Математический анализ

Курс Широкова Н.А.

Весна 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Криволинейные интегралы второго рода

1.1. Криволинейные интегралы второго рода от комплекснозначных функций

16.02.23

Для ориентированных кривых Николай Алексеевич использует гнутую стрелочку, здесь будет использоваться обычная. Так же вместе $\stackrel{\text{def}}{=}$ будет использоваться $:=$.

Определение 1.1 (Криволинейный интеграл второго рода от комплекснозначной функции)**.** Имеется $\vec{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ – ориентированная кривая. И имеется функция

$$f(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2),$$

такая что $f : \vec{\Gamma} \to \mathbb{C}$, $f \in C(\Gamma)$.
Тогда криволинейным интегралом второго рода от функции f по ориентированной кривой $\vec{\Gamma}$ по аргументу x_j будем называть следующее выражение, в котором $j = 1, 2$:

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} f(x_1, x_2) dx_j := \int\limits_{\vec{\Gamma}} u(x_1, x_2) dx_j + i \int\limits_{\vec{\Gamma}} v(x_1, x_2) dx_j$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода от комплекснозначных функций

Далее везде предполагается, что все функции непрерывны на кривой, а сама кривая кусочно-гладкая.

Свойство 1.1.

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} (f+g)dx_j = \int\limits_{\vec{\Gamma}} f dx_j + \int\limits_{\vec{\Gamma}} g dx_j$$

Свойство 1.2. Пусть $c \in \mathbb{C}$, тогда

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} cf dx_j = c \int\limits_{\vec{\Gamma}} f dx_j$$

Доказательство. Допустим, что $c = a + ib$, $f = u + iv$, тогда

$$cf = au - bv + i(av + bu)$$

Подставим это в левый интеграл:

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} cf dx_j = \int\limits_{\vec{\Gamma}} (au - bv) dx_j + i \int\limits_{\vec{\Gamma}} (av + bu) dx_j =$$
$$= a \int\limits_{\vec{\Gamma}} u dx_j - b \int\limits_{\vec{\Gamma}} v dx_j + i \left(a \int\limits_{\vec{\Gamma}} v dx_j + b \int\limits_{\vec{\Gamma}} u dx_j \right) =$$
$$= c \int\limits_{\vec{\Gamma}} u dx_j + ic \int\limits_{\vec{\Gamma}} v dx_j = c \int\limits_{\vec{\Gamma}} f dx_j$$

■

Свойство 1.3.

$$\int\limits_{\overleftarrow{\Gamma}} f dx_j = - \int\limits_{\vec{\Gamma}} f dx_j$$

Свойство 1.4. Имеется $\vec{\Gamma}([a,b])$, разбиение $P = \{t_k\}_{k=0}^m$, где $t_0 = a, t_m = b$, а так же его оснащение $T = \{\tau_k\}_{k=1}^m$, где $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Кроме того имеется комплекснозначная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, $f \in C(\Gamma)$.

Введем обозначения: $\vec{\Gamma}(\tau_k) = M_k$, $\vec{\Gamma}(t_k) = \begin{bmatrix} x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix}^T$. Суммой Римана для функции f, разбиения P, оснащения T и для аргумента x_j будем называть такое выражение:

$$S(f, P, T, j) = \sum_{k=1}^{m} f(M_k)(x_{j,k} - x_{j,k-1}),$$

где $j = 1, 2$.

Тогда свойство состоит в следующем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ т.ч. } \forall P \text{ т.ч. } t_k - t_{k-1} < \delta, k \leqslant m \text{ и } \forall T$$
$$\left| \int_{\overrightarrow{\Gamma}([a,b])} f dx_j - S(f, P, T, j) \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Доказательство. Если $f = u + iv$, то выполнено

$$S(f, P, T, j) = S(u, P, T, j) + iS(v, P, T, j)$$

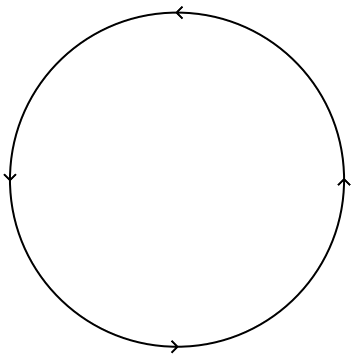
Применив аналогичную теорему для вещественных функций, можем найти такое δ, что выполняются

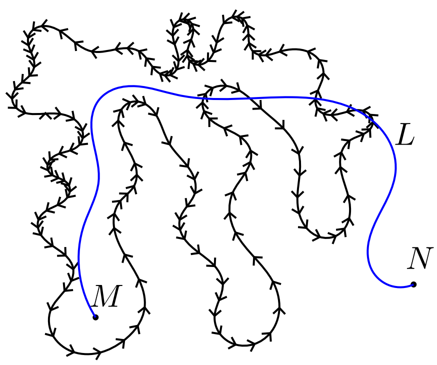
$$\left| \int_{\overrightarrow{\Gamma}} u dx_j - S(u, P, T, j) \right| < \varepsilon/2 \quad (2)$$

$$\left| \int_{\overrightarrow{\Gamma}} v dx_j - S(v, P, T, j) \right| < \varepsilon/2 \quad (3)$$

$(2), (3) \implies (1)$ ■

1.2. Направление на кривой





Сначала рассмотрим окружность, как самый простой пример. Можем обходить ее «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки». Положительным обходом с этого момента и далее будем называть обход против часовой стрелки. В отрицательном направлении по часовой стрелке, соответственно.

Теперь рассмотрим некую замкнутую кривую на плоскости. На ней так же определены положительное и отрицательное направления. В некотором смысле они аналогичны окружности. Но как это понять?

Теорема 1.1 (Жордана). Имеется некая кривая на плоскости $\vec{\Gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, такая что $\vec{\Gamma}(a) = \vec{\Gamma}(b)$, и если $t_1 \neq t_2$, то $\vec{\Gamma}(t_1) \neq \vec{\Gamma}(t_2)$. Тогда эта кривая делит плоскость на 2 области.
Одна из этих областей содержит точки, которые произвольно далеки от начала координат, и называется внешностью кривой, вторая называется внутренностью. При этом, если мы возьмем любую точку M внутри области и любую точку N вне области, и соединим их любой кривой L, то эта кривая обязательно пересечет кривую Γ, то есть $L \cap \Gamma \neq \varnothing$.

Доказательство. Примем без доказательства. ■

Пусть $\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая. Функции x_1 и x_2 непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы за исключением конечного числа точек. Так же выполнено $(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 \geqslant \delta_0 > 0$, если $t \neq c_1, ..., c_l$.

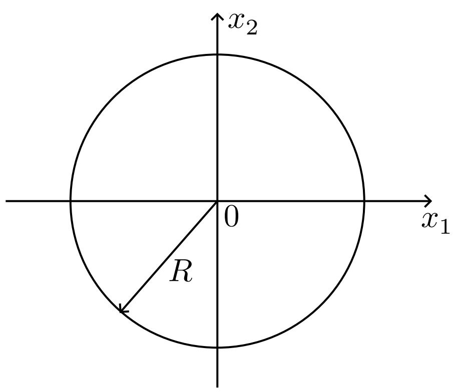
Положим, что $\nu(t) = \begin{bmatrix} -x_2'(t) & x_1'(t) \end{bmatrix}^T$. Ориентация называется положительной, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\Gamma(t) + \varepsilon\nu(t)$ лежит во внутренности Γ.

Пояснение: для достаточно малого ε

$$\forall t \neq c_j \ \exists \varepsilon_0(t) : 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(t)$$

и $\Gamma(t) + \varepsilon\nu(t)$ лежит во внутренности Γ.

Пример 1.1. С окружностью понятно как действует теорема Жордана



$$\begin{cases} x_1 = R\cos t \\ x_2 = R\sin t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

$$\begin{cases} x_1' = -R\sin t \\ x_2' = R\cos t \end{cases} \implies \nu = \begin{bmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \varepsilon\nu = \begin{bmatrix} R(1-\varepsilon)\cos t \\ R(1-\varepsilon)\sin t \end{bmatrix}$$

Если $0 < \varepsilon < R$, то эта точка лежит внутри круга.

1.3. Криволинейные интегралы второго рода от комплекснозначных функций на комплексной плоскости

Изменим обозначения координат: вместо x_1, x_2 будем рассматривать x, y. Тогда можем рассматривать однозначное соответствие с комплексной плоскостью.

Есть кривая $\vec{\Gamma}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \vec{\Gamma}_C(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^T \leftrightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$$

Будем также определять ориентацию на кривых в комплексной плоскости, полагая, что она задается на обычной плоскости. Если мы посмотрим на замкнутые кривые, то теорема Жордана выполняется. Будем называть ориентацию замкнутой кривой на комплексной плоскости положительной, если положительной является ориентация этой кривой на $\mathbb{R}^2$.

Вспомним, что $\mathbb{C} \supset E \leftrightarrow E^* \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $f : \Gamma_C \to \mathbb{C} \leftrightarrow f^* : \Gamma \to \mathbb{C}$, а так же $f^*(M(t)) \coloneqq f(z(t)), t \in [a, b]$. Далее * и $_C$ будем опускать.

Пусть у нас имеется ориентированная кривая $f : \vec{\Gamma}_C \to \mathbb{C} \leftrightarrow f^* : \vec{\Gamma} \to \mathbb{C}$, тогда определению полагаем

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}_C} f(z)dx \coloneqq \int\limits_{\vec{\Gamma}} f^*(M)dx \tag{4}$$

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}_C} f(z)dy \coloneqq \int\limits_{\vec{\Gamma}} f^*(M)dy \tag{5}$$

Тогда можем определить

$$\int_{\vec{\Gamma}_C} f(z)dz := \int_{\vec{\Gamma}_C} f(z)dx + i\int_{\vec{\Gamma}_C} f(z)dy \tag{6}$$

Если $\vec{\Gamma}_C(t)$ — гладкая и $\vec{\Gamma}_C(t) = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$, то (4)–(6) влекут, что

$$\int_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))(x'(t) + iy'(t))dt \tag{7}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода $f(z)dz$

Далее все функции предполагаются непрерывными.

Свойство 1.5.

$$\int_{\vec{\Gamma}}(f+g)dz = \int_{\vec{\Gamma}} fdz + \int_{\vec{\Gamma}} gdz$$

Свойство 1.6. Пусть $c \in \mathbb{C}$, тогда

$$\int_{\vec{\Gamma}} cfdz = c\int_{\vec{\Gamma}} fdz$$

Свойство 1.7.

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma}} fdz = -\int_{\vec{\Gamma}} fdz$$

Свойство 1.8. Введем суммы Римана. Имеем $\vec{\Gamma}([a,b]) \subset \mathbb{C}$, разбиение $P = \{t_k\}_{k=0}^m$ и оснащение $T = \{\tau_k\}_{k=1}^m$.

$$S(f,P,T,z) = \sum_{k=1}^m f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) \tag{8}$$

Пусть Γ есть кусочно-гладкая кривая, $f \in C(\Gamma)$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ т.ч. } \forall P \text{ т.ч. } t_k - t_{k-1} < \delta \text{ и } \forall T$$
$$\left|\int_{\vec{\Gamma}} f(z)dz - S(f,P,T,z)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

Свойство 1.9. Пусть $\vec{\Gamma} \subset \mathbb{C}$ – кусочно-гладкая кривая с параметризацией $z(t), t \in [a,b]$. $c \in \mathbb{C}$, тогда

$$\int_{\vec{\Gamma}} cdz = c(z(b) - z(a)) \tag{10}$$

в частности, если кривая Γ замкнутая, то

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} c dz = 0 \tag{10'}$$

Доказательство. Для доказательства используем 1.8. $\forall \varepsilon > 0$ выберем подходящие δ, P, T

$$\begin{aligned} S(c,P,T,z) = \sum_{k=1}^{m} c(z(t_k) - z(t_{k-1})) = \\ = c(z(t_m) - z(t_0)) = c(z(b) - z(a)) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\left| \int\limits_{\vec{\Gamma}} c dz - S(c,P,T,z) \right| < \varepsilon \tag{12}$$

$$(11), (12) \implies (10)$$

■

Свойство 1.10. Пусть у нас есть кусочно-гладкая кривая $\vec{\Gamma} \subset \mathbb{C}$, где $f : \vec{\Gamma} \to \mathbb{C}$. Допустим у нас есть точки $a < t_1 < ... < t_m < b$ и имеются кривые $\vec{\Gamma}_1 : [a, t_1] \to \mathbb{C}, ..., \vec{\Gamma}_m : [t_{m-1}, t_m] \to \mathbb{C}, \vec{\Gamma}_{m+1} : [t_m, b] \to \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} f dz = \sum_{k=1}^{m+1} \int\limits_{\vec{\Gamma}_k} f dz$$

23.02.23

Свойство 1.11. Пусть $\vec{\Gamma}_C([a,b])$ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $f \in C(\Gamma([a,b]))$. Тогда

$$\left| \int_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f dz \right| \leqslant \int_{\Gamma([a,b])} |f^*| \, dl, \tag{1}$$

где в правой части стоит криволинейный интеграл первого рода.

Доказательство. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, найдем такое разбиение $P = \{t_j\}_{j=0}^{n}$, $a = t_0 < ... < t_n = b$, чтобы для любого оснащения $T = \{\tau_j\}_{j=1}^{n}$ выполнялись соотношения

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1}) - \int_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f dz \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

где $z_j = \vec{\Gamma}_C(t_j)$, $z'_j = \vec{\Gamma}_C(\tau_j)$, и

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \left|f^*(\Gamma(\tau_j))\right| l(\gamma(t_{j-1}, t_j)) - \int\limits_{\Gamma([a,b])} |f^*|\, dl\right| < \varepsilon, \qquad (3)$$

где $l(\gamma(t_{j-1}, t_j))$ — длина дуги $\gamma(t_{j-1}, t_j) \subset \Gamma([a, b])$ между точками $\Gamma(t_{j-1})$ и $\Gamma(t_j)$.
Тогда (2) и (3) $\implies$

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f dz\right| = \\
&= \left|\int\limits_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f dz - \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1})\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int\limits_{\vec{\Gamma}_C([a,b])} f dz - \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1})\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1})\right| < \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |f(z'_j)||z_j - z_{j-1}| \leqslant \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \left|f^*(\Gamma(\tau_j))\right| l(\gamma(t_{j-1}, t_j)) = \\
&= \varepsilon + \left(\sum_{j=1}^{n} \left|f^*(\Gamma(\tau_j))\right| l(\gamma(t_{j-1}, t_j)) - \int\limits_{\Gamma([a,b])} |f^*|\, dl\right) + \int\limits_{\Gamma([a,b])} |f^*|\, dl < \\
&\qquad < 2\varepsilon + \int\limits_{\Gamma([a,b])} |f^*|\, dl \qquad (4)
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ (4) $\implies$ (1). ■

Свойство 1.12. Пусть $\vec{\Gamma}_C([a, b])$ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $f \in C(\Gamma([a, b]))$, $\theta \in (0, 2\pi)$,

$$\vec{\Gamma}_\theta([a, b]) := e^{i\theta}\vec{\Gamma}([a, b]),$$

то есть

$$\Gamma_\theta([a, b]) = \left\{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\theta}\xi, \xi \in \Gamma([a, b])\right\}$$

и ориентация на $\vec{\Gamma}_\theta([a, b])$ задается с $\vec{\Gamma}([a, b])$. Для $z \in \vec{\Gamma}_\theta([a, b])$ положим $f_\theta(z) := f(e^{-i\theta}z)$. И справедливо равенство

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}([a,b])} f(z)dz = e^{-i\theta} \int\limits_{\vec{\Gamma}_\theta([a,b])} f_\theta(\xi)d\xi. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $\{z_j\}_{j=0}^n$ — точки на $\vec{\Gamma}([a,b])$, полученные из разбиения $\{t_j\}_{j=0}^n$, $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ — оснащение, $z_j' = \Gamma(\tau_j)$. Тогда точки $\{e^{i\theta}z_j\}_{j=0}^n$ — точки на $\vec{\Gamma}_\theta([a,b])$, полученные из того же разбиения и $\{e^{i\theta}z_j'\}_{j=1}^n$ — точки на $\vec{\Gamma}_\theta([a,b])$, полученные из оснащения. Теперь имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1}) = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f_\theta(e^{i\theta}z_j')(e^{i\theta}z_j - e^{i\theta}z_{j-1}) \qquad (6)$$

Теперь (5) следует из (6) и свойства 1.8. ■

Глава 2

Теорема Коши

2.1. Теорема Коши для прямоугольника

Теорема (Теорема 6.4 из прошлого семестра)**.**

$$f \in C([a, b] \times [p, q])$$
$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad h(x) = \int_p^q f(x, y)dy$$

По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра $g \in C([p, q])$ и $h \in C([a, b])$. Тогда

$$\int_a^b h(x)dx = \int_p^q g(y)dy$$

Теорема 2.1. Формула интегрирования интеграла, зависящего от параметра в теореме выше справедлива для комплекснозначных функций f.

Доказательство. Следует из применения формулы к вещественной и мнимой частям функции f. ■

Теорема 2.2. Пусть Q — прямоугольник.

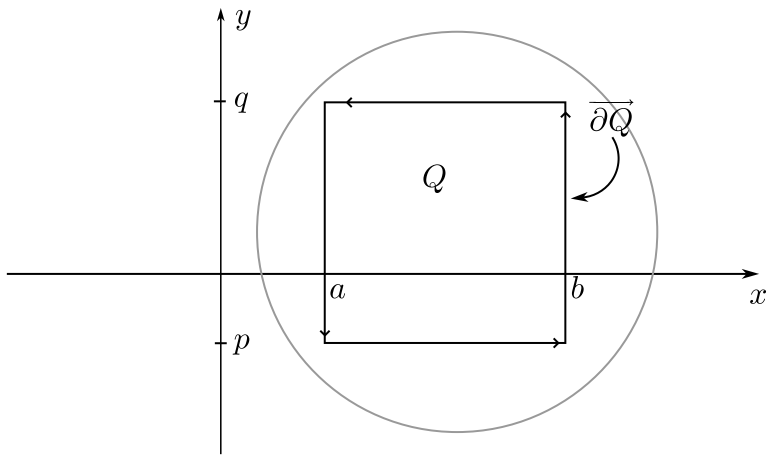
$$Q = \{z = x + iy : a \leqslant x \leqslant b, p \leqslant y \leqslant q\}$$

G — открытое множество, $Q \subset G$, $f \in A(G)$. Тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial Q}} f(z)dz = 0, \qquad (7)$$

где $\overrightarrow{\partial Q}$ — ориентированная граница Q.

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $\overrightarrow{\partial Q}$ ориентирована положительно. Пусть $A = a+ip$, $B = b+ip$, $C = b+iq$, $D = a+iq$.



$\overrightarrow{AB}$ — ориентированная кривая, являющаяся отрезком $[A, B]$ с началом A и концом B, аналогично $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial Q}} \cdots = \int_{\overrightarrow{AB}} \cdots + \int_{\overrightarrow{BC}} \cdots + \int_{\overrightarrow{CD}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DA}} \cdots,$$

пользуясь параметризацией отрезков:

$$\overrightarrow{AB} = \{z = x + ip : x \in [a, b]\}$$
$$\overrightarrow{BC} = \{z = b + iy : y \in [p, q]\}$$
$$\overrightarrow{CD} = \{z = t + iq : t = a + b - x, x \in [a, b]\}$$
$$\overrightarrow{DA} = \{z = a + is : s = p + q - y, y \in [p, q]\}$$

Пусть $\overleftarrow{DA}$ — отрезок, противоположно ориентированный по отношению к $\overrightarrow{DA}$, $\overleftarrow{CD}$ — отрезок, противоположно ориентированный по отношению к $\overrightarrow{CD}$. Тогда имеем

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = \left(\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)dz - \int_{\overrightarrow{CD}} f(z)dz\right) + \left(\int_{\overrightarrow{BC}} f(z)dz - \int_{\overrightarrow{DA}} f(z)dz\right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)dz - \int_{\overrightarrow{CD}} f(z)dz &= \int_a^b f(x+ip)dx - \int_a^b f(x+iq)dx = \\ = -\int_a^b \left(f(x+iq) - f(x+ip)\right)dx &= -\int_a^b \left(f^*(x,q) - f^*(x,p)\right)dx = \\ &= -\int_a^b \left(\int_p^q {f^*}'_y(x,y)dy\right)dx \quad (9)\end{aligned}$$

В предыдущем интеграле в (9) мы воспользовались при фиксированном x формулой Ньютона-Лейбница, что возможно, поскольку $f^* \in C^1(G)$, что влечет $f^* \in C^1(Q)$. Далее,

$$\int_{\overrightarrow{BC}} f(z)dz - \int_{\overrightarrow{DA}} f(z)dz = i\int_p^q f(b+iy)dy - i\int_p^q f(a+iy)dy \quad (10)$$

(10) $\implies$

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{BC}} f(z)dz - \int_{\overrightarrow{DA}} f(z)dz &= i\int_p^q \left(f(b+iy)dy - f(a+iy)\right)dy = \\ &= i\int_p^q (f^*(b,y) - f^*(a,y))dy = i\int_p^q \left(\int_a^b {f^*}'_x(x,y)dx\right)dy \quad (11)\end{aligned}$$

В (11) мы опять воспользовались формулой Ньютона-Лейбница. Применяя теорему 2.1, из соотношений (8)–(11) находим, что

$$\int_{\overrightarrow{\partial Q}} f(z)dz =$$

$$= i\int_p^q \left(\int_a^b {f^*}'_x(x,y)dx\right) dy - \int_a^b \left(\int_p^q {f^*}'_y(x,y)dy\right) dx =$$

$$= -\int_a^b \left(\int_p^q {f^*}'_y(x,y)dy\right) dx + i\int_a^b \left(\int_p^q {f^*}'_x(x,y)dy\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_p^q \left(i{f^*}'_x(x,y) - {f^*}'_y(x,y)\right) dy\right) dx =$$

$$= i\int_a^b \left(\int_p^q \left({f^*}'_x(x,y) + i{f^*}'_y(x,y)\right) dy\right) dx =$$

$$= 2i\int_a^b \left(\int_p^q \frac{1}{2}\left({f^*}'_x(x,y) + i{f^*}'_y(x,y)\right) dy\right) dx =$$

$$= 2i\int_a^b \left(\int_p^q f'_{\overline{z}}(x+iy)dy\right) dx = 0,$$

поскольку $f \in A(G)$. ■

2.2. Теорема Коши для прямоугольного треугольника

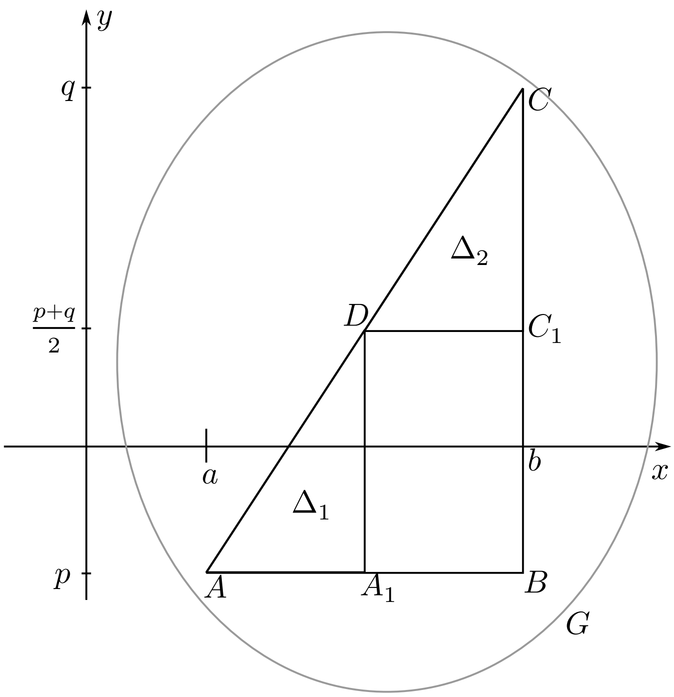
Теорема 2.3. Пусть $A = a + ip$, $B = b + ip$, $C = b + iq$, $a < b$, $p < q$, $\Delta \subset \mathbb{C}$ — треугольник с вершинами A, B, C, G — открытое множество, $\Delta \subset G$, $f \in A(G)$. Тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = 0, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{\partial\Delta}$ — ориентировання граница Δ.

Доказательство. Пусть

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2} \qquad A_1 = \frac{a+b}{2} + ip \qquad C_1 = b + i\frac{p+q}{2}$$



Тогда

$$\int_{\overrightarrow{C_1D}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DC_1}} \cdots = 0$$

$$\int_{\overrightarrow{A_1D}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DA_1}} \cdots = 0$$

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} \cdots = \int_{\overrightarrow{AB}} \cdots + \int_{\overrightarrow{BC}} \cdots + \int_{\overrightarrow{CA}} \cdots =$$
$$= \int_{\overrightarrow{AA_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{A_1B}} \cdots + \int_{\overrightarrow{BC_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{C_1C}} \cdots + \int_{\overrightarrow{CD}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DA}} \cdots =$$
$$= \left(\int_{\overrightarrow{AA_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{A_1D}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DA}} \cdots\right) + \left(\int_{\overrightarrow{C_1C}} \cdots + \int_{\overrightarrow{CD}} \cdots + \int_{\overrightarrow{DC_1}} \cdots\right) +$$
$$+ \left(\int_{\overrightarrow{DA_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{A_1B}} \cdots + \int_{\overrightarrow{BC_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{C_1D}} \cdots\right) =$$
$$= \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_1}} \cdots + \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_2}} \cdots + \int_{\overrightarrow{\partial Q_1}} \cdots, \quad (13)$$

где Δ_1 — треугольник с вершинами A, A_1, D, Δ_2 — треугольник с вершинами C_1, C, D, Q_1 — прямоугольник с вершинами A_1, B, C_1, D.

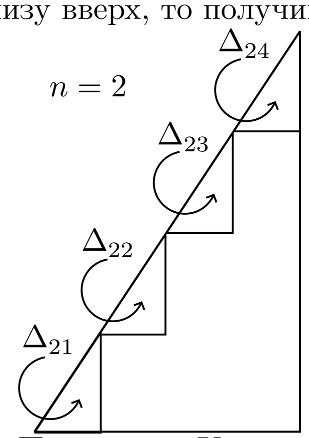
По теореме 2.2 имеем равенство

$$\int_{\overrightarrow{\partial Q_1}} f(z)dz = 0, \tag{14}$$

поэтому (13) и (14) $\Longrightarrow$

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_1}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_2}} f(z)dz$$

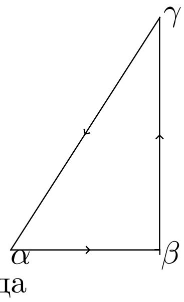
Приведенное рассуждение можно применить к Δ_1 и к Δ_2 и т.д., в результате, если поделить гипотенузу AC на 2^n равных отрезков и построить подобные ABC треугольники $\Delta_{n1}, \dots, \Delta_{n2^n}$, занумерованные снизу вверх, то получим равенство



$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} f(z)dz \tag{15}$$

По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна в Δ, поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ т.ч. } \forall z_1, z_2 \in \Delta \text{ т.ч. } |z_2 - z_1| < \delta \quad \text{выполнено } |f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon.$$



Выберем N так, чтобы $2^{-N}|C - A| < \delta$, и возьмем $n > N$. Пусть α, β, γ — вершины треугольника Δ_{nk}.

Тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} f(z)dz = \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} f(\alpha)dz + \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} (f(z) - f(\alpha))dz =$$

$$= f(\alpha) \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} 1dz + \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} (f(z) - f(\alpha))dz = 0 + \int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} (f(z) - f(\alpha))dz, \tag{16}$$

далее, с учетом $|z-\alpha| \leqslant |\gamma-\alpha| = 2^{-n}|C-A| < \delta$, если $z \in \Delta_{nk}$,

$$\left|\int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} (f(z)-f(\alpha))dz\right| \leqslant \int_{\partial\Delta_{nk}} |f^*(M)-f^*(L)|\,dl(M) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\partial\Delta_{nk}} \varepsilon dl(M) = \varepsilon(|\beta-\alpha|+|\gamma-\beta|+|\gamma-\alpha|) < 3\varepsilon|\gamma-\alpha| =$$
$$= 3\varepsilon\cdot 2^{-n}|C-A|, \quad (17)$$

где $\alpha \in \mathbb{C} \leftrightarrow L \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{C} \leftrightarrow M \in R^2$. Теперь (15)–(17) при выбранном n влечет:

$$\left|\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2^n}\left|\int_{\overrightarrow{\partial\Delta_{nk}}} f(z)dz\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 3\varepsilon\cdot 2^{-n}|C-A| = 3\varepsilon|C-A| \quad (18)$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то (18) $\implies$ (12). ■

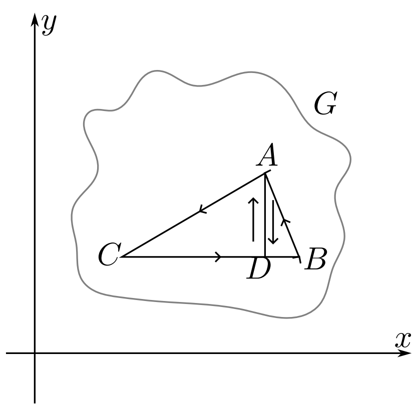
2.3. Теорема Коши для произвольного треугольника

02.03.23

> **Теорема 2.4.** Имеется область G и имеется произвольный треугольник Δ, $\Delta \subset G$, $f \in A(G)$, тогда
>
> $$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = 0$$

Доказательство. Пусть $\angle A$ — больший из углов треугольника. И рассмотрим два случая:

1. Рассмотрим случай когда BC параллельна оси x.

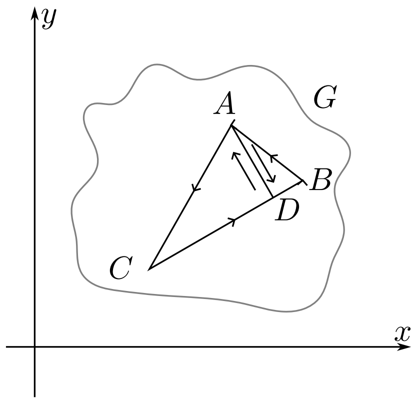


Проведем высоту AD в треугольнике, $AD \perp CB$. Если угол B или C прямой, то это в точности предыдущая ситуация, у нас не так, поэтому считаем, что $D \in CB, D \neq C, D \neq B$. Будем обходить в положительном направлении. Тогда криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\overrightarrow{CBA}} f(z)dz = \int_{\overrightarrow{CDA}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{DBA}} f(z)dz = 0 + 0 = 0,$$

т.к. каждый из них прямоугольный.

2. Теперь ни одна из сторон не параллельна оси x.



Будем считать, что A, B, C не только наименования вершин, но и комплексные числа. Выберем такое θ, что $e^{i\theta}(B-C) = |B-C|$. И треугольник повернется так, что сторона BC станет параллельна вещественной оси. Обозначим

$$G_\theta = \{\zeta : \zeta = e^{i\theta}z, z \in G\}$$
$$\Delta_\theta = \{\zeta : \zeta = e^{i\theta}z, z \in \Delta\}$$

Тогда $f_\theta = f(e^{-i\theta}\zeta)$, когда $\zeta \in G_\theta$ и $f_\theta \in A(G_\theta)$. И выполнены соотношения

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta_\theta}} f_\theta(\zeta)d\zeta = 0 \qquad (1)$$

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = e^{-i\theta}\int_{\overrightarrow{\partial\Delta_\theta}} f_\theta(\zeta)d\zeta \qquad (2)$$

$$(1), (2) \implies \int_{\overrightarrow{\partial\Delta}} f(z)dz = 0$$

■

2.4. Теорема Коши для области, ограниченной многоугольниками

Определение 2.1 (Многоугольник). Многоугольник — замкнутая кусочно-гладкая кривая, все гладкие границы, которой являются отрезками, а так же множество внутренних точек, ограниченных данной кривой.

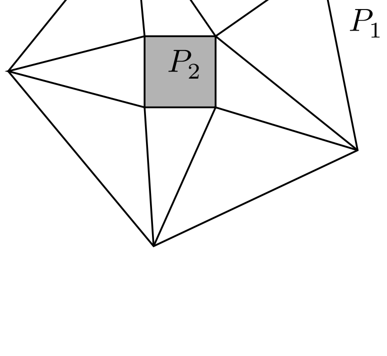
Теорема 2.5 (О триангуляции). Допустим, что есть область G, такая что $\partial G = \bigcup_{k=1}^{m} P_k$ — многоугольники, тогда существует конечное множество треугольников $\Delta_j, 1 \leqslant j \leqslant N$, которые обладают свойствами:

- $\Delta_j \subset G$
- $\bigcup_{j=1}^{N} \Delta_j = G$
- если $j \neq k$, то
  - либо $\Delta_j \cap \Delta_k = \varnothing$
  - либо $\Delta_j \cap \Delta_k$ — одна точка
  - либо $\Delta_j \cap \Delta_k$ — сторона Δ_j и Δ_k

Такое множество называется триангуляцией области G.

Доказательство. Доказывается индукцией по общему количеству вершин. Должно было быть в топологии. ■

Пример 2.1. Пример триангуляции, где P_1 — внешняя граница, а P_2 — граница «вырезанного» куска.



Определение 2.2 (Ориентация многоугольника). Пусть имеется область, граница которой состоит из более, чем одного многоугольника, тогда есть самый внешний многоугольник, внутри которого лежат остальные. Ориентированной границей всей области по определению будем называть задание какой-то ориентации на самом внешнем многоугольнике и задание противоположной на всех внутренних многоугольниках.
Положительной ориентацией будем называть ориентацию, когда на внешнем многоугольнике задана положительная ориентация, а на всех внутренних задана отрицательная ориентация. В таком случае, если мы рассмотрим задание ориентации через вектор ν, то все нужные точки будут лежать внутри области.

Предложение 2.6. Пусть имеется область G, граница которой $\overrightarrow{\partial G} = \overrightarrow{\bigcup_{k=1}^{m} P_k}$[a]. Имеется триангуляция этой области с помощью треугольников Δ_j, и задана любая функция $f \in C(G)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz := \sum_{k=1}^{m} \int_{\overrightarrow{P_k}^{\bullet}} f(z)dz \tag{3}$$

и

$$\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{\overrightarrow{\partial \Delta_j}} f(z)dz \tag{4}$$

[a] В данном случае стрелочка над объединением, а так же запись вида $\overrightarrow{P_k}^{\bullet}$, означают задание ориентации в соответствии с определением выше.

Доказательство. Если $\partial \Delta_j = t_{j1} \cup t_{j2} \cup t_{j3}$, где t_{jl} — стороны треугольника Δ_j. Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\overrightarrow{\partial \Delta_j}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{3} \int_{\overrightarrow{t_{jl}}} f(z)dz$$

Рассмотрим 3 случая:

1. Если t_{jl} не лежит на P_k, $k = 1, \dots, m$, то она обходится в одном из треугольников в положительном направлении, а в другом в

отрицательном. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{3}\int_{\overrightarrow{t_{jl}}} f(z)dz = 0, \tag{5}$$

где все t_{jl} не лежат на P_k, таким образом в сумме (4) остаются только интегралы по границам, лежащим на P_k.

2. Назовем P_1 внешний многоугольник. Если $t_{jl} \subset P_1$, тогда она имеет ту же положительную ориентацию, что и P_1. Раз триангуляция дает всю область G, то есть весь многоугольник P_1 будет покрыт этими непересекающимися отрезками.

3. Назовем P_2 внутренний многоугольник. Аналогично, если $t_{jl} \subset P_2$, тогда она имеет ту же отрицательную ориентацию, что и P_2.

При $t_{tl} \subset \bigcup P_k$ по свойству 1.10

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{3}\int_{\overrightarrow{t_{jl}}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{N}\int_{\overrightarrow{P_j}} f(z)dz \tag{6}$$

(5), (6) $\implies$ (4). ■

Теорема 2.7. Есть область Ω, $f \in A(\Omega)$, $G \subset \Omega$, $\partial G = \bigcup_{k=1}^{m} P_k$, тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = 0 \tag{7}$$

Доказательство. Заведем триангуляцию $G = \bigcup_{j=1}^{N} \Delta_j$ со всеми свойствами из теоремы. Тогда соотношение (4) влечет:

$$\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{N}\int_{\overrightarrow{\partial \Delta_j}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} 0 = 0$$

■

2.5. Теорема Коши для областей, ограниченных кусочно-гладкими кривыми

Лемма 2.8. Есть кусочно-гладкая кривая γ, a, b — концы γ, т.ч. a — начало, b — конец, $f \in C(\gamma)$, тогда

$$\left|\int_{\vec{\gamma}} f(z)dz - c(b-a)\right| \leqslant \max_{z\in\gamma} |f(z) - c| \cdot l(\gamma), \tag{8}$$

где $l(\gamma)$ — длина γ.

Доказательство.

$$c(b-a) = \int_{\vec{\gamma}} cdz$$

$$\left|\int_{\vec{\gamma}} f(z)dz - c(b-a)\right| = \left|\int_{\vec{\gamma}} f(z)dz - \int_{\vec{\gamma}} cdz\right| = \left|\int_{\vec{\gamma}} (f(z)-c)dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\gamma} |f(z) - c|\, dl(\gamma) \leqslant \int_{\gamma} \max_{z\in\gamma} |f(z) - c| dl(\gamma) = \max_{z\in\gamma} |f(z) - c| \cdot l(\gamma)$$

■

Определение 2.3 (Ориентация области, ограниченной кусочно-гладкими кривыми). Имеется область G, т.ч. $\partial G = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k$ — кусочно-гладкие кривые. Допустим, что Γ_1 содержит $\Gamma_k, k \geqslant 2$. Будем называть положительной ориентацией положительную ориентацию Γ_1 и отрицательную ориентацию остальных Γ_k.

Теорема 2.9. Есть область Ω, $G \subset \Omega$ — замкнутая область, $\partial G \subset \Omega$ и граница состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых Γ_k, а ее внутренность $\mathring{G}$,$f \in A(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = 0 \tag{9}$$

Доказательство. G — компакт, поэтому

$$\exists\delta_0>0 \text{ т.ч. } \forall z\in G \quad \overline{B}_{\delta_0}(z)=\{\zeta:|\zeta-z|\leqslant\delta_0\}\subset\Omega$$
$$G_{\delta_0}=\bigcup_{z\in G}\overline{B}_{\delta_0}(z) \text{ — компакт}$$

Тогда $G_{\delta_0}\subset\Omega$ и $f\in C(G_{\delta_0})$. По теореме Кантора

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ т.ч. } \forall\zeta_1,\zeta_2\in G_{\delta_0} \text{ т.ч. } |\zeta_1-\zeta_2|<\delta \implies |f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|<\varepsilon \quad (10)$$

Хотим через $P_{k,L}=\{z_{k,\nu}\}_{\nu=1}^{N_{k,\delta}}$ обозначить разбиение $\overrightarrow{\Gamma_k}$, где $z_{k,\nu}\in\Gamma_k$ и

$$|z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu}|<\delta \quad (11)$$
$$\left|\int_{\overrightarrow{\Gamma_k}} f(z)dz-\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}} f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu})\right|<\varepsilon \quad (12)$$

Теперь рассмотрим многоугольники $Q_{k,\delta}$ с вершинами $z_{k,\nu}, 1\leqslant\nu\leqslant N_{k,\delta}$. Тогда, если мы ориентируем эти многоугольники, так чтобы общая граница была ориентирована положительно, то по предыдущей теореме

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\overrightarrow{Q_{k,\delta}}} f(z)dz=0 \quad (13)$$

Рассмотрим

$$\left|\int_{\overrightarrow{Q_{k,\delta}}} f(z)dz-\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}} f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu})\right|=$$
$$=\left|\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}}\int_{\overrightarrow{[z_{k,\nu},z_{k,\nu+1}]}} f(z)dz-\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}} f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu})\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}}\left|\int_{\overrightarrow{[z_{k,\nu},z_{k,\nu+1}]}} f(z)dz-f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu})\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}}\max_{z\in[z_{k,\nu},z_{k,\nu+1}]}|f(z)-f(z_{k,\nu})|\cdot|z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu}| \quad (14)$$

В силу (10), а так же факта того, что сумма $|z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu}|$ не превосходит длины кривой, получаем 09.03.23

$$(14)<\varepsilon\sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}}|z_{k,\nu+1}-z_{k,\nu}|\leqslant\varepsilon l(\Gamma_k) \quad (15)$$

$$
\begin{gathered}
\left|\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz\right| \underset{(13)}{=} \left|\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\overrightarrow{Q_{k,\delta}}} f(z)dz\right| \leqslant \\
\leqslant \left|\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}} f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1} - z_{k,\nu})\right| + \\
+ \left|\sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N_{k,\delta}} f(z_{k,\nu})(z_{k,\nu+1} - z_{k,\nu}) - \sum_{k=1}^{m} \int_{\overrightarrow{Q_{k,\delta}}} f(z)dz\right| < \\
< m\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} l(\Gamma_k) \quad (16)
\end{gathered}
$$

Последнее неравенство следует из того, что в первом модуле интеграл по ∂G есть сумма интегралов по Γ_k, тогда знак суммы можно вынести за модуль, и подмодульное выражение будет в точности неравенство (12). Во втором модуле сумма выносится аналогично, а дальше выполняется соотношение (15). В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$
(16) \implies \int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = 0
$$

■

Глава 3

Формула Коши

Теорема 3.1. Имеется область $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $\overline{B_r}(a) = \{z : |z-a| \leqslant r\} \subset \Omega$ — замкнутый круг. Допустим, что $f \in A(\Omega)$. Пусть $z_0 \in B_r(a)$, $\gamma_r(a) = \{z : |z-a| = r\}$ — окружность. Тогда справедлива формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r(a)}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{1}$$

Лемма 3.2. Пусть $\rho > 0$, $\gamma_\rho(z_0)$ — окружность, тогда

$$\int_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \tag{2}$$

Доказательство. Окружность параметризуется как

$$\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)} = \{z : z = z_0 + \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{3}$$

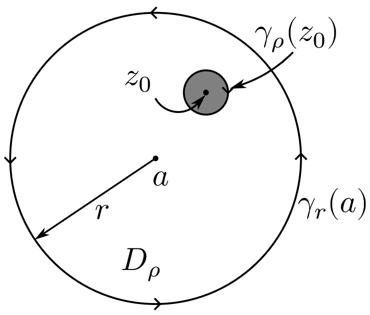
(3) $\implies$ при $z \in \gamma_\rho(z_0)$:

$$z - z_0 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4}$$

Окружность является гладкой кривой, поэтому (2), (4) и формула

> (7) от 16.02 влекут
>
> $$\int_{\overrightarrow{\gamma_r(z_0)}} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho(-\sin\theta + i\cos\theta)}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta =$$
>
> $$= i\int_0^{2\pi} \frac{cos\theta + i\sin\theta}{cos\theta + i\sin\theta} d\theta = 2\pi i$$
>
> ■

Доказательство (теоремы). Выберем $0 < \rho < r - |z_0 - a|$. Рассмотрим область $D_\rho = B_r(a) \setminus \overline{B_\rho}(z_0)$: $\partial D_\rho = \gamma_r(a) \cup \gamma_\rho(z_0)$



и функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0} \tag{5}$$

Функция $f(z) \in A(\Omega)$, поэтому $\varphi \in A(\Omega \setminus \{z_0\})$. Понятно, что $\overline{D_\rho} \subset \Omega$, применим теорему Коши

$$\int_{\overrightarrow{\partial D_\rho}} \varphi(z)dz = 0 \tag{6}$$

Будем считать, что на ∂D_ρ задана положительная ориентация.

$$(6) \implies \int_{\overrightarrow{\partial D_\rho}} \varphi(z)dz = \int_{\overrightarrow{\gamma_r(a)}} \varphi(z)dz + \int_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \varphi(z)dz =$$

$$= \int_{\overrightarrow{\gamma_r(a)}} \varphi(z)dz - \int_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \varphi(z)dz = 0 \tag{7}$$

Перенесем последний интеграл в другую сторону

$$(7) \Leftrightarrow \int_{\overrightarrow{\gamma_r(a)}} \varphi(z)dz = \int_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \varphi(z)dz \tag{8}$$

теперь займемся интегралом в правой части

$$(6) \implies \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \varphi(z)dz = \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \\ = \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \underset{(2)}{=} \\ \underset{(2)}{=} \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + 2\pi i f(z_0) \quad (9)$$

поскольку $f(z)$ — аналитична, то можем применить формулу для $f(z)-f(z_0)$

$$f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + S(z) \quad (10)$$

$$\frac{|S(z)|}{|z-z_0|} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0 \quad (11)$$

$$(11) \implies \exists\delta > 0 \text{ т.ч. } \forall z : |z-z_0| \leqslant \delta \text{ имеем } \frac{|S(z)|}{|z-z_0|} < 1 \quad (12)$$

тогда (10), (11), (12) влекут, что при $\rho < \delta$, $|z-z_0| = \rho$ имеем

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant |f'(z_0)| \cdot |z-z_0| + |S(z)| < \\ < |f'(z_0)| \cdot |z-z_0| + |z-z_0| = (|f'(z_0)|+1)|z-z_0| \quad (13)$$

По свойству 1.11, (13) влечет, при $0 < \rho < \delta$ имеем

$$\left|\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_\rho(z_0)} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| dl(z) \underset{(13)}{\leqslant} \\ \underset{(13)}{\leqslant} \int\limits_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{(|f'(z_0)|+1)|z-z_0|}{|z-z_0|} dl(z) = (|f'(z_0)|+1)l(\gamma_\rho(z_0)) = \\ = \rho \cdot 2\pi(|f'(z_0)|+1) \quad (14)$$

в выкладке (9) введем обозначение

$$C(\rho) = \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho(z_0)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

а в выкладке (14) $A = 2\pi(|f'(z_0)|+1)$, тогда

$$(14) \implies \exists\delta > 0 \text{ т.ч. при } 0 < \rho < \delta \text{ имеем } |C(\rho)| < A\rho \quad (15)$$

$$(6),(8),(9) \implies \int\limits_{\gamma_r(a)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0) = C(\rho) \quad (16)$$

теперь возьмем $\forall\varepsilon > 0$, $\rho < \varepsilon/A$ и $\rho < \delta$, и при таких ρ

$$(16) \implies \left|\int_{\gamma_r(a)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0)\right| = |C(\rho)| \leqslant A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon \qquad (17)$$

$(17) \implies (1)$ ■

3.1. Теорема о частных производных криволинейного интеграла второго рода, зависящего от параметра

16.03.23

Теорема 3.3. Имеется гладкая ориентированная кривая $\vec{\Gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$. А так же, имеется функция $f(\zeta, x, y)$, где $\zeta \in \Gamma$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Кроме того имеется прямоугольник Q:

$$\overline{Q} = \{\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \gamma \leqslant y \leqslant \delta\}$$

При этом $\overline{Q} \subset D$. Предположим, что $f \in C(\Gamma \times D)$ и

$$\forall\zeta \in \Gamma\ \forall(x,y) \in \overline{Q} \qquad \begin{aligned} &\exists f'_x(\zeta, x, y) \in C(\Gamma \times \overline{Q}) \\ &\exists f'_y(\zeta, x, y) \in C(\Gamma \times \overline{Q}) \end{aligned}$$

Рассмотрим $F(x,y) = \int_{\vec{\Gamma}} f(\zeta, x, y) d\zeta$, тогда

$$\forall(x,y) \in \overline{Q} \qquad \exists F'_x(x,y) = \int_{\vec{\Gamma}} f'_x(\zeta, x, y) d\zeta \qquad (1)$$

$$\exists F'_y(x,y) = \int_{\vec{\Gamma}} f'_y(\zeta, x, y) d\zeta \qquad (2)$$

Доказательство. Поскольку Γ гладкая, то можем записать криволинейный интеграл второго рода, как обычный интеграл. Предположим, что $\vec{\Gamma} = \{u(t) + iv(t) : t \in [a,b]\}$, тогда

$$F(x,y) = \int_a^b f(u(t) + iv(t), x, y)(u'(t) + iv'(t))dt \qquad (3)$$

Введем комплексно-значную функцию Φ:

$$\Phi(t, x, y) = f(u(t) + iv(t), x, y)(u'(t) + iv'(t))$$

Она непрерывна и имеет непрерывные частные производные, когда $(x, y) \in Q$. Если мы зафиксируем y и будем рассматривать Φ как функцию от x на соответствующем промежутке, то ее вещественная и мнимая часть удовлетворяют условиям теоремы о существовании производных. Частные производные у Φ существуют, если они существуют, соответственно у f. Аналогично, если фиксировать x. Тогда (3) и теорема из 3-его семестра влекут

$$F'_x(x, y) =$$
$$= \int_a^b f'_x(u(t) + iv(t), x, y)(u'(t) + iv'(t))dt =$$
$$= \int_{\overrightarrow{\Gamma}} f'_x(\zeta, x, y)d\zeta \implies (1)$$

Аналогично следует (2) ∎

Глава 4

Дальнейшие свойства аналитических функций

4.1. Теорема о бесконечной гладкости аналитической функции

Теорема 4.1. Пусть имеется $B = \{z : |z-a| < R\}$, и функция $f \in A(B)$, тогда $\forall r \geqslant 1$ $f \in C^r(B)$.

Замечание. Напоминание: если $g \in A(\Omega)$, где Ω — область, тогда

$$\left.\begin{aligned} &g'_z(z) = g'(z) \\ &g'_{\overline{z}}(z) = 0 \end{aligned}\right\} \implies g'_x = g', g'_y = ig'$$

Доказательство. Возьмем любое $0 < r < R$. Пусть $\overrightarrow{\gamma_r} = \{z : |z-a| = r\}$ — окружность, а $B_r = \{z : |z-a| < r\}$ — открытый круг, где $a = p + iq$ и $B_r^* = \{(x,y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 < r^2\}$. Для таких z справедливо соотношение

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4}$$

Пусть $z = x + iy$, тогда рассмотрим выражение

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - x - iy}$$

Тогда может взять любой z и любой Q, т.ч. $\overline{Q} \subset B_r^*$ и $(x, y) \in \overline{Q}$. При фиксированном $\zeta \neq z$ выполнено:

$$\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)' = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)^{(n)} := \left(\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)^{(n-1)}\right)' = \frac{n!}{(\zeta - z)^{(n+1)}} \tag{5}$$

$$(5) \implies \left(\frac{1}{\zeta - x - iy}\right)^{(m+n)}_{\underbrace{x...x}_{m}\underbrace{y...y}_{n}} = i^n \frac{(m+n)!}{(\zeta - x - iy)^{m+n+1}} \tag{6}$$

Тогда (1), (2), (4), (6) $\implies$

$$f^{(m+n)}_{\underbrace{x...x}_{m}\underbrace{y...y}_{n}}(z) = i^n \frac{(m+n)!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x - iy)^{m+n+1}} \tag{7}$$

(7) выполнена $\forall z \in B_r$ (8), т.к. r произвольно, (8) влечет, что (7) выполнено $\forall z \in B$. Строго говоря, доказательство нужно вести через индукцию по $(m + n)$. ■

Следствие 4.1.1. Пусть $f \in A(\Omega)$, тогда $\forall r \geqslant 1$ $f \in C^r(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем любое $z_0 \in \Omega$, $\exists B = \{z : |z - z_0| < R\}$, $B \subset \Omega \implies f \in A(B)$. ■

4.2. Теорема об аналитичности производной аналитической функции

Теорема 4.2. В обозначениях прошлой теоремы

$$f \in A(B) \implies f' \in A(B) \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим $f'(z) = f'_x(z)$, то есть $m = 1, n = 0$, тогда

$$(7) \implies f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \tag{10}$$

$$(10) \implies (f'(z))'_x + i(f'(z))'_y =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} f(\zeta)\left(\left(\frac{1}{(\zeta - z)^2}\right)'_x + i\left(\frac{1}{(\zeta - z)^2}\right)'_y\right) d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} f(\zeta) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{(\zeta - z)^2}\right)'_{\overline{z}} d\zeta = 0$$

Так как в силу аналитичность производная по $\overline{z}$ равна нулю. Вообще говоря, эта формула верна для B_r, но поскольку мы можем брать r сколько угодно близкое к R, то если мы возьмем z из B, то мы можем взять такое r, чтобы z лежала в B_r, и тогда формула верна в окрестности z вследствие выбора r. ■

Следствие 4.2.1. Пусть $f \in A(\Omega)$, тогда $f' \in A(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем любое $z_0 \in \Omega$, тогда $\exists B = \{z : |z - z_0| < R\}, B \subset \Omega$, и по теореме $f' \in A(B)$. Поскольку свойство локальное, получили, что f аналитична в окрестности любой точки из Ω. ■

4.3. Формула для n-ной производной аналитической функции

Определение 4.1 (Любая производная аналитической функции). Есть открытое множество Ω и $f \in A(\Omega)$. По предыдущему следствию $f' \in A(\Omega)$, это влечет, что

$$\exists (f')'(z), z \in \Omega$$

по определению полагаем

$$f''(z) := (f')'(z) \tag{11}$$

вторая производная — производная некоторой аналитической функции, поэтому

$$(11) \implies f'' \in A(\Omega) \tag{12}$$

раз она аналитична в Ω, значит у нее есть производная

$$(12) \implies \forall z \in \Omega \ \exists (f'')'(z) := f'''(z) \tag{13}$$

и так далее, по индукции

$$n \geqslant 3 \ f^{(n)}(z) \in A(\Omega) \tag{14}$$

$$(14) \implies \forall z \in \Omega \ \exists (f^{(n)})' = f^{(n+1)}(z) \tag{15}$$

$$(15) \implies f^{(n+1)} \in A(\Omega)$$

Опять вернемся к обозначениям из 4.1. Запишем формулу Коши для $z \in B_r$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

При $m = 1, n = 0$ формула (7) влечет

$$f'(z) = f'_x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \tag{10}$$

Мы уже знаем, что f' аналитична, поэтому это равенство можно использовать и дальше. Теперь (10) влечет

$$\begin{aligned}
&f''(z) = (f')'(z) = (f')'_x(z) = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x - iy)^2} d\zeta\right)'_x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - x - iy)^2}\right)'_x d\zeta = \\
&\qquad = \frac{2}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x - iy)^3} d\zeta = \frac{2}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta
\end{aligned} \tag{16}$$

Далее по индукции при $n \geqslant 2$, $z \in B_r$ предполагаем, что

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{17}$$

Тогда (17) влечет

$$\begin{aligned}
&f^{(n+1)}(z) = (f^{(n)})'(z) = (f^{(n)})'_x(z) = \\
&\qquad = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - x - iy)^{n+1}}\right)'_x d\zeta = \\
&\qquad\qquad = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta
\end{aligned}$$

Возьмем $z = a$, тогда при $n \geqslant 1$

$$(17) \implies f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{(n+1)}} d\zeta \tag{18}$$

4.4. Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд

Теорема 4.3. Все еще пользуемся обозначениями из 4.1. Пусть $f \in A(B)$, тогда $\forall z \in B$ справедливо равенство

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \tag{19}$$

Доказательство. Зафиксируем z и выберем $r : |z - a| < r < R$. Функция $f \in C(\gamma_r)$, γ_r — компакт, поэтому по первой теореме Вейерштрасса, которую мы отдельно применим к вещественной и мнимой частям, функция на компакте ограниченна. Поэтому

$$\exists M_r : |f(z)| \leqslant M_r,\ z \in \gamma_r \tag{20}$$

Теперь применим формулу Коши к z и γ_r:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4}$$

Теперь запишем следующее выражение:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \\ = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \\ = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \tag{21}$$

Введем обозначение $q = |z - a|/r < 1$. При $\zeta \in \gamma_r$ справедливы соотношения:

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = q$$

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| \leqslant \frac{M_r}{r} \cdot q^n \tag{22}$$

Тогда (4), (22) влекут

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right) d\zeta = \\ = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

Здесь мы интегрируем целый ряд. Заметим, что

$$f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right)$$

сходится равномерно по ζ по признаку Вейерштрасса (следует из (22)). В итоге, полученный ряд состоит из слагаемых, как в правой части (18), что влечет (19). ■

Замечание. В прошлом семестре были рассуждения о сходимости степенных рядов. Здесь получили, что данный ряд, который называется рядом Тейлора для аналитической функции f, сходится для любого z из B. Тогда в любом замкнутом круге меньшем по радиусу, чем B, он сходится равномерно.

Принципиальный момент: если функция f аналитична в круге, то она раскладывается в нем в степенной ряд. В конце прошлого семестра был получен результат, что если степенной ряд сходится в круге, то он является аналитической функцией.

Таким образом получается, что если есть функция, заданная в круге, то условие того, что она аналитична в круге и того, что она равна сумме степенного ряда, это эквивалентные условия. Это еще одно важное свойство аналитической функции.

Разложение элементарных функций в ряды в комплексной плоскости[1]

23.03.23

1. $f_1(z) = e^z \in A(\mathbb{C})$, поэтому степенной ряд для f_1 сходится в $\mathbb{C}$. Далее, при $x \in \mathbb{R}$

$$(f_1(x))^{(n)} = {f_1}^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}(x) = e^x,\ (f_1(z))^{(n)}_{|z=0} = 1,$$

отсюда следует

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}$$

2. $f_2(z) = \cos z$, аналогично $(\cos z)^{(n)} = (\cos z)^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}$, поэтому

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ z \in \mathbb{C}$$

3. $f_3(z) = \sin z$, аналогично 1. и 2.

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1},\ z \in \mathbb{C}$$

4. $f_4(z) = \ln(1+z),\ |z| < 1$, полагаем

$$\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z),$$

[1]За основу конспекта за эту дату, взят конспект от 2021 года авторства Антона Чижова

$|\arg(1+z)| < \pi$ при $|z| < 1$. Опять пользуемся равенством $(\ln(1+z))^{(n)} = (\ln(1+z))^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}$, при $z = x$, $-1 < x < 1$ имеем

$$(\ln(1+x))^{(n)}_{x\ldots x} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!(1+x)^{-n},$$

поэтому

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n,$$

$|z| < 1$, $\ln(1+x) \in \mathbb{R}$ при $-1 < x < 1$.

5. $f_5(z) = (1+z)^r$, $r \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{N}$, $r \neq 0$. Аналогично 4. получаем

$$(1+z)^r = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

при $|z| < 1$, $(1+x)^r > 0$ при $(-1 < x < 1)$

6. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$, положим при $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha := e^{\alpha\ln(1+z)},$$

где $\ln(1+z)$ определена в 4. Тогда

$$\begin{aligned}((1+z)^\alpha)' &= e^{\alpha\ln(1+z)}\cdot(\alpha\ln(1+z))' = \alpha e^{\alpha\ln(1+z)}\frac{1}{1+z}\\ &= \alpha e^{\alpha\ln(1+z)}e^{-\ln(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

и аналогично получаем

$$((1+z)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n},$$

поэтому при $|z| < 1$ имеем

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

4.5. Теоремы единственности для аналитических функций.

Теорема 4.4 (с производными функциями). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f \in A(G)$, $a \in G$, $f(a) = 0$, $f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в G.

Доказательство. Пусть

$$E = \{z \in G : f(z) = 0 \text{ и } f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $a \in E \implies E \neq \varnothing$.

Множество E относительно замкнуто в G: Пусть $z_m \in E$,

$$z_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*,$$

$z_* \in G$. Тогда в силу $f \in C^\infty(G)$, $f^{(n)} \in C^\infty(G)$ имеем

$$f(z_m) \to f(z_*),$$
$$f^{(n)}(z_m) \to f^{(n)}(z_*) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Но $z_m \in E \implies f(z_m) = 0,\ f^{(n)}(z_m) = 0 \implies 0 \xrightarrow[m\to\infty]{} f(z_*)$, $0 \xrightarrow[m\to\infty]{} f^{(n)}(z_*) \implies f(z_*) = f^{(n)}(z_*) = 0$, т.е. $z_* \in E$.

Множество E относительно открыто в G: Пусть $z_0 \in E$, тогда $\exists r > 0 : \{z : |z - z_0| < r\} \subset G$, поэтому при $|z - z_0| < r$ имеем разложение в ряд:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv 0,$$

поскольку $z_0 \in E$, поэтому $\{z : |z - z_0| < r\} \subset E$.

Поскольку G связно, $E \neq \varnothing$, E относительно открыто и замкнуто в G, то $E = G$, т.е. $f(z) = 0 \ \forall z \in G$. ■

Теорема 4.5 (со значениями функции)**.** Пусть G — область, $E \subset G$, z_* — точка сгущения E, $z_* \in G$, $f \in A(G)$, $f(z_0) = 0 \ \forall z_0 \in E$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в G.

Доказательство. Поскольку z_* — точка сгущения E, то $\exists \{z_m\}_{m=1}^{\infty}$, $z_m \in E$ и $z_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*$, поэтому $f(z_m) \to f(z_*)$, $0 \to f(z_*) \implies f(z_*) = 0$.

Если $f^{(n)}(z_*) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то по предыдущей теореме $f(z) \equiv 0$. Предположим, что $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.ч. $f^{(n_0)}(z_*) \neq 0$. Пусть n_0 — наименьшее такое число, т.ч. $f^{(k)}(z_0) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n_0 - 1$; если $n_0 = 1$, то $f'(z_0) \neq 0$.

Выберем $r > 0$ так, чтобы $\{z : |z - z_*| \leqslant r\} \subset G$, пусть

$$M_f(r) = \max_{z:|z-z_*|=r} |f(z)|.$$

Тогда при $|z - z_*| \leqslant r$ имеем равенство

$$f(z) = f(z_*) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n =$$
$$= \frac{f^{(n_0)}(z_*)}{n_0!}(z - z_*)^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n \quad (1)$$

Неравенство (22) в лекции от 16.03.23 влечёт

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}\right| \leqslant \frac{M_f(r)}{r^n},\ n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

поэтому при $|z - z_*| = \delta r$, $0 < \delta < 1$, из (2) получаем

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n\right| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}\right| \cdot |z - z_*|^n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{M_f(r)}{r^n}(\delta r)^n = M_f(r)\delta^{n_0+1} \cdot \frac{1}{1-\delta} \quad (3)$$

Выберем δ_0 из равенства

$$\frac{|f^{(n_0)}(z_*)|}{n_0!}(\delta_0 r)^{n_0} = 2M_f \delta_0^{n_0+1} \cdot \frac{1}{1-\delta_0}, \quad (4)$$

тогда при $0 < |z - z_*| < \delta_0 r$, $|z - z_*| = \delta r$

$$|f(z)| \geqslant \left|\frac{f^{(n_0)}(z_*)}{n_0!}(z - z_*)^{n_0}\right| - \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\frac{f^{(n_0)}(z_*)}{n_0!}\right|(\delta r)^{n_0} - M_f(r)\delta^{n_0+1} \cdot \frac{1}{1-\delta} \geqslant \frac{1}{2}\frac{|f^{(n_0)}(z_*)|}{n_0!}(br)^{n_0} > 0 \quad (5)$$

Из (5) следует, что $E \cap \{z : |z - z_*| < \delta_0\} = \{z_*\}$, что противоречит тому, что z_* – точка сгущения E. Следовательно, $f^{(n)}(z_*) = 0$ $\forall n$ и $f(z) \equiv 0,\ z \in G$. ■

Следствие 4.5.1. Пусть G — область, $E \subset G$, как в теореме 2, $g, h \in A(G)$ и $g|_E = h|_E$. Тогда $g(z) \equiv h(z)$, $z \in G$.

Доказательство. Пусть $f(z) = g(z) - h(z)$, тогда $f|_E = 0 \implies f(z) \equiv 0$, $z \in G \implies h(z) \equiv g(z)$. ∎

Следствие 4.5.2 (о структуре аналитической функции в окрестности нуля)**.** Пусть G — область, $z_0 \in G$, $f \in A(G)$, $f \not\equiv 0$ в G, $f(z_0) = 0$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in A(G)$ т.ч. $\varphi(z_0) \neq 0$ и $f(z) = (z - z_0)^{n_0}\varphi(z)$ и $\exists \delta > 0$ т.ч. при $z \neq z_0$, $|z - z_0| < \delta$ $f(z) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ — минимальное число, для которого $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$, такой n_0 существует в силу $f \not\equiv 0$.

Выберем r так, чтобы $\{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset G$. Проводя рассуждения из доказательства теоремы 2 (со значениями функции), полагая

$$M_f(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

аналогично получаем при $|z - z_0| \leqslant r$

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \left(\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-n_0} \right) \tag{6}$$

Положим

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n_0}}, \ z \in G \setminus \{z_0\} \\ \dfrac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-n_0}, \ |z - z_0| \leqslant r \end{cases} \tag{7}$$

Соотношение (6) показывает, что (7) определено корректно при $|z - z_0| < r$, $z \neq z_0$, поэтому (7) определяет функцию $\varphi(z)$ при $z \in G$. Первая строка в (7) показывает, что $\varphi \in A(G \setminus \{z_0\})$, вторая строка показывает, что $\varphi \in A(\{|z - z_0| < r\})$, поэтому (7) $\implies$ $\varphi \in A(G)$. Далее,

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0,$$

поэтому $\exists \delta > 0$ т.ч. $\varphi(z) \neq 0$ при $|z - z_0| < \delta$, тогда при $z \neq z_0$, $|z - z_0| < r$, $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) \neq 0$. ∎

4.6. Аналитическое продолжение

30.03.23

Определение 4.2. Пусть имеются области Ω и D, при этом $\Omega \cap D \neq \varnothing$. Кроме того имеются функции $f \in A(\Omega)$, $g \in A(D)$. Предположим, что

$$f(z) = g(z)\ \forall z \in \Omega \cap D,$$

в таком случае говорят, что функция g аналитически продолжает функцию f в область D.

Теорема 4.6. Аналитическое продолжение функции f в область D единственно. То есть, если имеется $g_1 \in A(D)$, т.ч.

$$f(z) = g_1(z)\ \forall z \in \Omega \cap D,$$

то $g_1(z) = g(z)\ \forall z \in D$.

Доказательство. Поскольку Ω и D — области и пересечение их не пусто, то их пересечение является открытым множеством. В открытом множестве каждая точка является точкой сгущения для этого множества. В области D имеются две аналитические функции: g и g_1. Они совпадают на множестве, которое имеет предельную точку в области D, поэтому по теореме единственности они совпадают. ■

Продолжение аналитической функции по пути

Определение 4.3. Путем называется непрерывное отображение $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\varphi \in C([a, b])$. Говорят, что $\varphi(a)$ — начало пути, $\varphi(b)$ — конец пути.

Замечание. Важная вещь — инъективность не требуется!

Определение 4.4. Пусть имеется область $D \subset \mathbb{C}$, а так же круг $B = B_r(z_0)$, где $z_0 \in D$ и $B \subset D$. Предполагаем, что у нас есть некий путь $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, при этом $\varphi(t) \in D \ \forall t \in [a, b]$, и $\varphi(a) = z_0$, а $\varphi(b) = z_1$.
Кроме того, имеется вектор-функция $f \in A(B)$ и круг $B_1 = B_{r_1}(z_1)$ (при этом z_1 может совпадать с z_0). Так же имеется разбиение $\{t_k\}_{k=0}^n$, где $t_0 = a$, $t_k < t_{k+1}$, $t_n = b$, и круги $B_{\rho_k}(\zeta_k) \subset D$, при этом $\zeta_k = \varphi(t_k), 0 \leqslant k \leqslant n$, т.о. $\zeta_0 = z_0$, $\zeta_n = z_1$, а $\rho_0 = r_0$, $\rho_n = r_1$. В этих обозначениях $B = B_{\rho_0}(\zeta_0)$. Дальше предполагаем, что $\forall k = 0, \dots, n-1$

$$B_{\rho_k}(\zeta_k) \cap B_{\rho_{k+1}}(\zeta_{k+1}) \neq \varnothing.$$

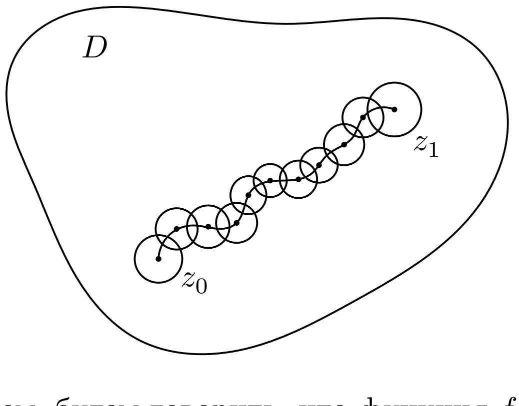
Предположим, что f аналитически продолжена в $B_{\rho_1}(\zeta_1)$, т.е. существует $f_1 \in A(B_{\rho_1}(\zeta_1))$, т.ч.

$$f|_{B_{\rho_0}(\zeta_0) \cap B_{\rho_1}(\zeta_1)} = f_1|_{B_{\rho_0}(\zeta_0) \cap B_{\rho_1}(\zeta_1)}.$$

Далее, f_1 аналитически продолжена в $B_{\rho_2}(\zeta_2)$, т.е. существует $f_2 \in A(B_{\rho_2}(\zeta_2))$, т.ч.

$$f_2|_{B_{\rho_1}(\zeta_1) \cap B_{\rho_2}(\zeta_2)} = f_1|_{B_{\rho_1}(\zeta_1) \cap B_{\rho_2}(\zeta_2)}.$$

При $k < n$ существует $f_k \in A(B_{\rho_k}(\zeta_k))$, f_k аналитически продолжена в $B_{\rho_{k+1}}(\zeta_{k+1})$. И так далее до $k = n$, где $f_n \in A(B_{\rho_n}(\zeta_n))$ или $f_n \in A(B_1)$.



В таком случаем, будем говорить, что функция f аналитически аналитически продолжена вдоль пути, лежащего в области D из круга B в круг B_1.

В процессе построения используется довольно много промежуточных кругов, которые можно выбирать бесконечным числом способов, т.к. можно менять их количество. Если мы для одного набора кругов реализовали продолжение, получим ли мы в конце ту же самую функцию при выборе другого набора кругов, удовлетворяющего условиям?

Теорема 4.7. Аналитическое продолжение не зависит от промежуточных кругов $B_{\rho_1}(\zeta_1), \dots, B_{\rho_{n-1}}(\zeta_{n-1})$, то есть, если имеется другой набор кругов, но с теми же условиями и начальным и конечными кругами B и B_1 соответственно, то функция, которая будет получена в круге B_1 будет совпадать с той, что была получена до этого.

Доказательство. Без доказательства. ∎

Теорема 4.8. Пусть имеется область $D \subset \mathbb{C}$, круг $B = B_r(z_0)$, где $z_0 \in D$ и некоторая функция $f \in A(B)$. Рассмотрим любой путь $\gamma : [a, b] \to D$, т.е $\gamma(t) \in D$. $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$, где $z_1 \in D$. И имеется ещё один круг $B_1 = B_{r_1}(z_1) \subset D$. Тогда говорят, что функция f продолжима в область D из круга B по любому пути.

Доказательство. Без доказательства. ∎

Определение 4.5. Множество называется односвязной областью, если любой замкнутый путь можно непрерывно стянуть в точку.

Теорема 4.9 (о монодромии)**.** Пусть D — односвязная область, и имеется круг $B \subset D$, функция $f \in A(B)$ и f продолжима в D из B по любому пути. Тогда $f \in A(D)$, т.е. $\exists F \in A(D)$, т.ч. $F|_B = f|_B$.

Доказательство. Без доказательства. ∎

Пример 4.1 (функции, продолжимой по любому пути)**.** Функция $\log z$ была определена в односвязной области $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ формулой

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

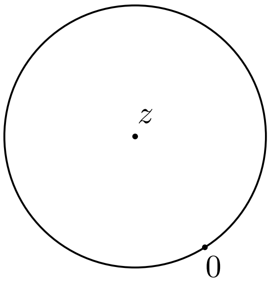
при $-\pi < \arg z < \pi$ и выполнено $e^{\log z} = z$. Теперь будем писать

$$\log_k z = \log|z| + i\arg z + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$$

Это годится в качестве логарифма, т.к.

$$e^{\log_k z} = e^{\log z + 2\pi i k} = z$$

Пусть теперь $\zeta \in B_r(z)$, $z \neq 0$, $r \leqslant |z|$. Выберем круг:

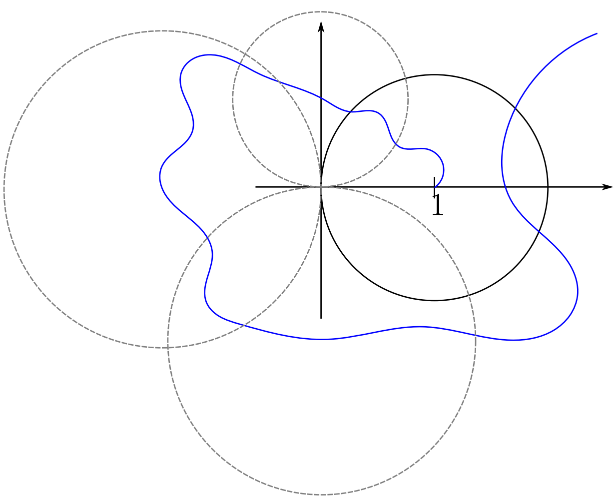


Определим в этом круге $\arg\zeta$, тогда можем полагать

$$\log\zeta = \log|\zeta| + i\arg\zeta$$

Тогда по результатам прошлого семестра, если мы смотрим на любой круг в $\mathbb{C}$, такой что 0 не лежит в нем, то для любого такого круга мы можем определить корректный $\log\zeta$ бесконечным числом способов.

Теперь рассмотрим круг $B = B_1(1)$, зададим каким-либо образом функцию $\log z$, при этом в данном круге $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. Возьмем любой путь, который проходит в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, то мы можем продолжить функцию $\log z$ вдоль этого пути.



Если в k-ом круге мы полагаем, что

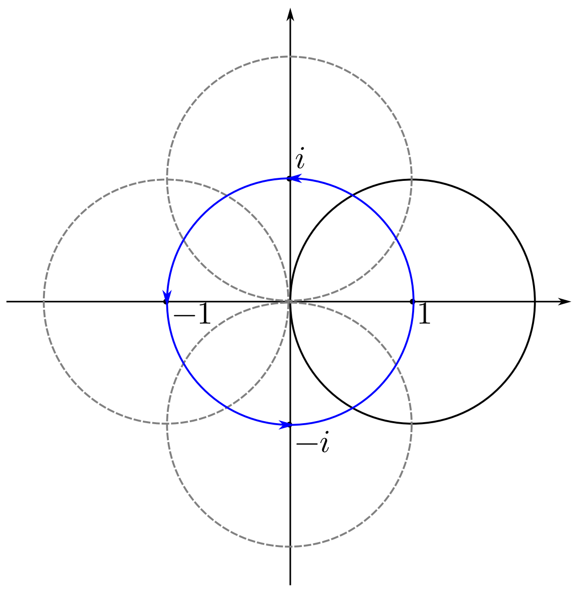
$$\log z = \log|z| + i \arg_{(k)} z,$$

где (k) есть номер круга. Если у нас есть два круга, которые пересекаются и проходят через точку 0, то мы можем выбрать круги с номерами k и $k+1$, так что в круге $k+1$ можно выбрать аргумент с условием, что

$$\arg_{(k+1)} z = \arg_{(k)} z$$

в пересечении кругов. Чтобы это сделать, посмотрим на аргумент из круга k в пересечении, тогда знаем как доопределить в круге $k+1$, т.к. все аргументы отличаются на $2\pi ik$, поэтому если у нас есть в какой-то точке круга заданный аргумент, то во всем круге может его задать. Получается, что $\log z$ является продолжимой по любому пути в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Но она не является аналитической!

Посмотрим, что произойдет, если мы обойдем начало координат по единичной окружности.



В первом круге:

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

Переходим во второй круг, на биссектрисе первой четверти аргумент равен $\pi/4$. Хотим, чтобы аргумент во втором круге был непрерывной функцией, поэтому

$$0 < \arg z < \pi$$

На биссектрисе второй четверти аргумент равен $3\pi/4$, поэтому в третьем круге

$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$$

На биссектрисе третьей четверти аргумент равен $5\pi/4$, поэтому в четвертом круге

$$\pi < \arg z < 2\pi$$

На биссектрисе четвертой четверти аргумент равен $7\pi/4$, поэтому в пятом, совпадающем с первым, круге

$$\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{5}{2}\pi$$

До обхода $\log z$ в первом круге определялся как

$$\log z = \log|z| + i\arg z,$$

а после стал определяться как

$$\log z = \log|z| + i\arg z + 2\pi i.$$

Таким образом получается, что хотя $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ не односвязное множество, функция $\log z$ продолжима там по любому пути, но не является аналитической.

Глава 5

Ряды Лорана

Определение 5.1. Пусть $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, кольцом $D_{r,R}(a)$ будем называть множество:

$$D_{r,R}(a) = \{z : r < |z - a| < R\}$$

Частные случаи:

- если $r = 0$, $R = \infty$, то $D_{0,\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$
- если $r = 0$, $R < \infty$, то $D_{0,R}(a) = B_R(a) \setminus \{a\}$

Определение 5.2. Пусть имеется кольцо $D_{r,R}(a)$ и функция $f \in A(D_{r,R}(a))$. Тогда при $z \in D_{r,R}(a)$ выполнено

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

при этом

$$s_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

называется главной частью и сходится равномерно при $|z-a| \geqslant r_1 > r$, а

$$s_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

называется правильной частью и сходится равномерно при $|z-a| \leqslant R_1 < R$.

Теорема 5.1. Если функция f аналитична в кольце $D_{r,R}(a)$, то она раскладывается в ряд Лорана в нём.

06.04.23

Доказательство. Пусть имеется точка $z \in D_{r,R}(a)$, обозначим $|z-a| = \rho$, и выберем $r < r_1 < \rho < R_1 < R$. Так же обозначим

$$\gamma_{r_1} = \{z : |z-a| = r_1\}$$
$$\gamma_{R_1} = \{z : |z-a| = R_1\}.$$

Применим формулу Коши для D_{r_1,R_1}:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\partial D_{r_1,R_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Так как $\partial D_{r_1,R_1}$ состоит из γ_{r_1} и γ_{R_1}, то справедливо следующее равенство:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\partial D_{r_1,R_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{r_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

Поработаем с первым интегралом

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} =$$
$$= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (2)$$

В таком случае (2) влечет, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (3)$$

Последнее равенство верно, т.к.

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| = \frac{\rho}{R_1} < 1,$$

поэтому ряд под интегралом сходится по признаку Вейерштрасса и ряд можно интегрировать почленно. Выберем $r < t < R$, и

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \in A(D_{r,R}(a))$$

тогда

$$\int_{\overrightarrow{\partial D_{t,R_1}(a)}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = 0 \quad (4)$$

$$(4) \implies \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (5)$$

(5) означает, что интеграл в формуле (3) не зависит от R_1, т.к. было любое R_1, а потом фиксировали некоторое t. Обозначим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

и c_n не зависит от выбора R_1. Аналогично рассмотрим второй интеграл:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} =$$
$$= -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \quad (6)$$

и выполнено
$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| = \frac{r_1}{\rho} < 1$$
Тогда (6) влечет
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_{r_1}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_{r_1}}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta \qquad (7)$$
Воспользуемся выбранным ранее t и тем, что $(\zeta - a)^n f(\zeta) \in A(D_{r,R}(a))$, тогда
$$\int\limits_{\overrightarrow{\partial D_{r_1,t}(a)}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta = 0 \qquad (8)$$
и из этого следует, что
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_{r_1}}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_t}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta \qquad (9)$$
и можем обозначить
$$c_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overrightarrow{\gamma_{r_1}}} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta$$
В итоге
$$(1), (2), (7) \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$$

Осталось проверить равномерную сходимость рядов. Если у нас есть $r < r_1 < r_0 < R_0 < R_1 < R$ и мы предположим, что
$$r_0 \leqslant |z - a| \leqslant R_0$$
тогда, при проведении рассуждений, изложенных выше, для формул (2) и (7), будут верны неравенства
$$\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| \leqslant \frac{R_0}{R_1} = Q < 1$$
$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| \leqslant \frac{r_1}{r_0} = q < 1$$
это будет означать, что в интегралах в (2) и (7) будет равномерная сходимость, если мы сохраним интегрирование по γ_{R_1} и γ_{r_1} соответственно. И из этого следует, что (2) равномерно сходится при $|z - a| \leqslant R_0$, а (7) равномерно сходится при $|z - a| \geqslant r_0$. ■

5.1. Особые точки аналитических функций

Определение 5.3. Пусть некая функция $f \in A(D_{0,R}(a))$. Тогда говорят, что a является особой точкой функции f.

Классификация особых точек

Пусть функция f раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{1}$$

1. a — устранимая особая точка f, если $c_{-n} = 0 \ \forall n \geqslant 1$;
2. пусть $c_{-n_0} \neq 0, c_{-n} = 0 \ \forall n > n_0$, тогда a — полюс f n_0-порядка, если $n_0 = 1$, то это простой полюс;
3. $\exists \{c_{-n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $c_{-n_k} \neq 0$, тогда говорят, что a — существенная особая точка f.

Характеристика устранимых особых точек

Теорема 5.2. Точка a является устранимой особой точкой функции f, если

$$\exists 0 < R_0 < R \text{ и } \exists M > 0, \text{ т.ч. } |f(z)| \leqslant M \ \forall z \in D_{0,R_0}(a) \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость: предположим, что a устранимая особая точка, тогда $c_{-n} = 0 \ \forall n \geqslant 1$ и

$$(1) \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3}$$

положим

$$f(a) := c_0 \tag{4}$$

Если мы добавляем значение $f(a)$, то мы получаем степенной ряд, по теореме о разложении в ряд Лорана он сходится в $B_R(a)$. Если возьмём любое R_0, то функция будет аналитична, а следовательно ограничена. Если выполнено условие $c_{-n} = 0 \ \forall n \geqslant 1$, то $f \in A(B_R(a))$.

Достаточность: предположим, что выполнено условие (2) и зафиксируем z: $|z-a|=\rho$, где $0<\rho<R_0$. Кроме того, возьмём $\rho<R_1<R_0$ и $0<\varepsilon<\rho$. Тогда можем рассматривать кольцо $D_{\varepsilon,R_1}(a)$, в силу выбора $z\in D_{\varepsilon,R_1}(a)$ и можем записать формулу Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\partial D_{\varepsilon,R_1}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{5}$$

$$(5)\implies f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{\varepsilon}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{5'}$$

Теперь воспользуемся неравенством между криволинейным интегралом второго рода и криволинейным интегралом первого рода для второго интеграла:

$$(2)\implies\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{\varepsilon}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{M}{\rho-\varepsilon}|d\zeta|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho-\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon=\frac{M\varepsilon}{\rho-\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}0, \tag{6}$$

где $|\zeta-z|\geqslant|z|-|\zeta|=\rho-\varepsilon$. В формуле (5') слева нет ε, а справа есть функция, которая зависит от ε, этот интеграл стремится к 0, и если в формуле (5') устремить ε к 0, то

$$(5),(6)\implies f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{7}$$

(7) выполнена при $z\in D_{0,R_0}(a)$ (8). Теперь дополним определение функции её значением в точке a, для этого положим

$$f(a):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta \tag{9}$$

(8), (9) влекут, что при $z\in B_{R_0}(a)$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{10}$$

такой интеграл был рассмотрен, когда изучалась аналитичность, поэтому

$$(10)\implies f'_{\overline{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_{R_1}}}f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)'_{\overline{z}}d\zeta=0,$$

то есть $f \in A(B_{R_0}(a))$ (11), кроме того $f \in A(D_{0,R}(a))$, поэтому $f \in A(B_R(a))$ (12). Теперь проверим, что все $c_{-n} = 0$

$$(12) \implies (\zeta - a)^n f(\zeta) \in A(B_R(a)) \; n \geqslant 0 \tag{13}$$

тогда при $n \geqslant 0$, $0 < t < R$ и по теореме Коши

$$(13) \implies c_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_t}} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta = 0$$

■

Характеристика полюса

> **Теорема 5.3.** Пусть $f \in A(D_{0,R}(a))$, тогда чтобы точка a была полюсом необходимо и достаточно
>
> $$|f(z)| \xrightarrow[z \to a]{} +\infty \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость: предположим, что a — полюс порядка n_0, где $n_0 \geqslant 1$. Тогда

$$f(z) = \frac{c_{-n_0}}{(z-a)^{n_0}} + \sum_{k=1}^{n_0-1} c_{-k}(z-a)^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n =$$
$$= \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \left(c_{-n_0} + \sum_{k=1}^{n_0-1} c_{-k}(z-a)^{n_0-k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+n_0} \right) =$$
$$= \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \left(c_{-n_0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-a)^m \right) \tag{15}$$

Этот степенной ряд аналитичен в круге $B_R(a)$. $\exists \delta > 0$, т.ч. при $|z-a| < \delta$ выполнено

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-a)^m \right| < \frac{1}{2} \left| c_{-n_0} \right| \tag{16}$$

При выбранном выше δ, (15) и (16) влекут, что

$$|f(z)| \geqslant \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \left(\left| c_{-n_0} \right| - \left| \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-a)^m \right| \right) >$$
$$> \frac{1}{2} \left| c_{-n_0} \right| \frac{1}{|z-a|^{n_0}} \xrightarrow[z \to a]{} +\infty$$

Достаточность: пусть выполнено (14). Это значит, что $\exists \delta_1 > 0$, т.ч. $|f(z)| > 1$ при $|z-a| < \delta_1$ и $z \neq a$ (14'). Понятно, что (14') влечет, что $f(z) \neq 0$, когда $0 < |z-a| < \delta_1$ (14"), тогда (14") влечет, что

$$\frac{1}{f(z)} = \varphi(z) \in A(D_{0,\delta_1}(a)), \tag{18}$$

кроме того (14') влечет

$$|\varphi(z)| < 1 \; z \in D_{0,\delta_1}(a) \tag{19}$$

и $\varphi(z) \not\equiv 0$. По первому пункту

$$(19) \implies \varphi \in A(B_{\delta_1}(a)) \tag{2}$$

13.04.23

$$(14) \implies |\varphi(z)| \xrightarrow[z \to a]{} 0 \tag{1'}$$

Условия на $\varphi(z)$ и (2) влекут, что $\varphi(a) = 0$ (3)[1]. В таком случае к φ применима теорема о мультипликативном строении аналитической функции в окрестности нуля: условия на φ, (2) и (3) влекут

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \varphi(z) = (z-a)^{n_0} g(z), z \in B_{\delta_1}(a) \tag{4}$$

и $g \in A(B_{\delta_1}(a))$ (5), и $g(a) \neq 0$ (6). Так же (1), (4), (6) влекут, что $g(z) \neq 0$, когда $z \in B_{\delta_1}(a)$ (7). Поскольку g аналитична, то (7) влечет, что

$$h(z) = \frac{1}{g(z)} \in A(B_{\delta_1}(a)) \tag{8}$$

Теперь, посмотрим на определения φ и f и на соотношение (4), то

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^{-n_0} \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-n_0} h(z) \tag{9}$$

Воспользуемся тем, что $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

при этом

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overrightarrow{\gamma_\rho}} (z-a)^{n-1} f(z) dz, \text{ где } 0 < \rho < R$$

[1] Прим. ред.: доказательство было разбито на две лекции, и поэтому нумерация получилась странная.

Возьмём $0 < \rho < \delta_1$, тогда

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_\rho}} (z-a)^{n-n_0-1} h(z) dz$$

если $n \geqslant n_0+1$, то (8) влечет $(z-a)^{n-n_0-1} h(z) \in A\left(B_{\delta_1(a)}\right)$. И применив теорему Коши получим, что $c_{-n} = 0$ (11). Рассмотрим $n = n_0$:

$$c_{-n_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\gamma_\rho}} \frac{h(z)}{z-a} dz = h(a) \neq 0$$

■

Критерий существенно особой точки

Теорема 5.4. Пусть функция $f \in A(D_{0,R}(a))$, тогда для того, чтобы a была существенной особой точкой необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. $z_n, \zeta_n \in D_{0,R}(a)$. $|f(z_n)|$ ограничен, т.е. $\exists M$, т.ч. $|f(z_n)| < M$ $\forall n$ (12), кроме того

$$\left.\begin{aligned} &|f(\zeta_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \\ &\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Доказательство. **Необходимость:** Пусть a — существенная особая точка, т.е. не устранимая особая точки и не полюс. Поскольку она не полюс, то условие

$$|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} \infty \text{ не выполнено} \tag{14}$$

(14) влечет, что $\exists M$ и $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. выполнено (12)
Поскольку a не устранимая особая точка, то условие $\exists M_0$ и $\exists \delta_1$, т.ч.

$$|f(z)| \leqslant M_0,\ z \in D_{0,R}(a) \text{ не выполнено} \tag{15}$$

(15) влечет (13).
Достаточность: Предположим, что выполнены (12) и (13). (12) означает, что a не является полюсом. А (13) означает, что a не является устранимой особой точкой. ■

5.2. Вычеты

Определение 5.4. Пусть $f \in A(D_{0,R}(a))$, тогда она раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{1}$$

Тогда вычетом $\operatorname{res}_f a := c_{-1}$ (1). (1) влечет, что

$$\operatorname{res}_f a = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_\rho}} f(z)dz \tag{2}$$

Имеется область $D \subset \mathbb{C}$ и $E \subset D$, $E \neq \varnothing$. E не имеет точек сгущения в D. Пусть $f \in A(D \setminus E)$, т.е. каждая точка E является изолированной точкой, тогда

$$\forall a \in E\ \exists \delta_a > 0, \text{ т.ч. } B_{\delta_a}(a) \subset D \text{ и } B_{\delta_a}(a) \cap E = \{a\} \tag{3}$$

Тогда $\operatorname{res}_f a := c_{-1}(a)$ (2'), где

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(a)(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n, \tag{2''}$$

если $z \in D_{0,\delta_a}(a)$.

Теорема 5.5 (о вычетах)**.** Пусть выполнены условия выше и имеется $\overline{G} \subset D$, т.ч. $\partial G \cap E = \varnothing$, ∂G состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — все точки E, лежащие в G (их конечное число). Тогда справедливо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_f a_k \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим $\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_m}$. Положим $\rho_k = \delta_{a_k}/3$, тогда $\overline{B}_{\rho_k}(a_k) \cap \overline{B}_{\rho_l}(a_l) = \varnothing$, если $k \neq l$. Теперь положим $\widetilde{\rho_k} = \rho_k$, если $B_{\rho_k}(a_k) \subset G$ (5'). Если $B_{\rho_k}(a_k) \not\subset G$, то $0 < \widetilde{\rho_k} < \rho_k$ и $B_{\widetilde{\rho_k}}(a_k) \subset G$ (5''). Определим

$$\Omega = G \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}_{\widetilde{\rho_k}}(a_k)$$

Тогда $f \in A(\Omega)$ и это влечет, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} f(z)dz = 0 \tag{6}$$

(6) эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_k}} f(z)dz = 0, \tag{6'}$$

где $\gamma_k = \{z : |z-a_k| = \widetilde{\rho_k}\}$, а (6') эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\partial G}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma_k}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}_f a_k$$

■

Формулы для вычисления вычетов

Полюс первого порядка

Пусть функция f представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi, \psi \in A(B_R(a))$. Допустим, что $\psi(z) \neq 0$, если $z \neq a$ и $\psi(a) = 0$, но $\psi'(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{res}_f a = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{7}$$

Доказательство. Запишем мультипликативную структуру функции ψ в круге $B_R(a)$:

$$\psi(z) = (z-a)^n g(z),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $g \in A(B_R(a))$ и $g(a) \neq 0$. Найдем производную ψ

$$\psi'(z) = n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z)$$

В силу условия $\psi'(a) \neq 0$ получаем, что

$$\psi(z) = (z-a)g(z)$$
$$\psi'(z) = g(z) + (z-a)g'(z)$$

и $\psi'(a) = g(a)$. Теперь обозначим $1/g(z) = h(z)$, $h(z) \in A(B_R(a))$ и $h(a) = 1/g(a) = 1/\psi'(a)$, поэтому

$$f(z) = \varphi(z)\frac{1}{(z-a)g(z)} = \frac{\varphi(z)h(z)}{z-a}$$

кроме того, обозначим $\varphi h = v(z)$, тогда

$$v(z) = v(a) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z-a)^n, \text{ когда } z \in B_R(a) \tag{8}$$

поэтому

$$\frac{\varphi(z)h(z)}{z-a} = \frac{v(a)}{z-a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n(z-a)^n}{z-a} = \frac{v(a)}{z-a} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z-a)^{n-1} \tag{9}$$

Потому что разложение в ряд Лорана выглядит именно так, (9) влечет, что $\operatorname{res}_f a = v(a)$, что влечет (7). ■

Полюс порядка n

Пусть $\varphi \in A(B_R(a))$, $n \geqslant 2$ и

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

Тогда

$$\operatorname{res}_f a = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

Это следует из того, что φ аналитична, а значит раскладывается в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

поделив на $(z-a)^n$ получим

$$f(z) = \frac{\varphi(a)}{(z-a)^n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

и нужный нам коэффициент появляется при $k = n-1$.

Глава 6

Теория меры

6.1. Мера и интеграл Лебега. Построение меры Лебега

20.04.23

Определение 6.1. Непустое множество R, элементами которого являются множества, называется кольцом, если $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$. В частности, $\varnothing = A \setminus A \in \mathcal{R}$, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

Определение 6.2. Кольцо $\mathcal{R}$ называется σ-кольцом, если $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. При этом, если $\mathcal{R}$ — σ-кольцо, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{R}$.

Определение 6.3. Если $\mathcal{R}$ — кольцо, $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — функция (отображение), то φ называется аддитивной, если $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cap B = \varnothing \implies \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Определение 6.4. Функция φ называется счётно-аддитивной, если из $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$, если $j \neq k$, $j, k \in \mathbb{N} \implies \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$.

Свойства аддитивных функций

1. $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing \implies \varphi(\varnothing) = \varphi(\varnothing \cup \varnothing) = \varphi(\varnothing) + \varphi(\varnothing) \implies \varphi(\varnothing) = 0$;
2. Если $A_j \cap A_k = \varnothing$, $j \neq k$, $1 \leqslant j,k \leqslant n \implies \varphi(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \varphi(A_j)$, доказывается по индукции;
3. $A, B \in \mathcal{R}, A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \implies$

   $$A = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \implies \varphi(A) = \varphi(A \setminus (A \cap B)) + \varphi(A \cap B),$$

   аналогично $\varphi(B) = \varphi(B \setminus (A \cap B)) + \varphi(A \cap B)$

   $$\begin{aligned} &\varphi(A) + \varphi(B) = \\ &= (\varphi(A \setminus (A \cap B)) + \varphi(B \setminus (A \cap B)) + \varphi(A \cap B)) + \varphi(A \cap B) = \\ &\qquad = \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B), \end{aligned}$$

   т.к. $(A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
4. Если $\varphi(A) \geqslant 0$ $\forall A \in \mathcal{R}$, $A \subset B$, то $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$ т.к. $B = A \cup (B \setminus A)$, $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A) \geqslant \varphi(A)$

Теорема 6.1. Пусть φ — счётно-аддитивная функция на кольце $\mathcal{R}$, пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, пусть $A_n \in \mathcal{R}$ $\forall n$ и $A \in \mathcal{R}$. Тогда

$$\varphi(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(A).$$

Доказательство. Пусть $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \geqslant 2$.
Тогда $B_j \cap B_k = \varnothing$, $j \neq k$, $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$, $A = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$.
Тогда $\varphi(A_n) = \sum_{j=1}^n \varphi(B_j)$, $\varphi(A) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(B_j)$, откуда и следует утверждение теоремы. ∎

Определение 6.5. Промежутком $\langle a, b\rangle$, где $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ будем называть множество

$$\langle a, b\rangle = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_j \in \langle a_j, b_j\rangle, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

где знак $\langle,\rangle$ может независимо принимать значения $(, [,),]$.

Определение 6.6. Элементарным множеством будем называть объединение конечного числа промежутков $\langle a_j, b_j \rangle$.

Определение 6.7. Для промежутка $\langle a, b \rangle$ его мерой $m(\langle a, b \rangle)$ назовём выражение

$$m(\langle a, b \rangle) = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j) \tag{1}$$

Замечание. Всегда полагаем $a_j \leqslant b_j$, возможность $a_j = b_j$ допускаем, если $\langle = (, \rangle =)$ в j и $a_j = b_j$, то $\langle a, b \rangle = \varnothing$, поэтому (1) $\implies m(\varnothing) = 0$.

Замечание. Если $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, I_j — промежутки, $I_j \cap I_k = \varnothing$, если $j \neq k$, то полагаем

$$m\, A = \sum_{j=1}^{n} m\, I_j \tag{2}$$

Теорема 6.2. Пусть $\mathcal{E}$ — множество элементарных множеств в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\mathcal{E}$ — кольцо, но не σ-кольцо; если $A \in \mathcal{E}$, то $\exists\, I_j$— промежутки, $1 \leqslant j \leqslant n$, n зависит от A т.ч. $I_j \cap I_k = \varnothing$ и $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$; если $A \in \mathcal{E}$, $A = \bigcup_{k=1}^{l} I'_k$, I'_k — промежуток, $I'_k \cap I'_q = \varnothing$, то

$$\sum_{k=1}^{l} m\, I'_k = \sum_{j=1}^{n} m\, I_j$$

Доказательство. Примем без доказательства. Случай $m = 1$ доказать самостоятельно. ■

Определение 6.8. Через (a, b) будем обозначать множество

$$\{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_j < x_j < b_j, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

открытым элементарным множеством будем называть объединение конечного числа промежутков (a, b).

Определение 6.9. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество. Через $U(E)$ будем обозначать множество конечных или счётных множеств открытых элементарных множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (объединение может быть конечным).

Определение 6.10. Внешней мерой множества E m^*E назовём величину

$$m^*E := \inf_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(E)} \sum_{n=1}^{\infty} m\, A_n \tag{3}$$

(3) $\implies$ $m^*E \geqslant 0$ $\forall E$, если $E_1 \subset E_2$ $\implies$ $m^*E_1 \leqslant m^*E_2$, т.к. $U(E_2) \subset U(E_1)$.

Теорема 6.3 (полуаддитивность внешней меры)**.** Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, тогда

$$m^*E \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что $m^*E_n < +\infty$ $\forall n$, поскольку иначе (4) выполнено. Выберем $\forall \varepsilon > 0$, для $n \in \mathbb{N}$ пусть $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in U(E_n)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\, A_{n_k} < m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{5}$$

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \in U(E)$, тогда (5) $\implies$

$$m^*E \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} m\, A_{n_k} \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n + \varepsilon \tag{6}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то (6) $\implies$ (4). ■

Лемма 6.4 (Бореля)**.** Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, A_n, $n = 1, 2, \ldots$ — открытые множества, и $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\exists\, A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ т.ч. $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_{n_j}$

Доказательство. Примем без доказательства. ■

6.2. Свойства внешней меры элементарных множеств

Теорема 6.5. Пусть A — элементарное множество. Тогда $m^* A = m\, A$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $A = \langle a, b\rangle$. Возьмём $\forall \delta > 0$, положим

$$\langle a, b\rangle_\delta := \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_j \in (a_j - \delta, b_j + \delta)\}.$$

Тогда $\langle a, b\rangle_\delta$ — открытое элементарное множество, $\langle a, b\rangle \subset \langle a, b\rangle_\delta$, $m(\langle a, b\rangle_\delta) \xrightarrow[\delta \to +0]{} m(\langle a, b\rangle)$, поэтому можно взять такое $\varepsilon > 0$, что $m(\langle a, b\rangle_\delta) < m(\langle a, b\rangle) + \varepsilon$, т.е.

$$m^*(\langle a, b\rangle) \leqslant m(\langle a, b\rangle_\delta) < m(\langle a, b\rangle) + \varepsilon,$$

т.е.

$$m^*(\langle a, b\rangle) \leqslant m(\langle a, b\rangle), \tag{8'}$$

поскольку $\{\langle a, b\rangle_\delta\} \in U(\langle a, b\rangle)$.

Полагаем $m(\langle a, b\rangle) > 0$, иначе $m^*(\langle a, b\rangle) = m(\langle a, b\rangle) = 0$. Пусть

$$\delta < \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{1}{2}(b_j - a_j)\right),$$

положим

$${}_\delta\langle a, b\rangle := \{x : x_j \in [a_j + \delta, b_j - \delta]\}.$$

Тогда ${}_\delta\langle a, b\rangle$ — компакт, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $m({}_\delta\langle a, b\rangle) > m(\langle a, b\rangle) - \varepsilon$. Пусть $\{A_j\}_{j=1}^\infty \in U(\langle a, b\rangle)$, тогда $\{A_j\}_{j=1}^\infty \in U({}_\delta\langle a, b\rangle)$. Поскольку A_j открыто, то можно по лемме Бореля выбрать $A_{j_1}, \dots, A_{j_l}$, т.ч. ${}_\delta\langle a, b\rangle \subset \bigcup_{k=1}^{l} A_{j_k}$, поэтому по аддитивности m на $\mathcal{E}$

$$m({}_\delta\langle a, b\rangle) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{l} A_{j_k}\right) \tag{7}$$

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{l} A_{j_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{l} m\, A_{j_k} \tag{8}$$

Считая, что $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in U(\langle a, b\rangle)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} m\, A_j < m^*(\langle a, b\rangle) + \varepsilon \tag{9}$$

Теперь (7)–(9) $\implies$

$$\begin{multline} m(\langle a, b\rangle) - \varepsilon < \\ < m({}_{\delta}\langle a, b\rangle) \leqslant \sum_{k=1}^{l} m\, A_{j_k} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\, A_j < \\ < m^*(\langle a, b\rangle) + \varepsilon \end{multline} \tag{10}$$

(10) $\implies$ $m(\langle a, b\rangle) \leqslant m^*(\langle a, b\rangle)$, что вместе с предыдущим неравенством (8') доказывает теорему. ■

6.3. Множества, измеримые по Лебегу

27.04.23

Определение 6.11. Симметрической разностью множеств A и B будем называть

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Свойства симметрической разности для любых множеств (соотношение (1)):

1. $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$
2. $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$
3. $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$
4. $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$

Теперь будем работать в $\mathbb{R}^m$, где $m \geqslant 1$. Пусть

$$d(A, B) = m^*(A \triangle B) \tag{2}$$

Тогда (1) и (2) влекут (соотношение (3))

1. $d(A, B) = d(B, A)$
2. $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$

3. $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

4. $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

5. $d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

Определение 6.12. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется конечно измеримым, если $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A_n \in \mathcal{E}$, т.ч.

$$d(A_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4}$$

Определение 6.13. Пусть имеются множества $A_n, A \subset \mathbb{R}^m$, будем говорить, что $A_n \to A$, если

$$d(A_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{5}$$

Замечание. В терминах (5), определение конечно измеримого множества можно записать как, $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч $A_n \to A$.

Определение 6.14. Множество всех конечно измеримых множеств будем обозначать $\mathfrak{M}_F$.

Замечание. $\varnothing \in \mathfrak{M}_F$.

Определение 6.15. Множество B называется измеримым по Лебегу, если $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n \in \mathfrak{M}_F$.

Определение 6.16. Множество всех множеств, измеримых по Лебегу, будем обозначать $\mathfrak{M}$.

Лемма 6.6. Имеем множества $A, B \subset \mathbb{R}^m$, тогда

$$|m^*A - m^*B| \leqslant d(A, B) \tag{6}$$

Доказательство. Будем считать, что $m^*A \leqslant m^*B$. Будем полагать, что обе внешние меры конечны. Тогда $m^*B = d(B, \varnothing)$, применив (2) получим

$$m^*B = d(B,\varnothing) \leqslant d(B,A) + d(A,\varnothing) = d(A,B) + m^*A$$

Откуда и следует (6). ■

Из (6) можно сделать вывод, что

$$m^*B \leqslant m^*A + d(A,B) \tag{7}$$

Теорема 6.7. $\mathfrak{M}_F$ является кольцом и внешняя мера является аддитивной функцией на этом кольце.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F$, тогда $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. $A_n \to A$, $B_n \to B$ и $A_n, B_n \in \mathcal{E}$.

Из (3) следует, что

$$d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leqslant d(A_n, A) + d(B_n, B) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

отсюда получаем, что

$$A_n \cup B_n \to A \cup B. \tag{8}$$

При этом $A_n \cup B_n \in \mathcal{E}$ и (8) влечет, что $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$.

Аналогично для пересечения выпишем нужное нам соотношение

$$A_n \cap B_n \to A \cap B. \tag{8'}$$

$A_n \setminus B_n \in \mathcal{E}$, тогда (3) влечет, что

$$d(A_n \setminus B_n, A \setminus B) \leqslant d(A_n, A) + d(B_n, B) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{9}$$

(9) означает, что $A_n \setminus B_n \to A \setminus B$, из этого следует, что $A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$.

Проверили, что $\mathfrak{M}_F$ — кольцо, и, кроме того, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}_F$.

Лемма выше влечет для любых множеств, что если $A_n \to A$, то

$$m^*A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} m^*A. \tag{10'}$$

Пусть A и B как написаны в самом начале. В прошлой лекции было доказано соотношение

$$mA_n + mB_n = m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n)$$

и свойство, что мера элементарного множества равна его внешней мере, поэтому

$$m^*A_n + m^*B_n = m^*(A_n \cup B_n) + m^*(A_n \cap B_n) \tag{10}$$

Тогда (8), (8') и (10) влекут, что

$$\begin{gathered} m^*A_n \to m^*A \\ m^*B_n \to M^*B \\ m^*(A_n \cup B_n) \to m^*(A \cup B) \\ m^*(A_n \cap B_n) \to m^*(A \cap B) \end{gathered} \tag{11}$$

и (10), (11) влекут

$$m^*A + m^*B = m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \tag{12}$$

(12) действует для любых конечно измеримых A и B. В частности, если $A \cap B = \varnothing$, тогда (12) влечет

$$m^*A + m^*B = m^*(A \cup B) \tag{13}$$

Аддитивность доказана. ■

Замечание. Пусть A — конечно измеримое множество. Тогда $\exists N$, т.ч. $\forall n > N$ и $\exists A_n$, т.ч. $d(A_n, A) < 1$.

В частности, $d(A_{N+1}, A) < 1$ и из этого следует, что

$$m^*A \leqslant m^*A_{N+1} + d(A_{N+1}, A) < m^*A_{N+1} + 1 < \infty.$$

Теорема 6.8. Пусть $A \in \mathfrak{M}$ и $m^*A < \infty$, тогда $A \in \mathfrak{M}_F$.

Доказательство. Поскольку A измеримое множество, поэтому

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n,$$

где A'_n являются конечно измеримыми.

Введем новые множества, т.ч. $A_1 = A'_1$, $A_2 = A'_2 \setminus A_1$, ..., $A_n = A'_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$. Из этих определений следует, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} A'_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{15}$$

кроме того,

$$A_k \cap A_l = \varnothing, \text{ если } k \neq l. \tag{16}$$

При таком построении получаем, что $A_n \in \mathfrak{M}_F$.

Введем обозначения B_n и C_n:

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

$$C_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$$

В таком случае

$$A = B_n \cup C_n$$

Поскольку $B_n \subset A$, то

$$m^* B_n \leqslant m^* A. \tag{17}$$

Уже доказано, что для конечно измеримых функций внешняя мера является аддитивной функцией, поэтому

$$m^* B_n = \sum_{k=1}^{n} m^* A_k \tag{18}$$

(17) и (18) влекут, что

$$\sum_{k=1}^{n} m^* A_k \leqslant m^* A \tag{19}$$

(19) выполнено для любого n, кроме того все слагаемые неотрицательные, поэтому (19) влечет

$$\sum_{k=1}^{\infty} m^* A_k \leqslant m^* A \tag{20}$$

И теперь (15) влечет, что

$$m^* A \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^* A_k \tag{21}$$

(20), (21) влекут, что

$$m^* A = \sum_{k=1}^{\infty} m^* A_k \tag{22}$$

Если будем рассматривать $C_n \in \mathfrak{M}$ (23') то

$$m^* C_n \leqslant m^* A < \infty \tag{23}$$

(22), (23'), (23) влекут, что

$$m^*C_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} m^*A_k \tag{24}$$

Вернемся к (22), ряд из неотрицательных слагаемых сходится. Выберем $\forall \varepsilon > 0$, тогда (22) влечет, что $\exists N$, т.ч.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m^*A_n < \varepsilon \tag{25}$$

(24), (25) влекут

$$m^*C_{N+1} < \varepsilon \tag{26}$$

(15), (16) влекут, что

$$A \triangle B_n = C_n \tag{27}$$

тогда (26), (27) влекут

$$d(B_N, A) = m^*C_N < \varepsilon \tag{28}$$

Вспомним, что

$$B_N = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$$

A_k — конечно измеримое множество, поэтому $\forall k = 1, \dots, N\ \exists \widetilde{A}_k \in \mathcal{E}$, т.ч.

$$d(\widetilde{A}_k, A_k) < \frac{\varepsilon}{N} \tag{29}$$

Положим

$$\widetilde{B}_N = \bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{A}_k \tag{30}$$

и $\widetilde{B}_N$ (31). (3), (29) влекут, что

$$d(\widetilde{B}_N, B_N) \leqslant \sum_{k=1}^{N} d(\widetilde{A}_k, A_k) < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon \tag{32}$$

(3), (26), (32) влекут, что

$$d(\widetilde{B}_N, A) \leqslant d(\widetilde{B}_N, B_N) + d(B_N, A) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{33}$$

(31), (33) в силу произвольности ε доказывает, что $A \in \mathfrak{M}_F$. ■

Теорема 6.9. $\mathfrak{M}$ является σ-кольцом, а m^* на этом множестве является счётно-аддитивной функцией.

Доказательство. Пусть имеется $A \in \mathfrak{M}$, а так же $A_n \in \mathfrak{M}$, такие что $A_n \cap A_k = \varnothing$, если $n \neq k$ (1'). Предположим, что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

Будем рассматривать ряд, в котором все слагаемые неотрицательные

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$$

Если $\exists n_0$, т.ч. $m^* A_{n_0} = +\infty$, и т.к. $A_{n_0} \subset A$, то $m^* A = +\infty$. Теперь будем считать, что

$$m^* A_n < +\infty \ \forall n. \tag{2}$$

В таком случае, (2) влечет, что

$$A_n \in \mathfrak{M}_F \tag{3}$$

Пусть $m^* A = +\infty$ (4'), тогда из неравенства

$$m^* A \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$$

следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n = +\infty \tag{4}$$

Если $m^* A < +\infty$, то мы находимся в условиях предыдущей теоремы, и поэтому $A \in \mathfrak{M}_F$ и

$$m^* A = \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$$

Доказали счётно-аддитивность внешней меры доказана.

Докажем, что это σ-кольцо. Имеются множества A и B, т.ч. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $A_n \in \mathfrak{M}_F$ и $B_n \in \mathfrak{M}_F$. Поэтому

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$$

Так же имеются множества $C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}$, где $D_{n_k} \in \mathfrak{M}_F$, т.е. $C_n \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{n_k},$$

т.к. нумерация по n и k тоже счетная, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{M}$. Будем считать, что A_n попарно дизъюнктны и B_n тоже попарно дизъюнктны, тогда

$$A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \tag{5}$$

$$A_n \cap B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \cap B_k) \tag{6}$$

$$A_n \cap B_k \in \mathfrak{M}_F \tag{7}$$

В таком случае (6), (7) влекут, что $A_n \cap B \in \mathfrak{M}$ (8). Далее

$$m^*(A_n \cap B) \leqslant m^* A_n < +\infty \tag{9}$$

(8) и (9) влекут, что $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F$ (10). А (5) и (10) влекут, что $A \cap B \in \mathfrak{M}$. Теперь посмотрим на разность:

$$A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus (A_n \cap B)),$$

т.к. $A_n \in \mathfrak{M}_F$ и $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F$, значит и $(A_n \setminus (A_n \cap B)) \in \mathfrak{M}_F$, и $A \setminus B \in \mathfrak{M}$. ■

Определение 6.17 (мера Лебега)**.** Если $A \in \mathfrak{M}$, то

$$mA := m^* A.$$

Примеры множеств, измеримых по Лебегу

04.05.23

1. Если $A \in \mathcal{E}$, то $A \in \mathfrak{M}_F$
2. $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$

   Рассмотрим множества

   $$U_k = \underbrace{[-k, k] \times \cdots \times [-k, k]}_{n} \in \mathfrak{M},$$

   тогда $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \geqslant 1} U_k$

3. Если множество B — открыто и $B \neq \mathbb{R}^n$, тогда $B \in \mathfrak{M}$

   Рассмотрим множество всех точек с рациональными координатами:
$$\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}_{n} \cap B = E,$$
   Для любой точки $a \in E$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, и для $\delta > 0$, обозначим множество
$$Q_\delta(a) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_k - \delta < x_k < a_k + \delta, 1 \leqslant k \leqslant n\}$$
   Обозначим Q^*_δ такие кубы, что $Q^*_\delta \subset B$, но $\overline{Q^*_\delta} \not\subset B$, тогда $B = \bigcup_{a \in E} Q^*_\delta \in \mathfrak{M}$, т.к. $Q^*_\delta(a) \in \mathfrak{M}$

4. Пусть F — замкнутое множество, тогда $F \in \mathfrak{M}$

   Пусть $B = \mathbb{R}^n \setminus F$, тогда B — открытое множество и $B \in \mathfrak{M}$, но $F = \mathbb{R}^n \setminus B$.

6.4. Измеримые функции

Далее считаем, что $n \geqslant 1$.

Определение 6.18. Пусть имеется $E \subset \mathbb{R}^n$ и $E \in \mathfrak{M}$. И задана функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда множествами Лебега называются следующие 4 множества:
$$E_{>a}(f) = \{x \in E : f(x) > a\}$$
$$E_{\geqslant a}(f) = \{x \in E : f(x) \geqslant a\}$$
$$E_{<a}(f) = \{x \in E : f(x) < a\}$$
$$E_{\leqslant a}(f) = \{x \in E : f(x) \leqslant a\}$$
Функция f называется измеримой, если $\forall a \in \mathbb{R}$ все четыре множества являются измеримыми.

Теорема 6.10. Для того, чтобы функция была измеримой, необходимо и достаточно при любом $a \in \mathbb{R}$ было бы измеримо любое из четырех множеств.

Доказательство. Необходимость следует из определения. Достаточность. Пусть одно из них измеримо. Доказательство следует из тождеств теории множеств:

$$\begin{aligned} E_{\geqslant a}(f) &= \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{>a-\frac{1}{m}} \\ E_{<a}(f) &= E \setminus E_{\geqslant a} \\ E_{\leqslant a}(f) &= \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{<a+\frac{1}{m}} \\ E_{>a}(f) &= E \setminus E_{\leqslant a} \end{aligned} \tag{1}$$

Примем их без доказательства.
Если $E_{>a}$ измеримо, то и $E_{\geqslant a}$ измеримо, тогда $E_{<a}$ измеримо, и, соответственно, $E_{\leqslant a}$ тоже измеримо. Остальные проверяются аналогично. ■

Первые свойства измеримых функций

Считаем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ всегда задано.

Свойство 6.1. Пусть имеется $F \subset E$, через $K_F(x)$ обозначим характеристическую функцию множества F на множестве E:

$$K_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \in E \setminus F \end{cases}$$

Такая функция измерима.

Свойство 6.2. Пусть f измерима, $c > 0$, тогда cf измерима.

Доказательство. Следует из $E_{>ca}(cf) = E_{>a}(f)$. ■

Свойство 6.3. Пусть f измерима, тогда $-f$ измерима.

Доказательство. Следует из $E_{>a}(-f) = E_{<-a}(f)$. ■

Свойство 6.4. Пусть f измерима, $c \neq 0$, тогда cf измерима.

Доказательство. Следует из свойств выше. ■

Свойство 6.5. Пусть f измерима, тогда $0 \cdot f$ измерима.

Замечание. Считаем выполненными следующие равенства:

$$0 \cdot (+\infty) = 0$$
$$0 \cdot (-\infty) = 0$$

Свойство 6.6. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, где f_m — измерима, и $f_m : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Пусть

$$g_+(x) = \sup_m f_m(x)$$
$$g_-(x) = \inf_m f_m(x),$$

тогда g_+ и g_- измеримы.

Доказательство. Следует из тождеств:

$$\begin{aligned} E_{>a}(g_+) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{>a}(f_m) \\ E_{<a}(g_-) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{<a}(f_m) \end{aligned} \tag{2}$$

■

Свойство 6.7. Имеются f_m как выше, тогда

$$h_+(x) = \varlimsup_{m\to\infty} f_m(x)$$
$$h_-(x) = \varliminf_{m\to\infty} f_m(x),$$

и h_+, h_- измеримы

Доказательство. Докажем только для h_+: определим $g_{m+}(x)$

$$g_{m+}(x) = \sup_{k \geqslant m} f_k(x),$$

тогда g_{m+} — измеримо по предыдущему свойству.
Кроме того,

$$h_+(x) = \inf_{m \geqslant 1} g_{m+}(x), \tag{3}$$

откуда следует, что $h_+(x)$ измеримо. ■

Свойство 6.8. Имеются f_m как выше. Предположим, что

$$\forall x \in E \; \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x) = F(x),$$

тогда F — измеримо.

Доказательство. По свойствам пределов допустим, что

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \overline{\lim_{m\to\infty}} f_m(x),$$

и тогда предел измерим по предыдущему свойству. ■

Свойство 6.9. Пусть f — измерима, тогда $|f|$ тоже измерим.

Доказательство. Возьмем $a < 0$, то

$$E_{>a}(|f|) = E,$$

иначе, если $a \geqslant 0$, тогда

$$E_{>a}(|f|) = E_{>a}(f) \cup E_{<-a}(f)$$

■

Свойство 6.10. Пусть f, g — измеримы, определим функции

$$U(x) = \max(f(x), g(x))$$
$$V(x) = \min(f(x), g(x)),$$

тогда U, V измеримы.

Доказательство. Рассмотрим последовательность, где $f_1 = f$, а $f_2 = f_3 = ... = g$, её sup будет максимумом, а inf минимумом. ■

Теорема 6.11. Пусть $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $F \in C(\mathbb{R}^2)$, кроме того имеются $f, g : E \to \mathbb{R}$ и f, g — измеримые. Рассмотрим $P(x) = F(f(x), g(x))$, тогда P – измерима.

Доказательство. Примем как факт. ■

Пример 6.1. Пусть $F(u,v) = u + v$, если f, g измеримы, то и $f + g$ измерима.

Пример 6.2. Пусть $F(u,v) = uv$, если f, g измеримы, то и fg измерима.

Глава 7

Интеграл Лебега

7.1. Построение интеграла Лебега

Определение 7.1. Пусть имеется $E \subset \mathbb{R}^n$ и функция $f_0 : E \to \mathbb{R}$. Функция f_0 называется простой, если она принимает конечное число значений. Пусть $c_1, \dots, c_m$ — различные значения f_0, тогда рассмотрим множества

$$E_k = \{x \in E : f(x) = c_k\},$$

т.к. все c_k различны, то $E_k \cap E_l = \varnothing$, при $k \neq l$. Вспомним характеристическую функцию $K_{E_l}(x)$, то

$$f_0(x) = \sum_{l=1}^{m} c_l K_{E_l}(x)$$

Рассмотрим множества $F_1, \dots, F_q \subset E$, где $d_1, \dots, d_q$ не обязательно различные, то

$$\sum_{l=1}^{q} d_l K_{F_l}(x)$$

тоже простая функция.

Теорема 7.1 (об аппроксимации простыми функциями). Пусть имеется произвольное непустое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда существует последовательность простых функций $\{f_m(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч.

$$\forall x \in E \; f_m(x) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(x) \tag{4}$$

Если $f(x) \geqslant 0$, то можно выбрать f_m так, чтобы

$$f_m(x) \leqslant f_{m+1}(x) \; \forall m \; \forall x \in E \tag{5}$$

Если E измеримо, f измеримо, то можно выбрать f_m измеримо $\forall m$ (6).

Доказательство. Определим множества при $-2^{2m} \leqslant i \leqslant 2^{2m}$:

$$E_{i,m} = \{x \in E : (i-1)2^{-m} \leqslant f(x) < i \cdot 2^{-m}\}$$
$$E_m = \{x \in E : f(x) < -2^m \vee f(x) \geqslant 2^m\}$$

Теперь определим f_m:

$$f_m(x) = \begin{cases} (i-1) \cdot 2^{-m} & x \in E_{i,m} \\ -2^m & x \in E_m \wedge f(x) < 0 \\ 2^m & x \in E_m \wedge f(x) > 0 \end{cases}$$

Получили, что все f_m измеримы, кроме того, в терминах множеств Лебега

$$E_{i,m} = E_{\geqslant (i-1)2^{-m}}(f) \cap E_{<i2^{-m}}(f),$$

т.е. в случае измеримой функции все эти множества измеримы. Предел есть, т.к. если $x \in E_{i,m}$, то $0 \leqslant f(x) - f_m(x) \leqslant 2^{-m}$, монотонность тоже проверяется. ∎

Далее считаем, что все множества и функции измеримы.

Замечание. Измеримые множества могут иметь и бесконечную меру.

Определение 7.2. Пусть имеется множество E и простая функция

$$f_0 = \sum_{k=1}^{\nu} c_k K_{E_k}(x), \tag{7}$$

все c_k различны, поэтому $E_k \cap E_l = \varnothing$, если $k \neq l$ (8). Положим

$$I_E(f_0) := \sum_{k=1}^{\nu} c_k m E_k \tag{9}$$

Если $mE_{k_0} = +\infty$, то $c_{k_0} = 0$ и $0 \cdot \infty = 0$.

Предложение 7.2. Если $f_0(x) = \sum_{k=1}^{\mu} d_k K_{F_k}(x)$, то

$$I(f_0) = \sum_{k=1}^{\mu} d_k m(F_k) \tag{10}$$

Доказательство. Проверяется по определению. ■

Предложение 7.3. Если $mE < +\infty$ и $a \leqslant f(x) \leqslant b$, когда $x \in E$, тогда $amE \leqslant I(f_0) \leqslant bmE$.

Доказательство. Посмотрим на (9), для всех c_k выполнено $a \leqslant c_k \leqslant b$, все меры неотрицательные, поэтому замена всех c_k на b увеличит сумму, аналогично для a. ■

Предложение 7.4. $I(cf_0) = cI(f_0)$, где $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Если домножим (9) на c, то получим соответствующее равенство. ■

Предложение 7.5. Пусть имеются две простые функции f_0 и g_0, тогда $I(f_0 + g_0) = I(f_0) + I(g_0)$.

Доказательство. Запишем простые функции как суммы:

$$f_0 = \sum_{k=1}^{\nu} c_k K_{E_k}(x)$$
$$g_0 = \sum_{l=1}^{\mu} d_l K_{F_l}(x)$$

Рассмотрим $G_{kl} = E_k \cap F_l$, тогда

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\mu} c_k K_{G_{kl}}(x)$$
$$g_0(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\mu} d_l K_{G_{kl}}(x)$$

Тогда верна сумма

$$f_0(x) + g_0(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\mu} (c_k + d_l) K_{G_{kl}}(x)$$

■

Предложение 7.6. Если $f_0(x) \leqslant g_0(x)$ $\forall x \in E$, то $I(f_0) \leqslant I(g_0)$.

Доказательство. Воспользуемся равенствами из доказательства выше. Если $x \in G_{kl}$, тогда $c_k = f_0(x) \leqslant g_0(x) = d_l$.

$$I(f_0) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\mu} c_k m G_{kl}(x)$$
$$I(g_0) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\mu} d_l m G_{kl}(x)$$

Для каждой пары k, l, получаем, что $c_k \leqslant d_l$, что и доказывает теорему. ■

11.05.23

Определение 7.3 (интеграл Лебега). Имеем измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 1$. Так же имеем $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \geqslant 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} B_E(f) = \{s : s \text{ — простая}, s : E \to \mathbb{R}, \\ 0 \leqslant s(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in E\} \end{aligned} \tag{1}$$

$B_E(f)$ не пусто. Рассмотрим $s_0(x) \equiv 0$ для любого $x \in E$, тогда $s_0(x) \in B_E(f)$. Тогда интегралом Лебега от функции f по множеству E называется

$$\int_E f dm := \sup_{s \in B_E(f)} I_E(s) \tag{2}$$

Супремум может быть равен $+\infty$.

Первые свойства интеграла Лебега

Свойство 7.1. Если $c > 0$, то

$$\int_E c f dm = c \int_E f dm. \tag{3}$$

Свойство 7.2. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in E$, тогда

$$\int_E f dm \leqslant \int_E g dm \tag{4}$$

Доказательство. Это следует из того, что $B_E(f) \subset B_E(g)$. ■

Свойство 7.3. Если $mE = 0$, то для любой функции f

$$\int_E f dm = 0 \tag{5}$$

Доказательство. Для любой простой s

$$\int_E s dm = 0,$$

откуда и следует (5). Если $F \subset E$ и $mE = 0$, тогда $0 \leqslant mF \leqslant mE = 0$, значит $mF = 0$. ■

7.2. Определенный интеграл Лебега для неотрицательных функций

Определение 7.4. Говорят, что неотрицательная функция f суммируема на E, если

$$\int_E f dm < +\infty \tag{6}$$

Множество всех суммируемых положительных функций на множестве E будем обозначать $\mathcal{L}_+(E)$.

Пусть имеется функция $f(x)$ произвольного знака. Определим функции:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

Для них справедливо тождество $f = f_+ - f_-$ (следует из (7)). К тому же, f_+, f_- измеримы.

Определение 7.5. Будем говорить, что функция f суммируема на E, если f_+ и $f_- \in \mathcal{L}_+(E)$. Множество таких функций обозначим $\mathcal{L}(E)$. Если f суммируема на E, то

$$\int_E f dm := \int_E f_+ dm - \int_E f_- dm \tag{8}$$

Первые свойства

Свойство 7.4. Если $c > 0$, то

$$\int_E cf dm = c \int_E f dm \tag{9}$$

Свойство 7.5.

$$\int_E (-f) dm = - \int_E f dm \tag{9'}$$

Доказательство. Если умножить f на -1, то f_+ и f_- поменяются местами. ∎

Свойство 7.6. $\forall c \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_E cf dm = c\int_E f dm \tag{9”}$$

Свойство 7.7. Если $mE = 0$, а функция f измеримая произвольного знака, то

$$\int_E f dm = 0$$

Важнейшее свойство

Теорема 7.7. Имеем измеримое множество E и $f \in \mathcal{L}(E)$. Рассмотрим любое измеримое $E_k \subset E$, f на E_k тоже будет измеримой, так же

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Допустим, что $E_k \cap E_l = \varnothing$, если $k \neq l$ и $1 \leqslant k, l \leqslant +\infty$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(E_k) = \int_{E_k} f dm,$$

тогда f суммируема на каждом E_k и справедливо соотношение

$$\varphi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k) \tag{10}$$

Это свойство называется счетной аддитивностью функции φ, таким образом интеграл Лебега является счетно аддитивной функцией на множестве всех измеримых по Лебегу множеств.

Замечание. Если $s_0(x) \geqslant 0$ и s_0 — простая, то

$$\int_E s_0 dm = I_E(s_0)$$

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев:

1. Пусть $f(x) = K_F(x)$, где $F \subset E$ и $mF < +\infty$. Такая $f(x)$ — простая, тогда

$$\int_E K_F dm = I_E(K_F) = 1 \cdot m(F \cap E) = m(E \cap F) \tag{11}$$

$$\int_{E_l} K_F dm = I_{E_l}(K_F) = m(E_l \cap F) \tag{12}$$

Вспомним важнейшее свойства меры Лебега и σ-кольца измеримых множеств — мера Лебега является счетно аддитивной функцией на множестве всех измеримых множеств. Если $k \neq l$, то

$$(E_k \cap F) \cap (E_l \cap F) = (E_k \cap E_l) \cap F = \varnothing \tag{13}$$

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} (E_l \cap F) = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l \right) \cap F = E \cap F \tag{14}$$

В силу счетно аддитивности (13) и (14) влекут, что

$$m(E \cap F) = \sum_{l=1}^{\infty} m(E_l \cap F) \tag{15}$$

При этом (11), (12) и (15) влекут, что

$$\int_E K_F dm = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} K_F dm \tag{16}$$

2. Пусть
$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu K_{F_\nu}, \tag{17}$$
и $c_\nu > 0$. Это простая функция, тогда

$$\int_E f dm = I_E(f) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu I_E(K_{F_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \int_E K_{F_\nu} dm =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \sum_{l=1}^{\infty} I_{E_l}(K_{F_\nu}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu I_{E_l}(K_{F_\nu}) =$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} I_{E_l} \left(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu K_{F_\nu} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} \left(\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu K_{F_\nu} \right) dm =$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} f dm \tag{18}$$

3. Пусть $f(x) \geqslant 0$ и $f \in \mathcal{L}_+(E)$. Рассмотрим любую функцию $s \in B_E(f)$, тогда по шагу 2

$$\int_E s dm = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} s dm = \sum_{l=1}^{\infty} I_{E_l}(s) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} f dm, \tag{19}$$

т.к. $s \in B_{E_l}(f)\ \forall l$

Теперь зафиксируем натуральное N, и выберем функцию s_l, где $1 \leqslant l \leqslant N$ и $s_l \in B_{E_l}(f)$ и

$$I_{E_l}(s_l) > \int_{E_l} f dm - \frac{\varepsilon}{N} \tag{20}$$

Рассмотрим функцию s^*:

$$s^*(x) = \begin{cases} s_l(x), & x \in E_l, 1 \leqslant l \leqslant N \\ 0, & x \in E \setminus \bigcup_{l=1}^{N} E_l \end{cases}$$

Понятно, что $s^* \in B_E(f)$. В таком случае,

$$\begin{aligned} \int_E s^* dm = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} s^* dm = \sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} s^* dm + \sum_{l=N+1}^{\infty} \int_{E_l} s^* dm = \\ = \sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} s^* dm = \sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} s_l dm > \\ > \sum_{l=1}^{N} \left(\int_{E_l} f dm - \frac{\varepsilon}{N} \right) = \sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} f dm - \varepsilon \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда (21) влечет

$$\sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} f dm < \int_E s^* dm + \varepsilon \leqslant \int_E f dm + \varepsilon \tag{22}$$

Поскольку ε произволен, то (22) влечет, что

$$\sum_{l=1}^{N} \int_{E_l} f dm \leqslant \int_E f dm \tag{23}$$

В свою очередь, (23) влечет

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} f dm \leqslant \int_E f dm \tag{24}$$

(19) и (24) влекут

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_{E_l} f dm = \int_E f dm \tag{25}$$

Для функций любого знака это тоже проверяется с помощью (8) ■

Следствие 7.7.1. Функция $f \in \mathcal{L}(E)$ тогда и только тогда, когда $|f| \in \mathcal{L}_+(E)$.

Доказательство. Заведем множества

$$E_+ = \{x : f(x) \geqslant 0\}$$
$$E_- = \{x : f(x) < 0\},$$

тогда $E_+ \cap E_- = \varnothing$, $E = E_+ \cup E_-$. В таком случае

$$\int_E f dm = \int_{E_+} f dm + \int_{E_-} f dm = \int_{E_+} f_+ dm - \int_{E_-} f_- dm$$

и

$$\int_E |f| dm = \int_{E_+} |f| dm + \int_{E_-} |f| dm = \int_{E_+} f_+ dm + \int_{E_-} f_- dm,$$

Кроме того, получили, что

$$\left| \int_E f dm \right| \leqslant \int_E |f| dm$$

■

Определение 7.6. Пусть имеется множество E, не обязательно измеримое, а также функции f и $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Говорят, что функции f и g эквивалентны и пишут $f \sim g$, если

$$T = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

и $mT = 0$.

Следствие 7.7.2. Пусть имеется суммируемые функции $f, g \in \mathcal{L}(E)$ и $f \sim g$, тогда

$$\int_E f dm = \int_E g dm$$

Доказательство. Пусть

$$T = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

и $S = E \setminus T$, тогда

$$\int_E f dm = \int_S f dm + \int_T f dm = \\ = \int_S g dm + 0 = \int_S g dm + \int_T g dm = \int_E g dm$$

■

Далее будет много результатов без доказательств.

Теорема 7.8 (Беппо Леви)**.** Пусть имеется последовательность функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $v_n(x) \geqslant 0$, когда $x \in E$, и $v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x)\ \forall n\ \forall x$. Пусть

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x),$$

считаем, что данный предел всегда существует и может быть равен $+\infty$. По свойствам измеримых функций $V(x)$ измерима. Тогда теорема Беппо Леви состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E v_n dm = \int_E V dm$$

Доказательство. Примем без доказательства. ■

Следствие 7.8.1. Пусть $f, g \geqslant 0$ и $f, g \in \mathcal{L}_+(E)$, тогда

$$\int_E (f+g)dm = \int_E fdm + \int_E gdm$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой об аппроксимации, построим простые функции $0 \leqslant u_n(x) \leqslant f(x)$, где $u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x)$ и $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. И простые функции $0 \leqslant v_n(x) \leqslant g(x)$, где $v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x)$ и $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$. Тогда

$$\int_E (u_n+v_n)dm = I_E(u_n+v_n) = I_E(u_n) + I_E(v_n) = \\ = \int_E u_n dm + \int_E v_n dm \quad (26)$$

по теореме Беппо Леви

$$\int_E (u_n+v_n)dm \to \int_E (f+g)dm$$
$$\int_E u_n dm \to \int_E fdm$$
$$\int_E v_n dm \to \int_E gdm$$

и (26) влечет соответствующее свойство. ■

Замечание. Свойство сформулировано только для положительных функций, однако выполнено для любых.

18.05.23

Теорема 7.9. Пусть имеются функции $v_n : E \to \mathbb{R}$, при этом $v_n(x) \geqslant 0 \ \forall x \in E, \forall n$. И пусть

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x),$$

если ряд расходится, то сумма полагается равной $+\infty$, иначе

$$\int_E S dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E v_n dm$$

Доказательство. Положим, что

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x),$$

понятно, что $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x)$. По теореме об аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int_E S_n dm = \sum_{k=1}^{n} \int_E v_k dm,$$

тогда по теореме Беппо Леви

$$\int_E S_n dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E S dm,$$

т.к.

$$\sum_{k=1}^{n} \int_E v_k dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \int_E v_k dm$$

■

Теорема 7.10 (Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть имеется множество $E \subset \mathbb{R}^n$, а так же функция $g(x) \geqslant 0$ и $g \in \mathcal{L}(E)$. Допустим, что имеется последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют условию $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ \forall n\ \forall x \in E$. Предположим, что

$$\forall x\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x),$$

тогда $f \in \mathcal{L}(E)$ и

$$\int_E f_n dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f dm$$

Теорема 7.11 (Связь интеграла Римана и интеграла Лебега). Пусть функция $f \in \mathcal{R}((a,b))$[a], тогда f измерима на (a,b), $f \in \mathcal{L}((a,b))$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a,b)} f dm$$

[a]интегрируема по Риману

Все интегрируемые по Риману функции интегрируемы по Лебегу. Обратное неверно.

Пример 7.1. Функция Дирихле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), x \text{ рациональное} \\ 0, & x \in (0,1), x \text{ иррациональное} \end{cases}$$

Интеграл Римана от нее не существует. С другой стороны, функция принимает всего два значения; множество рациональных чисел счетно, где каждая точка имеет меру 0, поэтому мера рациональных чисел тоже 0, и тогда получаем, что

$$\int_{(0,1)} \chi dm = \int_{(0,1)\cap\mathbb{Q}} \chi dm + \int_{(0,1)\setminus\mathbb{Q}} \chi dm = 0 + \int_{(0,1)\setminus\mathbb{Q}} 0 dm = 0,$$

поэтому интеграл Лебега является расширением интеграла Римана.

7.3. Теорема Фубини

Имеется множество $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$, где $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$.

Введем обозначение п.в.(m), которое означает, что какое-то свойство выполнено почти всюду относительно меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. А также $\mathfrak{M}_m$, которое означает множество всех множеств, измеримых по Лебегу в $\mathbb{R}^m$.

Пусть имеется точка $M \in \mathbb{R}^{n+k}$, будем записывать $M(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^k$.

Пусть $y \in \mathbb{R}^k$, обозначим

$$E(\cdot, y) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\},$$

пусть $x \in \mathbb{R}^n$, обозначим

$$E(x, \cdot) = \{y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in E\},$$

любое из этих множеств может быть пустым.

Пусть имеется функция $f : E \to \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^k$, тогда

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} \text{не определена}, & E(\cdot, y) = \varnothing \\ f(x, y), & E(\cdot, y) \neq \varnothing \text{ при } x \in E(\cdot, y) \end{cases},$$

аналогично, если $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\psi_x(y) = \begin{cases} \text{не определена}, & E(x, \cdot) = \varnothing \\ f(x, y), & E(x, \cdot) \neq \varnothing \text{ при } y \in E(x, \cdot) \end{cases}$$

Предложение 7.12. Пусть $E \in \mathfrak{M}_{n+k}$, тогда при п.в.(k) y $E(\cdot, y) \in \mathfrak{M}_n$, а так же при п.в.$(n)$ x $E(x, \cdot) \in \mathfrak{M}_k$.

Предложение 7.13. Пусть функция f $(n + k)$ измерима на E, тогда при п.в.(k) y φ_y (n) измерима на $E(\cdot, y)$, а так же при п.в.(n) x ψ_x (k) измерима на $E(x, \cdot)$.

Предложение 7.14. Пусть функция $f \in \mathcal{L}_{n+k}(E)$, тогда при п.в.$(k)$ y $\varphi_y \in \mathcal{L}_n(E(\cdot, y))$, а так же при п.в.$(n)$ x $\psi_x \in \mathcal{L}_k(E(x, \cdot))$.

Обозначим $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ как множество таких y, что $E(\cdot, y) \neq \varnothing$ и $\varphi_y \in \mathcal{L}(E(\cdot, y))$, аналогично обозначим множество G как множество таких x, что $E(x, \cdot) \neq \varnothing$ и $\psi_x \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$.

Определим функцию

$$\Psi(y) = \int_{E(\cdot, y)} \varphi_y dm_n$$

при $y \in \Omega$. Аналогично определим

$$\Phi(x) = \int_{E(x,\cdot)} \psi_x dm_k$$

при $x \in G$.

Тогда $\Omega \in \mathfrak{M}_k$ и $G \in \mathfrak{M}_n$ и справедлива следующая формула:

$$\int_E f dm_{n+k} = \int_\Omega \Psi dm_k = \int_G \Phi dm_n$$

Это и есть основное утверждение теоремы Фубини.

Из этой теоремы следует теорема о несобственном интеграле, зависящем от параметра, за прошлый семестр.

Глава 8

Поверхностные интегралы

8.1. Поверхностные интегралы по мере Лебега

Определение 8.1. Пусть $m > n \geqslant 1$ и $G \subset \mathbb{R}^n$ — область. Параметризованной поверхностью будем называть отображение $f : G \to \mathbb{R}^m$ со свойствами:

- f — биекция
- $f \in C^1(G)$
- $\operatorname{rank} Df(x) = n \ \forall x \in G$

f будем называть параметризацией.
Если

- f — биекция
- $f \in C^1(\overline{G})$
- $\operatorname{rank} Df(x) = n \ \forall x \in \overline{G}$,

то будем говорить, что имеется параметризованная поверхность с краем.

Часто поверхностью будем называть множество $S = f(G)$.

Определение 8.2. Если есть другая область $U \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое отображение $f_1 : U \to \mathbb{R}^m$ и при этом f_1 — параметризация, тогда будем говорить, что f и f_1 эквиваленты, если существует биекция $\varphi : G \to U$ и $\varphi \in C^1(G)$ и справедливо соотношение

$$f_1(\varphi(x)) = f(x)$$

Часто будем иметь только множество $S \subset \mathbb{R}^m$, считая, что мы всегда можем предъявить параметризацию.

Пусть у нас есть $E \subset S$, тогда будем говорить, что E измеримо и писать E — S-измеримо, если $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_n$.

Предложение 8.1. Измеримость множества не зависит от параметризации.

Определение 8.3 (Мера измеримого множества)**.** Пусть есть параметризованная поверхность S и измеримое множество $E \subset S$, тогда

$$m_S E := \int_{f^{-1}(E)} \sqrt{\det(D^T f(x) D f(x))} dm_n$$

Теорема 8.2. Величина $m_S E$ при эквивалентных параметризациях совпадает, т.е. справедливо равенство:

$$m_S E := \int_{f^{-1}(E)} \sqrt{\det(D^T f(x) D f(x))} dm_n =$$
$$= \int_{f_1^{-1}(E)} \sqrt{\det(D^T f_1(y) D f_1(y))} dm_n$$

Определение 8.4 (Поверхностный интеграл Лебега 1 рода)**.** Пусть имеется функция $F : S \to \mathbb{R}$, тогда криволинейным интегралом первого рода по мере dm_S называется следующее выражение

$$\int_E F dm_S = \int_{f^{-1}(E)} F(f(x)) \sqrt{\det(D^T f(x) D f(x))} dm_n$$

Теорема 8.3. Поверхностный интеграл Лебега 1 рода не зависит от параметризации.

Определение 8.5. Кусочно-гладкой поверхность S будем называть

$$S = \bigcup_{\nu=1}^{k} S_\nu,$$

где S_ν — параметризованные поверхности.
Тогда $E \subset S$ будем называть измеримым, если $E \cap S_\nu$ будет измеримым при $1 \leqslant \nu \leqslant k$, а так же

$$\int_E F dm_S = \sum_{\nu=1}^{k} \int_{E\cap S_\nu} F dm_{S_\nu}$$

8.2. Поверхностные интегралы второго рода для поверхностей в $\mathbb{R}^3$

Определение 8.6. Пусть имеется область $G \subset \mathbb{R}^2$, где $(u, v) \in G$ и отображение $f : G \to \mathbb{R}^3$.
Знаем, что $\forall M \in G\ \exists n(M)$ — нормаль к G.
Предположим, что $f(u, v)$ — параметризованная поверхность, поэтому $\operatorname{rank}(Df) = 2\ \forall (u, v) \in G$, тогда

$$f'_u(M) \times f'_v(M) \neq \mathbb{0}\ \forall M \in G$$

Далее полагаем, что $n(M) \parallel f'_u(M) \times f'_v(M)$ и будем говорить, что мы имеем параметризованную ориентированную поверхность в $\mathbb{R}^3$.

В случае с поверхностью с краем, $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ и $\Gamma = \partial G$ — кусочно-гладкая кривая. На любой замкнутой кривой можно ввести ориентацию. Теперь у нас есть $L = f(\Gamma) = \partial S$ — образ границы, $\forall N \in L$ (за исключением точек соединения гладких кривых) существует касательная $t(N)$ к L, и существует нормаль $\nu(N)$ к L. Считаем, что ν направлена вне S.

Теперь обозначим координатные функции:

$$f(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

тогда криволинейный интеграл второго рода есть

$$\iint_{\vec{S}} F(x,y,z)dx \wedge dy := \int_G F(f(u,v)) \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dm_2(u,v)$$
$$\iint_{\vec{S}} F(x,y,z)dy \wedge dz := \int_G F(f(u,v)) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} dm_2(u,v)$$
$$\iint_{\vec{S}} F(x,y,z)dz \wedge dx := \int_G F(f(u,v)) \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} dm_2(u,v)$$

Формула Грина

Пусть имеется область $G \subset \mathbb{R}^2$ и $\Gamma = \partial G$ — несамопересекающаяся замкнутая кусочно-гладкая кривая. Имеются функции $P, Q \in C^1(\overline{G})$ и пусть $\overline{\Gamma}$ означает положительную ориентацию Γ, тогда

$$\int_\Gamma P(x,y)dx = -\int_G P'_y(x,y)dm_2$$
$$\int_\Gamma Q(x,y)dy = \int_G Q'_x(x,y)dm_2$$

Формула Стокса

Пусть имеется ориентированная поверхность $\vec{S}$ и её граница с согласованной ориентацией $\vec{L}$, а так же $P, Q, R \in C^1(\overline{S})$, т.е. существует открытое Ω, т.ч. $\overline{S} \subset \Omega$ и $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, тогда справедливы следующие формулы

$$\int_{\vec{L}} P(M)dx = -\iint_{\vec{S}} P'_y dx \wedge dy + \iint_{\vec{S}} P'_z dz \wedge dx$$
$$\int_{\vec{L}} Q(M)dy = -\iint_{\vec{S}} Q'_z dy \wedge dz + \iint_{\vec{S}} Q'_x dx \wedge dy$$
$$\int_{\vec{L}} R(M)dz = -\iint_{\vec{S}} R'_x dz \wedge dx + \iint_{\vec{S}} R'_y dy \wedge dz$$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть $S = \partial V$ и она ориентирована так, что нормаль направлена вне, тогда

$$\iint_{\vec{S}} P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx = \int_V (P'_z + Q'_x + R'_y) dm_3$$

Согласование ориентации поверхности с краем в $\mathbb{R}^3$ и ее граничной кривой

25.05.23

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность с краем L, т.е. существует параметризация $f : \overline{D} \to S$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \partial D$, $L = f(\Gamma)$. Считаем, что ориентация $\vec{S}$ задана параметризацией f, т.е. для каждой точки $M_0 = f(u_0, v_0) \in S$ нормаль $n(M_0)$ удовлетворяет условию $n(M_0) \upuparrows f'_u(u_0, v_0) \times f'_v(u_0, v_0)$, т.е. они сонаправлены. Пусть $N \in L$, на замкнутой кривой L выбрано направление обхода, $t(N)$ — касательный вектор к L в соответствии с этим направлением, $\nu(N)$ — нормаль к кривой L такая, что $\nu(N) \perp t(N)$, $\nu(N) \perp n(N)$ и вектор $\nu(N)$ направлен внутрь S.

Тогда говорят, что ориентация $\vec{S}$ и $\vec{L}$ согласованы, если векторы $t(N)$, $\nu(N)$, $n(N)$ образуют правую тройку векторов в $\mathbb{R}^3$, т.е. их можно перевести поворотом (= специальным ортогональным преобразованием) в векторы OX, OY, OZ.

Определение двойных интегралов, когда поверхность ограничивает тело

Оригинальное название: определение $\iint_{\vec{S}} f(M) dx \wedge dy$, $\iint_{\vec{S}} f(M) dy \wedge dz$, $\iint_{\vec{S}} f(M) dz \wedge dx$ в случае, когда S ограничивает тело $V \subset \mathbb{R}^3$.

Ориентируем $\vec{S}$ таким образом, чтобы нормаль $n(M)$, $M \in S$ была направлена вне V. Любую поверхность $\vec{S}$ можно представить в виде

$$\vec{S} = \bigcup_{k=1}^{m} \vec{S}_k,$$

где $\vec{S}_k$ — ориентированные параметризованные поверхности с краем, ориентация которых получена из ориентации $\vec{S}$ и такие, что $S_k \cap S_l$ либо кривая, либо точка, либо $S_k \cap S_l = \varnothing$. Тогда по определению

$$\iint_{\vec{S}} f(M) dx \wedge dy = \sum_{k=1}^{m} \iint_{\vec{S}_k} f(M) dx \wedge dy,$$

остальные интегралы аналогично.

Глава 9

Ряды Фурье

9.1. Определение рядов Фурье

Определение 9.1. Пусть $f \in \mathcal{L}((-\pi, \pi))$, коэффициентами Фурье функции f называются числа

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dm$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dm \qquad (1)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dm$$

Запись $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dm$ или $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dm$ означает интеграл Лебега от функций $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$ по множеству $(-\pi, \pi)$ по мере Лебега в $\mathbb{R}^1$.

Определение 9.2. Рядом Фурье для функции f называется функциональный ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Нам понадобятся еще два утверждения из теории интеграла Лебега, которые мы примем без доказательств.

Предложение 9.1. Пусть $f \in \mathcal{L}((a,b))$, тогда

$$\int_{(a,b-h)} |f(x+h) - f(x)|dm \xrightarrow[h\to+0]{} 0 \tag{2}$$

Предложение 9.2. Пусть $f \in \mathcal{L}((a,b))$, тогда

$$\int_{(b-h,b)} |f(x)|dm \xrightarrow[h\to+0]{} 0 \tag{3}$$

Для интеграла Лебега справедливо также следующее свойство инвариантности относительно сдвига: пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \in \mathfrak{M}_1$, $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$E_t = \{x \in \mathbb{R} : x = y + t, y \in E\},$$

$t \neq 0$, $f_t(x) = f(x-t)$, $x \in E_t$. Тогда

$$\int_{E_t} f_t dm = \int_E f dm \tag{4}$$

Теорема 9.3 (Римана-Лебега). Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos dx dm \xrightarrow[|d|\to\infty]{} 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin dx dm \xrightarrow[|d|\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Докажем первое соотношение в (5) при $d \to \infty$, остальные доказываются аналогично. Пусть $t = \pi/d$, $E = (-\pi, \pi)$, $E_t = (-\pi + t, \pi + t)$, тогда (4) влечет

$$\begin{aligned} \int_E f(x)\cos dx dm = \int_{E_t} (f(x)\cos dx)_t dm = \\ = \int_{E_t} f(x-t)\cos d(x-t) dm = -\int_{E_t} f(x-t)\cos dx dm, \end{aligned} \tag{6}$$

поскольку $\cos d(x-t) = \cos(dx - \pi) = -\cos dx$.

Прибавим слева и справа в (6) $\int_E f(x)\cos dx dm$, получим

$$2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos dx dm = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos dx dm - \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(x-t)\cos dx dm =$$
$$= \int_{-\pi}^{-\pi+t} f(x)\cos dx dm + \int_{-\pi+t}^{\pi} (f(x)-f(x-t))\cos dx dm -$$
$$- \int_{\pi}^{\pi+t} f(x-t)\cos dx dm := I_1(d) + I_2(d) - I_3(d) \quad (7)$$

Теперь получаем соотношения

$$|I_1(d)| \leqslant \int_{-\pi}^{-\pi+t} |f(x)\cos dx| dm \leqslant \int_{-\pi}^{-\pi+t} |f(x)| dm \xrightarrow[d\to\infty]{} 0 \quad (8)$$

$$|I_2(d)| \leqslant \int_{-\pi+t}^{\pi} |f(x)-f(x-t)||\cos dx| dm \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi+t}^{\pi} |f(x)-f(x-t)| dm \xrightarrow[d\to\infty]{} 0 \quad (9)$$

$$|I_3(d)| \leqslant \int_{\pi}^{\pi+t} |f(x-t)\cos dx| dm \leqslant \int_{\pi}^{\pi+t} |f(x-t)| dm =$$
$$= \int_{\pi-t}^{\pi} |f(x-t)| dm \xrightarrow[d\to\infty]{} 0 \quad (10)$$

Соотношения (7)-(10) влекут (5). ■

9.2. Частичные суммы ряда Фурье

В дальнейшем распространим функцию $f \in \mathcal{L}((-\pi,\pi))$ на все вещественные аргументы с периодом 2π, т.е. полагаем, что $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x+2\pi)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Учтем, что тогда в силу (4) будет выполняться равенство

$$\int_{(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)} f dm = \int_{(-\pi,\pi)} f dm \quad (11)$$

Пусть $a\in(-\pi,\pi)$. Тогда опять по (4)

$$\int_{a,a+2\pi} f dm = \int_{(a,\pi)} f dm + \int_{(\pi,a+2\pi)} f dm =$$
$$= \int_{(a,\pi)} f dm + \int_{(-\pi,a)} f dm = \int_{(-\pi,\pi)} f dm \quad (12)$$

С учетом (11) и (12), получаем, что равенство (12) справедливо для $\forall a \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{13}$$

ряд Фурье функции f. Частичной суммой ряда (13) называется выражение

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{14}$$

Применяя формулы (1), найдем, что

$$\begin{gathered}
S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dm + \sum_{k=1}^{n} \left(\cos kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dm + \right. \\
\left. + \sin kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dm \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \right. \\
\left. + \sin kx \sin kt \right) dm = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right) dm
\end{gathered} \tag{15}$$

Положим

$$D_n(y) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ky \tag{16}$$

Тогда $D_n(2m\pi) = n + 1/2$. Если $y \neq 2m\pi$, то

$$\begin{aligned}
\sin \frac{y}{2} D_n(y) &= \frac{1}{2} \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{y}{2} \cos ky = \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) y \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y,
\end{aligned}$$

поэтому

$$D_n(y) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y}{2 \sin \frac{y}{2}}, \tag{17}$$

(15) и (17) влекут, что

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) (t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} dm \tag{18}$$

Применяя формулу (12), преобразуя (18):

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(v+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}}dm =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(v+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}}dm \quad (19)$$

9.3. Признак Ди́ни сходимости ряда Фурье

Теорема 9.4. Предположим, что справедливо соотношение

$$\frac{f(v+x)-f(x)}{v} \in \mathcal{L}((-\pi,\pi))$$

Тогда

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad (20)$$

Доказательство. Применяя (16), находим, что

$$\int_{-\pi,\pi} D_n(v)dm = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(v)dv = \pi, \quad (21)$$

тогда (19) и (21) влекут

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+v)-f(x))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}}dm =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+v)-f(x)}{v}\cdot\frac{v}{\sin\frac{v}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)vdm \quad (22)$$

При $|v| < \pi$ имеем

$$\left|\sin\frac{v}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{|v|}{2} = \frac{|v|}{\pi},$$

поэтому $|v/\sin(v/2)| \leqslant \pi$,

$$\left|\frac{f(x+v)-f(x)}{v}\cdot\frac{v}{\sin\frac{v}{2}}\right| \leqslant \pi\left|\frac{f(x+v)-f(x)}{v}\right|,$$

т.е.

$$g(v) := \frac{f(x+v) - f(x)}{v} \cdot \frac{v}{\sin\frac{v}{2}} \in \mathcal{L}((-\pi, \pi))$$

Тогда по теореме Римана-Лебега

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi)} g(v) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

9.4. Равенство Парсеваля

Теорема 9.5. Пусть $f^2 \in \mathcal{L}(-\pi, \pi)$, a_n, $n \geqslant 0$, b_n, $n \geqslant 1$ — коэффициенты Фурье f. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi)} f^2 dm = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Примем без доказательства.

9.5. Единственность ряда Фурье

Теорема 9.6. Пусть $f, g \in \mathcal{L}((-\pi, \pi))$, $a_n(f)$, $b_n(f)$, $a_n(g)$, $b_n(g)$ — коэффициенты Фурье f, g.
Пусть $a_n(f) = a_n(g)$, $n \geqslant 0$, $b_n(f) = b_n(g)$, $n \geqslant 1$, тогда $f \sim g$.

Примем без доказательства.

Если $f \sim g$, то $a_n(f) = a_n(g)$, $b_n(f) = b_n(g)$, теорема дает обратное утверждение. В частности, если $a_n(f_0) = 0$, $n \geqslant 0$, $b_n(f_0) = 0$, $n \geqslant 1$, то $f_0 \sim 0$, 0 — функция, тождественно равная нулю.

Конец курса.