САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. Васильева, Т.Е. Звягинцева, Ю.А. Ильин,
В.А. Плисс, А.А. Родионова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ.

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021

Печатается по решению кафедры дифференциальных уравнений и УМК математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., $\boxed{\text{Плисс В.А.}}$, Родионова А.А. Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений. Учебно-методическое пособие.

Данное пособие предназначено для студентов второго курса математико-механического факультета СПбГУ, обучающихся по специальностям «Фундаментальная математика», «Фундаментальная механика», «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», «Технологии программирования», «Механика и математическое моделирование», «Астрономия».

Пособие посвящено вопросам существования и единственности решений дифференциальных уравнений первого порядка, составлено на основе лекций по первой части курса «Дифференциальные уравнения», рассчитанной на 14-20 часов (в соответствии с программой курса).

Курс «Дифференциальные уравнения» является базовым курсом для студентов вышеперечисленных специальностей. Большая часть материала данного пособия изложена по конспекту лекций, которые многие годы на математико-механическом факультете СПбГУ (до 1992 года ЛГУ) читал заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Материал снабжен набором интересных теоретических задач, которые предлагаются читателю для самостоятельного решения.

Пособие может быть использовано для проведения лекций, семинарских занятий и проверочных работ на математических, физических и других естественнонаучных факультетах высших учебных заведений.

Авторы:

Васильева Екатерина Викторовна, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Звягинцева Татьяна Евгеньевна, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Ильин Юрий Анатольевич, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Плисс Виктор Александрович, чл.-корр. РАН, доктор ф.-м.н, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений СПбГУ (с 1961 г. по 2019 г.);

Родионова Анастасия Александровна, ассистент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ.

Рецензенты:

Бибиков Юрий Николаевич, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Иванов Борис Филиппович, кандидат ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики СПбГТУ.

Содержание

Введение

Дифференциальным уравнением называют уравнение, которое связывает независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции различных порядков. Порядок уравнения равен порядку старшей производной, входящей в уравнение.

Данное пособие посвящено *дифференциальным уравнением первого порядка*, то есть уравнениям вида

$$F\left(t, x, \dot{x}\right) = 0,$$

где t - независимая переменная, $x = x\left(t\right)$ - неизвестная функция, $\dot{x} = dx/dt$ - производная функции x по t.

Первая производная функции определяет угловой коэффициент касательной к кривой $x = x(t)$ и мгновенную скорость движения материальной точки, поэтому дифференциальные уравнения первоначально появились при решении проблем механики, астрономии и других задач естествознания.

Основы теории дифференциальных уравнений были заложены Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем. Сначала эта теория развивалась внутри математического анализа, затем постепенно выделилась в отдельную математическую дисциплину.

Обращение к дифференциальным уравнениям, как к основному инструменту исследования прикладных задач, начинается в середине XVII века, большая часть элементарных методов интегрирования была создана в XVIII столетии. Первоначально усилия ученых были сосредоточены на поиске методов интегрирования дифференциальных уравнений в элементарных функциях: находились различные замены переменных, позволяющие проинтегрировать (то есть решить) уравнение. В XVIII веке были заложены основы аналитической теории дифференциальных уравнений, которая изучает вопросы существования, аналитичности, однозначности и поведения решений уравнений в комплексной области.

Параллельно с развитием аналитических методов начали развиваться графические и приближенные методы решения прикладных задач, поскольку уже в XVIII веке математики заметили, что многие дифференциальные уравнения, важные для практики, не удается проинтегрировать в явном виде. Одним из первых графических методов является метод изоклин, который был предложен Иоганном Бернулли. Другим широко известным графическим и аналитическим методом, позволяющим найти приближенное решение уравнения с произвольными начальными данными, является метод ломаных, предложенный Леонардом Эйлером.

К середине XIX столетия ученые пришли к выводу, что класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в явном виде, достаточно мал. Через несколько десятилетий Мариус Софус Ли и Жюль Анри Пуанкаре доказали, что уравнения, допускающие интегрирование в явном виде, являются во всем множестве прикладных уравнений скорее исключением, чем правилом. Поэтому классические вопросы существования и единственности решений с заданными начальными данными, которые обсуждаются в данном пособии, чрезвычайно важны не только в теоретическом, но и в практическом плане.

Пособие составлено на основе лекций по первой части курса «Дифференциальные уравнения», который является базовым курсом для студентов практически всех специальностей математико-механического факультета СПбГУ. Большая часть материала изложена по конспекту лекций, которые многие годы читал на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (до 1992 года Ленинградского) государственного университета заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Теоретический материал изложен в четырех параграфах.

В первом параграфе доказывается теорема существования решения с заданными начальными данными (решения задачи Коши) для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Эта теорема теперь носит имя Джузеппе Пеано. Доказательство теоремы основано на методе ломаных Эйлера.

Второй параграф посвящен обсуждению проблемы единственности решения задачи Коши. Теорема единственности доказывается с помощью широко известной леммы Гронуолла, которая служит важным инструментом для получения различных оценок решений дифференциальных уравнений.

В третьем параграфе рассматриваются уравнения в симметричной форме. Здесь изучаются свойства решений таких уравнений, вводится понятие интеграла, устанавливается взаимосвязь между интегралом уравнения и его решениями.

Четвертый параграф посвящен уравнениям в полных дифференциалах. В этом параграфе доказываются необходимые и достаточные условия того, что уравнение в симметричной форме является уравнением в полных дифференциалах. Вводится понятие интегрирующего множителя и даются некоторые методы его вычисления. В качестве важнейшего примера рассматривается линейное уравнение первого порядка.

В заключение вдумчивому читателю предлагается набор интересных теоретических задач для самостоятельного решения.

§ 1. Уравнение, разрешенное относительно производной. Теорема Пеано.

Уравнение

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где функция $X(t,x)$ непрерывна на множестве $D \subset R^2$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Определение. *Решением уравнения* (1) называется функция $x = \varphi(t)$, определенная на промежутке $\langle a,b \rangle$, которая, будучи подставленной в уравнение (1), обращает это уравнение в тождество, то есть $\dot{\varphi}(t) = X(t,\varphi(t))$ для всех $t \in \langle a,b \rangle$.

Замечание. Если $x = \varphi(t)$ - решение уравнения (1) при $t \in \langle a,b \rangle$, то

1) точка $(t,\varphi(t))$ принадлежит множеству D для всех $t \in \langle a,b \rangle$,
2) функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $\langle a,b \rangle$. При этом, если $a \in \langle a,b \rangle$, то под производной функции φ в точке $t = a$ мы понимаем производную справа, и если $b \in \langle a,b \rangle$, то под производной φ в точке $t = b$ понимаем производную слева.

График решения $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a,b \rangle$, называется *интегральной кривой*.

Наряду с дифференциальным уравнением (1) фиксируем произвольную точку (t_0, x_0) из множества D. Тогда будем говорить, что для уравнения (1) поставлена *задача Коши*.

Определение. Решением задачи Коши называется решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $x_0 = \varphi(t_0)$ ($t_0 \in \langle a,b \rangle$, $(t_0, x_0) \in D$).

Координаты точки (t_0, x_0) называются *начальными данными* или *начальными условиями задачи Коши*.

В дальнейшем начальные условия задачи Коши будем обозначать как $x(t_0) = x_0$.

Геометрическая интерпретация уравнения (1).

Если $x = \varphi(t)$ - решение уравнения (1), проходящее через точку (t_0, x_0), то $\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, x_0)$. Таким образом, $X(t_0, x_0)$ - тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через точку (t_0, x_0). Тем самым правая часть уравнения (1) на множестве D задает так называемое *поле направлений*, то есть каждой точке $(t_0, x_0) \in D$ сопоставляет направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Кривая, вдоль которой поле направлений постоянно, называется *изоклиной*. Изоклины поля задаются уравнением $X(t, x) = k$, где $k = const$.

Механическая интерпретация уравнения (1).

Уравнение (1) определяет *закон движения материальной точки*. В момент времени $t = t_0$ правая часть уравнения задает мгновенную скорость материальной точки, проходящей через $x_0 = \varphi(t_0)$, следующим образом: $\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, \varphi(t_0))$.

При такой интерпретации говорят, что уравнение (1) задает на множестве D *поле скоростей*.

Теперь рассмотрим уравнение (1) с непрерывной функцией $X(t, x)$ на множестве D, которое представляет собой прямоугольник:

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\},$$

$a, b \in R,\ a > 0,\ b > 0$.

Зададим начальное условие

$$x(t_0) = x_0. \qquad (2)$$

Согласно теореме Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на компакте, существует константа $M > 0$ такая, что

$$|X(t, x)| \le M \text{ для всех } (t, x) \in D.$$

Положим $h = \min(a, b/M)$.

Теорема 1 (теорема Пеано). При высказанных выше предположениях на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует решение задачи Коши (1), (2).

Определение. Отрезок $\left[t_0-h,t_0+h\right]$ называется *отрезком Пеано*.

Заметим, что отрезок Пеано определяется, вообще говоря, неоднозначно. Но для любого такого отрезка справедлива теорема 1.

Доказательство теоремы 1. Будем доказывать существование решения на отрезке $P=\left[t_0,t_0+h\right]$.

Введем последовательность $\left\{d_k\right\}_{k=1}^{+\infty}$ дроблений отрезка P:

$$d_k=\left\{t_0=t_0^k<t_1^k<\ldots<t_{n_k-1}^k<t_{n_k}^k=t_0+h\right\}.$$

Положим $\lambda_k=rank\,d_k=\max\limits_{j=1,\ldots,n_k}\left(t_j^k-t_{j-1}^k\right)$ - ранг дробления d_k.

Последовательность дроблений выбираем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_k\underset{k\to+\infty}{\to}0. \qquad (3)$$

Для каждого дробления d_k построим на отрезке P так называемую «ломаную Эйлера» $\varphi_k\left(t\right)$ с помощью следующего рекуррентного алгоритма.

Пусть $\varphi_k\left(t_0\right)=x_0$, и далее полагаем

$$\varphi_k\left(t\right)=\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)+X\left(t_{j-1}^k,\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right)\left(t-t_{j-1}^k\right),\ \textit{если}\ \ t_{j-1}^k\le t\le t_j^k,\ \ j=1,\ldots,n_k. \qquad (4)$$

Лемма 1. Формула (4) для любого $k\in N$ корректно определяет функцию $\varphi_k\left(t\right)$ на всем отрезке P, и при этом выполнено неравенство

$$\left|\varphi_k\left(t\right)-x_0\right|\le M\left(t-t_0\right) \qquad (5)$$

для всех $t\in P$.

Замечание. Если функция $\varphi_k\left(t\right)$ ($k\in N$) определена и удовлетворяет неравенству (5) при некотором $t\in P$, то выполняется и неравенство

$$\left|\varphi_k\left(t\right)-x_0\right|\le b. \qquad (6)$$

Действительно, если $t\in P$, то $t_0\le t\le t_0+h$, поэтому $t-t_0\le h$, и из (5) следует, что $\left|\varphi_k\left(t\right)-x_0\right|\le Mh\le M\cdot b/M=b$, то есть верно (6).

Доказательство леммы 1. Если $t\in\left[t_0,t_1^k\right]$, то

$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0)$, следовательно,

$$\left|\varphi_k(t) - x_0\right| = \left|X(t_0, x_0)\right|(t - t_0) \le M(t - t_0),$$

то есть выполнены неравенства (5) и (6), и $\left(t, \varphi_k(t)\right) \in D$ для $t \in \left[t_0, t_1^k\right]$.

Теперь покажем, что если на отрезке $\left[t_0, t_{j-1}^k\right]$ функция $\varphi_k(t)$ определена и выполнено неравенство (5), то и на отрезке $\left[t_0, t_j^k\right]$ функция $\varphi_k(t)$ тоже определена и выполнено неравенство (5) $\left(j = 2, \dots, n_k\right)$.

Действительно, по предположению

$$\left|\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) - x_0\right| \le M\left(t_{j-1}^k - t_0\right),$$

и значит, $\left|\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) - x_0\right| \le b$, то есть $\left(t_{j-1}^k, \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right) \in D$, поэтому формула (4) определяет $\varphi_k(t)$ при $t \in \left[t_{j-1}^k, t_j^k\right]$.

Из формулы (4) следует, что при $t \in \left[t_{j-1}^k, t_j^k\right]$

$$\left|\varphi_k(t) - \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right| \le \left|X\left(t_{j-1}^k, \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right)\right|\left(t - t_{j-1}^k\right) \le M\left(t - t_{j-1}^k\right).$$

Следовательно,

$$\left|\varphi_k(t) - x_0\right| \le \left|\varphi_k(t) - \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right| + \left|\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) - x_0\right| \le$$
$$\le M\left(t - t_{j-1}^k\right) + M\left(t_{j-1}^k - t_0\right) = M(t - t_0),$$

и неравенство (5) верно при $t \in \left[t_0, t_j^k\right]$.

Согласно принципу математической индукции функция $\varphi_k(t)$ определена при всех $t \in P$, при этом выполнены неравенства (5) и (6). Лемма 1 доказана.

Теперь для каждого дробления d_k определим на отрезке P так называемую «ступенчатую функцию» $\psi_k(t)$:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} X\left(t_{j-1}^k, \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right), \ \textit{если} \ t_{j-1}^k \le t < t_j^k, \ j = 1, \dots, n_k, \\ X\left(t_{n_k}^k, \varphi_k\left(t_{n_k}^k\right)\right), \ \textit{если} \ t = t_{n_k}^k. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 2. Для всех $t \in P$ и всех $k \in N$ верно равенство

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau . \qquad (8)$$

Доказательство леммы 2. Доказываем лемму методом математической индукции, проводя индукцию по j.

База индукции. При $j = 1$ равенство (8) очевидно: при $t_0^k \le t < t_1^k$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0) = x_0 + \psi_k(t_0)(t - t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau .$$

При $t = t_1^k$ равенство (8) тоже верно (значение подынтегральной функции $\psi_k(t)$ в одной точке $t = t_1^k$ не влияет на значение интеграла).

Индукционный переход. Предположим, что при $t \in \left[t_0, t_{j-1}^k\right]$ $(j = 2, \ldots, n_k)$ равенство (8) верно.

Покажем, что равенство (8) выполнено при $t \in \left[t_0, t_j^k\right]$.

По индукционному предположению

$$\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) = x_0 + \int_{t_0}^{t_{j-1}^k} \psi_k(\tau)\,d\tau .$$

Согласно формулам (4) и (7) при $t \in \left[t_{j-1}^k, t_j^k\right)$

$$\varphi_k(t) = \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) + X\left(t_{j-1}^k, \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right)\left(t - t_{j-1}^k\right) =$$

$$= \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) + \psi_k\left(t_{j-1}^k\right)\left(t - t_{j-1}^k\right) = \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) + \int_{t_{j-1}^k}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau,$$

При $t = t_j^k$ равенство

$$\varphi_k(t) = \varphi_k\left(t_{j-1}^k\right) + \int_{t_{j-1}^k}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau$$

тоже верно (значение подынтегральной функции $\psi_k(t)$ в точке $t = t_j^k$ не сказывается на значении интеграла).

Следовательно,

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_{j-1}^k} \psi_k(\tau)\,d\tau + \int_{t_{j-1}^k}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)\,d\tau ,$$

поэтому равенство (8) справедливо для $t \in \left[t_0, t_j^k\right]$.

Согласно принципу математической индукции равенство (8) верно для всех $t \in P$. Лемма 2 доказана.

Напомним два определения и лемму Арцела-Асколи (из курса математического анализа), которые мы будем использовать ниже в доказательстве теоремы Пеано.

Определение. Последовательность функций $\left\{\xi_k(t)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, заданная на отрезке $[c,d]$, называется *равномерно ограниченной* на этом отрезке, если существует число K такое, что $\left|\xi_k(t)\right| \le K$ для всех $t \in [c,d]$ и всех $k \in N$.

Определение. Последовательность функций $\left\{\xi_k(t)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, заданная на отрезке $[c,d]$, называется *равностепенно непрерывной* на этом отрезке, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $k \in N$ и всех $t_1, t_2 \in [c,d]$ из неравенства $\left|t_1 - t_2\right| < \delta$ следует неравенство $\left|\xi_k(t_1) - \xi_k(t_2)\right| < \varepsilon$.

Лемма Арцела-Асколи. Если последовательность функций $\left\{\xi_k(t)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[c,d]$, то существует подпоследовательность $\left\{\xi_{k_m}(t)\right\}_{m=1}^{+\infty}$, равномерно сходящаяся на этом отрезке при $m \to +\infty$ к некоторой функции $\xi(t)$.

Продолжим доказательство теоремы Пеано.

Лемма 3. Последовательность ломаных Эйлера $\left\{\varphi_k(t)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке P.

Доказательство леммы 3. Покажем, что функции $\varphi_k(t)$ ($k \in N$) равномерно ограничены на P, используя неравенство (6):

$$\left|\varphi_k(t)\right| \le \left|\varphi_k(t) - x_0\right| + \left|x_0\right| \le b + \left|x_0\right|.$$

Теперь покажем, что $\varphi_k(t)$ ($k \in N$) равностепенно непрерывны.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\delta = \varepsilon/M$. Пусть $t_1, t_2 \in P$, $|t_1 - t_2| < \delta$.

Заметим, что из определения $\psi_k(t)$ следует, что $|\psi_k(t)| \le M$. И согласно лемме 2

$$|\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \psi_k(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} \psi_k(\tau) d\tau \right| = \left| \int_{t_2}^{t_1} \psi_k(\tau) d\tau \right| \le M |t_1 - t_2| < M\delta = \varepsilon .$$

Лемма 3 доказана.

Из леммы Арцела-Асколи следует, что из последовательности $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке P подпоследовательность.

Не умаляя общности рассуждений будем считать, что последовательность дроблений $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ уже выбрана так, что последовательность $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на P при $k \to +\infty$ к функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(t) .$$

Функция $\varphi(t)$ непрерывна как равномерный предел непрерывных функций. Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в неравенстве (6), получим: $|\varphi(t) - x_0| \le b$ при $t \in P$. Таким образом, функция $X(t, \varphi(t))$ существует и непрерывна на P.

Лемма 4. Последовательность функций $\psi_k(t)$ равномерно на отрезке P сходится при $k \to +\infty$ к функции $X(t, \varphi(t))$.

Доказательство леммы 4. Поскольку функция $X(t, x)$ непрерывна на компакте D, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на D. Это значит, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из условия $|t_1 - t_2| < \delta$, $|x_1 - x_2| < \delta$ следует, что

$$|X(t_1, x_1) - X(t_2, x_2)| < \varepsilon/2 \tag{9}$$

для всех $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in D$.

Функция $\varphi(t)$ есть равномерный предел функций $\varphi_k(t)$ при $k \to +\infty$, поэтому существует $k_1 \in N$ такое, что $|\varphi(t) - \varphi_k(t)| < \delta$ для всех $k > k_1$, $t \in P$.

Поэтому согласно (9)

$$\left|X\left(t,\varphi(t)\right)-X\left(t,\varphi_k\left(t\right)\right)\right|<\varepsilon/2 \tag{10}$$

при $k>k_1$, $t\in P$.

Поскольку $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, то существует $k_2\in N$ такое, что $\lambda_k<\min\left(\delta,\delta/M\right)$ для всех $k>k_2$. Покажем, что при $k>k_2$ и $t\in P$ верно неравенство

$$\left|X\left(t,\varphi_k\left(t\right)\right)-\psi_k\left(t\right)\right|<\varepsilon/2\,. \tag{11}$$

Фиксируем произвольное $k>k_2$ и произвольное $t\in P$.

Если $t=t_{n_k}^k$, то согласно формуле (7)

$$\psi_k\left(t\right)=X\left(t_{n_k}^k,\varphi_k\left(t_{n_k}^k\right)\right),\text{ и }\left|X\left(t,\varphi_k\left(t\right)\right)-\psi_k\left(t\right)\right|=0,$$

поэтому неравенство (11) выполнено.

Если $t<t_{n_k}^k$, то существует $j\in\{1,...,n_k\}$ такое, что $t_{j-1}^k\le t<t_j^k$, и

$$0\le t-t_{j-1}^k\le t_j^k-t_{j-1}^k\le\lambda_k<\delta\,, \tag{12}$$

и, согласно формуле (4),

$$\left|\varphi_k\left(t\right)-\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right|=\left|X\left(t_{j-1}^k,\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right)\right|\left(t-t_{j-1}^k\right)\le M\lambda_k<M\cdot\delta/M=\delta\,. \tag{13}$$

По формуле (7):

$$\psi_k\left(t\right)=X\left(t_{j-1}^k,\varphi_k\left(t_{j-1}^k\right)\right),$$

и из (9), (12), (13) следует, что при $t<t_{n_k}^k$ тоже верно неравенство (11).

Положим $k_0=\max\left(k_1,k_2\right)$, тогда для всех $k>k_0$ верны неравенства (10) и (11). Поэтому для $k>k_0$ и всех $t\in P$

$$\left|X\left(t,\varphi(t)\right)-\psi_k\left(t\right)\right|\le\left|X\left(t,\varphi(t)\right)-X\left(t,\varphi_k\left(t\right)\right)\right|+\left|X\left(t,\varphi_k\left(t\right)\right)-\psi_k\left(t\right)\right|<$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Последнее неравенство и доказывает лемму 4.

Равномерное стремление $\psi_k\left(t\right)$ к $X\left(t,\varphi(t)\right)$ позволяет перейти в равенстве (8) к пределу при $k\to+\infty$:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau . \qquad (14)$$

Правая часть равенства (14) непрерывно дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции). Значит, и левая часть равенства, то есть функция $\varphi(t)$, непрерывно дифференцируема.

Дифференцируя равенство (14), получаем:

$$\dot{\varphi}(t) = X\left(t, \varphi(t)\right),$$

то есть функция $x = \varphi(t)$ - решение уравнения (1) при $t \in P$. Полагая в (14) $t = t_0$, получаем: $\varphi(t_0) = x_0$.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что и на отрезке $[t_0 - h, t_0]$ тоже существует функция $x = \varphi(t)$, которая является решением задачи Коши (1), (2).

Проверим, что определенная таким образом функция $x = \varphi(t)$ является решением задачи Коши (1), (2) на отрезке Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$. Для этого достаточно показать, что $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = t_0$.

Найдем односторонние производные $\dot{\varphi}_{\pm}(t_0)$ функции $\varphi(t)$ в точке t_0.

Понятно, что $\dot{\varphi}_{+}(t_0) = X(t_0, x_0)$, поскольку $x = \varphi(t)$ - решение задачи Коши (1), (2) при $t \in [t_0, t_0 + h]$. Аналогично, $\dot{\varphi}_{-}(t_0) = X(t_0, x_0)$. Односторонние производные равны, следовательно, существует $\dot{\varphi}(t_0)$, и $\dot{\varphi}(t_0) = X(t_0, x_0)$. Теорема доказана.

Пусть правая часть уравнения (1), то есть функция $X(t, x)$, непрерывна на множестве D (не обязательно прямоугольном), и $(t_0, x_0) \in D$.

Определение. Говорят, что решение $x = \varphi(t)$ задачи Коши (1), (2), определенное при $t \in \langle a, b \rangle$ ($t_0 \in \langle a, b \rangle$), *единственно* на промежутке $\langle a, b \rangle$, если любое решение этой задачи, определенное на том же промежутке, совпадает с $\varphi(t)$ (то есть, если для любого решения $x = \psi(t)$ задачи Коши (1), (2) выполнено тождество $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на $\langle a, b \rangle$).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы Пеано, и пусть решение $x=\varphi(t)$ задачи Коши (1), (2), доставляемое этой теоремой, единственно как решение, определенное на отрезке $P=[t_0,t_0+h]$.

Тогда для любой последовательности дроблений $\{d_k\}_{k=1}^{+\infty}$ отрезка P, удовлетворяющей условию $\lambda_k = rank\, d_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, последовательность ломаных Эйлера $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно на P сходится к решению $\varphi(t)$ при $k\to+\infty$.

Доказательство. Допустим вопреки утверждению теоремы, что существует последовательность дроблений $\{d_k\}_{k=1}^{+\infty}$ отрезка P, удовлетворяющая условию $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, такая, что последовательность ломаных Эйлера $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ не сходится равномерно на P к $\varphi(t)$ (при $k\to+\infty$).

Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что для любого $k_0\in N$ найдутся $k>k_0$ и точка $t\in P$ такие, что $|\varphi(t)-\varphi_k(t)|\ge\varepsilon$.

И, следовательно, существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{+\infty}$ ($k_{j+1}>k_j$, $k_j \underset{j\to+\infty}{\to} +\infty$) и последовательность точек $\{t_j\}_{j=1}^{+\infty}\subset P$ таких, что

$$\left|\varphi(t_j)-\varphi_{k_j}(t_j)\right|\ge\varepsilon. \tag{15}$$

Последовательность дроблений $\{d_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ такова, что $\lambda_{k_j} \underset{j\to+\infty}{\to} 0$. Поэтому, как показано при доказательстве теоремы Пеано, из последовательности ломаных Эйлера $\{\varphi_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\varphi_{k_{jm}}(t)\}_{m=1}^{\infty}$, равномерно на отрезке P сходящуюся при $m\to+\infty$ к некоторому решению $\psi(t)$ задачи Коши (1), (2).

Отсюда следует, что существует $m_0\in N$ такое, что

$$\left|\psi(t)-\varphi_{k_{jm}}(t)\right|<\varepsilon \tag{16}$$

для всех $m>m_0$ и всех $t\in P$.

Фиксируем $m>m_0$, и в силу неравенств (15) и (16) имеем:

$$\left|\varphi\left(t_{j_m}\right)-\psi\left(t_{j_m}\right)\right| \geq \left|\varphi\left(t_{j_m}\right)-\varphi_{k_{jm}}\left(t_{j_m}\right)\right|-\left|\varphi_{k_{jm}}\left(t_{j_m}\right)-\psi\left(t_{j_m}\right)\right| > \varepsilon-\varepsilon=0 .$$

Это значит, что в точке $t=t_{j_m}$ решение $x=\varphi(t)$ не совпадает с решением $x=\psi(t)$, что противоречит единственности решения задачи Коши (1), (2) на отрезке P. Теорема 2 доказана.

Пусть теперь функция $X(t,x)$ непрерывна в области G.

Теорема 3. Пусть $(t_0, x_0) \in G$. Тогда существует $h>0$ такое, что при $|t-t_0| \leq h$ определено решение задачи Коши (1), (2).

Доказательство. Множество G открыто, следовательно, существуют константы $a,b \in R$, $a>0$, $b>0$ такие, что прямоугольник $D=\{(t,x): |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\}$ содержится в G, и мы находимся в условиях теоремы Пеано. Теорема 3 доказана.

§ 2. Проблема единственности.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = X\left(t, x\right), \tag{1}$$

где $X\left(t,x\right) \in C\left(G\right)$, G - область в R^2, $\left(t_0, x_0\right) \in G$.

Поставим задачу Коши

$$x\left(t_0\right) = x_0. \tag{2}$$

Выполнение условий теоремы Пеано не гарантирует единственности решения задачи Коши (1), (2). Первый пример, который это показывает, привел сам Джузеппе Пеано.

Пример Пеано. Не трудно проверить, что решениями уравнения $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$ являются функции $x \equiv 0$ и $x = \left(t + c\right)^3$, где $c = const$, $c \in R$. И через каждую точку $\left(t_0, 0\right)$ проходят две интегральные кривые: $x \equiv 0$ и $x = \left(t - t_0\right)^3$.

Определение. Говорят, что в точке $\left(t_0, x_0\right) \in G$ *выполнено условие единственности* (или точка $\left(t_0, x_0\right)$ является *точкой единственности*), если существует $\Delta > 0$ такое, что при $\left|t - t_0\right| \le \Delta$ определено решение $x = \varphi\left(t\right)$ задачи Коши (1), (2), и при любом δ таком, что $0 < \delta \le \Delta$, решение $\varphi\left(t\right)$ единственно как решение, определенное на сегменте $\left[t_0 - \delta, t_0 + \delta\right]$.

Если в точке $\left(t_0, x_0\right) \in G$ не выполнено условие единственности, то говорят, что $\left(t_0, x_0\right)$ - *точка неединственности* для уравнения (1).

Возвращаясь к примеру Пеано отметим, что для уравнения $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$ каждая точка $\left(t_0, x_0\right) \in G = R^2$, где $x_0 \ne 0$, есть точка единственности, а точки с координатами $\left(t_0, 0\right)$ - точки неединственности.

Теорема 1. Пусть $\left(t_0, x_0\right) \in G$, а $x = \varphi\left(t\right)$ - решение задачи Коши (1), (2), определенное при $t \in \left(a, b\right)$, $t_0 \in \left(a, b\right)$, и пусть все точки $\left(t, \varphi\left(t\right)\right)$ при $t \in \left(a, b\right)$ суть точки единственности.

Тогда решение $x = \varphi\left(t\right)$ единственно на $\left(a, b\right)$.

Доказательство. Нужно доказать, что для любого решения $x=\psi(t)$ задачи Коши (1), (2), определенного на интервале (a,b), выполнено тождество $\psi(t)\equiv\varphi(t)$ на (a,b).

Будем доказывать от противного. Пусть для некоторого решения $x=\psi(t)$ существует точка $t^*\in(a,b)$ такая, что $\psi(t^*)\neq\varphi(t^*)$. Заметим, что $t^*\neq t_0$, ибо $\psi(t_0)=\varphi(t_0)=x_0$. Положим для определенности $t^*>t_0$.

Определим функцию $u(t)=\varphi(t)-\psi(t)$ при $t\in[t_0,t^*]$. Пусть

$$S=\left\{t:t\in[t_0,t^*],\,u(t)=0\right\}.$$

Множество S не пусто (поскольку $t_0\in S$), ограничено и замкнуто (как множество нулей непрерывной функции $u(t)$), следовательно, существует $\max S=t_1$ ($t_1\in S$). Таким образом $t_0\le t_1<t^*$, $u(t_1)=0$, и $u(t)\neq 0$ при всех $t\in(t_1,t^*]$.

Положим $\psi(t_1)=\varphi(t_1)=x_1$, и поставим задачу Коши

$$x(t_1)=x_1. \qquad (3)$$

По условию теоремы в точке $(t_1,\varphi(t_1))$ выполнено условие единственности, следовательно, существует $\Delta>0$ такое, что при $|t-t_1|\le\Delta$ определено решение $x=\bar\varphi(t)$ задачи Коши (1), (2), и при любом δ, принадлежащем промежутку $(0,\Delta]$, решение $\bar\varphi(t)$ единственно как решение, определенное при $|t-t_1|\le\delta$. Пусть $0<\delta<\min(\Delta,\,t_1-a,\,t^*-t_1)$.

Тогда $a<t_1-\delta$ и $t_1+\delta<t^*$, поскольку $\delta<t_1-a$ и $\delta<t^*-t_1$. Следовательно, $(t_1-\delta,t_1+\delta)\subset(a,t^*)\subset(a,b)$. Функции $x=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ определены на интервале (a,b), следовательно, определены на $(t_1-\delta,\,t_1+\delta)$, и являются решениями задачи Коши (1), (3). Поэтому (в силу условия единственности) $\psi(t)\equiv\varphi(t)\equiv\bar\varphi(t)$ на интервале $(t_1-\delta,\,t_1+\delta)$, что противоречит предположению $\varphi(t)\neq\psi(t)$ при $t\in(t_1,t_1+\delta)$. Теорема 1 доказана.

Лемма Гронуолла. Пусть функция $u(t)$ непрерывна на промежутке $\langle a,b\rangle$, и $u(t)\ge 0$ для всех $t\in\langle a,b\rangle$.

Пусть существуют константы $c \ge 0$, $L > 0$ и существует $t_0 \in \langle a,b \rangle$ такие, что при $t \in \langle a,b \rangle$ выполнено неравенство

$$u(t) \le c + L\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau\right|. \qquad (4)$$

Тогда

$$u(t) \le ce^{L|t-t_0|}. \qquad (5)$$

Доказательство леммы Гронуолла. Докажем лемму для $t \ge t_0$ (доказательство для случая $t \le t_0$ аналогично).

Неравенство (4) при $t \ge t_0$ принимает вид

$$u(t) \le c + L\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau, \qquad (4')$$

а неравенство (5) принимает вид

$$u(t) \le ce^{L(t-t_0)}. \qquad (5')$$

Положим $v(t) = c + L\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau$, из неравенства (4’) следует, что $u(t) \le v(t)$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-Lt}\right) = \dot{v}(t)e^{-Lt} - Lv(t)e^{-Lt} = Le^{-Lt}\left(u(t) - v(t)\right) \le 0,$$

то есть функция $v(t)e^{-Lt}$ монотонно убывает, поэтому

$v(t)e^{-Lt} \le v(t_0)e^{-Lt_0} = ce^{-Lt_0}$, и $u(t) \le v(t) \le ce^{L(t-t_0)}$, то есть выполнено (5’). Лемма доказана.

Следствие. Если $c = 0$, то есть $u(t) \le L\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau\right|$, то $u(t) \equiv 0$ на $\langle a,b \rangle$.

Теорема 2 (теорема единственности). Предположим, что в окрестности точки $(t_0, x_0) \in G$ существует и ограничена частная производная $\partial X(t,x)/\partial x$.

Тогда (t_0, x_0) - точка единственности.

Доказательство. Существуют константы $a>0$, $b>0$, и константы $M>0$, $L>0$, такие, что $D=\{(t,x):|t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}\subset G$, и $|X(t,x)|\le M$, $|\partial X(t,x)/\partial x|\le L$ для всех $(t,x)\in D$.

По теореме Пеано на промежутке $\{t:|t-t_0|\le h\}$, где $h=\min(a,b/M)$, существует решение $x=\varphi(t)$ задачи Коши (1), (2). Покажем, что при $\Delta=h$ для (t_0,x_0) выполнено условие единственности.

Пусть $0<\delta\le h$, и $x=\psi(t)$ - какое- либо другое решение задачи (1), (2), определенное при $|t-t_0|\le\delta$.

1. Покажем, что $(t,\psi(t))\in D$ при $|t-t_0|\le\delta$, то есть $|\psi(t)-x_0|\le b$.

Допустим, что существует значение t^* такое, что $|t^*-t_0|\le\delta$ и $|\psi(t^*)-x_0|>b$. Заметим, что $t^*\ne t_0$, поскольку $|\psi(t_0)-x_0|=0<b$. Пусть для определенности $t^*>t_0$, то есть $t_0<t^*\le t_0+\delta$.

Положим при $t\in[t_0,t^*]$

$$v(t)=|\psi(t)-x_0|-b.$$

$v(t)$ - непрерывная функция, $v(t_0)<0$, $v(t^*)>0$. По теореме Коши о промежуточном значении существует θ такое, что $t_0<\theta<t^*$ и $v(\theta)=0$.

Поэтому множество $S=\{t:t\in[t_0,t^*], v(t)=0\}$ не пусто (поскольку $\theta\in S$), ограничено и замкнуто (как множество нулей непрерывной функции), и существует $\min S=t_1$ ($t_1\in S$).

При этом $v(t)\le 0$, то есть $|\psi(t)-x_0|\le b$, для всех $t\in[t_0,t_1]$, и поэтому точка $(t,\psi(t))$ принадлежит D при $t\in[t_0,t_1]$. По условию

$$\dot\psi(t)=X(t,\psi(t))$$

при $|t-t_0|\le\delta$. Интегрируя последнее равенство от t_0 до t_1, получим:

$$\psi(t_1)-\psi(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}X(\tau,\psi(\tau))d\tau,$$

следовательно,

$$\left|\psi(t_1)-x_0\right| \le \int_{t_0}^{t_1}\left|X(\tau,\psi(\tau))\right|d\tau \le M(t_1-t_0) < M\delta \le Mh \le b. \tag{6}$$

Из неравенства (6) вытекает, что $v(t_1)<0$, это противоречит тому, что $t_1 \in S$. Полученное противоречие доказывает, что $(t,\psi(t)) \in D$ при $|t-t_0| \le \delta$.

2. Зафиксируем произвольное $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ и оценим разность $X(t,\varphi(t)) - X(t,\psi(t))$.

Определим при $0 \le s \le 1$ функцию

$$f(s) = X(t, s\varphi(t) + (1-s)\psi(t)).$$

Покажем, что это определение корректно, то есть точка $(t, s\varphi(t)+(1-s)\psi(t))$ принадлежит D для всех $s \in [0,1]$.

Заметим, что $|\varphi(t)-x_0| \le b$, как следует из доказательства теоремы Пеано, и $|\psi(t)-x_0| \le b$, как доказано выше, поэтому

$$\begin{aligned}|s\varphi(t)+(1-s)\psi(t)-x_0| &= |s\varphi(t)-sx_0+(1-s)\psi(t)-(1-s)x_0| \le \\ &\le s|\varphi(t)-x_0| + (1-s)|\psi(t)-x_0| \le sb+(1-s)b = b,\end{aligned}$$

и функция $f(s)$ определена корректно при $0 \le s \le 1$.

Согласно формуле конечных приращений (теореме Лагранжа) существует значение $\sigma \in (0,1)$ такое, что

$$X(t,\varphi(t)) - X(t,\psi(t)) = f(1) - f(0) = f'(\sigma). \tag{7}$$

Кроме того,

$$|f'(s)| = \left|\frac{\partial X(t, s\varphi(t)+(1-s)\psi(t))}{\partial x}\right| |\varphi(t)-\psi(t)| \le L|\varphi(t)-\psi(t)|, \tag{8}$$

поскольку $|\partial X(t,x)/\partial x| \le L$ для всех $(t,x) \in D$.

Из (7), (8) следует, что

$$|X(t,\varphi(t)) - X(t,\psi(t))| \le L|\varphi(t)-\psi(t)|. \tag{9}$$

3. Докажем теперь, что $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

$$\dot{\varphi}(t) = X\left(t, \varphi(t)\right), \;\; \dot{\psi}(t) = X\left(t, \psi(t)\right)$$

при $|t - t_0| \le \delta$, следовательно,

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) = X\left(t, \varphi(t)\right) - X\left(t, \psi(t)\right).$$

Интегрируем последнее равенство от t_0 до t:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) - \psi(t) + \psi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Big(X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) - X\left(\tau, \psi(\tau)\right) \Big) d\tau . \qquad (10)$$

$\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$, поэтому, согласно (9) и (10),

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} \left| X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) - X\left(\tau, \psi(\tau)\right) \right| d\tau \right| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right| .$$

Положим $|\varphi(t) - \psi(t)| = u(t)$, тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$u(t) \le L \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right| .$$

По следствию из леммы Гронуолла $u(t) \equiv 0$, то есть $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Это и доказывает теорему 2.

Следствие. Предположим, что $\partial X(t, x) / \partial x$ существует и непрерывна в области G. Тогда любая точка из G есть точка единственности.

Геометрически это означает, что через каждую точку области G проходит единственная интегральная кривая.

§ 3. *Дифференциальное уравнение в симметричной форме.*

Определение. *Дифференциальным уравнением в симметричной форме* называется равенство

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

Предполагаем, что $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны в области $G \subset R^2$.

Определение. *Решением уравнения* (1) называется функция $y=\varphi(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, или функция $x=\psi(y)$, $y \in \langle c,d \rangle$, которая, будучи подставленной в уравнение (1), обращает это уравнение в тождество, на $\langle a,b \rangle$ или $\langle c,d \rangle$ соответственно.

Пусть $y=\varphi(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, - решение уравнения (1), тогда

$$M\big(x,\varphi(x)\big)dx + N\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = 0.$$

Поскольку x - независимая переменная, то dx не равно нулю, и предыдущее равенство можно переписать в виде

$$M\big(x,\varphi(x)\big) + N\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, функция $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a,b \rangle$, если и только если для всех $x \in \langle a,b \rangle$ выполнено равенство (2). При этом подразумевается, что $\big(x,\varphi(x)\big) \in G$ и существует $\varphi'(x)$ при $x \in \langle a,b \rangle$.

Аналогично, функция $x=\psi(y)$ является решением уравнения (1) на промежутке $\langle c,d \rangle$, если для всех $y \in \langle c,d \rangle$ верно равенство

$$M\big(\psi(y),y\big)\psi'(y) + N\big(\psi(y),y\big) = 0. \qquad (3)$$

Если $N(x_0,y_0) \neq 0$ в точке $(x_0,y_0) \in G$, то $N(x,y) \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) в силу непрерывности функции $N(x,y)$, и в этой окрестности уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \qquad (4)$$

Для этого уравнения по теореме Пеано существует решение $y=\varphi(x)$ такое, что $y_0=\varphi(x_0)$.

Аналогично, если $M(x_0,y_0)\neq 0$ в точке $(x_0,y_0)\in G$, то $M(x,y)\neq 0$ в некоторой окрестности (x_0,y_0), и в этой окрестности от уравнения (1) можно перейти к уравнению

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \tag{5}$$

которое имеет решение $x=\psi(y)$ такое, что $x_0=\psi(y_0)$.

Определение. Точка $(x_0,y_0)\in G$, в которой выполнено условие $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0$, называется *особой точкой* уравнения (1).

Если $M(x_0,y_0)\neq 0$ или $N(x_0,y_0)\neq 0$, то точка называется *обыкновенной*.

Замечание. Пусть $M(x_0,y_0)\neq 0$ и $N(x_0,y_0)\neq 0$ в точке $(x_0,y_0)\in G$, тогда существует решение (1) $y=\varphi(x)$ такое, что $y_0=\varphi(x_0)$, и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет (2), и, следовательно, удовлетворяет (4):

$$\varphi'(x)=-\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))}, \text{ и } \varphi'(x_0)=-\frac{M(x_0,y_0)}{N(x_0,y_0)}\neq 0.$$

Поэтому функция $y=\varphi(x)$ имеет обратную функцию $x=\psi(y)$ в окрестности точки (x_0,y_0), при этом $\varphi'(x)=1/\psi'(y)$, значит,

$$\psi'(y)=-\frac{N(\psi(y),y)}{M(\psi(y),y)}, \text{ и } \psi'(y_0)=-\frac{N(x_0,y_0)}{M(x_0,y_0)},$$

то есть функция $\psi(y)$ удовлетворяет (5), и удовлетворяет (3), следовательно, является решением уравнения (1).

Определение. Функция $u(x,y)$ называется *интегралом* уравнения (1) в области G, если выполнены следующие условия:

1) $u(x,y)$ непрерывно дифференцируема в G,
2) в каждой обыкновенной точке области G хотя бы одна из частных производных $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ не равна нулю,

3) в G выполняется тождество

$$N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\equiv 0. \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть $y=\varphi(x)$ - решение уравнения (1), определенное при $x\in\langle a,b\rangle$, и точка $(x,\varphi(x))$ - обыкновенная точка для всех $x\in\langle a,b\rangle$.

Пусть $u(x,y)$ - интеграл уравнения (1) в G. Тогда $u(x,\varphi(x))=const$ на промежутке $\langle a,b\rangle$.

Доказательство. Так как $y=\varphi(x)$ - решение уравнения (1), то справедливо тождество (2). Из (2) следует, что $N(x,\varphi(x))\neq 0$ для всех $x\in\langle a,b\rangle$. Действительно, если $N(x,\varphi(x))=0$ в некоторой точке $x\in\langle a,b\rangle$, то из (2) следует, что $M(x,\varphi(x))=0$, и точка $(x,\varphi(x))$ - особая, что противоречит условию.

Из (2) получаем:

$$\varphi'(x)=-\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))},$$

и таким образом,

$$\frac{du(x,\varphi(x))}{dx}=\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}\varphi'(x)=$$

$$=\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}-\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))}=$$

$$=\frac{1}{N(x,\varphi(x))}\left(\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}N(x,\varphi(x))-\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}M(x,\varphi(x))\right)\equiv 0,$$

согласно тождеству (6). Поэтому $u(x,\varphi(x))=const$, и теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $x=\psi(y)$ - решение уравнения (1), определенное при $y\in\langle c,d\rangle$, и точка $(\psi(y),y)$ - обыкновенная точка для всех $y\in\langle c,d\rangle$.

Пусть $u(x,y)$ - интеграл уравнения (1) в G. Тогда $u(\psi(y),y)=const$ на промежутке $\langle c,d \rangle$.

Пусть $u(x,y)$ - интеграл уравнения (1) в G, и $(x_0,y_0)\in G$. Рассмотрим уравнение

$$u(x,y)=u(x_0,y_0). \tag{7}$$

Теорема 3. Предположим, что $N(x_0,y_0)\neq 0$, тогда уравнение (7) имеет решение $y=\varphi(x)$, определенное на некотором интервале (a,b), $x_0\in(a,b)$ и $y_0=\varphi(x_0)$. Это решение непрерывно дифференцируемо на (a,b) и является решением уравнения (1).

Доказательство. Покажем, что $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$.

Действительно, если $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=0$, то из равенства (6) в точке (x_0,y_0) следует, что $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, это противоречит второму условию из определения интеграла, поскольку точка (x_0,y_0) - обыкновенная.

Из неравенства $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$ по теореме о неявной функции следует, что уравнение (7) имеет решение $y=\varphi(x)$, определенное на некотором интервале $x\in(a,b)$, при этом $x_0\in(a,b)$, $y_0=\varphi(x_0)$, и функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на (a,b).

Из непрерывности частных производных функции $u(x,y)$ следует, что $\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}\neq 0$ при $x\in(a,b)$, если интервал (a,b) достаточно мал.

Дифференцируя равенство $u(x,\varphi(x))=u(x_0,y_0)$, получаем:

$$\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}\varphi'(x)=0,$$

и

$$\varphi'(x)=-\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}. \tag{8}$$

Подставим равенство (8) в (2):

$$M\left(x,\varphi(x)\right)-N\left(x,\varphi(x)\right)\left(\frac{\partial u\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial x}\bigg/\frac{\partial u\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial u\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial y}\right)^{-1}\left(M\left(x,\varphi(x)\right)\frac{\partial u\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial y}-N\left(x,\varphi(x)\right)\frac{\partial u\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial x}\right)\equiv 0,$$

следовательно, $y=\varphi(x)$ - решение уравнения (1). Теорема доказана.

Аналогично доказывается теорема 4.

Теорема 4. Пусть $M\left(x_0,y_0\right)\neq 0$, тогда уравнение (7) имеет решение $x=\psi(y)$, определенное на некотором интервале (c,d), $y_0\in(c,d)$ и $x_0=\psi\left(y_0\right)$. Это решение непрерывно дифференцируемо на (c,d) и является решением уравнения (1).

Следствием теорем 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Если точка $\left(x_0,y_0\right)$ - обыкновенная, то уравнение (7) имеет решение вида $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ (при этом $x_0\in(a,b)$ и $y_0=\varphi\left(x_0\right)$), либо решение вида $x=\psi(y)$, $y\in(c,d)$ (и при этом $y_0\in(c,d)$ и $x_0=\psi\left(y_0\right)$). Это решение является решением уравнения (1).

Определение. Пусть $u(x,y)$ - интеграл уравнения (1) в области G. Равенство $u(x,y)=c$, где c - произвольная постоянная, называется *общим интегралом* уравнения (1) в G.

Пример. Функция $u(x,y)=x^2+y^2$ - интеграл уравнения $xdx+ydy=0$, равенство $x^2+y^2=c$ - общий интеграл уравнения в $G=R^2$.

В окрестности каждой точки $\left(x_0,y_0\right)\neq(0,0)$ из равенства $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ можно выразить решение уравнения (1) в виде $y=\varphi(x)$ или в виде $x=\psi(y)$.

§ 4. Уравнение в полных дифференциалах. *Интегрирующий множитель.*

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

где функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны в области $G \subset R^2$.

Определение 1. Уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует непрерывно дифференцируемая в области G функция $u(x,y)$ такая, что для всех $(x,y) \in G$

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{2}$$

Из определения дифференциала функции $u(x,y)$ следует, что

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

то есть

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{3}$$

для всех $(x,y) \in G$.

Теорема 1. Если (1) - уравнение в полных дифференциалах, то функция $u(x,y)$, фигурирующая в определении 1, есть интеграл (1) в области G.

Доказательство теоремы 1. Проверим, что для функции $u(x,y)$ выполняются все три условия из определения интеграла.

Непрерывная дифференцируемость функции $u(x,y)$ следует из ее определения. Из формул (3) следует, что в каждой обыкновенной точке области G хоть одна из частных производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ не равна нулю.

Из равенства

$$N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)M(x,y) - M(x,y)N(x,y) \equiv 0$$

следует третье условие определения.

Таким образом, все условия из определения интеграла для функции $u(x,y)$ выполнены, и теорема доказана.

Теорема2. Пусть (1) - уравнение в полных дифференциалах, и в области G существуют непрерывные производные $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Тогда в каждой точке области G выполнено равенство

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2. В области G выполнены равенства (3), поскольку (1) - уравнение в полных дифференциалах. Дифференцируем первое из равенств (3) по y, а второе – по x:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

По условию $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ существуют и непрерывны в G, следовательно, существуют и непрерывны $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$. И по теореме о равенстве смешанных производных

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$$

в области G, отсюда и из равенств (5) следует (4). Теорема доказана.

Условие (4) - необходимое условие того, что (1) - уравнение в полных дифференциалах. Покажем, что в «прямоугольных» областях это условие является и достаточным.

Пусть $G = \{(x,y) : a < x < b,\, c < y < d\}$ (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$, $c = -\infty$, $d = +\infty$ не исключаются).

Теорема 3. Пусть $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ существуют и непрерывны в области G, и выполнено равенство (4) в каждой точке G, тогда (1) – уравнение в полных дифференциалах.

Доказательство теоремы 3. Укажем непрерывно дифференцируемую в области G функцию $u(x, y)$, для которой выполнены условия (3).

Выберем и зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in G$, найдем функцию u в точке $(x, y) \in G$.

Пусть t лежит между x_0 и x (то есть $x_0 \le t \le x$ или $x \le t \le x_0$), тогда $a < t < b$, и точка (t, y) принадлежит области G.

Предположим, что функция u удовлетворяет (3), тогда

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = M(t, y).$$

Интегрируем последнее равенство по t от x_0 до x (здесь y оказывается параметром):

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} dt = \int_{x_0}^{x} M(t, y) dt,$$

или

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y) dt,$$

следовательно,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y) dt + u(x_0, y). \qquad (6)$$

Найдем $u(x_0, y)$.

Пусть теперь s лежит между y_0 и y, тогда $c < s < d$, точка (x_0, s) принадлежит G, и, как следует из (3),

$$\frac{\partial u(x_0, s)}{\partial t} = N(x_0, s).$$

Интегрируем последнее равенство по s от y_0 до y:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0, s)}{\partial s} ds = \int_{y_0}^{y} N(x_0, s) ds,$$

или

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, s) ds. \qquad (7)$$

Функция $u(x,y)$ интересует нас с точностью до аддитивной постоянной, поэтому можем положить $u(x_0,y_0)=0$. Из равенств (6) и (7) следует, что

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds. \qquad (8)$$

Мы доказали: если функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (3), то она задается формулой (8). Покажем, что построенная функция u - искомая, то есть функция, определенная формулой (8), удовлетворяет условиям (3).

Из (8) следует:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y),$$

и, пользуясь теоремой Барроу и формулой Лейбница дифференцирования под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt+N(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+N(x_0,y)=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt+N(x_0,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+N(x_0,y)=N(x,y).$$

Теорема доказана.

Поскольку x и y входят в уравнение (1) симметрично, то формула

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} N(x,s)ds. \qquad (8')$$

тоже определяет интеграл уравнения (1). Нетрудно показать, что формулы (8) и (8’) задают одну и ту же функцию $u(x,y)$.

Замечание. Теорема 3 верна, если G - произвольная односвязная область в R^2. Прямоугольная область G требуется для выбранного нами способа доказательства теоремы.

Интегрирующий множитель.

Определение 2. Функция $\mu(x,y)$, непрерывная в области G, называется *интегрирующим множителем* уравнения (1), если $\mu(x,y)\neq 0$ в обыкновенных точках G, и уравнение

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{9}$$

есть уравнение в полных дифференциалах.

Считаем, что область G имеет прямоугольный вид, и в G существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Будем искать интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ как непрерывно дифференцируемую в G функцию.

Для того, чтобы (9) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x},$$

или

$$N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Таким образом, функция $\mu(x,y)$ должна быть решением уравнения в частных производных (10).

Будем искать для уравнения (1) интегрирующий множитель μ, зависящий только от x. Из (10) следует, что тогда $\mu(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$N(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right),$$

или

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{11}$$

Левая часть равенства (11) зависит только от x. Поэтому уравнение (1) допускает интегрирующий множитель $\mu(x)$ тогда и только тогда, когда правая часть (11) тоже зависит только от x. В этом случае обозначая

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=f(x),$$

перепишем равенство (11) в виде

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=f(x).$$

И в качестве интегрирующего множителя мы можем взять любое решение этого уравнения, например,

$$\mu(x)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}f(s)ds\right), \qquad (12)$$

где $x_0\in(a,b)$.

Аналогично можно показать, что уравнение (1) допускает интегрирующий множитель μ, зависящий только от y, тогда и только тогда, когда функция

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)$$

зависит только от y.

Пример. Линейное уравнение.

Рассмотрим линейное уравнение

$$y'=p(x)y+q(x), \qquad (13)$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b).

Запишем (13) в симметричной форме:

$$\big(p(x)y+q(x)\big)dx-dy=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) задано в прямоугольной области $G=\{(x,y):a<x<b,\ -\infty<y<+\infty\}$.

Здесь $M(x,y)=p(x)y+q(x)$, $N(x,y)=-1$, и $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Ищем интегрирующий множитель μ, зависящий только от x.

Уравнение (11) принимает вид

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=-p(x),$$

следовательно,

$$\mu(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right),$$

где $x_0\in(a,b)$.

Домножим уравнение (14) на $\mu(x)$ и получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\big(p(x)y+q(x)\big)dx-\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)dy=0.$$

Применяя формулу (8') с $y_0=0$, находим

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)ds\right)dt-\int_{0}^{y}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)dt.$$

Из равенства $u(x,y)=-c$, которое представляет собой общий интеграл уравнения (1), получаем:

$$y=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\left(c+\int_{x_0}^{x}q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)ds\right)dt\right). \tag{15}$$

Равенство (15) дает *общее решение* линейного уравнения (13) *в форме Коши.*

Решение уравнения (13), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, имеет вид

$$y=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)ds\right)\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)ds\right)dt\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет каждая функция из данного семейства ($c \in R$).

   а) $y = (x-c)^3$;

   б) $y = c(x-c)^2$;

   в) $x = cy^2 + y + 1$.

2. Составьте дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого пересекают линии данного семейства под прямым углом ($c \in R$).

   а) $y = cx^4$;

   б) $y^2 = x + c$;

   в) $x^2 + 4y^2 = c$.

3. Сведите интегральное уравнение $x(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds + t + 1$ к дифференциальному и решите его.

4. Для данной задачи Коши

   а) $\dot{x} = t - x^2, \quad x(0) = 0$;

   б) $\dot{x} = x + e^{x-1}, \quad x(0) = 1$;

   в) $\dot{x} = 3tx^{2/3}, \quad x(0) = 0$

   1) определите какой-либо отрезок Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$;

   2) на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, взяв дробление $t_k = t_0 + hk/100 \ (k = 0,1,...,100)$, напишите рекуррентную формулу для вершин (t_k, x_k) ломаной Эйлера.

   В каких из примеров а), б), в) можно утверждать, что ломаные Эйлера при ранге дробления, стремящемся к нулю, сходятся (без перехода к подпоследовательности) к какому-либо решению поставленной задачи Коши?

5. Дано уравнение в симметричной форме. Эквивалентны ли следующие условия:
   1) поле направлений, заданное уравнением, не содержит направлений, параллельных оси Oy;
   2) все интегральные кривые уравнения являются графиками функций, зависящих от x.

6. Напишите уравнение, задающее геометрическое место точек, которое заведомо содержит все точки максимумов и минимумов решений уравнения $\dot{x} = X(t,x)$, где $X(t,x) \in C(G)$.

   Тот же вопрос для точек перегиба, если $X(t,x) \in C^1(G)$.

7. Дано уравнение $\dot{x} = X(x)$, где $X(x) \in C\langle a,b \rangle$. Пусть c - изолированный ноль функции X. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
   1) решение $x \equiv c$ содержит хоть одну точку единственности;
   2) все точки решения $x \equiv c$ суть точки единственности;
   3) несобственный интеграл $\int\limits_c^x \dfrac{ds}{X(s)}$ расходится и при $x < c$, и при $x > c$.

8. Пусть $X(x) \in C(a,b)$ и $X(c) = 0$, где $c \in (a,b)$. Пусть сколь угодно близко от $x = c$, как при $x < c$, так и при $x > c$, найдутся значения x, при которых $X(x) > 0$, и найдутся значения x, при которых $X(x) < 0$. Докажите, что каждая точка решения $x \equiv c$ уравнения $\dot{x} = X(x)$ есть точка единственности.

9. Докажите, что все решения уравнения $\dot{x} = f(t)g(x)$, где $f(t) \in C\langle a,b \rangle$, $g(x) \in C(\langle \alpha, \beta \rangle)$ и $g(x) > 0$, обладают свойством единственности.

10. Пользуясь достаточным условием единственности, найдите точки единственности для уравнений
    а) $\dot{x} = 2tx + t^2$;
    б) $\dot{x} = 2 + \sqrt[3]{x - 2t}$;
    в) $t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 - t^2}$.

11. Докажите: если через точку (t_0, x_0) проходит две различные интегральные кривые уравнения $\dot{x} = X(t,x)$, $X(t,x) \in C(G)$, то через эту точку проходит бесконечно много интегральных кривых.

12. Дано уравнение $\dot{x} = X(t,x)$, где $X(t,x) \in C(G)$, $(t_0, x_0) \in G$. Докажите, что следующие три утверждения эквивалентны:
   1) точка (t_0, x_0) - точка единственности;
   2) для любых двух решений $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ задачи Коши $x(t_0) = x_0$ существует такое $\delta > 0$, что $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$;
   3) существует такое $\Delta > 0$, что любые два решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ задачи Коши $x(t_0) = x_0$ могут быть доопределены на отрезке $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ и на этом отрезке $\psi(t) \equiv \varphi(t)$.

13. Придумайте уравнение $\dot{x} = X(t,x)$, где $X(t,x) \in C(R^2)$, решение которого $x \equiv 0$ обладает свойством единственности на всей числовой оси, но при этом каждая точка этого решения является точкой неединственности.

14. Пусть $X(t,x) \in C(G)$. Докажите, что для задачи Коши $\dot{x} = X(t,x) + \alpha$, $x(t_0) = x_0$, где $(t_0, x_0) \in G$, единственность может нарушаться для не более чем счетного числа значений параметра α.

15. Пусть функция $X(t,x)$ задана на полосе $\{(t,x) : t_0 \le t \le a, -\infty < x < +\infty\}$, где она непрерывна и ограничена. Докажите, что для уравнения $\dot{x} = X(t,x)$ совокупность всех ломаных Эйлера, проведенных через точку (t_0, x_0), заполняет множество *E*, ограниченное сверху линией $x = \varphi_1(t)$, $t_0 \le t \le a$, выпуклой вниз, и ограниченное снизу линией $x = \varphi_2(t)$, $t_0 \le t \le a$, выпуклой вверх.

    Покажите, что $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$, $\dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_2(t_0) = X(t_0, x_0)$, в каждой точке у функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ существуют односторонние производные, и у $\varphi_1(t)$ эти производные не меньше, чем $X(t, \varphi_1(t))$, а у $\varphi_2(t)$ - не больше, чем $X(t, \varphi_2(t))$.

16. Приведите пример уравнения $\dot{x} = X(t,x)$ с непрерывной правой частью и для него последовательность ломаных Эйлера (с рангом дробления, стремящемся к нулю), проходящих через точку (t_0, x_0), которая не сходится ни при одном значении t, отличном от t_0.

17. Приведите пример уравнения $\dot{x} = X(t,x)$ с непрерывной правой частью, для которого предел последовательности ломаных Эйлера (с рангом дробления, стремящемся к нулю), проходящих через произвольную точку (t,x), всегда существует и не зависит от выбора ломаных, но в то же время уравнение имеет точки неединственности.
(Из этого следует, что, вообще говоря, не каждое решение уравнения может быть получено как предел ломаных Эйлера.)

18. Пусть $f(t,x) \in C(R^2)$. Обозначим через $\Phi(t_0, x_0)$ множество всех решений задачи Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Пусть последовательность (t_k, x_k) стремится к (t_0, x_0) при $k \to +\infty$. Докажите, что существует $h > 0$ и существует последовательность $\varphi_{k_m} \in \Phi(t_{k_m}, x_{k_m})$ такие, что
а) все φ_{k_m} определены на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, и
б) последовательность φ_{k_m} равномерно сходится на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к $\varphi_0 \in \Phi(t_0, x_0)$.

19. Пусть $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$ - два непрерывно дифференцируемых интегрирующих множителя для уравнения в симметричной форме, таких, что $\mu_1(x,y)/\mu_2(x,y) \neq const$.
Докажите, что тогда функция $u(x,y) = \mu_1(x,y)/\mu_2(x,y)$ есть интеграл уравнения.

20. Пусть $u(x,y)$ есть интеграл уравнения в симметричной форме. Докажите, что любой другой интеграл $u_1(x,y)$ этого уравнения в окрестности любой точки (x,y) представим в виде гладкой функции от $u(x,y)$. То есть существует такая гладкая функция $F(t)$, что $u_1(x,y) = F(u(x,y))$ (функция F существует локально, равенство верно

в окрестности точки (x,y), оно не обязательно выполнено на всей области определения уравнения).

21. Постройте пример двух уравнений $\dot{x}=X_1(x)$ и $\dot{x}=X_2(x)$, где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ - непрерывные неотрицательные функции, для которых выполнено свойство единственности решений, но при этом для уравнения $\dot{x}=\max(X_1(x),X_2(x))$ свойство единственности нарушается.

22. Пусть $X(x)\in C(a,b)$. Докажите, что все решения уравнения $\dot{x}=X(x)$ монотонны.

23. Пусть $\dot{x}=X(t,x)$, $X(t,x)\in C(G)$, $X(t,0)>0$. Докажите, что решение задачи Коши $x(t_0)=x_0$, где $x_0>0$, положительно при $t\ge t_0$.

24. Пусть $X(t,x)\in C(R^2)$ и $X(t,a)X(t,b)<0$ для всех $t\in R$. Докажите, что любое решение уравнения $\dot{x}=X(t,x)$ с начальными данными (t_0,x_0), где $x_0\in(a,b)$, ограничено либо при $t\le t_0$, либо при $t\ge t_0$.

25. Докажите, что уравнение $y'=-y^{2k+1}+f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная и ω-периодическая функция, имеет единственное ω-периодическое решение.

26. Пусть $f(t)\in C(R)$. Докажите, что все решения уравнения $\dot{x}=f(t)\exp(-x^2)$ определены и ограничены при всех $t\in R$.

27. Докажите, что все решения уравнения $\dot{x}=\sin(e^x)$ с начальными данными (t_0,x_0)

а) при $x_0\ge\ln\pi$ определены и ограничены на $(-\infty,+\infty)$;

б) при $x_0<\ln\pi$ определены, но неограничены на $(-\infty,+\infty)$.

28. Пусть $f(t,x)\in C\left(R^2\right)$, $f'_x(t,x)\in C\left(R^2\right)$. Докажите, что все решения уравнения $\dot{x}=f(t,x)\sin\left(e^{|x|}\right)$ определены и ограничены на $(-\infty,+\infty)$.

29. Докажите, что уравнение $y'=\sin(xy)$ имеет решение $y(x)$ (не равное тождественно нулю) такое, что $y(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$.

30. Докажите, что решение $y(x)$ задачи Коши $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0$, определено при всех $x\geq 0$, монотонно возрастает, допускает оценку $0<y(x)<x$ при $x>0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y(x)-x\right)=0$.

31. Докажите, что линейное уравнение $y'=ky+f(x)$, где k - постоянная, $k\neq 0$, а $f(x)$ - ω-периодическая функция, имеет одно ω-периодическое решение. Найдите это решение.

32. Пусть k - вещественное число, $q(x)\in C(R)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=b<+\infty$. Докажите, что при $k>0$ все решения $y(x)$ линейного уравнения $y'+ky=q(x)$ обладают свойством $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=b/k$, а при $k<0$ существует только одно решение, обладающее этим свойством.

Список литературы для самостоятельной работы

1. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. 2005.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-пресс, 1998.
3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: «Лань». 2011. https://proxy.library.spbu.ru:2190/book/1542
4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Издание 7-е, дополненное. СПб.: «Лань», 2002.
5. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Минск, 1987.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1984.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.
8. Рейзинь Л.Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, 1971.
9. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1978.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.