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\alpha - \beta} \tag{4}$$

Доказательство.

$$(3') \implies ||(B-A)X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||B-A||||X||_{\mathbb{R}^n} = \beta||X||_{\mathbb{R}^n} \quad (5)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\alpha-\beta)||X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||AX||_{\mathbb{R}^n} - \beta||X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$
$$\leqslant ||AX||_{\mathbb{R}^n} - ||(B-A)X||_{\mathbb{R}^n} \quad (6)$$

$$BX = (B-A)X + AX \implies ||BX||_{\mathbb{R}^n} \geqslant ||AX||_{\mathbb{R}^n} - ||(B-A)X||_{\mathbb{R}^n} \quad (7)$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^n \qquad c_3 = c_1 + c_2$$
$$||c_3|| \leqslant ||c_1|| + ||c_2||$$
$$||c_1|| \leqslant ||c_3|| + ||c_2|| \quad ||c_3|| \geqslant ||c_1|| - ||c_2||$$

$$(6),(7) \implies \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\alpha-\beta)||X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||BX||_{\mathbb{R}^n} \quad (8)$$

$$(8) \implies \forall x \neq \mathbb{0}_n \text{ имеем} BX \neq \mathbb{0}_n \quad (9)$$

$$9 \implies \exists B^{-1}$$

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow X = B^{-1}Y$$

$$(8) \implies (\alpha-\beta)||B^{-1}Y||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||Y||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||B^{-1}Y||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}||Y||_{\mathbb{R}^n} \quad (10)$$

$$(10) \implies ||B^{-1}|| \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow (3)$$

$$(A(A^{-1}-B^{-1}))B = (AA^{-1}-AB^{-1})B = (I_n-AB^{-1})B = I_nB-(AB^{-1})B =$$
$$= B - A(B^{-1}B) = B - AI_n = B - A \quad (11)$$

$$(11) \implies A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1} \quad (12)$$

$$(1),(3),(12) \implies ||A^{-1}-B^{-1}|| \leqslant ||A^{-1}||\cdot||B-A||\cdot||B^{-1}|| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha-\beta} \quad (4)$$

■

3.1. Теорема об обратном отображении

$E \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, $x_0 \in E$, x_0 – внутренняя точка $F : E \to \mathbb{R}^n$

$$F \in C^1(w) \tag{1}$$

$$\det DF(x_0) \neq 0 \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) влекут: $\exists U \ni X_0 \quad \exists V \ni Y_0$

$$F(X_0) = Y_0 : F|_U - \text{гомеоморфизм на } V \tag{3}$$

$$\Phi = F^{-1}, \Phi \in C^1(V) \tag{4}$$

Определение 3.1 (Якобиан)**.** $J_F(x_0) \overset{def}{=} \det DF(x_0)$ – Якобиан отображения F в точке x_0

$$\Phi(F(X)) \equiv X \implies D\Phi(Y)DF(X) = DI(X) \implies$$
$$Y = F(X), I(X) \equiv X$$
$$I_n - \text{ единичная матрица в } \mathbb{R}^n$$
$$\implies \det D(\Phi(Y_0)) \cdot \det DF(X_0) = \det I_n = 1$$

Доказательство. 1. Будем пользоваться определителем матрицы Якоби. Будем обозначать дальше $DF(x_0) = A$. Условие (2) влечёт $\exists A^{-1}$

$$\text{Будем обозначать } ||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda}, \lambda > 0 \tag{5}$$

Рассмотрим такое линейное отображение $X \in w, ||DF(X) - DF(X_0)|| < ||DF(X) - DF(X_0)||_2$

$$(... |f'_{ix_j}(X) - f'_{ix_j}(X_0)|^2 + ...)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1) \implies |f'_{ix_j} - f'_{ix_j}(x_0)|^2 \underset{X \to X_0}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

$$(6) \implies ||DF(X) - DF(X_0)||_2 \underset{X \to X_0}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

$$(7) \implies ||DF(X - DF(X_0)|| \underset{X \to X_0}{\longrightarrow} 0 \tag{8}$$

$$(8) \implies \exists r > 0 : \forall X, ||X - X_0||_{\mathbb{R}^n} < r \text{ имеем}$$

$$||DF(X) - DF(X_0)|| < 2\lambda \tag{9}$$

$$||DF(X) - A|| < 2\lambda \tag{9'}$$

$$U = B_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n : ||X - X_0|_{\mathbb{R}^n} < r\} \tag{10}$$

Замечание (О внутренности шара).

$$\begin{gathered} X_1, X_2 \in B_r(X_0), 0 < t < 1 \implies tX_1 + (1-t)X_2 \in B_r(x_0) \\ ||(tX_1 + (1-t)X_2) - X_0||_{\mathbb{R}^n} = \\ = ||t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||t(X_1 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} + \\ + ||(1-t)(X_2 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} < tr + (1-t)r = r \end{gathered}$$

2. Биективность отображения F на U

$$\begin{gathered} 0 < t < 1 \\ X \in B_r(x_0), H \in \mathbb{R}^n, X + H \in B_r(X_0) \\ t(X+H) + (1-t)X = X + tH \in B_r(X_0) \\ g : [0,1] \to \mathbb{R}^n \end{gathered}$$

$$g(t) = F(X + tH) - tAH \tag{11}$$

По достаточному условию дифференцируемости все матрицы Якоби существуют

$$\begin{aligned} (11) \implies Dg(t) = g'(t) &= D(F(X+tH)) - D(tAH) = \\ &= DF(X+tH)D(X+tH) - AH = \\ &= DF(X+tH)H - DF(X_0)H = \\ &= (DF(X+tH) - DF(X_0))H \end{aligned} \tag{12}$$

Правая часть(12) $\leqslant ||DF(X+tH) - DF(X_0)|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^n} < 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n}$

$$\underset{13'}{\leqslant} \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{14}$$

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad A^{-1}X = Y \Leftrightarrow X = AY$$

$$\begin{gathered} ||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda} \implies \forall X \in \mathbb{R}^n ||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{4\lambda}||X||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \\ ||X||_{\mathbb{R}^n} \geqslant 4\lambda||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ||AY||_{\mathbb{R}^n} \geqslant 4\lambda||Y||_{\mathbb{R}^n} \end{gathered} \tag{13}$$

$$(13) \Leftrightarrow 2\lambda||Y||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{2}||AY||_{\mathbb{R}^n} \tag{13'}$$

По теореме Лагранжа ..

$$(12),(14) \implies ||g'(t)||_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{15}$$

$$\exists t_0 \in (0,1) : ||g(1)-g(0)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||g'(t_0)||_{\mathbb{R}^n} \cdot (1-0) = ||g'(t_0)||_{\mathbb{R}^n} \tag{16}$$

$$g(1)-g(0) = F(X+H) - AH - F(X) = (F(X+H)-F(X)) - AH \tag{17}$$

$$(15),(16),(17) \implies ||(F(X+H)-F(X)) - AH||_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{18}$$

по неравенству треугольника

$$(18) \implies ||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} \geqslant ||AH||_{\mathbb{R}^n} -$$
$$-||F(X+H)-F(X)-AH||_{\mathbb{R}^n} > ||AH||_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} > 0 \tag{19}$$

$$AH = (AH - (F(X+H)-F(X)) + (F(X+H)-F(X))$$

$$||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} > \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{20}$$

при

$$X \in B_r(X_0), X+H \in B_r(x_0), H \neq \mathbb{0}_n$$
$$(20) \implies F(X+H) \neq F(X) \text{ при } H \neq \mathbb{0}_n$$
$$V \overset{def}{=} F(U) \tag{21}$$
$$\exists \Phi : V \to U \tag{22}$$

т.ч.

$$\Phi = F^{-1}$$

3. Открытость отображения

$$(20),(13') \implies ||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} \tag{23}$$

Лемма 3.2. $X_1 \in U, Y_1 = F(X_1)$, $0 < \rho < r - ||X_1 - X_0||_{\mathbb{R}^n}$
Такой выбор влечёт

$$\overline{B}_\rho(X_1) \subset U \quad Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1), Y \neq Y_1 \tag{24}$$

$$\implies \exists X \in B_\rho(X_1) : F(X) = Y \tag{25}$$

Доказательство. Давайте рассмотрим функцию

$$P(X) : \overline{B}_\rho(X_1) \to \mathbb{R}$$

$$P(X) = ||F(X) - Y||_{\mathbb{R}^n} \tag{26}$$

Видно, что функция непрерывная, класса C^1, норма это непрерывная функция на замкнутом шаре. Так как замкнутый шар это компакт:

$$\exists X_- \in \overline{B}_\rho : P(X_-) \leqslant P(X) \forall X \in \overline{B}_\rho(X_1) \tag{27}$$

$$X_2 \text{ т.ч. } ||X_2 - X_1||_{\mathbb{R}^n} = \rho, H = X_2 - X_1$$

$$(23) \implies ||F(X_2) - F(X_1)||_{\mathbb{R}^n} = ||F(x_1 + H) - F(X_1)||_{\mathbb{R}^n} >$$

$$> 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} = 2\lambda||X_2 - X_1||_{\mathbb{R}^n} = 2\lambda\rho \tag{28}$$

$$(28), (24) \implies ||F(X_2) - Y||_{\mathbb{R}^n} \geqslant ||F(X_2)-$$

$$- \underbrace{F(X_1)}_{Y_1} ||_{\mathbb{R}^n} - || \underbrace{F(X_1)}_{Y_1} - Y||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda\rho - \lambda\rho > 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho \tag{29}$$

$$(29) : P(X_2) > \lambda\rho \tag{30}$$

$$P(X_1) = ||F(X_1) - Y||_{\mathbb{R}^n} = ||Y_1 - Y||_{|\mathbb{R}^n} < \lambda\rho \tag{31}$$

$$(30), (31) \implies P(X_1) < P(X_2) \tag{32}$$

$$(32) \implies X_- \in B_\rho(X_1) \tag{33}$$

Теперь хотим ввести функцию

$$f(X) = P^2(X) \text{ и получаем, что } f(X_-) \leqslant f(X) \forall X \in \overline{B}\rho(X_1) \tag{34}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad\qquad F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix}$$

$f(X) \geqslant 0$ обозначили координатные функции

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} (F_k(X) - Y_k)^2 \tag{35}$$

$$(35) \implies C^1(U) \tag{36}$$

$$(34), (35) \implies f'_{xj}(X_-) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n \tag{37}$$

(необходимое условие экстремума, согласны ?)

$$(35) \implies f'_{x_j}(X) = 2 \sum_{k=1}^{n} (F_k(X) - Y_k) F'_{kx_j}(X) \tag{38}$$

$$l_k = F_k(X_-) - Y_k$$

$$(37), (38) \implies \sum_{k=1}^{n} F'_{kx_j}(X_-) l_k = 0, 1 \leqslant j \leqslant n \tag{39}$$

$$L = (l_1, \dots, l_n)$$

$$(39) \implies LDF(X_-) = \mathbb{0}_n^T \tag{40}$$

Будем для краткости записи пользоваться обозначениями из Якобиана

$$\forall X \in U J_F(X) \neq 0 \tag{41}$$

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda}$$

Хотим обозначить теперь

$$B = DF(X)$$

$$\beta = ||A - B|| < 2\lambda$$

по теореме (3.1) из предыдущей лекции

$$||B^{-1}|| \leqslant \frac{1}{4\lambda - \beta} < \frac{1}{2\lambda} \tag{42}$$

матрица якоби из (40) обратима, сейчас обратим её

$$(40), (41) \implies (LDF(X_-))(DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n^T (DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n$$

$$\implies L = \mathbb{0}_n^T \tag{43}$$

$$(43) \implies F(X_-) = Y$$

■

$G \subset U$, G – открытое $\implies$ $F(G)$ открытое. $\forall Y_1 \in F(G)$, пусть $X_1 \in G, F(X_1) = Y_1$. $\exists \rho > 0$ т.ч. $B_\rho(X_1) \in G$ и $\overline{B_\rho(X_1)} \in U$ по предыдущей лемме получаем соотношение

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(B_\rho(X_1)) \subset F(G)$$

Отображение F действительно является открытым отображением.

$$V = F(U), V - \text{ открытое }, G \subset U, G - \text{ открытое}$$

хотим рассмотреть отображение

$$\Phi = F^{-1}; V \to U$$

посмотрим на прообразы открытых множеств V. Пусть $\Omega \in V-$ открытое.

$$\Phi^{-1}(G) = F(G) - \text{ открытое}$$

Применяем топологическое определение непрерывности

$$\implies \Phi \text{ непрерывна на } V$$

Мы выяснили что F биективно, V - открыто, а обратное отображение непрерывно на V. Теперь надо проверять что Φ такой же гладкости. Осталось проверить что обратное отображение класса C^1

4.
$$\forall Y \in V, K \in \mathbb{R}^n, Y + K \in V$$

$$\Phi(Y + K) - \Phi(Y) \overset{def}{=} H \text{ т.к. отображение } \Phi \text{ непрерывно}$$
$$H \underset{K \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} \mathbb{0}_n$$

$$\Phi(Y) = X \quad \Phi(Y + K) = X + H$$
$$F(\Phi(Y + K)) = F(X + H)$$
$$Y + K = F(X + H) \ F(\Phi(Y)) = F(X)$$

$$K = (Y + K) - Y = F(X + H) - F(X) \tag{1}$$

$$DF(X) \ ||(DF(X))^{-1}|| < \frac{1}{2\lambda} \text{ (42) от 29.09} \tag{2}$$

$$DF(X))^{-1} = B$$

$$F(X+H) - F(X) = DF(X)H + t(H) \tag{3}$$

$$\frac{t(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow[H \to \mathbb{0}_n]{} 0 \tag{4}$$

$$\begin{gathered}(1), (3) \implies \\ K = DF(X)H + t(H) \\ DF(X)H = K - t(H) \\ (BDF(X))H = BK - B(t(H))\end{gathered}$$

$$H = BK - Bt(H) \tag{5}$$

$$(5) \implies \Phi(Y+K) - \Phi(Y) = BK - Bt(H) \tag{6}$$

Дифференцируемость почти получилась, потому что есть линейное отображение BK..., надо выяснить, что есть соответствующее свойство для дифференцируемости отображения.

$$||F(X+H) - F(X)||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda ||H||_{\mathbb{R}^n} \text{ (23) из прошлой лекции} \tag{7}$$

$$||K||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda ||H||_{\mathbb{R}^n} \tag{7'}$$

$$\begin{aligned}\frac{||Bt(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \leqslant \frac{||B||||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \overset{<}{(2)} \frac{1}{2\lambda} \frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} = \\ \frac{1}{2\lambda} \frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \cdot \frac{||H||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \overset{<}{(7')}\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{4\lambda^2} \frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow[K \to \mathbb{0}_n]{} 0 \tag{8}$$

$$(6), (8) \implies \Phi \text{ дифференцируема в } Y$$

Получаем следующие равенства:

$$D\Phi(Y) = (DF(X))^{-1} \tag{9}$$

$$\text{где } Y = F(X) \Leftrightarrow X = \Phi(Y)$$

то, что мы доказали, влечёт следующее: если мы рассмотрим координатные функции F, то получится, что существуют все частные производные. Осталось проверить их непрерывность

5.

$$F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix} \Phi(Y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(Y) \\ \vdots \\ \varphi_n(Y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{1y_1}(Y) & \dots & \varphi'_{1y_n}(Y) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \varphi'_{ny_1}(Y) & \dots & \varphi'_{ny_n}(Y) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{1x_n}(X) \\ \dots & \ddots & \dots \\ F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{nx_n}(X) \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$(9) \implies \varphi'_{ky_l}(Y) = \frac{\sum \pm F'_{ix_i}(X) \cdots F'_{sx_t}(X)}{\underbrace{\sum + \cdots F'_{px_q}(X) \cdots F'ux_v(X)}_{\neq 0}} \qquad (10)$$

$$F'_{ix_j}(X) = F'_{ix_j}(\Phi(Y)) \in C(V) \qquad (11)$$

$$(10), (11) \implies \varphi'_{ky_l} \in C(V) \forall k, l \qquad (12)$$

По определению класса C^r получаем (12) $\implies \Phi \in C^1(V)$

■

Следствие 3.2.1.

$$r \geqslant 1, F \in C^r(E)$$
$$E \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 2, E - \text{ открытое множество}$$
$$X_0 \in E, F(X_0) = Y_0, J_F(X_0) \neq 0$$
$$\implies \exists x_0 \in U \text{ и } \exists Y_0 \in V \text{ т.ч. } F|_U - \text{ гомеоморфизм}$$
$$\Phi = F^{-1}$$
$$\Phi \in C^r(E)$$

Доказательство. Устное доказательство по индукции!

При $r = 1$ это утверждение доказано и найдены U и V (в теореме об обратном отображении), которыми мы будем пользоваться.

Переход. Рассмотрим отображение $F \in C^{r+1}(E)$. По предположению индукции мы получаем, что соответствующее обратное отображение $\Phi \in C^r(V)$. Давайте посмотрим на соотношение (10). Посмотрим на множители, которые там фигурируют. Что мы можем сказать о множителе $F'_{ix_j}(\Phi(Y))$? Если мы будем находить частную производную этого выражения по любому аргументу Y, то мы будем применять формулу для частной производной сложного отображения, правда ведь?

$$(F'_{ix_j}(\Phi(Y)))'_{y_k}$$

Мы будем иметь слагаемые вот такого типа $... + F'_{ix_jx_l}(\Phi(y)) \cdot \varphi'_{l_{y_k}}$. Если мы будем находить последующие частные производные (предполагая, что они существуют), мы будем либо дифференцировать первый множитель и выносить второй, либо будем дифференцировать φ. И если мы хотим найти производную порядка r, то у нас максимум, что появится, это требование существования частной производной порядка r от всех функций φ. Мы не выписываем конкретные формулы, но видно, как они устроены.

По предположению индукции $\Phi \in C^r(V)$. Поэтому когда мы будем дифференцировать r раз $\partial^\alpha(...) \quad |\alpha| = r$, там будут фигурировать производные максимум порядка r от φ, которые будут непрерывны по y. А поскольку $\Phi(Y)$ тоже непрерывны, мы имеем

$$\partial^\alpha(...) \in C^r(V) \tag{13}$$

Значит, путём последующих применений формулы для производной сложной функции получаются очень громоздкие выражения, но все они будут непрерывны, потому что понятно, как они устроены из предыдущих формул. Опять же, каждая из производных непрерывна на V, а теперь посмотрим на (10), мы будем находить производную порядка r от правой части, там будут очень громоздкие выражения, но тем не менее, они будут непрерывными функциями, потому что знаменатель не 0 и, когда будем пользоваться правилами дифференцирования, всё будет непрерывно. Когда мы будем дифференцировать r раз левую часть, мы будем получать непрерывные функции, мы на самом деле будем получаю производную порядка $r + 1$, потому что там уже стоит частная производная от любой координатной функции по любому аргументу. Правую часть мы можем дифференцировать r раз в любом порядке по любым аргументам и получать, что она непрерывна, значит, и левая часть непрерывна. $(10), (13) \implies \Phi \in C^{r+1}(V)$ ■

Следствие 3.2.2 (Теорема об открытом отображении).

$$E \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$$
$$E - \text{ открытое }, F : E \to \mathbb{R}^n$$

$$J_F(X) \neq 0 \forall X \in E \implies F - \text{ открытое отображение}$$

Доказательство.

$$w \in E, w - \text{ открытое }, F(w) = G, Y_0 \in G$$
$$\exists X_0 \in w \text{ т.ч. } F(X_0) = Y_0 \exists r > 0 \text{ т.ч. } B_r(X_0) \subset w, J_F(X_0) \neq 0 \text{ т.е.}$$
$$\exists (DF(X_0))^{-1}$$
$$\lambda > 0, ||(DF(X_0)^{-1})|| = \frac{1}{4\lambda}$$
$$\implies B_{\lambda r}(Y_0) \subset F(B_r(X_0)) \qquad \text{(шаг 3)}$$
$$F(B_r(X_0)) \subset F(w)$$

■

Теорема 3.3 (О неявном отображении).

$$n \geqslant 1, m \geqslant 1$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

A - обратима

$$C = [AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$CZ_0 = \mathbb{0}_n$$

$$CZ = \mathbb{0}_n$$

$$[AB] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbb{0}_n \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow AX + BY = \mathbb{0}_n \Leftrightarrow AX = -BY \Leftrightarrow X = -(A^{-1}B)Y \qquad (2)$$

$$X_0 = -(A^{-1}B)Y_0 \qquad (2')$$

Теорема 3.4 (О неявном отображении в общем случае).

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m}, Z \in E, Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$F : E \to \mathbb{R}^n, F \in C^1(E)$$

$$F(Z) = \begin{bmatrix} f_1(Z) \\ \vdots \\ f_n(Z) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & ... & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & ... & f'_{1y_m}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... & ... \ddots & ... & \\ f'_{nx_1}(Z_0) & ... & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & ... & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & ... & f'_{1x_n}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ f'_{nx_1}(Z_0) & ... & f'_{nx_n}(Z_0) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z_0) & ... & f'_{1y_m}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ f'_{ny_1}(Z_0) & ... & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = [AB]$$

$$A \text{ обратима} \tag{1}$$

$$F(Z_0) = \mathbb{0}_n \tag{2}$$

$$\implies \exists W \ni Y_0 \text{ и единственное}$$

$$g : W \to \mathbb{R}^n, g \in C^1(W)$$

$$g(Y_0) = X_0 \ \forall Y \in W \tag{3}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{4}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{2'}$$

задаёт X как неявную функцию от Y в окрестности W.

Доказательство.

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\Phi(Z_0) = \begin{bmatrix} F(Z_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$D\Phi(Z_0) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} & f'_{1y_1} & \dots & f'_{1y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} & f'_{ny_1} & \dots & f'_{ny_m} \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\det D\Phi(Z_0) = \det A \neq 0$$

По теореме об обратном отображении

$$\exists Z_0 \in U, \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$$

$$S \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^m$$

Φ гомеоморфизм U на V

$$\text{для} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V \exists \Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) - \text{ обратный к} \Phi \tag{7}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}^n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = Z_0 \tag{8}$$

$$\Psi \in C^1(V)$$

$$(5) \implies \Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix} \tag{9}$$

хотим выбрать такой вектор

$$P_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V, \exists r > 0 : B_r^{m+n}(P_0) \subset V$$

$$\forall Y \in B_r^m(Y_0) \qquad \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{m+n}(P_0)$$

$$W = B_r^m(Y_0)$$

$$T \in W, g(T) \overset{def}{=} \psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ T\end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

$$(10) \implies g(Y_0) = \psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ Y_0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}g(T)\\ T\end{bmatrix}\right) \overset{(10)}{=} \Phi\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ T\end{bmatrix}\right) T\end{bmatrix}\right) \overset{(9)}{=} \Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ T\end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ T\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$(11) \implies F\left(\begin{bmatrix}g(T)\\ T\end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{12}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ Y_0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}X_0\\ Y_0\end{bmatrix} \overset{(9)}{\implies} \psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ Y_0\end{bmatrix}\right) = X_0 \Leftrightarrow g(Y_0) = X_0 \tag{13}$$

Предположим, что такая функция не единственная.

$$W$$

$$Y_0 \in W_1$$

$$W_2 = W \cap W_1$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}g(y)\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}g(y)\\ y\end{bmatrix}\right)\\ Y\end{bmatrix} \overset{(12)}{=} \begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ Y\end{bmatrix}; \Phi\left(\begin{bmatrix}g_1(Y)\\ Y\end{bmatrix}\right) \overset{(12}{=} \begin{bmatrix}\mathbb{0}_n\\ X\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$(14) \implies g(Y) = g_1(Y)$$

■

Вычисление матрицы Якоби функции (отображения), заданной неявно

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad Z_0 \in E \quad Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \quad X_0 \in \mathbb{R}^n, Y_0 \quad \in \mathbb{R}^m$$

$$F : E \to \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(E) \quad F(Z_0) = \mathbb{0}_n \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$A(Z) = \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(Z) & ... & F'_{1x_n}(Z) \\ ... & \ddots & ... \\ F'_{nx_1}(Z) & ... & F'_{nx_n}(Z) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\det A \neq 0$$

$$B(Z) = \begin{bmatrix} F'_{1y_1}(Z) & ... & F'_{1xy_m}(Z) \\ ... & \ddots & ... \\ F'_{ny_1}(Z) & ... & F'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A(Z_0) = \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(Z_0) & ... & F'_{1x_n}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ F'_{nx_1}(Z_0) & ... & F'_{nx_n}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$B(Z_0) = \begin{bmatrix} F'_{1y_1}(Z_0) & ... & F'_{1xy_m}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ F'_{ny_1}(Z_0) & ... & F'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$g(Y_0) = X_0$$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{1'}$$

Это по предыдущей теореме. Мы доказали, что такое отображение g существует и что оно единственное. $\exists W \ni Y_0 \quad g \in C^1(W) \quad g : W \to \mathbb{R}^n$.

Теперь будем вычислять матрицу якоби отображения g.

$$\forall Y \in W$$

$$(1') \implies D(F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right)) = \mathbb{0}_{...}$$

$$P(Y) = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \quad P : W \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$DF(P(Y)) = \mathbb{0}_{...}$$

$$DF(Z)DP(Y) = \mathbb{0}_{...} \tag{3}$$

$$\text{в } (3) Z = P(Y)$$

$$g(Y) = \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ \vdots \\ g_n(Y) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$DP(Y) = \begin{bmatrix} g'_{1y_1}(Y) & ... & g'_{1y_m}(Y) \\ ... & \ddots & ... \\ g'_{ny_1}(Y) & ... & g'_{ny_m}(Y) \\ 1 & ... & 0 \\ ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(1), (2) \implies DF(Z) = [A(Z)B(Z)] \tag{5}$$

$$(3), (4), (5) \implies \left[\underbrace{A(Z)B(Z)}^{n+m}\right] \begin{bmatrix} Dg(Y) \\ I_m \end{bmatrix} = \mathbb{0}_{...} \tag{6}$$

$$(6) : A(Z)Dg(Y) + B(Z)I_m = \mathbb{0}_{...} \Leftrightarrow A(Z)Dg(Y) = -B(Z) \tag{7}$$

$$(7) \implies Dg(Y) = -\left(A^{-1}\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right)\right) B\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ y \end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

Глава 4

Условные экстремумы

Определение 4.1.

$$E \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2 \quad M \subset E \quad f : E \to \mathbb{R} \quad X_0 \in M$$

Тогда говорят, что функция в X_0 имеет локальный экстремум при условии M, если $\exists w \subset \mathbb{R}^n, X_0 \in w : f|_{w \cap M}$ имеет в точке X_0 локальный экстремум.

Теорема 4.1 (О множителях Лагранжа).

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad E - \text{ открытое} \quad F : E \to \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(E)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} : X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$$

$$\forall \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in E \quad rankDF\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = n \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \in E \quad F\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n$$

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad M = \left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in E : F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n\right\}$$

$$f : E \to \mathbb{R} \quad f \in C^1(E)$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} - \text{ локальный экстремум } f \text{ при условии } M. \text{ Тогда}$$

$$\exists! \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \varphi_\Lambda(Z) = f(Z) + \Lambda F(Z) \tag{11}$$

$$\nabla \varphi_\Lambda(Z_0) = \mathbb{0}^T_{n+m} (\nabla - \text{ градиент}) \tag{12}$$

$$(12) : \varphi'_{\Lambda x_1}(Z_0) = 0, \dots, \varphi'_{\Lambda x_n}(Z_0) = 0$$

$$\varphi'_{\Lambda y_1}(Z_0), \dots, \varphi'_{\Lambda y_m}(Z_0) = 0$$

Доказательство. Мы не случайно обозначили так координаты, по условию сказано, что ранг матрицы Якоби в любой точке равен n. Мы можем выбрать n столбцов так, чтобы соответсвующий определитель матрицы Якоби не был равен 0.

$$\begin{vmatrix} F'_{1x_1}(Z_0) & \dots & F'_{1x_n}(Z_0) \\ \dots & \ddots & \dots \\ F'_{nx_1}(Z_0) & \dots & F'_{nx_n}(Z_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

$$\exists W \in \mathbb{R}^m \quad Y_0 \in W \quad g : W \to \mathbb{R}^n \quad g(Y_0) = X_0$$

$$\text{при } y \in W \quad F\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbb{0}_n \Leftrightarrow X = g(Y) \tag{14}$$

$$(14) : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in M \text{ при } Y \in W \Leftrightarrow X = g(Y) \tag{14'}$$

$$h(Y) = f\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ y \end{bmatrix}\right) \quad w \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in w \implies Y \in W \tag{15}$$

$$(14'), (15) \implies \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in w \cap M \Leftrightarrow X = g(Y) \tag{16}$$

$$(16) \text{ и определение локального условного экстремума } \implies$$

$$Y_0 - \text{ локальный экстремум для } h(Y) \tag{17}$$

$$h \in C^1(W) \quad g \in C^1(W)$$

$$(17) \Rightarrow \nabla h(Y_0) = \mathbb{0}_m^T \implies Dh(Y_0) = \mathbb{0}_m^T \tag{18}$$

$$\text{Хотим ввести отображение } P(Y) = \begin{bmatrix} g(Y) \\ y \end{bmatrix}$$

$$h(Y) = f(P(Y)) \tag{19}$$

$$h(Y) = f\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

$$h \in C^1(W)$$

$$(18), (19) \implies Df(P(Y_0))DP(Y_0) = \mathbb{0}_m^T \tag{20}$$

$$P(Y_0) = \begin{bmatrix} g(Y_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = Z_0$$

$$DF(Z_0) = \nabla f(Z_0) = (\underbrace{f'_{x_1}(Z_0) \dots f'_{x_n}(Z_0)}_{\nabla_1 f(Z_0)}\,\underbrace{(f'_{y_1}(Z_0) \dots f'_{y_m}(Z_0))}_{\nabla 2 f(Z_0)} \tag{21}$$

$$(4) \implies DP(Y_0) = \begin{bmatrix} Dg(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} \tag{4'}$$

$$(4), (20), (21) \implies (\nabla_1 f(Z_0) \nabla_2 f(Z_0)) \begin{bmatrix} Dg(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} = \mathbb{0}_m^T \Leftrightarrow$$

$$\nabla_1 f(Z_0) Dg(Y_0) + \nabla_2 f(Z_0) = \mathbb{0}_m^T \tag{22}$$

$$(1), (2), (8), (22) \implies \nabla_1 f(Z_0)(-A_0^{-1} B_0) + \nabla_2 f(Z_0) = \mathbb{0}_m^T$$

$$\Leftrightarrow \nabla_2 f(Z_0) = \nabla_1 f(Z_0)(A_0^{-1} B_0) \tag{23}$$

Соотношение (23) получилось на основании того, что есть теорема о неявном отображении вместе с вычислением матрицы Якоби этого отображения (1). И необходимого условия локального экстремума функции класса C^1 (2)

$$\nabla\varphi_\Lambda(Z_0) = \mathbb{0}^T_{m+n} \tag{?}$$

Сейчас будем проверять это.

$$\text{Выпишем часть требуемых равенств:} \begin{cases} \varphi'_{\Lambda x_1}(Z_0) = 0 \\ \vdots \\ \varphi'_{\Lambda x_n}(Z_0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} f'_{x_1}(Z_0) + \lambda_1 F'_{1x_1}(Z_0) + ... + \lambda_n F'_{nx_1}(Z_0) = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n}(Z_0) + \lambda_1 F'_{1x_n}(Z_0) + ... + \lambda_n F'_{nx_n}(Z_0) = 0 \end{cases}$$

$$(24) : \nabla_1 f(Z_0) + \Lambda A_0 = \mathbb{0}^T_m \tag{24'}$$

$$(24') \implies \Lambda = -\nabla_1 f(Z_0) A_0^{-1} \tag{25}$$

Соотношение 25 означает, что если есть вектор-строка хотя бы для первых n равенств, то она одна. То, что она есть, означает что выполнены еще m равенств, которые мы пока не проверили.

$$\begin{cases} \varphi'_{\Lambda y_1}(Z_0) = 0 \\ \vdots \\ \varphi'_{\Lambda y_m} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f'_{y_1}(Z_0) + \lambda_1 F'_{1y_1}(Z_0) + ... + \lambda_n F'_{ny_1}(Z_0) = 0 \\ \vdots \\ f'_{y_m}(Z_0) + \lambda_1 F'_{1y_m}(Z_0) + ... + \lambda_n F'_{ny_m}(Z_0) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

$$(26) : \nabla_2 f(Z_0) + \Lambda B_0 = \mathbb{0}^T_m \tag{?}$$

$$(23), (25) \implies \nabla_1 f(Z_0)(A_0^{-1} B_0) - \nabla_1 f(Z_0)(A_0^{-1} B_0) = \mathbb{0}^T_m$$

■

Следствие 4.1.1 (Приложение теоремы Лагранжа).

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ji} \quad i \neq j$$

$$\max A(X), \min A(X) \text{ при } ||X||_{\mathbb{R}^n}^2 = 1$$

$$(\text{то есть при условии } x_1^2 + ... + x_n^2 = 1)$$

$$F_1(X) = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0 \quad X_+ = \begin{bmatrix} X_1^+ \\ \vdots \\ X_n^+ \end{bmatrix}$$

$$\varphi_\lambda(X) = A(X) + \lambda(x_1^2 + ... + x_n^2 - 1)$$

$$\varphi'_{\lambda x_1}(X_+) = 0, ..., \varphi'_{\lambda x_n}(X_+) = 0$$

$$\text{напишем сумму для одного i} \neq k$$

$$\begin{aligned}(a_{ik} x_i x_k + a_{kk} x_k^2 + a_{ki} x_k x_i)'_{x_k} = a_{ik} x_i + 2a_{kk} x_k + a_{ki} x_i = \\ = 2a_{kk} x_k + 2a_{ki} x_i\end{aligned}$$

$$A'_{x_k}(X) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i^+ + 2\lambda x_k^+ = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i^+ = -\lambda x_k^+, 1 \leqslant k \leqslant n \implies a x_+ = -\lambda x_+$$

$$\implies \lambda - \text{ составное число}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i^+ x_k^+ = -\lambda x_k^{+2} \implies A(x_+) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i^+ x_k^+ =$$

$$= -\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^{+2} = -\lambda$$

Предложение 4.2. A - симметричная матрица $n \times n$. Тогда $||A|| = \max |\lambda_j|$.

Теорема 4.3. A - симметричная матрица $n \times n$. B - любая матрица, не обязательно квадатная. $U = B^T B$ квадратная и симметричная, все собственные числа неотрицательные. Тогда $||B|| = \sqrt{||U||}$

Глава 5

Функциональные ряды

5.1. Функциональные последовательности и ряды

Определение 5.1. Пусть $E \neq \varnothing$ - произвольное множество, $f_n : E \to \mathbb{R}$ - функции, определённые на $E, n = 1, 2, \dots, X_0 \in E$.
Назовём X_0 **точкой сходимости функциональной последовательности** $\{f_n(X)\}$, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(X_0) \in \mathbb{R}$;
точку $X_1 \in E$ назовём **точкой рассходимости функциональной последовательности** $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(X_1)$ не существует или существут и равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 5.2. Множество всех точек сходимости $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовём **множеством сходимости**, обозначим его E_0, а множество точек расходимости назовём **множеством расходимости** и обозначим его E_1.
Какое-то из множеств E_0, E_1 может быть пустым, они обладают свойством $E_0 \cap E_1 = \varnothing, E_0 \cup E_1 = E$, поэтому оба они пустыми быть не могут.

Определение 5.3. Если $v_n : E \to \mathbb{R}$ - функции, заданные на E, то **функциональным рядом**, заданным на E, называемся символ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X), X \in E$, его частичные суммы $S_n(X)$ определяются формулой $S_n(X) = v_1(X) + \dots + v_n(X)$.

Определение 5.4. Точка X_0 - **точка сходимости ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$, если X_0 - точка сходимости функциональной последовательности $\{S_n(X)\}_{n=1}^{\infty}; X_1$ - **точка расходимости этого ряда**, если X_1 - точка расходимости функциональной последовательности $\{S_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$.
Множества сходимости и расходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ - соответственно, множества сходимости и расходимости функциональной последовательности $\{S_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 5.5. Предположим, что для функциональной последовательности $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ имеем $E_0 = E, E_1 = \varnothing$, пусть $\forall X \in E\ f(X) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(X)$.
Тогда говорим, что функциональная последовательность $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится к функции** f **на множестве** E **поточечно**. Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ имеем $E_0 = E, E_1 = \varnothing$, то для $X \in E$ полагаем $S(X) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ и говорим, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ **сходится к сумме** $S(X)$ **на множестве** E **поточечно**.

Определение 5.6 (Равномерная сходимость). Пусть $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ - функциональная последовательность, заданная на E, $f : E \to \mathbb{R}$ - функция. Будем называть $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно сходящейся к f на множестве** E, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. $\forall n > N$ и $\forall X \in E$ выполнено соотношение

$$|f_n(X) - f(X)| < \varepsilon \tag{1}$$

То, что $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E, будем записывать в виде

$$f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} f(X)$$

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ - функциональный ряд, $S : E \to \mathbb{R}$ - функция. Будем говорить, что этот функциональный ряд **равномерно сходится к** S на множестве E, если $S_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} S(X)$.

Также говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ равномерно сходится на E, если $\exists S(X)$, к которой он равномерно сходится на E, при этом функция $S(X)$ может быть не указана.

5.2. Достаточные условия равномерной сходимости

Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 5.1. Пусть $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ - функциональная последовательность, заданная на $E \neq \varnothing$. Для того, чтобы нашлась функция $f : E \to \mathbb{R}$ такая, что $f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} f(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists N :$ $\forall m, n > N$ и $\forall X \in E$ выполнялось соотношение

$$|f_m(X) - f_n(X)| < \varepsilon \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость.
Пусть $\exists f : E \to \mathbb{R}$ т.ч. $f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} f(X)$. По определению равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N$ и $\forall X \in E$ выполнено $|f_n(X) - f(X)| <$

$\frac{\varepsilon}{2}$. Для $m > N$ это же неравенство выполняется. Тогда $\forall X \in E$ имеем при $m, n > N$:

$$|f_m(X) - f_n(X)| = |(f_m(X) - f(X)) - (f_n(X) - f(X))| \leqslant$$

$$\leqslant |f_m(X) - f(X)| + |f_n(X) - f(X)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Необходимость доказана. Достаточность.
Предположим, что соотношение (2) выполнено с сф ормулированными для него условиями. Фиксируем $X \in E$, тогда (2) $\implies$ что для числовой последовательности $\{f_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено условие критерия Коши, поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(X) \overset{def}{=} f(X)$. Таким образом, получена функция $f : E \to \mathbb{R}$ т.ч. $f_n(X) \underset{n\to\infty}{\to} f(X)\ \forall X \in E$.
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и выберем N так, чтобы выполнялось соотношение (2). Фиксируем $X \in E$ и возьмём $\forall m, n > N$, тогда

$$|f_m(X) - f_n(X)| < \varepsilon \tag{2'}$$

Фиксируем m в (2'), тогда $(2')$ $\implies$

$$\lim_{n\to\infty} |f_m(X) - f_n(X)| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Но $f_n(X) \underset{n\to\infty}{\to} f(X)$, поэтому (3) $\implies$

$$|f_m(X) - f(X)| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

В соотношении (4) $X \in E$ было фиксированным, но его можно было выбирать произвольно. Таким образом, (4) $\implies$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m > N$ и $\forall X$ выполнено

$$|f_m(X) - f(X)| < 2\varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, достаточность в критерии Коши доказана. ■

Теорема 5.2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ - функциональный ряд, заданный на E. Для того, чтобы он равномерно сходился на E, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m > n > N$ и $\forall X \in E$ выполнялось соотношение:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k(X) \right| < \varepsilon \tag{5}$$

Доказательство. Если $m > n$, то $S_m(X) - S_n(X) = \sum_{k=1}^m v_k(X) - \sum_{k=1}^n v_k(X) =$
$= \sum_{k=n+1}^m v_k(X)$, поэтому утверждение теоремы следует из определения равномерной сходимости функционального ряда и предыдущей теоремы. ■

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Теорема 5.3. Пусть для функционального ряда $\sum_{n=1}^\infty v_n(X)$ справедливо соотношение $|v_n(X)| \leqslant c_n, c_n \geqslant 0$, для $\forall X \in E$ и $\forall n \geqslant 1$. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n$ сходится. Тогда рассматриваемый функциональный ряд сходится равномерно.

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall m > n > N$ выполнено $\sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon$. Теперь при $\forall X \in E$ и $m > n > N$ имеем соотношение

$$|\sum_{k=n+1}^m v_k(X)| \leqslant \sum_{k=n+1}^m |v_k(X)| \leqslant \sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon$$

Теперь утверждение теоремы следует из критерия Коши равномерной сходимости функциональных рядов. ■

Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 5.4. Пусть $v_n : E \to \mathbb{R}, b_n : E \to \mathbb{R}$ - функции, заданные на множестве E. Предположим, что последовательность $\{b_n(X)\}_{n=1}^\infty$ монотонна при $\forall X \in E$. Пусть $O_E : E \to \mathbb{R}, O_E(X) = 0\ \forall X \in E$.
Предположим, что $b_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} O_E(X)$ и что $\exists C$, не зависящая от n и $X \in E$ такая, что $|\sum_{k=1}^n v_n(X)| \leqslant C$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n(X) v_n(X)$ равномерно сходится при $X \in E$.

Доказательство. Отметим, что $\forall X \in E$ и $\forall k > n \geqslant 1$ выполнено

$$\left|\sum_{l=n+1}^{k} v_l(X)\right| = \left|\sum_{l=1}^{k} v_l(X) - \sum_{l=1}^{n} v_l(X)\right| \leqslant |\sum_{l=1}^{k} v_l(X)| + |\sum_{l=1}^{n} v_l(X)| \leqslant 2C \tag{6}$$

Для $m > n \geqslant 1$ положим $V_n(X) \equiv 0, V_{n+1}(X) = v_{n+1}(X)$,
$V_k(X) = v_{n+1}(X) + \dots + v_k(X)$, если $k > n+1$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)v_k(X) = \sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)(V_k(X) - V_{k-1}(X)) = \\ = \sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)V_k(X) - \sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)V_{k-1}(X) = \\ = \sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)V_k(X) - \sum_{l=n}^{m-1} b_{l+1}(X)V_l(X) = \\ = \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(X) - b_{k+1}(X))V_k(X) + b_m(X)V_m(X) \quad (7)\end{aligned}$$

Равенства (7) - это преобразование Абеля, применённое для функциональных рядов. Для доказательства теоремы применим критерий Коши и соотношение (7).
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n > N$ и $\forall X \in E$ выполнено
$|b_n(X)| = |b_n(X) - O_E(X)| < \varepsilon$. Тогда $\forall m > n > N$ (7) и (6) $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}|\sum_{k=n+1}^{m} b_k(X)v_k(X)| \leqslant |\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(X) - b_{k+1}(X))V_k(X)| + |b_m(X)V_m(X)| \leqslant \\ \leqslant 2C \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(X) - b_{k+1}(X)| + 2C|b_m(X)| = 2C|\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(X) - b_{k+1}(X))| + \\ + 2C|b_m(X)| = 2C|b_{n+1}(X) - b_m(X)| + 2C|b_m(X)| \leqslant \\ \leqslant 2C|b_{n+1}(X)| + 4C|b_m(X)| < 6C\varepsilon \quad (8)\end{aligned}$$

В равенстве (8) мы воспользовались монотонностью последовательности $\{b_n(X)\}$, (8) $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(X)v_n(X)$ равномерно сходится при $X \in E$. ■

Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 5.5. Предположим, что последовательность $\{b_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна $\forall X \in E$ и что $\exists C_1$ т.ч. $|b_n(X)| \leqslant C_1 \forall n$ и $\forall X \in E$. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X)$ равномерно сходится при $X \in E$. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(X) v_n(X)$ равномерно сходится при $X \in E$.

Доказательство. Применим критерий Коши. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall m > n > N$ и $\forall X \in E$ выполнено $|S_m(X) - S_n(X)| = |v_{n+1}(X) + \dots + v_m(X)| < \varepsilon$. В обозначениях соотношений (7) и (8) имеем $|V_k(X)| < \varepsilon, k \geqslant n+1$. Тогда (7) $\implies$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k(X) v_k(X)\right| &\leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(X) - b_{k+1}(X)) V_k(X)\right| + |b_m(X)||V_m(X)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(X) - b_{k+1}(X)|\varepsilon + |b_m(X)|\varepsilon = \\ &= \varepsilon\left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(X) - b_{k+1}(X))\right| + |b_m(X)|\varepsilon = \\ &= \varepsilon|b_{k+1}(X) - b_m(X)| + |b_m(X)|\varepsilon < 3C_1\varepsilon\end{aligned} \tag{9}$$

(9) $\implies$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(X) v_n(X)$ равномерно сходится при $X \in E$. ■

5.3. Переход к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности.

Теорема 5.6. Пусть E - метрическое пространство, $X_0 \in E, X_0-$ точка сгущения, $f_n : E \to \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}, f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ X\in E}}{\rightrightarrows} f(X)$.

Предположим, что $\forall n \ \exists \lim\limits_{X\to X_0} f_n(X) = A_n, A_n \in \mathbb{R}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$ и $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = A$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N$ т.ч. $\forall m, n > N$ и $\forall X \in E$ выполнено

$$|f_m(X) - f_n(X)| < \varepsilon \tag{9'}$$

Фиксируем $m, n > N$ и перейдём в (9') к пределу при $X \to X_0$, тогда $(9') \implies$

$$|A_m - A_n| = |\lim_{X\to X_0} f_m(X) - \lim_{X\to X_0} f_n(X)| = \lim_{X\to X_0} |f_m(X) - f_n(X)| \leqslant \varepsilon \tag{10}$$

(У Николая Алексеевича здесь, вероятно, опечатка)

Соотношение (10), применённое к последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, по критерию Коши влечёт существование $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathbb{R}$. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Опять выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \text{ выполнено } |f_n(X) - f(X)| < \varepsilon \ \forall X \in E \tag{11}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \text{ выполнено } |A_n - A| < \varepsilon \tag{12}$$

Пусть $N_0 = max(N_1, N_2) + 1$.

Тогда $\exists \delta : \forall X \in E, d(X, X_0) < \delta, X \neq X_0$ выполняется

$$|f_{N_0}(X) - A_{N_0}| < \varepsilon \tag{13}$$

Теперь при $X \in E, X \neq X_0, d(X, X_0) < \delta$ выполнено :

$$|f(X) - A| = |(f(X) - f_{N_0}(X)) + (f_{N_0}(X) - A_{N_0}) + (A_{N_0} - A)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(X) - f_{N_0}(X)| + |f_{N_0}(X) - A_{N_0}| + |A_{N_0} - A| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \tag{14}$$

$$(14) \implies \lim_{X\to X_0} f(X) = A.$$

■

Теорема 5.7 (О непрерывности).

$$E \quad X_0 \in E \text{ - точка сгущения}$$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n(X) \underset{n\to\infty, x\in E}{\rightrightarrows} f(X) \tag{1}$$

$$f_n \text{ непрерывна в } X_0 \forall n$$

$$\implies f \text{ непрерывна в } X_0$$

Доказательство.

$$f_n(X_0) \underset{n\to\infty}{\to} f(X_0) \tag{2'}$$

$$\forall n \quad \exists \lim_{X\to X_0} f_n(X) = f_n(X_0) \tag{2}$$

$$(1), (2), (2') \implies \exists \lim_{x\to x_0} f(X) = f(X_0)$$

■

Следствие 5.7.1 (Следствие 1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X) \tag{3}$$

$$v_n \text{ непрерывна в } X_0 \forall n$$

$$\text{и предположим (3) сходится равномерно на } E \implies$$

$$S(X) = \sum^{\infty} v_n(X) \quad S \text{ непрерывна в } X_0$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} v_k(X)$. По условию, раз ряд равномерно сходится, то и частичные суммы равномерно сходятся к $S(X)$.

$$S_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} S(X)$$

S_n – сумма конечного числа слагаемых, каждое из которых непрерывно в X_0, поэтому S_n тоже непрерывна в X_0. Тогда мы можем применить только что доказанную теорему и $S(X)$ непрерывна в X_0 ■

Следствие 5.7.2 (Следствие 2).

$$E \quad \forall x \in E \text{ - точка сгущения}$$
$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} f(X)$$
$$f_n \in C(E) \implies f \in C(E)$$

Доказательство. Доказательство следует прямо из теоремы. В каждой точке множества E по этой теореме функция непрерывна. ■

Следствие 5.7.3 (Следствие 3). v и S из Следствия 1.

$$v_n \in C(E) \quad \forall n \implies S \in C(E)$$

Доказательство. Следует из Следствия 1, примененного к каждой точке множества E. Раз точка любая, то сумма S будет непрерывна на всем множестве E. ■

Теорема 5.8 (О переходе к пределу под знаком интеграла для функционального ряда). В следующих 2 теоремах у нас будут фигурировать обычные промежутки в качестве метрического пространства.

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \quad f_n \in C([a,b]) \quad \forall n$$
$$\text{Предположим, что } f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows} f(X) \tag{5}$$

По следствию 2 функция f будет непрерывна на промежутке

$$\implies \int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{lim} \int_a^b f_n(X)dx \tag{6}$$

Доказательство.

$$I = \int_a^b f(X)dx \quad I_n = \int_a^b f_n(x)dx$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad (5) \implies \exists N : \forall n > N \text{ и } \forall x \in [a,b]$$
$$|f_n(X) - f(X)| < \varepsilon \tag{7}$$

$$(7) \implies |I_n - I| = \left| \int_a^b f_n(X)dx - \int_a^b f(X)dx \right| =$$
$$= \left| \int_a^b (f_n(X) - f(X))dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n(X) - f(X)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \quad (8)$$

$$(8) \implies (6)$$

■

Следствие 5.8.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(X) \tag{9}$$
$$v_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$v_n \in C([a,b]) \forall n$$

Предполагаем, что функциональный ряд (9) сходится равномерно. Тогда по следствию 1 из предыдущей теоремы сумма будет непрерывной функцией. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)dx \tag{10}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b v_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)dx \tag{10}$$

$$S_n(X) = \sum_{k=1}^{n} v_k(X)$$

$$S_n \in C([a,b])$$

$$S_n(X) \underset{n\to\infty, x\in[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

$$\text{Тогда по предыдущей теореме } \int_a^b S_n(X)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b S(X)dx \tag{11}$$

В правой части (11) стоит правая часть (10)

$$\int_a^b S_n(X)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} v_k(X)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b v_k(x)dx \tag{12}$$

Правая часть (12) это частичная сумма числового ряда (10)

$$(11), (12) \implies (10)$$

■

Теорема 5.9 (О почленном дифференцировании функциональной последовательности).

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\forall n \forall x \in [a,b] \exists f_n'(X) \tag{13}$$

$$\text{Предположим, что } f_n'(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows} \varphi(x) \tag{14}$$

$$\text{Также предположим, что } X_0 \in [a,b]$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(X_0) = A \in \mathbb{R} \tag{15}$$

$$\implies \exists f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$f_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows} f(X) \tag{16}$$

$$f(X_0) = A \tag{17}$$

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists f'(X) \text{ и } f'(X) = \varphi(X) \tag{18}$$

Доказательство.

$$P_{mn}(x) = f_m(x) - f_n(x)$$
$$(13) \implies \forall x \in [a,b] \quad \exists P'_{mn}(x) = f'_m(x) - f'_n(X) \tag{19}$$

Собираемся доказать соотношение (16) с помощью критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (14) \implies \exists N : \forall m,n > N \text{ и } \forall x \in [a,b]$$
$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{20}$$
$$(19),(20) \implies |P'_{mn}(x)| < \varepsilon \tag{20'}$$
$$(15) \implies \exists N_1 : \forall m,n > N_1$$
$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon \tag{21}$$
$$N_2 = \max(N, N_1)$$

$$\begin{aligned} m,n > N_2, \forall x \in [a,b] \quad (20),(21) \implies |P_{mn}(x)| &= \\ = |(P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)) + P_{mn}(x_0)| &\leqslant \\ \leqslant |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| + |P_{mn}(x_0)| &= \\ = |P'_{mn}(c)(x - x_0)| + |P_{mn}(x_0)| &< \\ < \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(b-a+1)& \end{aligned} \tag{22}$$

$$(22) \implies (16)$$

Теперь будем доказывать, что у функции f существует производная и она равна $\varphi(x)$ $x \in [a,b]$ Фиксируем точку. Будем доказывать что в ней существует производная.

$$E = [a,b] \setminus \{x\}$$

Будем рассматривать $y \in E$

$$g_n(y) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \tag{23}$$
$$g(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{24}$$

Давайте рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} g_m(y) - g_n(y) = \frac{f_m(y) - f_m(x) - (f_n(y) - f_n(x))}{y - x} &= \\ = \frac{P_{mn}(y) - P_{mn}(x)}{y - x} = \frac{P'_{mn}(c_1)(y - x)}{y - x} &= P'_{mn}(c_1) \end{aligned} \tag{25}$$

P_{mn} имеет производные в каждой точке замкнутого пространства и поэтому по теореме Лагранжа существует c_1

$$\forall\varepsilon > 0 \quad (20') \implies \exists N : \forall m, n > N \text{ и } \forall y \in [a,b] |P'_{mn}(Y)| < \varepsilon$$
$$(20'), (25) \implies \forall m, n > N \text{ и } \forall y \in E$$
$$|g_m(Y) - g_n(Y)| = |P'_{mn}(c_1)| < \varepsilon \tag{26}$$

Получено следующее: мы взяли ε, нашли номер N, что для любого Y выполнено соотношение (26). Тогда по критерию Коши сходимости последовательности существует последовательность, к которой g_n сходится равномерно

$$(26) \implies \exists \tilde{g} : E \to \mathbb{R} : g_n(Y) \underset{\substack{n\to\infty \\ y \in E}}{\rightrightarrows} \tilde{g}(Y) \tag{27}$$
$$\text{фиксируем } y \in E$$
$$(16) \implies f_n(y) \underset{n\to\infty}{\to} f(y)$$
$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x) \implies g_n(Y) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = g(y) \tag{28}$$

Давйте посмотрим на (27) и (28). в (28) сказано, что g_n равномерно стремится к $\tilde{g}$. Если возьмем конкретную точку, которая стремится к g, то это будет одна и та же функция.

$$(27), (28) \implies \tilde{g}(y) = g(y) \tag{29}$$

$$(23), (24), (27), (29) \implies \frac{f_n(Y) - f_n(x)}{y - x} \underset{\substack{n\to\infty \\ y \in E}}{\rightrightarrows} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{30}$$

Теперь будем применять теорему о переходе к пределу

$$\forall n \quad \exists \lim_{y \to x} \frac{f_n(Y) - f_n(X)}{y - x} = f'_n(x) \tag{31}$$

$$(30), (31) \implies \exists \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \varphi(x) \implies (18)$$

■

Следствие 5.9.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

$$v_n : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$\forall n, \forall x \in [a, b] \quad \exists v_n'(X)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(X) \text{ равномерно сходится на } [a, b]$$

$$x_0 \in [a, b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0) \text{ сходится } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \text{ сходится равномерно}$$

$$\text{и } \forall x \in [a, b] \quad \exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x)$$

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(X) = S_n(X)$$

$$\forall x \in [a, b] \exists S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k'(x)$$

$$\exists \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$S_n'(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows} \varphi(x)$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(X_0) = A \in \mathbb{R}$$

$$S_n(X) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[a,b]}}{\rightrightarrows} S(X) \text{ (следует из теоремы)}$$

$$S'(X) = \varphi(X) \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k'(X) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k'(x)$$

■

Пример 5.1 (Ван дер Варден). 30-е годы XX века.

$$\exists f \in C(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \nexists f'(x)$$
$$\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(x) = 1 - |x-1|$$
$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(2) = 0$$
$$x \in [2k, 2k+2] \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi(x) \overset{def}{=} \varphi(x-2k)$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n(X)) \tag{1}$$
$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$$

Проверим непрерывность $f(x)$. Применим признак Вейерштрасса сходимости функциональных рядов.

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)\right| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \forall n \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \in C(\mathbb{R}) \end{cases} \implies f \in C(\mathbb{R})$$

Наличие производной эквивалентно дифференцируемости функции в точке (из 1 семестра). Докажем от противного, что $\forall x \nexists f'(x)$. Пусть $\exists f'(x)$ в $x \in \mathbb{R}$

$$\implies f(x+h) = f(X) + f'(x)h + r(h) \tag{2}$$
$$\frac{|r(h)|}{|h|} \underset{h \to 0}{\to} 0 \tag{3}$$
$$(3) \implies \quad \exists \delta > 0 : \text{ при } 0 < |h| < \delta$$
$$\frac{|r(h)|}{|h|} < 1 \implies |f(x+h) - f(x)| \leqslant |f'(x)| \cdot |h| + |r(h)| < (|f'(x)| + 1)|h| \tag{4}$$
$$A = |f'(x)| + 1 \quad |f(x+h) - f(x)| < A|h| \tag{4'}$$
$$h_1 > 0 \quad h_2 > 0, 0 < h_1 < \delta, 0 < h_2 < \delta$$

$$(4') \implies |f(x+h_2) - f(x-h_1) - f(x) + f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x+h_2) - f(x)| + |f(x) - f(x-h_1)| \leqslant$$
$$\leqslant Ah_2 + Ah_1 = A(h_2 + h_1) \quad (5)$$

$$(5): \quad x_1 < x < x_2, x_2 - x < \delta, x - x_1 < \delta$$
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant A(x_2 - x_1) \quad (5')$$
$$\text{выберем такое } m \quad 4^m > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 4^{-m} < \delta$$
$$k \leqslant 4^m(x) < k+1 \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$a_m = \frac{k}{4^m} \quad b_m = \frac{k+1}{4^m} \quad a_m \leqslant x < b_m$$
$$b_m - a_m = \frac{1}{4^m}$$

1. n > m $4^n b_m - 4^n a_m$

$$\frac{4^n}{4^m}k + \frac{4^n}{4^m} - \frac{4^n}{4^m}k = 4^{n-m} \in \mathbb{Z}, \text{ чётное} \quad (6)$$
$$(6) \implies \varphi(4^n b_m) = \varphi(4^n a_m + \text{ чётное }) = \varphi(4^n a_n) \quad (7)$$

2. $n = m$

$$4^m b_m - 4^m a_m = \frac{4^m}{4^m} = 1 \quad (8)$$
$$(8): 4^m b_m = 4^m a_m + 1$$

3. $n < m$

$$4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m} \quad (9)$$

$$(1) \implies f(b_m) - f(a_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m))$$
$$\overset{(7)}{=} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n (\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)) \quad (10)$$
$$\forall l \in \mathbb{Z} |\varphi(l+1) - \varphi(l)| = 1 \quad (11)$$

$$(10), (11) \implies |f(b_m) - f(a_m)| \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)| - \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)| \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 1 - \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)|$$

$$\forall x_1, x_2 |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1| \tag{12}$$

$$|(1 - |x_2 - 2|) - (1 - |x_1 - 2|)| = (|x_2 - 2| - |x_1 - 2|) \leqslant$$

дальше не будем расписывать неравенство треугольника

$$|f(b_m) - f(a_m)| \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n (b_m - a_m) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{4^m} \sum_{n=1}^{m-1} 3^n = \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{4^m} \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1} >$$

$$> \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m \tag{13}$$

$$\frac{1}{4^m} = b_m - a_m$$

$$(13') : |f(b_m) - f(a_m)| > \frac{1}{2} 3^m \cdot (b_m - a_m)$$

$$b_m - x < \delta, x - a_m < \delta \quad |f(b_m) - f(a_m)| < A(b_m - a_m)$$

$$\frac{1}{2} 3^m < A$$

5.4. Равномерная сходимость семейства функций

$$E \subset \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n$$

$$f : E \times G \to \mathbb{R}$$

$$X \in E \quad Y \in G$$

$$f(X, Y)$$

$$Y_0 \in G$$

$$f(X, Y_0) \to \mathbb{R}$$

Частный случай

$$G = \mathbb{N}$$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$Y_* \in \mathbb{R}^n \quad Y_* - \text{ точка сгущения } G$$

$$\varphi : E \to \mathbb{R}$$

Определение 5.7 (Равномерная сходимость семейства функций)**.** Пусть $f(X,Y) \underset{\substack{x\in E\\ Y\to Y_*}}{\rightrightarrows} \varphi(X)$ если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists U(Y_*)\subset\mathbb{R}^n \quad \forall Y\in(U\cap G)\setminus\{Y_*\}$

$$\forall X\in E \text{ имеем } |f(X,Y)-\varphi(X)|<\varepsilon \tag{1}$$

Теорема 5.10 (Критерий Коши сходимости функцоинального семейства)**.** Пусть E,G такие, как было написано раньше. Для того чтобы существовала некоторая функция φ, к которой стремилось функциональное семейство, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0 \quad \exists U\ni Y_*:\forall Y_1,Y_2\in U\cap G\setminus\{Y_*\}\\ \forall x\in E \text{ выполнялось соотношение}\\ |f(X,Y_1)-f(X,Y_2)|<\varepsilon\end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость.

$$\varphi:E\to\mathbb{R}:f(X,Y)\underset{\substack{X\in E\\ Y\to Y_*}}{\rightrightarrows}\varphi(X) \tag{3}$$

$$(1)\implies U\ni Y_*:$$

$$\forall Y\in U\cap G\setminus\{Y_*\} \text{ и } \forall X\in E \quad |f(X,Y)-\varphi(X)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(4)\implies \forall Y_1,Y_2\in U\cap G\setminus\{Y_*\} \quad & |f(X,Y_2)-f(X,Y_1)|=\\ &=|(f(X,Y_2)-\varphi(x))-(f(X,Y_1)-\varphi(X))|\leqslant\\ \leqslant |f(X,Y_2)-\varphi(X)|+|f(X,Y_1)-\varphi(X)|&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\implies(2)\end{aligned}$$

Достаточность.
Предположим, что выполнено соотношение (2). Поскольку Y_* – точка

сгущения, давайте выберем подпоследовательность, сходящуюся к ней

$$\{Y_k\}_{k=1}^{\infty} \quad Y_k \in G \quad Y_K \neq Y_* \forall k$$

$$Y_k \underset{k\to\infty}{\to} Y_* \tag{5}$$

$$\{F_k(X)\}_{k=1}^{\infty} \quad F_k(X) = f(X, Y_k) \tag{6}$$

$$\varepsilon > 0 \quad (5) \implies \exists K_0 : \forall k > K_0 \quad Y_k \in U \cap G \tag{7}$$

$$(2), (7) \implies \forall k > K_0 \text{ и } \forall l > K_0 \text{ и } \forall X \in E$$

применяем Критерий Коши сходимости функциональной последовательности

$$|F_k(X) - F_l(X)| = (f(X, Y_k) - f(X, Y_l)) < \varepsilon \tag{8}$$

$$(2), (8) \implies \exists \varphi : E \to \mathbb{R} : F_k(X) \underset{\substack{x\in E \\ k\to\infty}}{\rightrightarrows} \varphi(X) \tag{9}$$

$$\{Y_k'\}_{k=1}^{\infty} \quad Y_k' \in G \setminus Y_* (Y_k' - \text{ произвольная последовательность })$$

$$Y_k' \to Y_* \tag{10}$$

$$Y_k^0 = \begin{cases} Y_q \text{ если } k = 2q - 1 \\ Y_q' \text{ если } k = 2q \end{cases} \tag{11}$$

$$(11), (5), (10) \implies Y_k^0 \to Y_* \tag{12}$$

$$(12) \implies \exists K_1 : \forall k > K_1 \quad Y_k^0 \in U \cap G \setminus Y_* \tag{13}$$

$$\text{Возьмём } \forall k > K_1 \text{ и } l = 2l_1 - 1, l_1 > K_1 \text{ и } \forall x \in E$$

$$(2), (13) \implies |f(X, Y_k^0) - f(X, Y_{2l_1-1}^0)| = |f(X, Y_k^0) - f(X, Y_l)| < \varepsilon \tag{14}$$

Давайте посмотрим на соотношение (14), оно действует при любом $X \in E$, при любом l_1

$$k = 2k_1, k_1 > K_1 \quad \text{ фиксируем } X \text{ и } k_1$$

$$|f(X, Y_{k_1}') - f(X, Y_{l_1})| < \varepsilon \tag{14'}$$

$$\text{по соотношению (9) если мы устремим } l_1 \text{ к } \infty$$

$$(14') \implies |f(X, Y_{k_1}') - \varphi(X)| = \lim_{l_1\to\infty} |f(X, Y_{k_1}') - f(X, Y_{l_1}) \leqslant \varepsilon| \tag{15}$$

Мы взяли любую последовательнось Y_k', любое $\varepsilon > 0$, по этому ε нашли окрестность U и такую функцию φ ■

Теорема 5.11 (О пределе равномерно сходящегося семейства функций).

$$E \subset \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n \quad X_0 - \text{ точка сгущения } E$$
$$Y_0 - \text{ точка сгущения } G$$
$$f(X,Y) \underset{\substack{X\in E\\ Y\to Y_0}}{\rightrightarrows} \varphi(X) \tag{16}$$
$$\text{Далее предполагаем } \forall Y \in G$$
$$\exists \lim_{X\to X_0} f(X,Y) = h(Y) \tag{17}$$
$$\Longrightarrow \exists \lim_{X\to X_0} \varphi(X) = \quad \exists \lim_{Y\to Y_0} h(Y) \tag{18}$$

Утверждение в том, что пределы существуют и они равны.

Доказательство. Рассмотрим любую последовательность $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty} \quad Y_k \in G \setminus Y_0 \quad Y_k \to Y_0$. Рассмотрим функциональную последовательность

$$F_k(X) = f(X, Y_k) \tag{19}$$

Поскольку есть соотношение (16), то понятно, что

$$(16) \implies F_k(X) \underset{\substack{x\in E\\ k\to\infty}}{\rightrightarrows} \varphi(X) \tag{20}$$

Если соотношение (16) годится для всего множества G, то годится оно и для любого его подмножества

$$(17) \implies \forall k \quad \exists \lim_{x\to x_0} F_k(X) = h(Y_k) \tag{21}$$
$$(20),(21) \implies \quad \exists \lim_{X\to X_0} \varphi(X) \tag{22}$$
$$\exists \lim_{k\to\infty} h(Y_k) \overset{def}{=} A$$
$$A = \lim_{X\to X_0} \varphi(X) \tag{23}$$

Поскольку A не зависит от последовательности Y_k

$$(23) \implies (18)$$

■

Следствие 5.11.1.

$$f(X,Y) \quad X \in E \quad Y \in G \subset \mathbb{R}^n$$

$$X_0 \in E \quad X_0 - \text{ точка сгущения } E \quad Y_0 \text{ точка сгущения } G$$

$$f(X,Y) \underset{\substack{X \in E \\ Y \to Y_0}}{\rightrightarrows} \varphi(X) \tag{ 24}$$

$$f(X,Y) \text{ непрерывна в } X_0 \quad \forall Y \in G \tag{25}$$

$$\implies \varphi \text{ непрерывна в } X_0 \tag{26}$$

Доказательство.

$$(25) \implies \lim_{X \to X_0} f(X,Y) = f(X_0,Y) \forall Y \in G \tag{27}$$

$$(24),(27) \implies \exists \lim_{X \to X_0} \varphi(X) = \lim_{Y \to Y_0} f(X_0,Y) \tag{28}$$

$$(24) \implies f(X_0,Y) \underset{Y \to Y_0}{\to} \varphi(X_0) \tag{29}$$

$$(28),(29) \implies \exists \lim_{X \to X_0} \varphi(X) = \varphi(X_0) \implies (26)$$

■

Следствие 5.11.2 (Следствие из следствия???).

$$f(X,Y) \quad X \in E \quad Y \in G \subset \mathbb{R}^n \quad Y_0 - \text{ точка сгущения } G$$

$$E \subset \mathbb{R}^m \quad \forall X \in E - \text{ точка сгущения } E$$

$$f(X,Y) \underset{\substack{X \in E \\ Y \to Y_0}}{\rightrightarrows} \varphi(X) \text{Предположим, что } \forall Y \in G \quad f(X,Y) \in C(E) \tag{30}$$

$$\implies \varphi \in C(E) \tag{31}$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущего следствия. Мы можем применить его к каждой точке множества E ■

Глава 6

Интегралы

6.1. Предел интеграла равномерно сходящегося функционального семейства

Теорема 6.1.

$$E = [a, b] \quad G \subset \mathbb{R}^n \quad Y_0 - \text{ точка сгущения } E$$

$$\text{имеется функциональное семейство} f(x, Y) \underset{\substack{x \in [a,b] \\ Y \to Y_0}}{\rightrightarrows} \varphi(x) \qquad (1)$$

$$\text{предположим, что } f(x, Y) \in C([a, b]) \forall Y \in G \qquad (2)$$

$$\text{по предыдущему следствию } \varphi \in C([a, b])$$

$$\text{тогда} \int_a^b f(x, Y)dx \underset{Y \to Y_0}{\to} \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

Интегралы мы имеем право писать по только что доказанному следствию (φ непрерывна)

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (1) \implies \exists Y_0 \in U :$$
$$\forall x \in [a,b] \text{ и } \forall Y \in G \cap U \setminus Y_0 \text{ имеем}$$
$$|f(x,Y) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

$$(4) \implies \left|\int_a^b f(x,Y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x,Y) - \varphi(x))dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x,Y) - \varphi(x)|dx \leqslant \int_a^b \varepsilon dx = (b-a)\varepsilon \tag{5}$$

$(5) \implies (3)$ ■

Определение 6.1 (Интеграл, зависящий от параметра).

$$g(Y) = \int_a^b f(x,Y)dx$$

Теорема 6.2 (Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра).

$$f \in C([a,b] \times [p,q])$$
$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{7}$$
$$g \in C([p,q]) \tag{8}$$

Доказательство. наша функция f равномерно непрерывна на замкнутом промежутке, поэтому по теореме Кантора

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall (x_1, y_1) \text{ и } (x_2, y_2)$$
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta \implies |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| < \varepsilon \tag{9}$$
$$y_1, y_2 \in [p,q] \quad |y_2 - y_1| < \delta$$

$$|g(y_2) - g(y_1)| = \left|\int_a^b f(x, y_2)dx - \int_a^b f(x, y_1)dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^b (f(x, y_2) - f(x, y_1))dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x, y_2) - f(x, y_1)|dx \overset{(9)}{\leqslant}$$
$$\overset{(9)}{\leqslant} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a) \tag{10}$$

(10) $\implies$ (8) ■

Теорема 6.3 (О производной интеграла, зависящего от параметра)**.**

$$f \in C([a, b] \times [p, q] = Q)$$
$$\forall (x, y) \in Q \quad \exists f'_y(x, y)$$
$$f'_y(x, y) \in C(Q) \tag{11}$$
$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$
$$\forall y \in [p, q] \exists g'(y)$$
$$g'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx \tag{12}$$

Доказательство.

$$y \in [p, q] \quad h \quad y + h \in [p, q]$$
$$g(y + h) - g(y) = \int_a^b (f(x, y + h)dx) - \int_a^b f(x, y)dx =$$
$$= \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y))dx$$

из-за непрерывности по теореме Лагранжа имеем

$$c(h, x, y) \text{ лежит между } y \text{ и } y + h$$
$$f(x, y + h) - f(x, y) = f'_y(x, c(h, x, y))h$$
продолжаем равенство

$$= \int_a^b f'_y(x, c(h, x, y)) \cdot h dx =$$

$$= \int_a^b f'_y(x, y) h dx + \int_a^b (f'_y(x, c(h, x, y)) - f'_y(x, y)) h dx =$$

$$= h \cdot \underbrace{\int_a^b f'_y(x, y) dx}_{A(y)} + h \cdot \int_a^b (f'_y(x, c(h, x, y)) - f'_y(x, y)) dx \quad (13)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ и } \forall x \in [a, b]$$

опять пользуемся теоремой Кантора

$$(11) \implies \exists \delta > 0 : \forall y_2, y_1 \in [p, q]$$
$$|y_2 - y_1| < \delta \implies |f'_y(x, y_2) - f'_y(x, y_1)| < \varepsilon \quad (14)$$
$$|c(h, x, y) - y| < |h| \quad |h| < \delta \quad (15)$$

$$(13), (14), (15) \implies |g(y + h) - g(y) - A(Y)h| \leqslant$$
$$\leqslant |h| \int_a^b |f'_y(x, c(h, x, y)) - f'_y(x, y)| dx \leqslant$$
$$\leqslant |h| \cdot \int_a^b \varepsilon dx = |h| \cdot \varepsilon(b - a) \quad (16)$$

$$(16) \implies g(y + h) - g(y) - hA(y) = r(h, y) \text{ и } \left| \frac{r(h, y)}{h} \right| \underset{h \to 0}{\to} 0 \quad (17)$$

по определению дифференцируемости

$$(17) \implies g'(y) = A(y) \implies (12)$$

■

Теорема 6.4 (об интегрировании интеграла, зависящего от параметра).

$$f \in C([a,b] \times [p,q])$$

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{18}$$

$$h(x) = \int_p^q f(x,y)dy \tag{19}$$

По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

$$g \in C([p,q]) \quad h \in C([a,b])$$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_p^q g(y)dy \tag{20}$$

$$20: \int_a^b \left(\int_p^q f(x,y)dy \right) dx = \int_p^q \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Доказательство.

$$u \in [p,q] \quad \Phi(u) = \int_p^u g(y)dy \tag{21}$$

$$x \in [a,b] \quad l(x,u) = \int_p^u f(x,y)dy \tag{22}$$

$$\Psi(u) = \int_a^b l(x,u)dx \tag{23}$$

g непрерывна, тогда Φ интеграл с переменным верхним пределом и для всякого u существует непрерывная производная

$$(21) \implies \forall u \in [p,q] \quad \exists \Phi'(u) = g(u) \tag{24}$$

$$(22) \implies \forall (x,u) \in \mathbb{Q} \quad \exists l'_u(x,u) = f(x,u) \in C(Q) \tag{25}$$

Посмотрим на функцию Ψ, это интеграл зависящий от параметра. по теореме о производной интегарла зависящего от параметра у пси существует производная

$$(23),(25) \implies \forall u \in [p,q] \quad \exists \Psi'(u)$$

$$\Psi'(u) = \int_a^b l'_u(x,u)dx = \int_a^b f(x,u)dx = g(u) \tag{26}$$

$$(24),(26) \implies \Phi'(u) = \Psi'(u) \quad \forall u \in [p,q] \tag{27}$$

$$\Phi(p) = \int_p^p ... = 0 \tag{28}$$

$$\Psi(p) = \int_a^b 0 ... = 0 \tag{29}$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница

$$(27),(28),(29) \implies \Phi(q) = \Phi(q) - \Phi(p) = \int_p^q \Phi'(u)du =$$

$$= \int_p^q \Psi'(u)du = \Psi(q) - \Psi(p) = \Psi(q) \tag{30}$$

$$(19),(30),(21),(23) \implies \int_p^q g(y)dy = \int_a^b h(x)dx$$

■

6.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 6.2.

$$f : [a,\infty) \times [p,q] \to \mathbb{R}$$
$$f \in C([a,\infty] \times [p,q])$$
$$\int_a^\infty f(x,y)dx \tag{1}$$
$$A \in [a,\infty)$$
$$g(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx \tag{2}$$

Определение 6.3. Будем говорить, что несобственный интеграл, зависящий от параметра, равномерно сходится, если

$$\exists \varphi(y), y \in [p, q]$$

$$g(A, y) \underset{\substack{A \to +\infty \\ y \in [p,q]}}{\rightrightarrows} \varphi(y) \tag{3}$$

Достаточные условия сходимости

Теорема 6.5 (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** Для того, чтобы этот интеграл сходился при y, принадлежащем замкнутому промежутку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > a : \forall A_1, A_2 > L \text{ и } \forall y \in [p, q]$$

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \tag{4}$$

Доказательство. По определению равномерной сходимости несобственного интеграла можем критерий для сходимости семейства функций

$$|g(A_2, y) - g(A_1, y)| < \varepsilon \tag{5}$$

$$A_2 > A_1 \quad g(A_2, y) - g(A_1, y) = \int_a^{A_2} (x, y) dx - \int_a^{A_1} f(x, y) dx =$$

$$= \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \tag{6}$$

$$(5), (6) \implies (4)$$

■

Теорема 6.6 (Признак Вейерштрасса сходимости несобственного интеграла)**.**

$$\int_a^\infty f(x,y)dx \tag{*}$$

$$y \in [p,q] \quad f \in C([a,\infty) \times [p,q])$$

$$h(x) \quad x \in [a,\infty) \quad h \in C([a,\infty)) \quad h(x) \geqslant 0$$

$$\forall (x,y) \quad |f(x,y)| \leqslant h(x) \tag{7}$$

$$\int_a^\infty h(x)dx \text{ сходится } \implies (*) \text{ сходится} \tag{8}$$

Доказательство.

применим Критерий Коши с прошлого семестра

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (8) \implies \exists L > 0 : \forall L < A_1 < A_2$$

$$\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx < \varepsilon \tag{9}$$

применим только что установленный критерий Коши

$$\forall y \in [p,q] \quad \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{A_1}^{A_2} |f(x,y)|dx \overset{(7)}{\leqslant}$$

$$\overset{(7)}{\leqslant} \int_{A_1}^{A_2} h(X)dx \overset{(9)}{<} \varepsilon \tag{10}$$

■

Теорема 6.7 (Признак Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов).

$$f(x,y), x \in [0,+\infty) \quad y \in E \subset \mathbb{R}^n$$
$$g(x,y)$$
$$\int_a^{\infty} f(x,y)dx \text{ сходится равномерно при } y \in E \tag{1}$$
$$g(x,y) \text{ при фиксированном } y \in E \text{ монотонны} \tag{2}$$
$$\exists M \quad \text{т.ч. } \forall x \in [a,+\infty), \forall y \in E \quad |g(x,y)| \leqslant M \implies$$
$$\int_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx \text{ сходится равномерно} \tag{3}$$

Доказательство. Будем пользоваться критерием Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (1) \implies \exists A > a : \forall A_1 > A \quad \forall A_2 > A \text{ и } \forall y \in E$$
$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \tag{5}$$

Можем применить вторую теорему о среднем $A_1 < A_2 \quad \exists A_0 \in (A_1, A_2)$

$$\text{Рассмотрим } \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| =$$
$$= \left| g(A_1,y) \int_{A_1}^{A_0} f(x,y)dx + g(A_2,y) \int_{A_0}^{A_2} f(x,y)dx \right| \overset{(3)}{\leqslant}$$
$$\overset{(3)}{\leqslant} M \left| \int_{A_1}^{A_0} f(x,y)dx \right| + M \left| \int_{A_0}^{A_2} f(x,y)dx \right| < M\varepsilon + M\varepsilon \implies$$

по критерию Коши (4)

■

Теорема 6.8 (Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла).

$$f(x,y) \quad x \in [0,\infty) \quad y \in \mathbb{R}^n$$
$$g(x,y)$$
$$\exists M : \forall A > 0 \text{ и } \forall y \in E \quad \left|\int_a^A f(x,y)dx\right| \leqslant M \tag{6}$$
$$g(x,y) \text{ монтонна } \forall y \in E \tag{7}$$
$$g(A,y) \underset{\substack{A\to+\infty \\ y\in E}}{\rightrightarrows} 0 \implies \int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx \text{ сходится равномерно при}$$
$$y \in E \tag{9}$$

Доказательство. Будем опять пользоваться критерим Коши равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a : \forall A_1 > A \text{ и } \forall y \in E$$
$$|g(A_1,y)| < \varepsilon \tag{10}$$
$$\forall A_2 > A_1 > A \exists A_0 \in (A_1,A_2) \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| =$$
$$= \left|g(A_1,y)\int_{A_1}^{A_0} f(x,y)dx + g(A_2,y)\int_{A_0}^{A_2} f(x,y)dx\right| \leqslant$$
$$(6) \implies \left|\int_{A_1}^{A_0} f(x,y)dx\right| = \left|\int_a^{A_0} f(x,y)dx - \int_a^{A_1} f(x,y)dx\right| \leqslant 2M \tag{11}$$

понятно, что второе слагаемое оценивается точно так же

$$\overset{(10),(11)}{\leqslant} \varepsilon 2M + \varepsilon 2M = 4M\varepsilon \implies (9)$$

■

Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов

Теорема 6.9 (Непрерывность). Мы не разделяем x, y, просто рассматриваем непрерывную функцию

$$f : [a, \infty) \times E \quad E \subset \mathbb{R}^n, \text{ каждая точка – точка сгущения}$$

$$f \in C([a, \infty] \times E) \tag{12}$$

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx \text{ равномерно сходится при } y \in E \tag{13}$$

$$\implies I \in C(E) \tag{14}$$

Доказательство. Давайте рассмотрим функцию

$$J(y, A) = \int_a^A f(x, y)dx \tag{15}$$

$$(12) \implies f \in C([a, A] \times E) \tag{16}$$

по теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, мы получаем

$$(16) \implies \exists J(y, A) \in C(E) \quad \forall A > a \tag{17}$$

по определению сходимости несобственного интеграла

$$(13) : J(y, A) \underset{\substack{y \in E \\ A \to \infty}}{\rightrightarrows} I(y) \tag{18}$$

По теореме о непрерывности равномерно сходящегося семейства функций предельная функция будет непрерывна, поэтому

$$(17), (18) \implies (14)$$

■

Теорема 6.10 (Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра). множество параметров это отрезок теперь

$$f \in C([a, \infty] \times [p, q]) \tag{19}$$

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx \text{ равномерно сходится при } y \in [p, q] \tag{20}$$

$$l(X) = \int_p^q f(x, y)dy$$

$$\implies \int_p^q I(y)dy = \int_a^\infty l(x)dx \tag{21}$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (20) \implies \exists A > a : \forall A_1 > A \text{ и } \forall y \in [p, q]$$

$$\left| \int_a^{A_1} f(x, y)dx - I(y) \right| < \varepsilon \tag{22}$$

по предыдущей теореме в силу соотношения (19) и (20)

$$I(y) \in C([p, q])$$

тогда соотношение (22) влечёт

$$\left| \int_p^q \left(\int_a^{A_1} f(x, y)dx \right) dy - \int_p^q I(y)dy \right| =$$
$$= \left| \int_p^q \left(\int_a^{A_1} f(x, y)dx - I(y) \right) dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_p^q \left| \int_a^{A_1} f(x, y)dx - I(y) \right| dy < \int_p^q \varepsilon dy = (q - p)\varepsilon \tag{23}$$

мы интегрируем интеграл, зависящий от параметра, так что применима теорема об интегрировании интеграла, зависящего от параметра и мы имеем право поменять местами интегралы

$$f \in C([a, A_1] \times [p, q])$$

$$\int_p^q \left(\int_a^{A_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_a^{A_1} \left(\int_p^q f(x,y)dy \right) dx = \int_a^{A_1} l(x)dx \quad (24)$$

$$(23), (24) \implies \left| \int_a^{A_1} l(x)dx - \int_p^q I(y)dy \right| < \varepsilon(q-p) \quad (25)$$

Мы получили следующее: мы взяли любое ε и нашли A для которого выполнено соотношение (25), это означает по определению сходимости несобственного интеграла (25) $\implies$ (21) ■

Теорема 6.11 (О производной несобственного интеграла, зависящего от параметра)**.**

$$f \in C([a, \infty) \times [p, q]) \quad (1)$$

$$\forall x \in [a, \infty) \quad \forall y \in [p, q] \quad \exists f'_y(x, y) \quad (2)$$

$$f'_y(x, y) \in C([a, \infty) \times [p, q]) \quad (3)$$

$$\forall y \in [p, q] I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx \text{ сходится (просто сходится!)} \quad (4)$$

$$\varphi(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y)dx \text{ сходится равномерно} \quad (5)$$

$$\implies \forall y \in [p, q] \exists I'(y) = \varphi(y) \quad (6)$$

Доказательство. Давайте рассматривать функцию

$$J(y, A) = \int_a^A f(x, y)dx \quad (7)$$

фиксируем y

$$y \in [p, q]$$
$$E = \{h : y + h \in [p, q], h \neq 0\} \tag{8}$$

будем еще рассматривать функцию

$$\Phi(y, A, h) = \frac{J(y+h, A) - J(y, A)}{h} \quad h \in E, y \in [p, q] \tag{9}$$
$$\Phi(y, A, h) = \frac{1}{h}\left(\int_a^A f(x, y+h)dx - \int_a^A f(x, y)dx\right)$$
$$(3) \implies f'_y(x, y) \in C([a, A] \times [p, q]) \tag{10}$$

если мы устремим h к 0, мы будем нахдить производную определнного интеграла, зависящего от параметра

$$(9), (10) \implies \Phi(y, A, h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_a^A f'_y(x, y)dx \tag{11}$$
$$\psi(y, A) = \int_a^A f'_y(x, y)dx \tag{12}$$

■

Лемма 6.12. $\Phi(y, A, h)$ равномерно сходится к функции при $A \to +\infty$ и $h \in E$

Доказательство. Будем пользоваться критерием Коши

$$\varepsilon > 0 \quad \exists A > a \forall A_2 > A_1 > A$$
$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f'_y(x, y)dx\right| < \varepsilon \tag{13}$$

хотим ввести ещё одну функцию $G(y, A_1, A_2) = \displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx$ (14)

хотим применять критерий Коши к функции Φ

$$\begin{aligned}
(9),(14) \implies & \Phi(y,A_2,h)-\Phi(y,A_1,h) = \\
&= \frac{1}{h}\left((J(y+h,A_2)-J(y,A_2))\right)-(J(y+h,A_1)-J(y,A_1)) = \\
&= \frac{1}{h}((J(y+h,A_2)-J(y+h,A_1))-(J(y,A_2)-J(y,A_1))) = \\
&= \frac{1}{h}(G(y+h,A_1,A_2)-G(y,A_1,A_2))
\end{aligned} \tag{15}$$

$$(14) \implies \exists G'(y,A_1,A_2) = \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x,y)dx \tag{16}$$

к разнице в (15) применима теорема Лагранжа

$$\begin{gathered}
\exists c \text{ между } y \text{ и } y+h: \\
G(y+h,A_1,A_2)-G(y,A_1,A_2) = G'(c,A_1,A_2)\cdot h
\end{gathered} \tag{17}$$

посмотрим на (15) и (17), в (15) есть множитель h

$$(15),(17) \implies \Phi(y,A_2,h)-\Phi(y,A_1,h) = G'(c,A_1,A_2) \overset{(16)}{=}$$

$$\overset{(16)}{=} \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x,c)dx \tag{18}$$

$$(13),(18) \implies |\Phi(y,A_2,h)-\Phi(y,A_1,h)| = \left|\int_{A_1}^{A_2} f'_y(x,c)dx\right| < \varepsilon \tag{19}$$

■

Доказательство (Продолжение доказательства).

В лемме мы доказли, что это выражение равномерно стремится к этой дроби

$$(9) \implies \Phi(y,A,h) \underset{\substack{y\in[p,q],h\in E \\ A\to+\infty}}{\rightrightarrows} \frac{I(y+h)-I(y)}{h} \tag{20}$$

$$\Phi(y,A,h) = \frac{1}{h}\left(\int_a^A f(x,y+h)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_a^A f'_y(x,y)dx = \psi(y,A) \tag{21}$$

(при фиксированном а это интеграл, зависящий от параметра)

при фиксированном y применима теорема о переходе к пределу в семействе функций

$$(20),(21) \implies \exists \lim_{A\to+\infty} \psi(y,A)$$
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{I(y+h)-I(y)}{h} \text{ и}$$
$$\lim_{A\to+\infty} \psi(y,A) = \lim_{h\to 0} \frac{I(y+h)-I(y)}{h} \tag{22}$$
$$(19),(22) \implies (6)$$

■

Теорема 6.13 (О несобственном интеграле от несобственного интеграла, зависящего от параметра)**.** На самом деле, она справедлива при более общей постановке, но нам сейчас это не нужно.

$$f(x,y) \in C([a,\infty)\times[p,\infty))$$
$$I(y) = \int_a^\infty |f(x,y)|dx \quad [P,Q] \qquad \int_p^\infty I(y)dy \text{ сходится}$$
$$k(x) = \int_p^\infty |f(x,y)|dy \quad [a,A] \qquad \int_a^\infty k(x)dx \text{ сходится}$$

это интеграл от неотрицательной непрерывной функции

предположим, что хотя бы одна из этих функций интегрирумеа на промежутке, указанном справа от неё, и что сходится один из интегалов справа

$$\text{тогда } \int_p^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_p^\infty f(x,y)dy\right)dx$$

Доказательство. Доказательство будет в следующем семестре, а пользоваться мы будем ей сейчас. ■

Пример 6.1 (Вычисление интеграла Дирихле).

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x}$$

$$0 < g(x,y) = e^{-xy} \leqslant 1, g(x,y) \text{ монотонна}$$

несобственный интеграл I по признаку Дирихле сходится

$$y \geqslant 0 \quad x \geqslant 0$$

По признаку Абеля $I(y) = \int_0^\infty f(x,y)g(x,y)dx = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$

равномерно сходится при $y \geqslant 0$

$$f(x,y)g(x,y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x} \in C([0,\infty)\times[0,\infty)) \tag{2}$$

по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра

$$(1),(2) \implies I(y) \in C([0,\infty)) \tag{3}$$

$$(3) \implies I(0) = \lim_{y\to+0} I(y) \tag{4}$$

$$I(0) = I$$

фиксируем некоторое $y_0 > 0$

$$F(x,y) = e^{-xy}\frac{\sin x}{x} \quad y \geqslant y_0 > 0$$

$$F'_y(x,y) = -e^{-xy}\sin x \tag{5}$$

$$(5) \implies |F'_y(x,y)| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0} \tag{6}$$

$$\int_0^\infty e^{-xy_0}dx = \frac{1}{y_0}$$

$$\varphi(y) = \int_0^\infty F'_y(x,y)dx = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx \tag{7}$$

По признаку Вейерштрасса φ сходится равномерно

$$(7) \implies I'(y) = \varphi(y) \tag{8}$$

хотим применить интегрирование по частям

$$\varphi(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx = \int_0^\infty e^{-xy}(\cos x)' dx =$$

$$= e^{-xy}\cos x|_0^\infty + y\int_0^\infty \cos x e^{-xy} dx = -1 + y\int_0^\infty (\sin x)' e^{-xy} dx =$$

$$= -1 + y\left(e^{-xy}\sin x|_0^\infty + y\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx\right) =$$

$$= -1 + y^2\int_0^\infty (e^{-xy}\sin x dx) = -1 - y^2\varphi(y)$$

$$\varphi(y)(1+y^2) = -1 \quad \varphi(y) = -\frac{1}{1+y^2} \tag{9}$$

$$(8),(9) \implies I'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad y \geqslant y_0 > y \tag{10}$$

напишем формулу Ньютона-Лейбница

$$(10) \implies I(A) - I(y_0) = \int_{y_0}^A I'(y) dy =$$

$$= -\int_{y_0}^A \frac{dy}{1+y^2} = -(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} y_0) \tag{11}$$

$$I(A) = \int_0^\infty e^{-xA}\frac{\sin x}{x} dx$$

$$|I(A)| \leqslant \int_0^\infty e^{-xA} dx = \frac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0 \tag{12}$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1 \quad (11),(12) \implies \text{при } A \to +\infty \quad 0 - I(y_0) = -(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y_0)$$

$$I(y_0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y_0 \tag{13}$$

$$(13),(4) \implies \text{при } y_0 \to 0 \implies \lim_{y\to 0+} I(y_0) = \frac{\pi}{2}$$

Пример 6.2 (Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона).

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad f(x,y) = e^{-x^2 y - y} \tag{1}$$

$$x \in [0,\infty) \quad y \in [0,\infty)$$

$$\int_0^\infty f(x,y)dx = \int_0^\infty e^{-x^2 y - y} dx = e^{-y} \int_0^\infty e^{-x^2 y} dx =$$

$$\text{замена } x\sqrt{y} = w \quad x = \frac{1}{\sqrt{y}} w$$

$$= e^{-y} \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^\infty e^{-w^2} dw = I \cdot \frac{e^{-y}}{\sqrt{(y)}} \tag{2}$$

$$\int_0^\infty (...)dy = I \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$\text{замена } y = v^2 \quad y' = 2v \quad \sqrt{y} = v$$

$$= I \cdot \int_0^\infty e^{-v^2} \cdot 2dv = I \cdot 2I = 2I^2 \tag{3}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2 y - y} dy = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)y} dy = \frac{1}{1+x^2} \tag{4}$$

$$(4) \implies \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

$$(3),(5) \implies 2I^2 = \frac{\pi}{2} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Глава 7

Числовые и функциональные ряды с комплексными слагаемыми

7.1. Числовые ряды

$$i^2 = -1 \quad c = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{C}$$
$$\overline{c} = a - bi$$
$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Определение 7.1 (Ряд комплексных слагаемых). Символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n \in \mathbb{C} \quad c_n = a_n + ib_n \tag{1}$$

Определение 7.2 (Сходимость).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3}$$

Будем говорить, что ряд (1) сходится, если сходятся (3) и (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4}$$

Если сходится ряд из c_n, то сходится и ряд из комплексно сопряжённых.

$$p \in \mathbb{C} \quad p \neq 0 \quad p = s + it$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} pc_n = p \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{5}$$

$$pc_n = (s + it)(a_n + ib_n) = (sa_n - tb_n) + i(sb_n + ta_n)$$

Определение 7.3 (Абсолютная сходимость). Ряд (1) сходится абсолютно, если сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \tag{6}$$

Теорема 7.1. Ряд (1) сходится тогда и только когда, когда сходятся ряды (2) и (3)

Следствие 7.1.1. Ряд (1) сходится, если он сходится абсолютно.

7.2. Функциональные ряды

Определение 7.4 (Комплексно-значная функция)**.** Будем говорить, что на множестве $E \neq \varnothing$ задана комплексно-значная функция, если

$$u(x) \quad v(x) : E \to \mathbb{R}$$
$$w(x) = u(x) + iv(x)$$

$$x \in E \quad \{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad w_n(x) \in \mathbb{C}$$
$$w_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$$

Определение 7.5 (Равномерное стремление)**.** Будем говорить, что w_n равномерно стремится к $\varphi(x)$

$$w_n(x) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} \varphi(x)$$

если

$$u_n(x) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} \alpha(x) \text{ и } v_n(x) \underset{\substack{n\to\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} \beta(x) \tag{7}$$

Теорема 7.2.

$$(7) \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon : \forall n > N \text{ и } \forall x \in E$$
$$|w_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

Доказательство. $\Leftarrow$ проводится точно так же, как в предыдущей теореме

$\Rightarrow$ Если выполнено (7), то для определения равномерной сходимости:

$$\exists N_1 \text{ для } \{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\exists N_2 \text{ для } \{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$
$$N = \max N_1, N_2$$
$$|w_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \underbrace{|u_n(x) - \alpha(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|v_n(x) - \beta(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

■

$$x \in E \quad \{c_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad c_n(x) \in \mathbb{C}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \tag{9}$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)$$

Определение 7.6 (Равномерная сходимость). Будем говорить, что ряд (9) сходится равномерно на множестве E, если

$$\exists \varphi(x) \quad S_n(x) \underset{\substack{n \to \infty \\ x \to E}}{\rightrightarrows} \varphi(x) \tag{10}$$

Теорема 7.3 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда с комплексными слагаемыми). Имеется функциональный ряд (9) с комплексными слагаемыми.

$$\text{Имеется } A_N \geqslant 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty \tag{11}$$
$$\forall n \text{ и } \forall x \in E |c_n(x)| \leqslant A_n \tag{12}$$
$$\text{тогда ряд (9) сходится равномерно}$$

Доказательство.

$$\forall n \text{ и } \forall x \in E \quad |c_n(x)| \leqslant A_N \tag{12}$$

$$c_n(x) = a_n(x) = ib_n(x)$$

$$(12) \implies |a_n(x)| \leqslant A_N \quad \forall n \text{ и } \forall x \in E \tag{13}$$

$$(12) \implies |b_n(x)| \leqslant A_N \quad \forall n \text{ и } \forall x \in E \tag{14}$$

(13), (14) с вещественными слагаемыми, (11) и (13) $\implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сходится равномерно на } E \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \text{ сходится равномерно на } E \tag{16}$$

$$s = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_n(x) + i \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$$

Поскольку частичные суммы выглядят таким образом, то по определению равномерной сходимости ряда, a_n равномерно стремятся к некоторой функции. Суммы мнимых частей b_n тоже равномерно стремятся к какой-то функции. По определению равномерной сходимости получаем, что требовалось доказать. ■

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$c_n \in \mathbb{C}$$

$$z = x + iy$$

$$z - \alpha$$

Определение 7.7 (Степенной ряд).

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n \tag{17}$$

Лемма 7.4 (Абеля). Предположим, что ряд (17) сходится при фиксированном $z_0 \neq \alpha$ (это ряд с комплексными слагаемыми)

$$R = |z_0 - \alpha| > 0 \implies$$

$$(17) \text{ сходится } \forall z : |z - \alpha| < R \tag{18}$$

$$\text{фиксируем } 0 < r < R$$

$$\text{при } |z - \alpha| \leqslant r \text{ ряд сходится равномерно} \tag{19}$$

Пока отвлечемся от доказательства, рассмотрим ряд.

$$w_n = p_n + iq_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \text{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{ сходится и } \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится}$$

по необходимому признаку сходимости

$$p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \exists M_1 : |p_n| \leqslant M_1 \forall n$$

$$q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \exists M_2 : |q_n| \leqslant M_2 \forall n$$

$$\implies |w_n| \leqslant |p_n| + |q_n| \leqslant M_1 + M_2$$

Провели такое рассуждение, показав, что сумма ограниченна

Доказательство. Напомню свойство комплексных чисел

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

В условии сказано, что

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_0 - \alpha)^n \text{ сходится } \implies$$

$$\text{по предыдущему рассуждению} \exists M : \forall n$$

$$|c_n (z_0 - \alpha)^n| \leqslant M \tag{20}$$

$$(20) : |c_n| \cdot |z_0 - \alpha|^n \leqslant M \Leftrightarrow |c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \tag{21}$$

$$0 < \frac{|z - \alpha|}{R} = q < 1$$

$$(21) \implies |c_n (z - \alpha)^n| = |c_n| \cdot |z - \alpha|^n \leqslant \frac{M}{R^n} \cdot |z - \alpha|^n = Mq^n \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Mq^n = \frac{Mq}{1 - q}$$

Получаем, что ряд (17) сходится абсолютно, значит, он просто сходится

$$\frac{r}{R} = q_0 < 1\text{Предположим, что выполнено}(19)$$

$$(19), (21) \implies |c_n(z-\alpha)^n| < |c_n| \cdot |z-\alpha|^n \leqslant \frac{M}{R^n} \cdot r^n = Mq_0^n \qquad (23)$$

Ряд из Mq_0^n сходится так как $q_0 < 1$. q_0 не зависит от z, если выполнено соотношение (19). Значит мы получаем, что сходимость ряда равномерная. ■

7.3. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \quad R \quad B \qquad (1)$$

1.

$$(1)\text{ сходится лишь при } z = \alpha$$
$$R \overset{def}{=} 0 \quad B \overset{def}{=} \varnothing$$

2.

$$(1)\text{ сходится при } \forall z \in \mathbb{C}$$
$$R \overset{def}{=} +\infty \quad B \overset{def}{=} \mathbb{C}$$

3.

$$\exists z_1 \neq \alpha : (1)\text{ сходится в } z_1 \text{ и } \exists z_2 : (1)\text{ не сходится в } z_2$$
$$R_2 = |z_2 - \alpha| \implies \forall z : |z-\alpha| > R_2 \quad (1)\text{ расходится}$$
$$\text{т. ч. } E = \{|z-\alpha| : (1)\text{ сходится в } z\}$$
$$|z_1 - \alpha| \in E \quad \text{ и } E \text{ ограниченно сверху} \quad \forall \rho \in E \quad \rho \leqslant |z_2 - \alpha|$$

Понятно, что (3) дополняет (1) и (2)

Определение 7.8.

$$R \overset{def}{=} \sup E \quad B \overset{def}{=} \{z : |z-\alpha| < R\}$$

Свойства сходимости

Теорема 7.5.

$$\forall z \in B \quad (1) \text{ сходится в } z \tag{2}$$

$$\forall z \notin \overline{B} \text{ замыкание} \quad (1) \text{ расходится в } z \tag{3}$$

Доказательство.

$$\rho = |z - \alpha| \quad \rho < R \implies \exists \rho_1, \rho < \rho_1 < R \tag{4'}$$

$$\rho_1 \in E \tag{4}$$

$$\text{т.е. } \exists z_1 : |z_1 - \alpha| = \rho_1 \tag{5}$$

$$\text{и } (1) \text{ сходится в } z_1 \tag{6}$$

В точке z_1 применима лемма Абеля.

$$(4'), (4), (5), (6) \implies (2)$$

$$z_0 \notin \overline{B} \Leftrightarrow |z_0 - \alpha| > R$$

$$\text{если бы } (1) \text{ сходится в } z_0 \forall z : |z - \alpha| < |z_0 - \alpha| \quad (1) \text{ сходится в } z$$

$$\tilde{z} : |\tilde{z} - \alpha| = \frac{1}{2}(R + |z_0 - \alpha|) \quad |\tilde{z} - \alpha| < |z_0 - \alpha| \quad (1) \text{ сходится в } \tilde{z}$$

$$|\tilde{z} - \alpha| > R \quad |\tilde{z} - \alpha| \in E$$

Получили противоречие с определением супремума ■

Непрерывность

Теорема 7.6.

$$0 < r < R \quad \text{если применить лемму Абеля к } z_0$$
$$\text{ряд равномерно сходится в круге } \{z : |z-\alpha| \leqslant r\}$$
$$r < \rho < R \quad |z_0 - \alpha| = \rho$$
$$z = x + iy \Leftrightarrow (x, y) \qquad z - \alpha = x - \beta + i(y - \gamma)$$
$$|z| = ||(x, y)|| \qquad \alpha = \beta + i\gamma$$

тогда степенной ряд (1) имеет вид

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)$$

$c_n(z-\alpha) = u_n(z) + iv_n(z)$, где u_n и v_n – непрерывные функции, заданные на $\mathbb{C}$. Это ряды из непрерывных функций, поэтому их сумма тоже непрерывная функция.

Определение 7.9 (Непрерывность).

$$w(z) = A(Z) + iB(z)$$

будем называть непрерывной, если непрерывны мнимая и вещественная часть

(1) непрерывна на B
Получено следующее утверждение: сумма степенного ряда по степеням $z - \alpha$ непрерывна в круге сходимости.

Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Имеется ряд (1).

$$t = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{7}$$

Он может быть равен $+\infty$
Теперь хотим определить

$$R_0 = \begin{cases} 0 \quad \text{если } t = +\infty \\ +\infty \quad \text{если } t = 0 \\ \frac{1}{t} \quad \text{если } 0 < t < \infty \end{cases} \tag{8}$$

$$R_0 = R \tag{9}$$

Теорема 7.7. R_0, опредленное в соотношении (8), является радиусом сходимости.

Доказательство. Надо рассмотреть 3 случая. Случаи 0 и $+\infty$ мы рассматривать не будем, потому что это они простые. Рассмотрим более интересный случай

$$|z_0 - \alpha| > R_0 \tag{10}$$

$$\varepsilon = |z_0 - \alpha| - R_0 > 0$$

$$\delta_0 = \frac{t^2\varepsilon}{1 + t\varepsilon} \tag{11}$$

В силу свойств верхнего предела (это было еще в далёком первом семестре)

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > t - \delta_0 \tag{12}$$

$$(12) \Leftrightarrow |c_{n_k}| > (t - \delta_0)^{n_k} \tag{12'}$$

$$(12') \implies |c_{n_k}(z_0 - \alpha)^{n_k}| > (t - \delta_0)^{n_k} \cdot (R_0 + \varepsilon)^{n_k} =$$
$$= ((t - \delta_0)(R_0 + \varepsilon))^{n_k}$$

Посчитаем теперь отдельно выражение в скобке

$$(t - \delta_0)(R_0 + \varepsilon) = \left(t - \frac{t^2\varepsilon}{1 + t\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) =$$
$$= \frac{t + t^2\varepsilon - t^2\varepsilon}{1 + t\varepsilon} \cdot \frac{1 + t\varepsilon}{t} = 1$$
$$(13) \implies c_{n_k}(z_0 - \alpha)^{n_k} \text{ не стремится к 0 при } k \to \infty$$

Ряд в точке z_0 разошёлся

$$|z_r - \alpha| < R_0 \quad \varepsilon = R_0 - |z_1 - \alpha| > 0$$
$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2\varepsilon}{1 - t\varepsilon}$$

Опять же по свойствам верхнего предела из первого семестра.

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \quad \sqrt[n]{|c_n|} < t + \delta_1 \tag{14}$$
$$(14) \Leftrightarrow |c_n| < (t+\delta_1)^n \tag{14'}$$
$$(14') \implies |c_n||z_1 - \alpha|^n < (t+\delta_1)^n (R_0 - \varepsilon) = ((t+\delta_1)(R_0-\varepsilon))^n \tag{15}$$
$$(t+2\delta_1)(R_0-\varepsilon) = \left(t + \frac{t^2\varepsilon}{1-t\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{t} - \varepsilon\right) = \frac{t - t^2\varepsilon + t^2\varepsilon}{1-t\varepsilon} \cdot \frac{1-t\varepsilon}{t} = 1 \implies$$
$$\implies (t+\delta_1)(R_0-\varepsilon) = 1 - \delta_1(R_0-\varepsilon) \overset{def}{=} q < 1 \tag{16}$$

q не зависит от n, поэтому

$$(15), (16) \implies |c_n(z-\alpha)^n| < q^n$$
$$\sum_1^\infty q^n = \frac{q}{1-q}$$

получим

$$\forall z : |z-\alpha| > R_0 \quad (1) \text{ расходится}$$
$$\forall z : |z-\alpha| < R_0 (1) \quad \text{ сходится}$$
$$(18) \implies R = R_0$$

Если бы $R \neq R_0$, то один из них больше другого. Возьмём z между ними. Тогда посмотрим на радиус сходимости R в точке z, там будет расходимость, хотя должна быть сходимость. ■

7.4. Вещественные степенные ряды

$$\mathbb{R} \leftrightarrow x + i0$$

Определение 7.10 (Вещественный степенной ряд).

$$c_n \in \mathbb{R} \quad n \geqslant 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$c_0 + \sum_{n=1}^\infty c_n (x-\alpha)^n \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Рассмотрим

$$(2)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n \quad z\in\mathbb{C}$$
$$R, B \text{ – круг сходимости (2)}$$
$$B=\{z:|z-\alpha|<R\} \quad R>0$$
$$I=B\cap\mathbb{R}=(\alpha-R,\alpha+R) \tag{3}$$

Определение 7.11 (Интервал сходимости)**.** I, которое может быть пустым, называется интервалом сходимости вещественного ряда (1).

Теорема. Он обладает следующими свойствами:
если $x_0\in I \implies$ (1) сходится в x_0 если $x_1\notin\overline{I} \implies$ (1) расходится в x_1

Доказательство.

$$x_0\in I \implies x_0\in B \implies \text{ ряд (2) сходится в } x_0 \Leftrightarrow \text{(1) сходится в } x_0$$

$$x_1\notin\overline{I}\Leftrightarrow|x_1-\alpha|>R\Leftrightarrow x_1\notin\overline{B} \implies \text{(3) расходится в } x_1$$

■

$$R=\frac{1}{t}$$
$$t=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

Есть еще одна формула для радиуса сходимости.

Теорема.

$$c_1\in\mathbb{C} \quad c_n\neq 0\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$
$$\implies \exists\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=R$$

Доказательство. Доказательство аналогично. Тут случай проще потому что предполагается, что предел существует. ■

Теорема 7.8.

$$\forall r \quad 0 < r < R \quad (1) \text{ сходится равномерно при } |x-\alpha| \leqslant r \implies$$
$$\implies c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-\alpha)^n \in C(I) \quad I = [\alpha - r, \alpha + r]$$

Теорема 7.9 (Абеля).

$$(1) \text{ сходится в } \alpha - R \implies (1) \text{ равномерно сходится на } [\alpha - R, \alpha]$$
$$\text{сумма } (1) \ \in C([\alpha - R, \alpha])$$
$$(1) \text{ сходится в } \alpha + R \implies (1) \text{ равномерно сходится на } [\alpha, \alpha + R]$$
$$\text{сумма } (1) \ \in C([\alpha, \alpha + R])$$

Доказательство. Оба случая доказываются аналогично, рассмотрим первый. c_0 и так добавляется, его писать не будем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n ((\alpha - R) - \alpha)^n \text{ сходится}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n R^n \text{ сходится} \tag{5}$$
$$\alpha - x > 0 \qquad \alpha - R < x < \alpha$$
$$c_n (x-\alpha)^n = (-1)^n c_n (\alpha - x)^n = (-1)^n c_n R^n \cdot \left(\frac{\alpha - x}{R}\right)^n \tag{6}$$

Хотим применить признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

$$u_n(x) = (-1)^n c_n R^n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$$
$$\sum_{1}^{\infty} u_n(x) \text{ сходится равномерно}$$
$$v_n(x) \text{ монотонна } \forall x$$
$$|v_n(x)| \leqslant M$$
$$0 \leqslant v_n(x) = \left(\frac{\alpha - x}{R}\right) \leqslant 1$$
$$(6) \implies (1) \text{ равномерно сходится на } [\alpha - R, \alpha]$$

■

7.5. Производная вещественного степенного ряда

Теорема 7.10. Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,\ x_0 \in \mathbb{R}, c_n \in \mathbb{R}, n \geqslant 1$ - вещественный степенной ряд с радиусом сходимости $R, 0 < R \leqslant +\infty$, и интервалом сходимости I. Тогда $\forall x \in I\ \exists S'(x)$ и справедлива формула

$$S'(x) = c_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1} (x - x_0)^{\nu} (\nu + 1) \tag{1}$$

Доказательство. Выберем $\forall r,\ 0 < r < R$
Пусть

$$A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n c_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

Вычислим радиус сходимости степенного ряда $A(x)$. Пусть R_1 - его радиус сходимости.
Пусть $t_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|c_n|},\ t = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$
Пусть $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$, тогда $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.
Справедливо следующее утверждение.
Лемма Пусть $b_n \geqslant 0, \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha,\ \alpha_n,\ \alpha > 0$.

Тогда
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n b_n = \alpha\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \tag{3}$$
Доказательство (3) следует из свойства пределов и верхних пределов, примем его как факт.
Применим лемму с $\alpha_n = \sqrt[n]{n}, b_n = \sqrt[n]{|c_n|}$, тогда получим
$$t_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|c_n|} = 1\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = t \tag{4}$$
Соотношение (4) и связь чисел t и t_1 с радиусами сходимости R и R_1 показывает, что $R = R_1$. Если I_1 - интервал сходимости ряда (2), то из предыдущего равенства следует $I_1 = I$, поэтому из свойства интервала сходимости следует, что $A(x)$ сходится при $\forall x \in I$.
Учтём, что при $x \neq x_0, x \in I$ имеем тождество
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}(x-x_0)^{\nu}\cdot(\nu+1) = \frac{1}{x-x_0}A(x), \tag{5}$$
что проверяется почленным умножением слагаемых в $A(x)$.
По свойствам радиуса сходимости степенного ряда ряд $A(x)$ равномерно сходится при $\{x : |x-x_0| < r\}$, следовательно, формула (5) показывает, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}(x-x_0)^{\nu}\cdot(\nu+1)$ равномерно сходится при $\{x : \frac{r}{2} \leqslant |x-x_0| < r\}$, поскольку при $|x-x_0| \geqslant \frac{r}{2}$ имеем $|\frac{1}{x-x_0}| \leqslant \frac{2}{r}$.
Но $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}(x-x_0)^{\nu}\cdot(\nu+1)$ - степенной ряд, поэтому, если он сходится равномерно при $\{x : \frac{r}{2} \leqslant |x-x_0| < r\}$, то он сходится равномерно при $\{x : |x-x_0| < r\}$.
Пусть $v_n(x) = c_n(x-x_0)^n$, тогда $v_1'(x) = c_1, v_n'(x) = nc_n(x-x_0)^{n-1},\ n \geqslant 2$. Из вышесказанного следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'(x)$ равномерно сходится при $\{x : |x-x_0| < r\}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ при $\{x : |x-x_0| < r\}$ сходится.
Применяя теорему о производной функционального ряда, получаем, что при этих x $\exists S'(x)$ и справедливо равенство
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x) = c_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu+1}(x-x_0)^{\nu}(\nu+1), x \in (x_0-r, x_0+r) \tag{6}$$
Поскольку $r < R$ - любое, то (6) доказывает теорему. ■

Учитывая утверждение предыдущей теоремы, в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, производная такого выражения является в силу этого утверждения аналогичным выражением.

Последующие производные степенного ряда

Пусть $S(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ - степенной ряд с добавленным слагаемым c_0, пусть $R > 0$ - его радиус сходимости, $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. Было доказано, что

$$S'(x) = c_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu+1)c_{\nu+1}(x-x_0)^{\nu};\ x \in I$$

ряд для $S'(x)$ - степенной ряд с добавленным слагаемым c_1, поэтому при $x \in I$ у него существует производная, т.е. при $x \in I$ существует вторая производная

$$S''(x) = 2c_2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (\mu+2)(\mu+1)c_{\mu+2}(x-x_0)^{\mu} \tag{7}$$

Ряд (7) опять имеет I в качестве интервала сходимости. Этот процесс продолжается далее, и, тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 7.11. Пусть $S(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, I \neq \varnothing$ - его интервал сходимости, $m \geqslant 1$.
Тогда $\forall x \in I\ \exists\ S^{(m)}(x)$ и справедлива формула

$$S^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n((x-x_0)^n)^{(m)} \tag{8}$$

Степенной ряд как ряд Тейлора

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$((x-x_0)^n)' = n(x-x_0)^{n-1}, ((x-x_0)^n)'' = n(n-1)(x-x_0)^{n-2},\ \dots$$

$$((x-x_0)^n)^{(m)} = n(n-1)\cdots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m},\ m < n$$

$$((x-x_0)^n)^{(n)} = n!,\ ((x-x_0)^n)^{n+k} \equiv 0,\ k \geqslant 1$$

Отсюда следует, что

$$((x-x_0)^n)^{(m)}|_{x=x_0} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ n!, & n = m \end{cases} \tag{9}$$

Пусть
$$S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \ x \in I \tag{10}$$
Тогда (10) $\implies S(x_0) = c_0$. Если $m \geqslant 1$, то (8), (10) $\implies$
$$S^{(m)}(x_0) = 0 + c_m \cdot m!, \ c_m = \frac{S^{(m)}(x_0)}{m!} \tag{11}$$
Из (11) находим, что
$$S(x) = S(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{12}$$
Ряд (12) называется **рядом Тейлора** для функции $S(x)$.

Интегрирование вещественного степенного ряда

Теорема 7.12. Пусть $S(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ - вещественный степенной ряд с интервалом сходимости $I \neq \varnothing$. Пусть $a, b \in I$. Тогда
$$\int_a^b S(x)dx = c_0(b - a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть R - радиус сходимости данного ряда. По условию, $R > 0, \ |a - x_0|, \ |b - x_0| < R$. Выберем r : $max(|a - x_0|, |b - x_0|) < r < R$.
Тогда данный ряд равномерно сходится при $\{x : |x - x_0| \leqslant r\}$, в частности он равномерно сходится при $x \in [a, b]$.
Тогда равенство (13) следует из теоремы об интегрировании функционального ряда. ■

Приложения предшествующей теоремы

1. При $|x| < 1$ имеем равенство
$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{14}$$

Радиус сходимости ряда (14) равен 1, поэтому, полагая $a = 0, b = x$, $x_0 = 0$, из (13) и (14) получаем

$$ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (15)$$

При $x = 1$ ряд (15) имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

По теореме Абеля ряд (15) равномерно сходится при $x \in [0,1]$, поэтому по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда и из (15) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \lim_{x \to 1-0} ln(1+x) = ln2 \qquad (16)$$

2. При $|y| < 1$ положим в (14) $x = y^2$, тогда (14) $\implies$

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n y^{2n} \qquad (17)$$

Полагая в (13) $a = 0,\ b = y,\ x_0 = 0$, при $|y| < 1$ получаем

$$arctg\ y = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \qquad (18)$$

Радиус сходимости рядов (17) и (18) равен 1, ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится по признаку Лейбница.

По теореме Абеля ряд $y + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$ равномерно сходится при $y \in [0,1]$ и является непрерывной на $[0,1]$ функцией. Поэтому

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{y \to 1-0}\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}\right) = \lim_{y \to 1-0} arctg\ y = \frac{\pi}{4} \quad (19)$$

Формула Тейлора с интегральным остатком

Далее, нам понадобится формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Теорема 7.13. Пусть $f \in C^n((a,b)),\ n \geqslant 1, x, x_0 \in (a,b), x \neq x_0$. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt \tag{20}$$

Доказательство (по индукции). Если $n = 1$, то формула Ньютона-Лейбница даёт

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt, \tag{21}$$

и (21) совпадает с (20) при $n = 1$.
Предположим, что формула (20) справедлива при n, и пусть $f \in C^{n+1}((a,b))$. Применяя интегрирование по частям, получаем равенство

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(-\frac{(x-t)^n}{n})'f^{(n)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\cdot(-\frac{f^{(n)}(t)}{n}(x-t)^n)|_{x_0}^{x} - \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(-\frac{(x-t)^n}{n})f^{(n+1)}(t)dt =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{22}$$

Применяя для функции $f \in C^{n+1}((a,b))$ формулу (20) со слагаемыми до $\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$, а затем формулу (22), получим утверждение теоремы для $f \in C^{n+1}((a,b))$.

■

Разложения элементарных функций в ряд Тейлора

Разложение e^x

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{x^m}{m!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{23}$$

где $0 < |c| < |x|,\ cx > 0$ Пусть $n_0 > |x|, q = \frac{|x|}{n_0+1} < 1$
Тогда при $n > n_0$ имеем

$$|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}| \leqslant \frac{e^{|x|}}{n_0!}|x|^{n_0}\frac{|x|}{n_0+1}\cdot\frac{|x|}{n_0+2}\dots\frac{|x|}{n+1} < \frac{e^{|x|}}{n_0!}|x|^{n_0}\cdot q^{n+1-n_0} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \mathbf{(24)}$$

поэтому (23) и (24) $(n \to \infty) \implies$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \tag{25}$$

Разложение $\cos x$

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$\cos x = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{25'}$$

Поскольку, аналогично (24), имеем $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и $|\sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, то (25') $\implies$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R} \tag{26}$$

Разложение $\sin x$

Аналогично разложению $\cos x$, получим

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{27}$$

Разложение $(1+x)^r,\ r \notin \mathbb{N}, r \neq 0$

Имеем соотношения:

$$((1+x)^r)' = r(1+x)^{r-1},\ ((1+x)^r)'' = r(r-1)(1+x)^{r-2},$$

$$\dots((1+x)^r)^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n},$$

тогда

$$((1+x)^r)^{(n)}|_{x=0} = r(r-1)\dots(r-n+1),\ n \geqslant 1 \tag{28}$$

Применим формулу Тейлора с остатком в интегральной форме при $n \geqslant 2, 0 < |x| < 1, (28) \implies$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot(r(r-1)\dots(r-n+1)(1+t)^{r-n})dt =$$

$$= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!}\cdot\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot(1+t)^{1-n}(1+t)^{r-1}dt \qquad (29)$$

Если $1 > x > 0$, то в интеграле (29) $0 \leqslant t \leqslant x$, тогда

$$0 < \frac{x-t}{1+t} \leqslant x \qquad (30)$$

Если $-1 < x < 0$, то в интеграле (29) $-1 < x \leqslant t \leqslant 0$, тогда

$$|\frac{x-t}{1+t}| = \frac{|x|-|t|}{1-|t|} \leqslant |x| \qquad (31)$$

Из (30) и (31) следует, что при $0 < |x| < 1, 0 \leqslant |t| \leqslant |x|, tx > 0$ имеем $|\frac{x-t}{1+t}| \leqslant |x|$, поэтому

$$|\int_0^x (\frac{x-t}{1+t})^{n-1}(1+t)^{r-1}dt| \leqslant \int_0^{|x|} |x|^{n-1}\cdot(1-|x|)^{-|r|-1}dt =$$

$$= |x|^n(1-|x|)^{-|r|-1} \qquad (32)$$

Положим

$$\alpha_n = \frac{|r(r-1)\cdot\dots\cdot(r-n+1)|}{(n-1)!}|x|^n(1-|x|)^{-|r|-1}, \tag{33}$$

тогда

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{|r(r-1)\cdot\dots\cdot(r-n+1)(r-n)|}{n!}\cdot|x|^{n+1}(1-|x|)^{-|r|-1}\times$$

$$\times\frac{(n-1)!}{|r(r-1)\cdot\dots\cdot(r-n+1)|}\cdot|x|^{-n}\cdot(1-|x|)^{|r|+1} = \frac{|r-n|}{n}|x|, \tag{34}$$

Имеем $\frac{|r-n|}{n} \leqslant \frac{n+|r|}{n} = 1+\frac{|r|}{n}$, поэтому при $n \geqslant n_1$, где n_1 выбрано из условия $(1+\frac{|r|}{n_1})|x| < 1$, имеем

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1 \tag{35}$$

$$(35) \implies \exists \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \geqslant 0 \tag{36}$$

Из (34) и (36) имеем

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\frac{|r-n|}{n}|x|\alpha_n) =$$

$$= (\lim_{n\to\infty}\frac{|r-n|}{n}|x|)\lim_{n\to\infty}\alpha_n = |x|\cdot\alpha \tag{37}$$

$$(37) \implies \alpha = 0 \tag{38}$$

Из (32), (36), (37) $\implies$ остаток в (29) стремится к 0 при $n\to\infty$, поэтому при $0<|x|<1$ имеем

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots \tag{39}$$

Разложение $\arcsin x, 0 < |x| < 1$

Положим в (39) $x = -y^2,\ 0 < |y| < 1$. Тогда

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+(-\frac{1}{2})(-y^2)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}y^4+\dots+(-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}y^{2n}+\dots =$$

$$= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}y^{2n} + \dots \qquad (40)$$

Теперь (40) $\Longrightarrow$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^x (1+\frac{y^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^4+\dots+\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}y^{2n}+\dots)dy =$$

$$= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \dots + \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \dots$$

Глава 8

Криволинейные интегралы

8.1. Спрямляемые кривые

Определение 8.1. Пусть $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2$ - отображение, предполагаем $\Gamma \in C([a, b])$ и отображение Γ инъективно.
Разомкнутой кривой далее в зависимости от контекста будем называть и отображение $\Gamma(\cdot)$, и образ $\Gamma([a, b])$. Если $\Gamma(a) = \Gamma(b)$, но отображение Γ инъективно на $[a, b)$, то отображение $\Gamma(\cdot)$ или образ $\Gamma([a, b])$ далее будем называть **замкнутой кривой**.
Разомкнутую или замкнутую кривую далее называем **кривой**.
Если Γ - разомкнутая кривая, то её концами будем называть точки $\Gamma(a)$ и $\Gamma(b)$, при этом также $\Gamma(a)$ будем называть **началом** $\Gamma(\cdot)$, а $\Gamma(b)$ - **конец** $\Gamma(\cdot)$. Если $\{t_k\}_{k=0}^n$ - разбиение отрезка $[a, b], a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, то множество $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^n$ назовём **разбиением кривой** $\Gamma(\cdot)$.

Определение спрямляемой кривой

Пусть $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^n$ - разбиение кривой Γ, положим

$$l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^n) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1} ||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} \tag{1}$$

$$l(\Gamma(\cdot)) \overset{def}{=} sup\ l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^n) \tag{2}$$

где в правой части (2) sup берётся по всем разбиениям кривой $\Gamma(\cdot)$. Если $l(\Gamma(\cdot)) < \infty$, то кривая $\Gamma(\cdot)$ называется **спрямлемой**, а величина $l(\Gamma(\cdot))$ называется **длиной кривой** $\Gamma(\cdot)$

Свойства спрямляемых кривых

1. $||\Gamma(b) - \Gamma(a)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant l(\Gamma(\cdot))$ - доказательство следует из того, что разбиение $\{t_k\}_{k=0}^{1}$, $t_0 = a < b = t$, участвует во множестве разбиений.
2. Пусть $a < c < b$, кривая $\Gamma([a, b])$ спрямляема;
тогда

$$l(\Gamma([a, b])) = l(\Gamma([a, c])) + l(\Gamma([c, b])) \tag{3}$$

(3) следует из того, что, не умаляя общности можно считать $c \in \{t_k\}_{k=0}^{n}$, тогда
$l(\{\Gamma(t_k)_{k=0}^{m}\}) + l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=m}^{n}) = l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{n})$, если $c = t_m$, и далее перейти к супремуму в левой и правой части.
3. Пусть $a < c < b$, тогда $l(\Gamma[a, c]) < l(\Gamma[a, b])$

> **Доказательство.** Для доказательства для $\forall$ разбиения $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m}$, $t_m = c$, рассмотрим разбиение $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m+1}, t_{m+1} = b$, тогда
> $l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m+1}) = l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m}) + ||\Gamma(t_{m+1}) - \Gamma(t_m)||_{\mathbb{R}^n} = l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m}) + ||\Gamma(b) - \Gamma(c)||_{\mathbb{R}^n}$, поэтому
>
> $$l(\Gamma([a, b])) \geqslant l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m+1}) = l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m}) + ||\Gamma(b) - \Gamma(c)||_{\mathbb{R}^n} \tag{4}$$
>
> Переходя к sup в (4), получим уточнённое неравенство:
>
> $$l(\Gamma([a, b])) \geqslant l(\Gamma([a, c])) + ||\Gamma(b) - \Gamma(c)||_{\mathbb{R}^n} > l(\Gamma([a, c])).$$
>
> ■

4. Пусть кривая $\Gamma(\cdot)$ спрямляема. Тогда

$$\lim_{c \to b-0} l(\Gamma([a, c])) = l(\Gamma([a, b])) \tag{5}$$

Доказательство. Если $a < c_1 < c_2 < b$, то по свойству 2
$l(\Gamma([a, c_2])) > l(\Gamma[a, c_1])$, $l(\Gamma([a, c_2])) + l(\Gamma([c_2, b])) = l(\Gamma([a, b]))$, поэтому функция $c : (a, b) \to \mathbb{R} :\ l(\Gamma([a, c]))$ - возрастает и $< l(\Gamma([a, b]))$ $\forall c < b$, поэтому $\exists \lim\limits_{c \to b-0} l(\Gamma([a, c])) \leqslant l(\Gamma([a, b]))$.
Предположим, что $\lim\limits_{c \to b-0} l(\Gamma([a, c])) < l(\Gamma([a, b]))$, положим

$$\delta = l(\Gamma([a, b])) - \lim_{c \to b-0} (\Gamma([a, c])) > 0$$

Поскольку $l(\Gamma([a,c])) \leqslant \lim\limits_{c\to b-0} l(\Gamma([a,c]))$, то $\forall c, a<c<b$, выполнено

$$l(\Gamma([c,b])) \geqslant \delta \tag{6}$$

Выберем произвольно $c_1 \in (a,b)$. Из (6) следует, что
$\exists \ \{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m, \ t_0 = c_1, \ t_m = b : l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m)) \geqslant \frac{3}{4}\delta$
Если $||\Gamma(t_m) - \Gamma(t_{m-1})||_{\mathbb{R}^n} > \frac{\delta}{4}$, то пусть $t'_{m-1} > t_{m-1}, t'_{m-1} < b$ и
$||\Gamma(b) - \Gamma(t'_{m-1})||_{\mathbb{R}^n} = \frac{\delta}{4}$.
Такое t'_{m-1} можно найти, поскольку $\Gamma \in C([a,b])$, и добавим t'_{m-1} к разбиению, тогда $l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m \cup \{\Gamma(t'_{m-1})\}) \geqslant l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m) \geqslant \frac{3}{4}\delta$.
Таким образом, можно полагать, что разбиение $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m$ удовлетворяет условию $||\Gamma(b) - \Gamma(t_{m-1})||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\delta}{4}$, поэтому

$$l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^{m-1}) = l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m) - ||\Gamma(t_m) - \Gamma(t_{m-1})||_{\mathbb{R}^n} \geqslant \frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

Положим $c_2 = t_{m-1}$. Теперь проводим для c_2 те же построения, что и для c_1, и получаем такое $c_3 < b$, для которого $\exists$ разбиение $\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^q$, $t_0 = c_2, t_q = c_3 : \ l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^q) \geqslant \frac{\delta}{2}$
Это построение можно продолжать далее, и получим последовательность $\{c_r\}_{r=1}^\infty, \ c_r < c_{r+1} < b \ l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^p \geqslant \frac{\delta}{2}$. Пусть $N = [\frac{2}{\delta} l(\Gamma[a,b])] + 1$, тогда, применяя N раз свойство 2 и соотношение (7), получим, что

$$l(\Gamma[c_1, c_{N+1}]) = \sum_{r=1}^N l(\Gamma[c_r, c_{r+1}]) \geqslant \sum_{r=1}^N l(\{\Gamma(t_{kr})\}_{k=0}^{q_r}) \geqslant$$

$$\geqslant N\frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} l(\Gamma([a,b])) = l(\Gamma([a,b])),$$

где разбиение $\{\Gamma(t_{kr})\}_{k=0}^{q_r}$ описано ранее,
Но

$$l([c_1, c_{N+1}]) < l(\Gamma[a,b]), \tag{9}$$

(8) и (9) противоречивы, наше предположение о том, что (5) неверно, опровергнуто. ∎

Теорема утверждает, что если кривая $\Gamma(\cdot)$ спрямляема, то функция $l(\Gamma([a,t])) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке b.
Проводя рассуждения, аналогичные вышеприведённым, можно получить следующее.
Усиление теоремы. Пусть кривая $\Gamma(\cdot)$ спрямляема.

Тогда $l(\Gamma([a,t])) \in C([a,b])$.

Определение 8.2 (Гладкая кривая)**.** Пусть $\Gamma(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ - кривая, $n \geqslant 2$. Будем называть кривую $\Gamma(\cdot)$ - **гладкой**, если $\Gamma(\cdot) \in C^1([a,b])$ и $\exists c_0 > 0 : ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} \geqslant c_0 \ \forall \ t \in [a,b]$ и, если кривая $\Gamma-$ замнкутая, то предпологаем соотношение $\mathcal{D}\Gamma(a) = \mathcal{D}\Gamma(b)$, где $\mathcal{D}\Gamma(t)$ - матрица Якоби отображения из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$. **Кусочно гладкой** кривой будем называть кривую $\Gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \exists a < c_1 < ... < c_m < b, m \geqslant 1 : \forall$ кривая $\Gamma(t) : [c_\nu, c_{\nu+1}] \to \mathbb{R}^n$ является гладкой, $0 \leqslant \nu \leqslant m$. Здесь $c_0 = a, \ c_{m+1} = b$.

Вычисление длины гладкой кривой

Теорема 8.1. Пусть $\Gamma(t) : [a,b]$ - кривая, и $\Gamma(t) \in C^1([a,b])$ (в частности, кривая $\Gamma(\cdot)$ гладкая). Тогда кривая Γ спрямляема и справедливо соотношение

$$l(\Gamma([a,b])) = \int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \tag{10}$$

Доказательство. Начнём с общего утверждения.

Лемма. пусть $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \in C([a,b])$.

Положим

$$\int_a^b F(t)dt \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{bmatrix} \tag{11}$$

Тогда

$$|| \int_a^b F(t)dt||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \int_a^b ||F(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \tag{12}$$

Считаем, не умаляя общности, что $\int_a^b F(t)dt \neq \mathbb{O}_n$, поскольку иначе неравенство также справедливо. Пусть:

$$\alpha_k = \int_a^b f_k(t)dt, \ a_k = \frac{\alpha_k}{|| \int_a^b F(t)dt||_{\mathbb{R}^n}} \tag{13}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{||\int_a^b F(t)dt||_{\mathbb{R}^n}} = \frac{||\int_a^b F(t)dt||^2_{\mathbb{R}^n}}{||\int_a^b F(t)dt||_{\mathbb{R}^n}} = ||\int_a^b F(t)dt||_{\mathbb{R}^n} \quad (14)$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f_k(t)dt = \int_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k(t)dt \leqslant$

$$\leqslant \int_a^b (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} f_k^2(t))^{\frac{1}{2}} dt = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b ||F(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \quad (15)$$

Из (13) $\implies$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{||\int_a^b F(t)dt||^2_{\mathbb{R}^n}}{||\int_a^b F(t)dt||^2_{\mathbb{R}^n}} = 1 \quad (16)$$

Теперь (14)-(16) $\implies$ (12).
Лемма доказана.
Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим $\forall$ разбиение кривой $\Gamma(\cdot)$, которое получим из $\forall$ разбиением отрезка $[a, b]$; выберем $a = t_0 < \dots < t_m = b$. Тогда из леммы следует, что $\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$,

$$||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} = ||\begin{bmatrix} \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) \\ \dots \\ \gamma_n(t_{k+1}) - \gamma_n(t_k) \end{bmatrix}||_{\mathbb{R}^n} = ||\begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_1'(t)dt \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_n'(t)dt \end{bmatrix}||_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \quad (17)$$

Теперь (17) $\implies$

$$l(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m) = \sum_{k=0}^{m-1} ||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt =$$

$$= \int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt, \quad (18)$$

поэтому (18) $\implies$

$$l(\Gamma([a, b])) = \sup_{\{\Gamma(t)_{k=0}^m\}} l(\{\Gamma(t_k)_{k=0}^m\}) \leqslant \int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \quad (19)$$

Поскольку $\Gamma(t) \in C^1([a,b])$, то $\forall\ k = 1 \dots n$ имеем $\gamma_k'(t) \in C([a,b])$ поэтому по теореме Кантора $\forall\ \gamma_k'(t)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Возьмём $\forall\varepsilon$, тогда по равномерной непрерывности $\gamma_k'(t)\ \exists\ \delta > 0 :$ $\forall t_1, t_2 \in [a,b] : |t_2 - t_1| < \delta$ выполнено $||\mathcal{D}\Gamma(t_2) - \mathcal{D}\Gamma(t_1)||_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$. Рассмотрим $\forall$ разбиение $\{t_k\}_{k=0}^m : t_{k+1} - t_k < \delta,\ k = 0, \dots, m-1$. Тогда $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем соотношение

$$||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant ||\mathcal{D}\Gamma(t) - \mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} + ||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} < ||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon \quad (20)$$

$$(20) \implies \int_{t_k}^{t_{k+1}} (||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} - \varepsilon) dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} dt = (t_{k+1} - t_k)||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} \quad (21)$$

Далее,

$$(t_{k+1} - t_k)||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} = ||(t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t_k) dt||_{\mathbb{R}^n} = ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mathcal{D}\Gamma(t) + (\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t))) dt||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)) dt||_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$
$$\leqslant ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) dt||_{\mathbb{R}^n} + ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)) dt||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix} dt||_{\mathbb{R}^n} + ||\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)) dt||_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$
$$\leqslant || \begin{bmatrix} \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) \\ \dots \\ \gamma_n(t_{k+1}) - \gamma_n(t_k) \end{bmatrix} ||_{\mathbb{R}^n} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt <$$
$$< ||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt - \varepsilon(t_{k+1} - t_k)) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} ||\mathcal{D}\Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} ||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k), or$$

$$\int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt - \varepsilon(b-a) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} ||\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon(b-a) \quad (23)$$

Теперь (23) $\implies$

$$\int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt - \varepsilon(b-a) \leqslant l(\Gamma([a,b])) + \varepsilon(b-a) \quad (24)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ (24) $\implies$

$$\int_a^b ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \leqslant l(\Gamma([a,b])) \quad (25)$$

Теперь $(19), (25) \implies (10)$. ■

Криволинейный интеграл первого рода

Определение 8.3 (Криволинейный интеграл первого рода)**.** Пусть $\Gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2$ - гладкая кривая, $f \in C(\Gamma([a,b]))$.
Криволинейным интегралом первого рода по кривой $\Gamma([a,b])$ от функции f называется выражение

$$\int\limits_{\Gamma([a,b])} f(M) dl(M) \overset{def}{=} \int_a^b f(\Gamma(t)) ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt, \quad (26)$$

символ в левой части - обозначение криволинейного интеграла первого рода.
Если $\Gamma([a,b])$ - кусочногладкая кривая, точки $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m < c_{m+1} = b$ такие, что гладкими являются кривые $\Gamma([c_k, c_{k+1}])$, то

$$\int\limits_{\Gamma([a,b])} f(M) dl(M) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{\Gamma([c_k, c_{k+1}])} f(M) dl(M)$$

Определение сумм Римана криволинейного интеграла первого рода

Пусть $\Gamma([a,b])$ - гладкая кривая, $\{t_k\}_{k=0}^m$ - разбиение отрезка $[a,b]$, $\{\tau_k\}_{k=1}^m$ - оснащение этого разбиения, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k],\ f \in C(\Gamma([a,b]))$.

Суммой Римана для интеграла $\int\limits_{\Gamma([a,b])} f(M)dl(M)$ по разбиению $\{t_k\}_{k=0}^m$ и оснащению $\{\tau_k\}_{k=1}^m$ называется выражение

$$S_\Gamma(f, \{t_k\}_{k=0}^m, \{\tau_k\}_{k=1}^m) = \sum_{k=1}^m f(\Gamma(\tau_k))l(\Gamma([t_{k-1}, t_k])) \tag{27}$$

Теорема о пределе сумм Римана

Пусть $\Gamma([a,b])$ - гладкая кривая, $f \in C(\Gamma([a,b]))$.
Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0:\ \forall$ разбиения $\{t_k\}_{k=0}^m : t_{k+1} - t_k < \delta,\ k = 0, \dots, m-1$, и $\forall$ его оснащения $\{\tau_k\}_{k=1}^m$ выполнено:

$$|\int_{\Gamma([a,b])} f(M)dl(M) - S_\Gamma(f, \{t_k\}_{k=0}^m, \{\tau_k\}_{k=1}^m)| < \varepsilon \tag{28}$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma(t) \in C^1([a,b])$, то по 1-й теореме Вейерштрасса $\exists c_1 :\ \forall t \in [a,b]$ выполнено

$$||\mathcal{D}\Gamma(t)|| \leqslant c_1 \tag{29}$$

Условие гладкости $\Gamma(t)$ влечёт существование

$$c_0 > 0 : ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} \geqslant c_0\ \forall t \in [a,b]. \tag{30}$$

Из (29), (30) и (10) $\implies$

$$c_0(s_2 - s_1) \leqslant l(\Gamma([s_1, s_2])) = \int_{s_1}^{s_2} ||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt \leqslant c_1(s_2 - s_1) \tag{31}$$

$\forall a \leqslant s_1 < s_2 \leqslant b$.
Образ кривой $\Gamma([a,b])$ - компакт, $f \in C(\Gamma([a,b]))$, по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $\Gamma([a,b])$, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \lambda > 0 :\ \forall M_1, M_2 \in \Gamma([a,b]) : ||\overline{M_1 M_2}||_{\mathbb{R}^n} < \lambda$ имеем

$$|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon \tag{32}$$

Положим $\delta = \frac{1}{c_1}\lambda, c_1$ взято из (29).
Тогда (31),(32) $\implies$ $|f(\Gamma(s_2)) - f(\Gamma(s_1))| < \varepsilon$ при $|s_2 - s_1| < \delta$, (33) поскольку

$$||\Gamma(s_2) - \Gamma(s_1)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant l(\Gamma([s_1, s_2])) \leqslant c_1(s_2 - s_1) < c_1 \cdot \frac{\lambda}{c_1} = \lambda$$

Теперь (10) и (33) при выбранном δ влекут

$$\left|f(\Gamma(\tau_k))l(\Gamma([t_{k-1},t_k])) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt\right| =$$

$$= \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(\tau_k))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt\right| =$$

$$= \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t))|||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt <$$

$$< \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt = \varepsilon l(\Gamma([t_{k-1},t_k])) \quad (34)$$

(34) $\implies$

$$|S_\Gamma(f,\{t_k\}_{k=0}^m,\{\tau_k\}_{k=1}^m) - \int_a^b f(\Gamma(t))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^m |f(\Gamma(\tau_k))l(\Gamma([t_{k-1},t_k])) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))||\mathcal{D}\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt| <$$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^m l(\Gamma([t_{k-1},t_k])) =$$

$$= \varepsilon l\Gamma([a,b]).$$

■

8.2. Ориентация кривой

Определение 8.4 (Ориентированная кривая).

$$\Gamma([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2$$
$$\Gamma(t) \quad t \in [a,b]$$

Будем говорить, что на кривой задана ориентация, если

$$\Gamma(a) \text{ – начало } \Gamma(t)$$
$$\Gamma(b) \text{ – конец } \Gamma(t)$$
$$\Gamma(a) \neq \Gamma(b)$$
$$c \in (a,b)$$

Будем говорить что при обходе ориентирвоанной кривой точки проходятся в порядке $\Gamma(a), \Gamma(c), \Gamma(b)$ Обозначение кривой с заданной ориентацией:

$$\overrightarrow{\Gamma}_{([a,b)]} \quad \overrightarrow{\Gamma}_{(t)}$$

Определение 8.5 (Противоположная ориентация). Давайте рассмотрим любое отображение

$$\Gamma_1(t) \stackrel{def}{=} \Gamma(a+b-t)$$
$$\Gamma_1(a) = \Gamma(b)$$
$$\Gamma_1(b) = \Gamma(a)$$
$$\overleftarrow{\Gamma}(t) = \overrightarrow{\Gamma_1}(t)$$

Кривая ориентирована противоположным образом.

Определение 8.6 (Ориентация на кривой). Будем говорить, что точки a, b, c, d задают ориентацию на кривой

$$\Gamma(a) = \Gamma(b)$$
$$a < c < d < b$$
$$\Gamma(a), \Gamma(c), \Gamma(d), \Gamma(b) = \Gamma(a)$$
$$\overrightarrow{\Gamma}([a, b]) \qquad \Gamma_1(t) = \Gamma(a + b - t)$$
$$\overrightarrow{\Gamma} \qquad \overleftarrow{\Gamma_1}$$

Если мы первоначально рассматриваем Γ_1, то Γ будет ей противоположно ориентирована. Ориентации всего две!!!

Определение 8.7 (Напоминание определения гладкой кривой).

$$\Gamma(t) \in C^1([a, b])$$

$$\exists \delta : ||\Gamma'(t)|| \geqslant \delta$$

Лемма 8.2.

$$\text{Имеется гладкая кривая } \Gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$
$$\text{Пусть } c_1, c_2 > 0$$
$$c_1|t_2 - t_1| \leqslant ||\Gamma(t_2) - \Gamma(t_1)||_{\mathbb{R}^n} \leqslant c_2|t_2 - t_1| \quad t_1, t_2 \in (a, b)$$

Доказательство. Геометрическое доказательство проще, алгебраическоее техническое и посложнее. Упражнение. ■

8.3. Криволинейный интеграл второго рода

Определение 8.8.

$$\Gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n \quad n \geqslant 2 \text{ – гладкая кривая}$$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \quad f \in C(\Gamma)$$

$\Gamma =$ образ $\Gamma([a,b])$ т.к. $[a,b]$ – компакт, а кривая гладкая, то Γ – компакт. Предположим, что задана ориентация на этой гладкой кривой $\vec{\Gamma}$ $M \in \Gamma([a,b])$ Тогда

$$\int_{\vec{\Gamma}([a,b])} f(M)dx_j \overset{def}{=} \int_a^b f(\Gamma(t))\gamma_j'(t)dt \qquad (1)$$

Допустим, имеется кусочно-гладкая кривая

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \vec{\Gamma}_k$$

$$\text{на каждой кривой вводим ориентацию } \vec{\Gamma}_k$$

$$\text{начало } \Gamma_{k+1} = \text{ конец } \Gamma_k \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1$$

Определение 8.9.

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{m} \int_{\vec{\Gamma}_k} f(M)dx_j \qquad (2)$$

Вернемся к определению криволинейного интеграла. Видно, что он зависит от Γ. Понятно, что существует бесконечно много отображений из отрезка $[a,b]$ на множество Γ, которые задают такую же ориентацию. В (1) криволинейный интеграл второго рода зависит от отображения, а в левой части этого равенства нет Γ. На самом деле криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации, но мы к этому подойдём не сразу.

Линейность и аддитивность криволинейного интеграла 2 рода

Теорема 8.3.

$$\vec{\Gamma} \quad c \in \mathbb{R}, f \in C(\Gamma)$$
$$\int_{\vec{\Gamma}} cf(M)dx_j = c\int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j$$
$$\Gamma \in C(\Gamma)$$
$$\int_{\vec{\Gamma}}(f(M)+g(M))dx_j = \int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j + \int_{\vec{\Gamma}} g(M)dx_j$$

Доказательство. Надо посмотреть на формулу (1), постоянная c вынесется за знак интеграла. Тот интеграл, который останется, по определению криволинейный интеграл второго рода. С суммой аналогично. С кусочно-линейными тоже. ■

Интегральные суммы для криволинейного интеграла 2 рода

Вспомним времена 2 семестра.

$$[a,b] \quad P = \{t_k\}_{k=0}^m \quad a = t_0 < ... < t_m = b$$
$$T = \{\tau_k\}_{k=1}^m \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$
$$\Gamma \text{ – ориентированная гладкая кривая. } \{N_k\}_{k=1}^m \leftrightarrow T$$

Далее для сокращения записи $[a,b]$ у Γ пропускаем.

Определение 8.10.

$$S_{\vec{\Gamma}}(f,P,T) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^m f(\Gamma(\tau_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) \tag{3}$$

Замечание (Важное переобозначение).

$$\Gamma(a) = M_0 \quad \Gamma(b) = M_m \quad \Gamma(t_k) = M_k \in \Gamma$$
$$\Gamma(\tau_k) = N_k$$

У нас кривая ориентированная, точки проходятся в порядке нумерации.

$$M_0, M_1, \dots, M_m$$

Можем выбрать точки точки, которые на кривой проходятся в порядке M_0, M_1, M_2, M_3, M_m в соответствии с выбранной ориентацией. Так как отображение Γ инъективно (а вообще биективно по определению кривой), разбиению P взаимно-однозначно сооветствует множество точек M.

$$P \leftrightarrow \{M_k\}_{k=0}^m$$

Верно и обратное.

Определение 8.11 (Сужение отображения)**.**

$$\Gamma([t_{k-1}, t_k])$$
$$\Gamma(t_k) = M_k \in \Gamma$$
$$\Gamma(\tau_k) = N_k$$
$$N_k \in \Gamma([t_{k-1}, t_k])M_{k-1} = \Gamma(t_{k-1}) - \text{начало} \quad M_k = \Gamma(t_k) - \text{конец}$$

Это будет просто дуга кривой. Опять же в силу инъективности (биективности)

$$\{N_k\}_{k=1}^m \leftrightarrow T$$

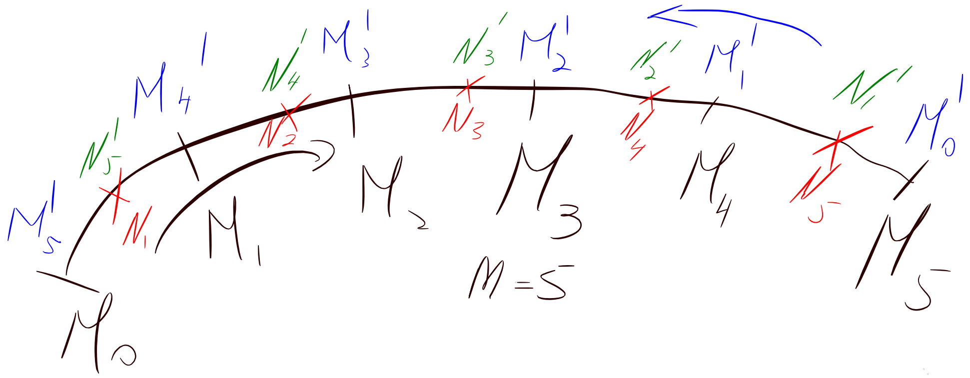
Верно и обратное. Между разбияниями и оснащениями в терминах M_k и N_k есть взаимно однозначное соответствие.

$$M_k = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{bmatrix}$$
$$\gamma_j(t_k) = x_{kj}$$
$$S_{\vec{\Gamma}}(f, P, T) = \sum_{k=1}^m f(N_k)(x_{kj} - x_{k-1,j}) \tag{4}$$

Применим предыдущие рассуждения. Пусть $\{M_k\}_{k=0}^m$ и $\{N_k\}_{k=1}^m$ удовлетворяющие условию для ориентации кривой (точки следуют в соответствии с выбранной ориентацией)

$$S_{\vec{\Gamma}}(f, \{M_k\}_{k=0}^m, \{N_k\}_{k=1}^m) = \sum_{k=1}^m f(N_k)(x_{kj} - x_{k-1,j}) \tag{5}$$

Тогда сумма (5) является некоторой интегральной суммой для криволинейного интеграла второго рода. Сумму (5) мы так же будем называть интегральными суммами.



$$M'_k = M_{m-k} \quad N'_k = N_{m-k+1} \quad x'_{kj} = x_{m-k,j} \quad M'_k = \begin{bmatrix} x'_{k1} \\ \vdots \\ x'_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\overleftarrow{\Gamma}(t) = \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{m} f(N'_k)(x'_{kj} - x'_{k-1,j}) = \sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{m-k,i} - x_{m-k+1,j}) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{m-k+1,j} - x_{m-k,j}) = -\sum_{\nu=1}^{m} f(N_\nu)(x_{\nu j} - x_{\nu-1,j}) \quad (6)$$

$$S_{\overleftarrow{\Gamma}}(f, \{M'_k\}_{k=0}^m, \{N'_k\}_{k=1}^m) =$$
$$= -S_{\overrightarrow{\Gamma}}(f, \{M_\nu\}_{\nu=0}^m, \{N_\nu\}_{\nu=1}^m)$$
$$(6')$$

$$\max_k ||M'_{k-1}M'_k||_{\mathbb{R}^n} = \max_k ||M_{m-k+1}M_{m-k}||_{\mathbb{R}^n} = \max_\nu ||M_{\nu-1}M_\nu||_{\mathbb{R}^n} \quad (7)$$

Теорема 8.4 (Теорема о приближении криволинейного интеграла второго рода к интегральной сумме).

$$\text{гладкая кривая } \vec{\Gamma}\ ([a,b]) \to \mathbb{R}^n$$
$$f \in C(\Gamma)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P = \{t_k\}_{k=0}^m |t_k - t_{k-1}| < \delta \quad 1 \leqslant k \leqslant m$$
$$|S_{\vec{\Gamma}}(f, P, T) - \int_{\vec{\Gamma}} f(M) dx_j| < \varepsilon \tag{8}$$

j у нас фиксированное, может, где-то пропустили, надо иметь это в виду

Доказательство. δ выберем в конце. Сейчас будем проводить некоторые оценки, после которых будет понятно, какую δ выбрать.

$$\underbrace{S_{\vec{\Gamma}}(f, P, T)}_{J} - \underbrace{\int_{\vec{\Gamma}} f(M) dx_j}_{I} = \sum_{k=1}^{m} f(\Gamma(\tau_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) -$$
$$- \int_a^b f(\Gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \sum_{k=1}^{m} f(\Gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma_j'(t)dt -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))\gamma_j'(t)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)))\gamma_j'(t)dt \tag{9}$$

f непрерывна на Γ, а это компакт, значит, справедлива теорема Кантора

$$c_3 \quad \forall \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 \in \Gamma \quad ||\tilde{M}_1 \tilde{M}_2||_{\mathbb{R}^n} < \delta_0 \implies |f(\tilde{M}_2) - f(\tilde{M}_1))| < c_3\varepsilon \tag{10}$$

Теперь хотим определить δ_0. Вспомним лемму между темами. Там фигурировало c_1 слева, c_2 справа

$$\delta : c_2\delta < \delta_0 \tag{11}$$

$$(10),(11) \implies t_k - t_{k-1} < \delta \forall k, \tau_k \in [t_{k-1}, t_k] \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \implies$$
$$\implies |f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t))| < c_3\varepsilon \qquad (12)$$

$$(9)-(12) \implies |J - I| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)))\gamma_j'(t)dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t))||\gamma_j'(t)|dt <$$
$$< c_3\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_j'(t)|dt =$$
$$= c_3\varepsilon \int_a^b |\gamma_j'(t)|dt \leqslant c_3\varepsilon \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots (\gamma_n'(t))^2}dt =$$
$$= c_3\varepsilon \int_a^b ||D\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} dt = c_3\varepsilon \underbrace{L(\Gamma)}_{\text{длина кривой}} \qquad (13)$$

$$c_3 = \frac{1}{l(\Gamma)}$$

■

Замечание (Переформулировка теоремы)**.**

$$\vec{\Gamma} \quad f \in C(\Gamma) \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 :$$
$$\forall \{M_k\}_{k=0}^m \quad M_k \in \Gamma \quad ||M_{k-1}M_k||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$$
$$\text{и } \forall \{N_k\}_{k=1}^m \quad \left| S_{\vec{\Gamma}}(f, \{M_k\}_{k=0}^m, \{N_k\}_{k=1}^m) - \int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j \right| < \varepsilon \qquad (14)$$

Доказательство. ε задано. Выберем δ

$$\delta \quad P \quad |t_k - t_{k-1}| < \delta$$
$$c_1 \text{ из леммы}$$
$$c_1|t_k - t_{k-1}| \leqslant ||\underbrace{\Gamma(t_k)}_{M_k} - \underbrace{\Gamma(t_{k-1})}_{M_{k-1}})||_{\mathbb{R}^n} \text{это Лемма}$$
$$\delta_1 = c_1\delta$$
$$\text{Если } ||\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1 = c_1\delta \implies$$
$$\implies |t_k - t_{k-1}| < \delta$$

Это некоторая интегральная сумма с некоторыми t_k и τ_k (недавно была такая теорема, потом тэгну) и в силу выбора δ_1. c_1 из той леммы, все доказано. В формулировке (14) нет никакого $\Gamma(t)$. Следовательно, криволинейный интеграл второго рода по гладкой кривой не зависит от $\Gamma(t)$. По кусочно-гладкой кривой тоже. ■

Еще свойства криволинейных интегралов второго рода

Теорема 8.5.

$$\overrightarrow{\Gamma} \ \text{– гладкая кривая} \quad f \in C(\Gamma)$$
$$\overleftarrow{\Gamma}$$
$$\int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}} f(M)dx_j = -\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} f(M)dx_j \tag{15}$$

Доказательство. $\varepsilon > 0 \quad \delta_1$
Выберем точки, чтобы они находились в соответствии с ориентацией кривой.

$$\underbrace{\{M_k\}_{k=0}^m}_{\overrightarrow{\Gamma}} \quad M_k \in \Gamma$$
$$||M_k M_{k-1}||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$$
$$\forall k$$
$$N_k \in \Gamma([M_{k-1}, M_k]) M'_k = M_{m-k} \quad N'_k = N_{m-k+1}$$
$$\underbrace{\{M'_k\}_{k=0}^m}_{\overleftarrow{\Gamma}}$$
$$S_{\overrightarrow{\Gamma}}(f, \{M_k\}_{k=0}^m, \{N_k\}_{k=1}^m) + S_{\overleftarrow{\Gamma}}(f, \{M'_k\}_{k=0}^m, \{N'_k\}_{k=1}^m) = 0 \tag{16}$$

$$(16) = \left|\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} f(M)dx_j + \int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}} f(M)dx_j\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} f(M)dx_j + \int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}} f(M)dx_j - (S_{\overrightarrow{\Gamma}}(f, \{M_k\}, \{N_k\}) +\right.$$

$$\left. + S_{\overleftarrow{\Gamma}}(f, \{M'_k\}, \{N'_k\}))\right| \leqslant \left|\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} f(M)dx_j - S_{\overrightarrow{\Gamma}}(f, \{M_k\}, \{N_k\})\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}} f(M)dx_j - S_{\overleftarrow{\Gamma}}(f, \{M'_k\}, \{N'_k\})\right| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \implies (15)$$

$$||M_{k-1}M_k||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1 \forall k \Leftrightarrow$$
$$M'_{k-1}M'_k||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1 \tag{7}$$

■

Теорема 8.6.

$$\overrightarrow{\Gamma}([a, b]) \to \mathbb{R}^n$$

$$c \in \mathbb{R}\Gamma(a) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \quad \Gamma(b) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} c dx_j = c(y_j - x_j^*)$$

Доказательство. Гладкая кривая

$$\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} c dx_j = \int_a^b c\gamma'_j(t) = c(\gamma_j(b) - \gamma_j(a)) = c(y_j - x_j^*)$$

кусочно-гладкая кривая

$$M_k = \begin{bmatrix} x_{k^1} \\ \vdots \\ x_{k^n} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{N} \overrightarrow{\Gamma}_k$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_k \text{ начало } M_k \text{ и конец } M_{k+1}$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} c dx_j = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\overrightarrow{\Gamma}_k} c dx_j = \sum_{k=1}^{N} c(x_{k+1,j} - x_{k,j})$$

■

Теорема 8.7.

$$\vec{\Gamma} \quad f \in C(\Gamma)$$

$$\left|\int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j\right| \leqslant \int_{\Gamma} |f(M)|dl(M)$$

Доказательство. Гладкая кривая

$$||D\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + ... + (\gamma_n'(t))^2}$$

$$\left|\int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j\right| = \left|\int_a^b f(\Gamma(t))\gamma_j'(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(\Gamma(t))||\gamma_j'(t)|dt \leqslant \int_a^b |f(\Gamma(t))|||D\Gamma(t)||_{\mathbb{R}^n}dt =$$

$$= \int_{\Gamma} f(M)dl(M)$$

Кусочно-гладкая кривая

$$\vec{\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{N} \vec{\Gamma}_k$$

$$\left|\int_{\vec{\Gamma}} f(M)dx_j\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \int_{\vec{\Gamma}_k} f(M)dx_j\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \left|\int_{\vec{\Gamma}_k} f(M)dx_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} |f(M)|dl(M) = \int_{\Gamma} f(M)dl(M)$$

Это по определению криволинейный интеграл 1 рода ■

Глава 9

Теория функции комплексной переменной

9.1. Основные определения

$$\mathbb{C}$$
$$Z = x + iy$$
$$x = \operatorname{Re} z \quad Y = \operatorname{Im} z \quad \overline{z} = x - iy$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x + i0 = x$$

$$\text{Допустим есть } E \subset \mathbb{C} \quad E^* \subset \mathbb{R}^2$$
$$z = x + iy \in E \Leftrightarrow (x, y) \in E^*$$
$$z, \zeta \in \mathbb{C}$$
$$d(z, \zeta) \overset{def}{=} |z - \zeta|$$

Таким образом, $\mathbb{C}$ – метрическое пространство
Будем переносить сюда непрерывность и т.д.

$$f : E \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$$
$$f^* : E^* \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$$
$$f \leftrightarrow f^*$$
$$f^*(x, y) \stackrel{def}{=} f(z), \text{ если } z = x + iy$$

Когда мы говорили о рядах с комплексными слагаемыми, там шла речь о пределе ряда с комплексными слагаемыми. Поскольку $\mathbb{C}$ – метрическое пространство, можно применить определение предела последовательности для него.

$$c_n = a_n + ib_n \quad c \in \mathbb{C}$$

1. $c_n \to c$ по определению $\exists a, b : \quad a_n \to a, b_n \to b \quad c = a + ib$
2. $c_n \to c$ если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \varepsilon$

Теорема 9.1. (1) $\Leftrightarrow$ (2)

Доказательство. Если выполнено (1), выбираем N_1, N_2, затем возьмём $N = max(N_1, N_2)$

$$(1) \implies (2)$$
$$|c_n - c| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$(2) \implies (1)$$

$$\left.\begin{aligned} |a_n - a| \leqslant |c_n - c| \\ |b_n - b| \leqslant |c_n - c| \end{aligned}\right\} \implies \text{ч.т.д}$$

■

Определение 9.1 (Бесконечный предел).

$$c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ если } \forall L > 0 \quad \exists N : \forall n > N \text{ выполнено}$$
$$|c_n| > L$$

Это было дополнение к тому, о чем мы говорили в рядах с комплексными слагаемыми.

Напомню, что нам известно, то такое точка сгущения для любого метрического пространства.

Определение 9.2 (Предел функции).

$$E \subset \mathbb{C}$$
$$\alpha \in E \text{ – точка сгущения } E$$
$$f : E \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$$
$$A \in \mathbb{C} \quad f(z) \underset{z \to \alpha}{\longrightarrow} A \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$
$$\forall z \in E, z \neq \alpha, |z - \alpha| < \delta$$
$$|f(z) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

Это давно знакомое определение функции в абстрактном виде.

Свойства пределов

Дальше везде предполагается, что $z \to \alpha$, не будем это писать.

1. $\lim c f(z) = c \lim f(z) \quad c \in \mathbb{C}$
2. $\lim(f(z) + g(z)) = \lim f(z) + \lim g(z)$
3. $\lim f(z) g(z) = \lim f(z) \cdot \lim g(z)$
4. $f(z) \neq 0 \forall z \in E \setminus \{\alpha\} \quad \lim f(z) \neq 0 \implies \lim \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\lim f(z)}$
5. f, как в 4 $\implies \lim \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{\lim g(z)}{\lim f(z)}$

Все доказательства проходят так же, как и в вещественном случае, но докажем самое существенное – 4.

Доказательство.

$$\lim f(z) = A \neq 0$$
$$\varepsilon_0 = \frac{|A|}{2} \quad \exists \delta_0 > 0 : \forall z \in E, z \neq \alpha, |z - \alpha| < \delta_0$$
$$|f(z) - A| < \frac{|A|}{2}$$

По неравенству треугольника, записанному со знаком минус

$$|f(z)| \geqslant |A| - |f(z) - A| > |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{1}{2}|A| \tag{4}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0 \quad \forall z \in E, z \neq \alpha, |z - \alpha| < \delta$$

$$|f(z) - A| < \frac{A^2 \varepsilon}{2} \tag{5}$$

$$\left|\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A - f(z)}{f(z)A}\right| = \frac{|A - f(z)|}{|f(z)| \cdot |A|} \underset{(4),(5)}{<} \frac{A^2}{2}\varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} = \varepsilon$$

это по свойствам модулей комплексных чисел $|cd| = |c| \cdot |d|$ $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{|c|}{|d|}$ ■

Определение 9.3 (Бесконечный предел).

$$E \subset \mathbb{C}$$

$$\alpha \text{ – точка сгущения } E$$

$$f : E \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$f(z) \underset{z \to \alpha}{\longrightarrow} \infty \text{ если } \forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall z \in E$$

$$z \neq \alpha, |z - \alpha| < \delta$$

$$|f(z)| > L$$

Определение 9.4 (Непрерывность).

$$E \subset \mathbb{C}$$

$$\alpha \text{ – точка сгущения } E, \alpha \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$\exists \lim_{z \to \alpha} f(z) \text{ и } \lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

Верны все свойства непрерывности для функций вещественных переменных. Доказывается по свойствам пределов.

9.2. Частные производные комплексно-значных функций

Определение 9.5 (Внутренняя точка).

$$E \subset \mathbb{C}$$
$$z_0 \in E$$
$$\exists \delta > 0 : \quad \forall z, |z - z_0| < \delta$$
$$z \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}, \mathbb{C} \qquad E^* \subset \mathbb{R}^2$$
$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad u^*(x, y) \quad v^*(x, y)$$
$$u^*(x, y) = u(x + iy)$$
$$v^*(x, y) = v(x + iy)$$
$$\exists u_x^{*\prime}(x_0, y_0) \text{ и } \exists v_x^{*\prime}(x_0, y_0)$$
$$\exists u_y^{*\prime}(x_0, y_0) \text{ и } \exists v_y^{*\prime}(x_0, y_0)$$
$$f_x'(z_0) \overset{def}{=} u_x^*{}'(x_0, y_0) + iv_x^*{}'(x_0, y_0) \tag{6}$$
$$f_y'(z_0) \overset{def}{=} u_y^*{}'(x_0, y_0) + iv_y^*{}'(x_0, y_0) \tag{7}$$

Есть комплексно-значная функция, заданная на подмножестве $\mathbb{C}$, мы определяем операции частной производной по x и по y, которые по определению равны вот такой сумме

$$f_x'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{8}$$
$$f_y'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} \tag{9}$$

Доказательство.

$$u_x^*{}'(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u^*(x_0 + h, y_0) - u^*(x_0, y_0)}{h} \tag{10}$$
$$v_x^*{}'(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{v^*(x_0 + h, y_0) - v^*(x_0, y_0)}{h} \tag{11}$$

$$(10),(11) \implies \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(z_0+h)-u(z_0)+i(v(z_0+h)-v(z_0))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(z_0+h)-u(z_0)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(z_0+h)-v(z_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{u^*(x_0+h,y_0)-u^*(x_0,y_0)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v^*(x_0+h,y_0)-v^*(x_0,y_0)}{h} =$$
$$= {u_x^*}'(x_0,y_0) + i{v_x^*}'(x_0,y_0) \overset{(6)}{\implies} (8)$$
$$u(z_0+ih) = u^*(x_0,y_0+h) \quad E\subset\mathbb{C}$$
$$v(z_0+ih) = v^*(x_0,y_0+h) \quad z_0\in E$$

■

Свойства частных производных

l = x или y (неважно)

1. $(cf)'_l(z_0) = cf'_l(z_0)$
2. $(f+g)'_l(z_0) = f'_l(z_0) + g'_l(z_0)$
3. $(fg)'_l(z_0) = f'_l(z_0)g(z_0) = f(z_0)g'_l(z_0)$
4. $f(z) \neq 0 \forall z\in E \quad \left(\frac{1}{f}\right)'_l(z_0) = -\frac{f'_l(z_0)}{f(z_0)}$
5. f как в 4, тогда $\left(\frac{g}{f}\right)_l(z_0) = \frac{g'_l(z_0)f(z_0)-g(z_0)f'_l(z_0)}{f^2(z_0)}$

Все доказывается аналогично при помощи предыдущего утверждения. Докажем 4 как самое показательное.

Доказательство.

$$l = x \quad \left(\frac{1}{f}\right)'_x (z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(z_0+h)} - \frac{1}{f(z_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(z_0+h)f(z_0)} \cdot \frac{f(z_0) - f(z_0+h)}{h} =$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \cdot \frac{1}{f(z_0)f(z_0+h)} =$$

$$= -\frac{1}{f(z_0)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(z_0+h)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = -\frac{1}{f(z_0)^2} \cdot f'_x(z_0)$$

■

$$\exists {u^*}'_x(x_0, y_0) \quad {v^*}'_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{h \to 0} u^*(x_0 + h, y_0) = u^*(x_0, y_0)$$

$$\lim_{h \to 0} v^*(x_0 + h, y_0) = v^*(x_0, y_0)$$

$$\implies \lim_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$$

Теорема 9.2 (Важная комбинация производных).

$$z_0 \in E \quad \exists f'_x(z_0) \quad \exists f'_y(z_0)$$

$$f'_z(z_0) \overset{def}{=} \frac{1}{2}(f'_x(z_0) - i f'_y(z_0)) \tag{12}$$

$$f'_{\overline{z}}(z_0) \overset{def}{=} \frac{1}{2}(f'_x(z_0) + i f'_y(z_0)) \tag{13}$$

Свойства операций f'_z и $f'_{\overline{z}}$

$$w = z, \overline{z}$$

Также не будем писать везде z_0 для сокращения

1. $(cf)'_w = cf'_w \quad c \in \mathbb{C}$
2. $(f+g)'_w - f'_w + g'_w$

3. $(fg)'_w = f'_w g + f g'_w$
4. $f(z) \neq 0, z \in E \quad \left(\frac{1}{f}\right)'_w = -\frac{f'_w}{f^2}$
5. f из 4 $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'_w = \frac{g'_w f - g f'_w}{f^2}$

Опять же, все доказательства аналогичные. Докажем 4 как самое нетривильное.

Доказательство.

$$w = \overline{z}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{f}\right)'_x + i\left(\frac{1}{f}\right)'_y\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{f'_x}{f^2} - i\frac{f'_y}{f^2}\right) = $$
$$= -\frac{1}{2f^2}\left(f'_x + i f'_y\right) = -\frac{1}{f^2} f'_{\overline{z}}$$

■

Определение 9.6 (Дифференцируемость функции комплексной переменной в точке)**.**

$$z_0 \in E \subset \mathbb{C}$$
$$f : E \to \mathbb{C}$$
$$z_0 = x_0 + iy_0$$
$$f(z_0) = u(z_0) + iv(z) \text{ дифференцируема в } z_0 \text{ если}$$
$$u^*(x, y) \text{ и } v^*(x, y)$$
$$\text{дифференцируемы в } (x_0, y_0)$$

$u(z)$ и $v(z)$ для сокращения записи пишем без звездочек, (x_0, y_0) тоже

$$\sigma = s + it \quad f(z_0 + \sigma) - f(z_0) = f^*(x_0 + s, y_0 + t) - f^*(x_0, y_0) =$$
$$= (u^*(x_0 + s, y_0 + t) - u^*(x_0, y_0)) + i(v^*(x_0 + s, y_0 + t) - v^*(x_0, y_0)) =$$
$$= (u'_x s + u'_y t + r_1(s, t)) + i(v'_x s + v'_y t + r_2(s, t)) =$$

$$\frac{|r_1(s, t)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} \underset{(s,t)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{|r_2(s,t)|}{\sqrt{s^2+t^2}} \underset{(s,t)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$=(u'_x + iv'_x)s + (u'_y + iv'_y)t + (r_1(s,t) + ir_2(s,t))=$$

$$r_1(s,t) + ir_2(s,t) = r^*(s,t) = r(\sigma)$$

$$\frac{|r(\sigma)|}{|\sigma|} \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{14'}$$

$$=f'_x(z_0)s + f'_y(z_0)t + r(\sigma) \tag{14}$$

$$\sigma = s + it$$

$$s = \frac{1}{2}(\sigma + \overline{\sigma})$$

$$\sigma - \overline{\sigma} = 2it$$

$$t = \frac{1}{2i}(\sigma - \overline{\sigma}) = -\frac{i}{2}(\sigma - \overline{\sigma}) = \frac{i}{2}(\overline{\sigma} - \sigma)$$

$$(14) \implies f(z_0+\sigma) - f(z_0) = f'_x(\frac{1}{2}(\sigma+\overline{\sigma})) + if'_y(\frac{1}{2}(\overline{\sigma}-\sigma)) + r(\sigma) =$$

$$= \frac{1}{2}(f'_x - if'_y)\sigma + \frac{1}{2}(f'_x + if'_y)\overline{\sigma} + r(\sigma) =$$

$$= f'_z(z_0)\sigma + f'_{\overline{z}}(z_0)\overline{\sigma} + r(\sigma) \tag{15}$$

$u(z)$ и $v(z)$ для сокращения записи пишем без звездочек

4 эквивалентных свойства функции, дифференцируемой в точке z_0

1. $f'_{\overline{z}}(z_0) = 0$
2. $f(z_0+\sigma) - f(z_0) = f'_z(z_0)\sigma + r(\sigma) \quad \frac{|r(\sigma)|}{|\sigma|} \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0$
3. $f(z) = u(z) + iv(z) \quad u(x,y), v(x,y) \begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}$ Уравнения Коши-Римана
4. $\exists \lim\limits_{\sigma\to 0} \frac{f(z_0+\sigma)-f(z_0)}{\sigma} = f'(z_0)$

Доказательство.

$$1.(15) \implies f(z_0+\sigma)-f(z_0)=f'_z(z_0)\sigma+r(\sigma)$$

$$1 \implies 2$$

$$2 \implies \frac{f(z_0+\sigma)-f(z_0)}{\sigma}=f'_z(z_0)+\frac{r(\sigma)}{\sigma}\underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} f'_z(z_0)$$

$$2 \implies 4, f'(z_0)=f'_z(z_0)$$

$$3 \Leftrightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4$$

$$4 \implies 1?$$

$$\exists \lim_{\sigma\to 0}\frac{f(z_0+\sigma)-f(z_0)}{\sigma}=A\in\mathbb{C} \tag{16}$$

$$f(z_0+\sigma)-f(z_0)=f'_z\sigma+f'_{\overline{z}}\overline{\sigma}+r(\sigma) \tag{16'}$$

$$\frac{f(z_0+\sigma)-f(z_0)}{\sigma}-A=\beta(\sigma)$$

$$r_0(\sigma)=\sigma\beta(\sigma) \quad (16) \implies \beta(\sigma)\underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{17}$$

$$(17) \implies \frac{|r_0\sigma|}{|\sigma|}=\frac{|\sigma|\cdot|\beta\sigma|}{|\sigma|}=|\beta(\sigma)|\underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{18}$$

$$4 \implies f(z_0+\sigma)-f(z_0)=A\sigma+r_0(\sigma) \tag{19}$$

$$\text{из } (16') \text{ вычтем } (19)$$

$$\implies 0=(f'_z-A)\sigma+f'_z\overline{\sigma}+r(\sigma)-r_0(\sigma) \tag{20}$$

$$(20) \implies A-f'_z+\frac{r_0(\sigma)}{\sigma}-\frac{r(\sigma)}{\sigma}=f'_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} \tag{21}$$

$$A-f'_z(z_0)+\underbrace{\frac{r_0(\sigma)}{\sigma}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{r_1(\sigma)}{\sigma}}_{\to 0}\underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} A-f'_z(z_0) \tag{22}$$

$$(21),(22) \implies \exists \lim_{\sigma\to 0} f'_{\overline{z}}\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} \tag{23}$$

Пусть $f'_{\overline{z}}(z_0)\neq 0$

1. $\sigma=h\in\mathbb{R}, h\neq 0$

$$(23) \implies f'_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}=f'_{\overline{z}}(z_0)\cdot\frac{h}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'_{\overline{z}}(z_0)$$

2. $\sigma=ih \quad \overline{\sigma}=-ih$

$$f'_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}=f'_{\overline{z}}(z_0)\cdot\frac{-ih}{ih}=-f'_{\overline{z}}(z_0)\longrightarrow -f'_{\overline{z}}(z_0)$$

$$\implies f'_{\bar{z}}(z_0) = 0$$

$3 \Leftrightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ ■

Определение 9.7.

$$E \subset \mathbb{C} \text{ -- открытое связное множество, область}$$
$$f : E \to \mathbb{C}$$
$$f = u + iv$$
$$f \in C^1(E) \text{ если } u^*(x, y) \in C^1(E^*)$$
$$v^*(x, y) \in C^1(E^*)$$

Предложение 9.3. тут было какое-то утверждение которое он устно сформулировал и устно доказал xd, записи последней лекции не нашел

9.3. Аналитическая функция

Определение 9.8 (Аналитическая функция).

$$E \subset \mathbb{C}, E \text{ -- область}$$
$$f : E \to \mathbb{C}$$
$$f \in C^1(E)$$
$$f \text{ аналитична в } E, \text{ если } f'_{\bar{z}}(z) = 0 \forall z \in E \tag{1}$$

обозначается $f \in A(E)$ – множество аналитических функккций на E

1. $f \in A(E) \implies cf \in A(E) \quad c \in \mathbb{C}$
2. $f, g \in A(E) \implies f + g \in A(E)$
3. $f, g \in A(E) \implies fg \in A(E)$
4. $f(z) \neq 0 \forall z \in E, f \in A(E) \implies \frac{1}{f(z)} \in A(E)$
5. f из 4 $\quad g \in A(E) \implies \frac{g}{f} \in A(E)$

Как вы наверное уже поняли, все доказательства аналогичны (неожиданно). Неожиданно снова докажем 4.

Доказательство.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_{\overline{z}} = -\frac{f'_{\overline{z}}(z)}{f^2(z)} = 0$$

■

Первые примеры аналитических функций

В качестве E рассматриваем всю комплексную плоскость

Пример 9.1.

$$f(z) \equiv c \quad c'_{\overline{z}} \equiv 0 \quad c \in A(\mathbb{C})$$

Пример 9.2.

$$f(z) = z = x + iy \quad z \in A(\mathbb{C})$$

$$z'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(1 + i0 + i(0 + i \cdot 1)) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0$$

Пример 9.3.

$$2 \implies z \cdot z = z^2 \in A(\mathbb{C})$$

$$z^n = z^{n-1} \cdot z \in A(\mathbb{C}) \quad n \in \mathbb{N}$$

Пример 9.4.

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \in A(\mathbb{C}), c_k \in \mathbb{C}$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \quad m \leqslant n \quad c_n \neq 0$$

$$P(\alpha_k) = 0$$

$$q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_l z^l \in A(\mathbb{C})$$

$$D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \{\alpha_k\} p(z) \neq 0, z \in D$$

$$\frac{q(z)}{p(z)} \in A(D)$$

$$z^n$$

$$\frac{1}{z^n} \in A(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Пример 9.5.

$$z = x + iy$$

$$e^z \overset{def}{=} e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)} \tag{2}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$v'_x = e^x \sin y \quad v'_y = e^x \cos y$$

$$(2) \implies u'_x = e^x \cos y \quad v'_y = e^x \cos y$$

$$u'_y = -e^x \sin y$$

$$u'_y = -v'_x$$

Пример 9.6.

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \text{ -- область}$$

$$z \in D \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \varphi \in (-\pi, \pi) \quad r = |z|$$

$$\ln z \overset{def}{=} \ln r + i\varphi \tag{3}$$

$$\text{при } x > 0 \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\ln(x + iy) = \ln|z| + i\arctan\frac{y}{x} = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\arctan\frac{y}{x}}_{v(x,y)} \ln z \in A(D) \tag{4}$$

Будем опять пользоваться уравнениями Коши-Римана

$$(4) \implies u'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v'_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v'_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$f \in A(E) \quad z \in E \begin{cases} f'(z) = f'_z(z) \\ 0 = f'_{\overline{z}}(z) \end{cases} \implies f'(z) = f'_z(z) + f'_{\overline{z}} =$$

$$= \frac{1}{2}(f'_x(z) - if'_y(z)) + \frac{1}{2}(f'_x(z) + if'_y(z)) = f'_x(z) = f'(z)$$

Аналитичность суперпозиции аналитических функций

Теорема 9.4. Пусть $E \subset \mathbb{C}, G \subset \mathbb{C}$ - область, $f \in A(E), f(z) \in G\ \forall z \in E, \varphi \in A(G), F : E \to \mathbb{C}, F(Z) \overset{def}{=} \varphi(f(z))$. Тогда $F \in A(E)$.

Доказательство. По определению, $f \in C^1(E), \varphi \in C^1(G)$, поэтому по теореме о матрице Якоби суперпозиции выполнено соотношение $F(z) = \varphi(f(z)) \in C^1(E)$. Фиксируем $\forall z \in E$, и пусть $\sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq 0, z + \sigma \in E$, пусть $w \overset{def}{=} f(z), w \in G$

Будем использовать теорему о 4 эквивалентных свойствах аналитической функции (точнее, любое из них можно принять за определение, тогда 3 остальные — свойства). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, w + \lambda \in G$.

Из условия следует соотношение

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + r(\lambda), \tag{1}$$

и

$$\frac{|r(\lambda)|}{|\lambda|} \underset{\lambda \to 0}{\to} 0 \tag{2}$$

Положим $r(\lambda) = \lambda\delta(\lambda)$, тогда (2) $\Leftrightarrow \delta(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\to} 0$.

Положим $\delta(0) \overset{def}{=} 0$, тогда в соотношении (1) можно не рассматривать ограничение $\lambda \neq 0$, при следующей записи:

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda) \tag{3}$$

В формулах (1) и (3) мы воспользовались соотношением $\varphi'_w(w) = \varphi'(w)$.

Положим $\lambda = f(z + \sigma) - f(z)$, тогда $f(z + \sigma) = f(z) + \lambda = w + \lambda$

Имеем:

$$F(z + \sigma) - F(z) = \varphi(f(z + \sigma)) - \varphi(f(z)) = \varphi(w + \lambda) - \varphi(w) =$$

$$= \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda) = \varphi'(w)\lambda + (f(z + \sigma) - f(z))\delta(f(z + \sigma) - f(z)), \tag{4}$$

$$\lambda = f(z + \sigma) - f(z) = f'(z)\sigma + \rho(\sigma), \tag{5}$$

где

$$\frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \underset{\sigma \to 0}{\to} 0. \tag{6}$$

Из (4) и (5) получаем:

$$F(z+\sigma)-F(z) = \varphi'(w)(f'(z)\sigma+\rho(\sigma))+(f(z+\sigma)-f(z))\delta(f(z+\sigma)-f(z)) =$$

$$= \varphi'(w)f'(z)\sigma + \varphi'(w)\rho(\sigma) + (f(z+\sigma) - f(z))\delta(f(z+\sigma) - f(z)) \quad (7)$$

$$R(\sigma) = \varphi'(w)\rho(\sigma) + (f(z+\sigma) - f(z))\delta(f(z+\sigma) - f(z))$$

Далее,

$$\frac{R(\sigma)}{\sigma} = \varphi'(w)\frac{\rho(\sigma)}{\sigma}+\frac{f(z+\sigma)-f(z)}{\sigma}\delta(f(z+\sigma)-f(z)) \underset{\sigma\to 0}{\to} \varphi'(w)\cdot 0+f'(z)\cdot 0 = 0 \quad (8)$$

в силу соотношений (2) и (6). По теореме о 4 свойствах получаем, что $F \in A(E)$. ■

Дополнение к теореме. Из теоремы о 4 свойствах и соотношений (7) и (8) получаем равенство:

$$F'(z) = (\varphi(f(z)))' = \varphi'(f(z)) \cdot f'(z) \quad (9)$$

Доказанная теорема и соотношение (9) позволяет расширить список примеров аналитических функций.

Если $p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, то $e^{p(z)} \in A(\mathbb{C})$

Пусть $\mathcal{D} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0], \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$. Тогда проверено, что $\ln z \in A(\mathcal{D}) \implies \alpha \ln z \in A(\mathcal{D}) \implies e^{\alpha \ln z} \in A(\mathcal{D})$

Далее полагаем при $z \in \mathcal{D}$ $z^\alpha \overset{def}{=} e^{\alpha \ln z}$

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. $\ln z \overset{def}{=} ln|z| + i\varphi$,

$$e^{\ln z} = e^{ln|z|+i\varphi} \overset{def}{=} e^{ln|z|} \cdot (cos\,\varphi + isin\,\varphi) = |z|(cos\,\varphi + isin\,\varphi) = z \quad (10)$$

Полагая $\ln z = f(z), e^w = \varphi(w)$, из (9) находим

$$(e^{\ln z})' = (e^w)'(\ln z)' \quad (11)$$

Пусть $w = u + iv$, по последней формуле предыдущей лекции имеем

$$(e^w)' = (e^w)'_u = (e^u \cos v + ie^u sin\, v)'_u = e^u \cos v + ie^u \sin v = e^w \quad (12)$$

Если $w = \ln z$, то (10) и (12) $\implies$

$$(e^w)' = e^w = e^{\ln z} = z, \quad (13)$$

$$(13) \implies (e^{\ln z})' = z(\ln z)' \quad (14)$$

Но

$$e^{\ln z} = z \implies (e^{\ln z})' = z' = z'_x = (x+iy)'_x = 1, \qquad (15)$$

поэтому (11), (14) и (15) $\implies$

$$z(\ln z)' = 1, (\ln z)' = \frac{1}{z}, z \in \mathcal{D} \qquad (16)$$

Используя (16) и (9), находим при $\alpha \neq 0, 1, z \in \mathcal{D}:$

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = (e^w)'_{w=\alpha ln\, z} \cdot (\alpha ln\, z)' = e^{\alpha ln\, z} \cdot (\alpha ln\, z)'_x =$$

$$= \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)' = \alpha e^{\alpha ln\, z} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot e^{-\ln z} = \alpha \cdot e^{(\alpha-1)\ln z} = \alpha z^{\alpha-1}. \qquad (17)$$

В соотношении (17) использовалась формула $\frac{1}{e^w} = e^{-w}$. Действительно, если $w = u + iv$, то

$$\frac{1}{e^w} = \frac{1}{e^u(cos\, v + isin\, v)} = e^{-u} \cdot \frac{1}{cos\, v + isin\, v} = e^{-u} \cdot \frac{cos\, v - isin\, v}{cos^2 v + sin^2 v} =$$

$$= e^{-u} cos(-v) + isin(-v) = e^{-u-iv} = e^{-w}.$$

Следующий пример аналитических функций имеет общий характер.

Аналитичность суммы степенного ряда

Теорема 9.5. Пусть

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n \qquad (18)$$

– степенной ряд, $R > 0$ - его радиус сходимости, B - круг сходимости степенного ряда; в (18) $z \in B$.

Тогда $f \in A(B)$.

9.4. Дифференцирование суммы степенного ряда

Теорема 9.6. Пусть $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ – такая последовательность комплексных чисел, что радиус сходимости R степенного ряда

$$S(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (z_0, z\in\mathbb{C})$$

положителен (т.е. $0<r\leqslant +\infty$). Тогда для любого $z, |z-z_0|<R$ существует $\mathbb{C}$-производная $S'(z)$ и она равна:

$$S'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \qquad (*)$$

Иначе говоря, внутри круга сходимости степенной ряд моэно дифференцировать почленно.
Напомним, что согласно лемме о радиусе сходимости формально продифференцированого степенного ряда этот радиус равен радиусу сходимости исходного ряда, т.е. он равен R. Кроме того, всякий степенной ряд внутри своего круга сходимости сходится абсол.тно. Поэтому ряд в правой части формулы $(*)$ абсолютно сходящийся.

Доказательство. Ради простоты сначала рассмотрим основной случай, когда $z_0=0$. Общий случай легко сводится к нему.

Поскольку $|z|<R$, существует столь малое положительное число r, что $|z|+r<R$ (если $R<+\infty$, то можно взять $r=\frac{R-|z|}{2}$, а в противном случае r – любое число из интервала $(0,+\infty)$). Точка z и число r фиксированы до конца доказательства. Так как $|z|+r<R$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|z|+r)^n<+\infty \qquad (**)$$

и весь замкнутый круг $\overline{B_r}(z)$ лежит в круге сходимости. Иначе говоря, для любого $w\in\mathbb{C}, |w|\leqslant r$, сумма $z+w$ находится внутри круга сходимости, так что ряд $S(z+w)$ абсолютно сходится.

Докажем, что при $w\to 0$ дробь $\frac{S(z+w)-S(z)}{w}$ стремится к правой части формулы (*) с $z_0=0$, т.е. к сумме $A=\sum_{n=0}^{\infty} nc_nz^{n-1}$. Для этого надо показать, что при $w \to 0$ бесконечно мала разность

$$\Delta(w) = \frac{S(z+w)-S(z)}{w} - A = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} c_n((z+w)^n - z^n) - A == \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w-} nz^{n-1} \right)$$

В получившемся ряде слагаемые, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$, нулевые. Поэтому

$$|\Delta(w)| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1} \right) \right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \left| \frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1} \right|$$

Теперь надо оценить разности $\rho_n(w) = \frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Для этого сначала преобразуем их, воспользовавшись биномом Ньютона.

$$\rho_n(w) = \frac{1}{w}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - z^n \right) - nz^{n-1} =$$
$$\frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - nz^{n-1} = \frac{1}{w}\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k \quad (9.1)$$

Поскольку $|w| \leqslant r$, отсюда следует нужная нам оценка:

$$|\rho_n(w)| = \left| w \sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^{k-2} \right| \leqslant |w| \sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} |w|^{k-2} \leqslant$$
$$\leqslant |w| \sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} r^{k-2} \leqslant \frac{|w|}{r^2}(|z| + r)^n \quad (9.2)$$

Таким образом

$$|\Delta(w)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||\rho_n(w)| \leqslant \frac{|w|}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|(|z| + r)^n$$

Благодаря неравенству (**) отсюда вытекает что $\Delta(w) \underset{w\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Итак, теорема доказана в случае $z_0 = 0$. К нему нетрудно свести и общий случай. Действительно, положив $\tilde{z} = z - z_0$, мы видим, что

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{z}^n = \tilde{S}(\tilde{z})$$

и $S(z + w) = \tilde{S}(\tilde{z} + w)$

Дифференцировать степенной ряд $\tilde{S}(\tilde{z})$ мы уже умеем. Это даёт нам

$$\frac{S(z+w)=S(Z)}{w} = \frac{\tilde{S}(\tilde{z}+w)-\tilde{S}(\tilde{z})}{w \underset{w\to 0}{\longrightarrow}}\tilde{S}'(\tilde{z}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} nc_n \tilde{z}^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z-z_0)^{n-1}$$

Поэтому производная $S'(z)$ существует и равна сумме $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ для любого $z, |z-z_0| < R$. Это завершает доказательство. ■