САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Бегун, Е.В. Васильева, Т.Е. Звягинцева, Ю.А. Ильин,
В.А. Плисс, А.А. Родионова

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2022

Печатается по решению кафедры дифференциальных уравнений и УМК математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Бегун Н.А., Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., Плисс В.А., Родионова А.А. Общая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебно-методическое пособие.

Данное пособие посвящено общим вопросам теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений и предназначено для студентов второго курса математико-механического факультета СПбГУ, обучающихся по специальностям «Фундаментальная математика», «Фундаментальная механика», «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», «Технологии программирования», «Механика и математическое моделирование», «Астрономия».

Пособие составлено на основе лекций по второй части курса «Дифференциальные уравнения», рассчитанной на 14-20 часов (в соответствии с программой курса). Первая часть курса изложена в опубликованном ранее пособии авторов «Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений».

Курс «Дифференциальные уравнения» является базовым курсом для студентов вышеперечисленных специальностей. Большая часть материала пособия изложена по конспекту лекций, которые многие годы на математико-механическом факультете СПбГУ (до 1992 года ЛГУ) читал заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Теоретический материал, изложенный в пособии, снабжен набором интересных задач, которые предлагаются читателю для самостоятельного решения.

Пособие может быть использовано для проведения лекций, семинарских занятий и проверочных работ на математических, физических и других естественнонаучных факультетах высших учебных заведений.

Авторы:

Бегун Никита Андреевич, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Васильева Екатерина Викторовна, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Звягинцева Татьяна Евгеньевна, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Ильин Юрий Анатольевич, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Плисс Виктор Александрович, чл.-корр. РАН, доктор ф.-м.н, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений СПбГУ (с 1961 г. по 2019 г.);

Родионова Анастасия Александровна, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ.

Рецензенты:

Бибиков Юрий Николаевич, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Иванов Борис Филиппович, кандидат ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики СПбГТУ.

Содержание

Введение

Пособие составлено на основе второй части лекций по базовому для учащихся практически всех специальностей математико-механического факультета СПбГУ курсу «Дифференциальные уравнения». Этот курс ежегодно читается на факультете студентам второго года обучения. Первая часть курса изложена в опубликованном ранее пособии авторов «Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений».

Большая часть материала данного пособия основана на конспекте лекций, которые многие годы читал на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Теоретический материал пособия изложен в восьми параграфах.

В первом параграфе даны основные понятия и определения теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Второй параграф посвящен условию Липшица, которое играет важную роль в доказательстве теорем существования и единственности решения задачи Коши.

В первой части курса, посвященной дифференциальным уравнениям первого порядка, подробно рассматривалась и доказывалась теорема Пеано о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения. Ее доказательство основано на методе ломаных Эйлера. Аналогичная теорема Пеано верна и для систем дифференциальных уравнений. Эта теорема сформулирована здесь, но ее доказательство не приводится в пособии, поскольку оно во многом повторяет идеи и методы, изученные ранее.

Вопросы существования и единственности решений являются ключевыми для теории систем дифференциальных уравнений, им посвящены третий и четвертый параграфы данного пособия. Здесь обсуждается метод последовательных приближений Пикара, позволяющий найти решение интегрального уравнения, к которому сводится исходная задача Коши для системы уравнений. В теореме Пикара приведены условия, обеспечивающие сходимость пикаровских приближений к решению задачи Коши.

В пятом параграфе пособия вводится понятие интеграла системы дифференциальных уравнений и обсуждаются важнейшие свойства интегралов. Напомним, что в первой части курса было дано определение интеграла для уравнения первого порядка в симметричной форме, здесь теория интегралов обобщается на системы уравнений. Показано, как знание промежуточного интеграла позволяет понизить порядок исходной системы, а знание полного интеграла – найти локально решение задачи Коши.

Три заключительные параграфа посвящены вопросам продолжимости решений систем дифференциальных уравнений. В шестом параграфе даны основные определения, доказаны необходимые и достаточные условия продолжимости решения и существование максимального промежутка его задания. В седьмом параграфе обсуждаются свойства решений при приближении к границе максимального промежутка задания. Здесь доказана теорема Мейерхофера-Еругина о выходе максимально продолженного решения из любого компакта. Восьмой параграф посвящен изучению продолжимости решений систем, сравнимых с линейными, и линейных систем.

Нумерация формул в каждом из параграфов начинается с единицы; если мы ссылаемся на какую-либо формулу из другого параграфа, мы указываем номер формулы и номер параграфа.

В заключение вдумчивому читателю предлагается набор интересных и разнообразных теоретических задач для самостоятельного решения и список литературы для самостоятельной работы.

Список литературы состоит из двух разделов, в первом из которых указана основная литература, а во втором – дополнительная. К основной литературе относятся: опубликованное ранее (и упомянутое выше) пособие авторов «Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений», классический учебник Ю.Н. Бибикова «Курс обыкновенных дифференциальных уравнений» и сборник задач по дифференциальным уравнениям А.Ф. Филиппова. Список дополнительной литературы содержит 10 наименований.

§ 1. Системы дифференциальных уравнений, основные понятия и определения.

Системой уравнений, разрешенных относительно старших производных, называется система вида

$$\begin{cases} x_1^{(m_1)} = X_1\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k-1)}\right), \\ x_2^{(m_2)} = X_2\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k-1)}\right), \\ \dots \\ x_k^{(m_k)} = X_k\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k-1)}\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $x_j^{(s)} = d^s x_j \big/ dt^s$, $j = 1, 2, \dots, k$, $s = 1, 2, \dots, m_j$.

Число $n = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j$ называется *порядком системы* (1).

В системе (1) число уравнений всегда равно числу неизвестных функций, число аргументов каждой функции X_j равно $(n+1)$.

Предполагаем, что функции X_j непрерывны на множестве $D \subset R^{n+1}$ для всех $j = 1, 2, \dots, k$.

Определение. Решением системы (1) называется набор функций $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, …, $x_k = \varphi_k(t)$, определенных на промежутке $\langle a, b\rangle$, таких, что будучи подставлены в систему (1), они обращают эту систему в тождество.

Определение. Задача нахождения решения $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, …, $x_k = \varphi_k(t)$ системы (1), удовлетворяющего условиям

$$\varphi_j(t_0) = x_{j0}, \ \ \dot{\varphi}_j(t_0) = \dot{x}_{j0}, \ \ \ddot{\varphi}_j(t_0) = \ddot{x}_{j0}, \dots, \ \ \varphi_j^{(m_j-1)}(t_0) = x_{j0}^{(m_j-1)},$$

где $t_0 \in \langle a, b\rangle$, точка $\left(t_0, x_{10}, \dot{x}_{10}, \dots, x_{10}^{(m_1-1)}, x_{20}, \dot{x}_{20}, \dots, x_{20}^{(m_2-1)}, \dots, x_{k0}, \dot{x}_{k0}, \dots, x_{k0}^{(m_k-1)}\right)$ принадлежит множеству D, $j = 1, 2, \dots, k$, называется *задачей Коши*.

Частные случаи:

1. Если $k=1$, то (1) есть *уравнение порядка* n, *разрешенное относительно старшей производной*:

$$x^{(n)} = X\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

2. Если $m_j = 1$ для всех $j = 1, 2, ..., k$, то (1) называется *системой в нормальной форме*, или *нормальной системой*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = X_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{3}$$

Покажем, что уравнение (2) однозначным образом приводится к системе вида (3). Введем новые переменные

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x}, \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}. \tag{4}$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3, \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n,$$

и, как следует из (2),

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = X(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5}$$

Таким образом, с помощью новых переменных (4) уравнение (2) представляется в виде нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = X(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{6}$$

Уравнение (2) и система (6) не эквивалентны: решение уравнения (2) есть функция, а решение системы (6) – набор из n функций.

Но если функция $x = \varphi(t)$ – решение уравнения (2), определенное при $t \in \langle a, b \rangle$, то функция $\varphi(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на промежутке $\langle a, b \rangle$, и в силу обозначений (4), набор из n функций $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \dot{\varphi}(t)$, $x_3 = \ddot{\varphi}(t) \ldots$, $x_n = \varphi^{(n-1)}(t)$ является решением системы (6) на $\langle a, b \rangle$.

И наоборот, если набор функций $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, …, $x_n=\varphi_n(t)$, определенных на промежутке $\langle a,b\rangle$, – решение системы (6), то из (4), (5) следует, что каждая из функций $\varphi_j(t)$ непрерывно дифференцируема на $\langle a,b\rangle$ (как элемент решения системы (6)), $\varphi_j(t)=\varphi_1^{(j-1)}(t)$ для всех $j=2,...,n$, и

$$\varphi_1^{(n)}(t)=X\left(t,\varphi_1(t),\dot{\varphi}_1(t),\ddot{\varphi}_1(t),...,\varphi_1^{(n-1)}(t)\right),$$

то есть функция $x_1=\varphi_1(t)$ – решение уравнения (2), определенное на $\langle a,b\rangle$.

Важно заметить, что при переходе от уравнения (2) к системе (6) и обратно порядок системы не меняется, это важная глобальная характеристика системы.

Применяя описанную выше процедуру к каждому из уравнений системы (1), можно привести систему (1) к нормальному виду. Поэтому дальше мы будем рассматривать только нормальные системы.

Векторная запись нормальной системы.

Сначала напомним сведения из математического анализа, которые будем использовать в дальнейшем.

Под *нормой* вектора $a=(a_1,a_2,...a_n)^T$ мы будем понимать евклидову норму, то есть $\|a\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$.

Значок *T* означает транспонирование: $(a_1,a_2,...a_n)^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\...\\a_n\end{pmatrix}$.

Последовательность векторов $a^{[k]}=\left(a_1^{[k]},a_2^{[k]},...a_n^{[k]}\right)^T$ *сходится* к вектору $a=(a_1,a_2,...a_n)^T$ при $k\to+\infty$, если $\left\|a^{[k]}-a\right\|\underset{k\to+\infty}{\to}0$. При этом будем писать: $a^{[k]}\underset{k\to+\infty}{\to}a$.

Заметим, что $a^{[k]}\underset{k\to+\infty}{\to}a$ если, и только если $a_j^{[k]}\underset{k\to+\infty}{\to}a_j$ для всех $j=1,2,...,n$.

Кроме того, для последовательности векторов справедлив принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: из всякой ограниченной последовательности векторов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Вектор-функция

$$f(x_1,...,x_m)=\left(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m)\right)^T$$

непрерывна на множестве $D\subset R^m$, если все функции $f_j(x_1,...,x_m)$ непрерывны на D, и *непрерывно дифференцируема по* x_k, если все $f_j(x_1,...,x_m)$ непрерывно дифференцируемы по x_k, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,m$.

При этом по определению полагаем

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_m)}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial f_1(x_1,...,x_m)}{\partial x_k},...,\frac{\partial f_n(x_1,...,x_m)}{\partial x_k}\right)^T.$$

В частности, для вектор-функции

$$u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)\right)^T$$

по определению $\dot u(t)=\left(\dot u_1(t),\dot u_2(t),...,\dot u_n(t)\right)^T$.

Если вектор-функция $u(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по определению полагаем

$$\int_a^b u(t)dt=\left(\int_a^b u_1(t)dt,\int_a^b u_2(t)dt,...,\int_a^b u_n(t)dt\right)^T.$$

По определению, векторный ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u^{[k]}(t)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}u_1^{[k]}(t),\sum_{k=1}^{+\infty}u_2^{[k]}(t),...,\sum_{k=1}^{+\infty}u_n^{[k]}(t)\right)^T$$

сходится на промежутке $\langle a,b\rangle$, если сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_j^{[k]}(t)$, $j=1,2,...,n$, для всех $t\in\langle a,b\rangle$, и *сходится равномерно* на $\langle a,b\rangle$, если на этом промежутке указанные ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_j^{[k]}(t)$ сходятся равномерно.

Для векторных рядов справедлив признак равномерной сходимости Вейерштрасса: если $\left\|u^{[k]}(t)\right\|\le b_k$ для всех $t\in\langle a,b\rangle$, $k\in N$, и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u^{[k]}(t)$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = X_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{1}$$

где функции X_j непрерывны на множестве $D \subset R^{n+1}$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $X(t, x) = X(t, x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dots \\ X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$.

Тогда систему (1) можно записать в векторном виде

$$\dot{x} = X(t, x). \tag{1'}$$

Решение системы (1') – вектор-функция $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))^T$, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$, которая, будучи подставлена в (1'), обращает систему в тождество.

График решения называется *интегральной кривой*.

Задача Коши для системы (1') состоит в нахождения решения $x = \varphi(t)$ системы, удовлетворяющего условию $x_0 = \varphi(t_0)$, где $t_0 \in \langle a, b \rangle$, $(t_0, x_0) \in D$.

Условие $x(t_0) = x_0$ мы называем *начальным условием*, а точку (t_0, x_0) – *начальными данными*.

Геометрическая интерпретация системы (1).

Напомним, что касательная к графику решения $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, системы (1) в точке (t_0, x_0), где $x_0 = \varphi(t_0)$, есть прямая

$$x(\tau) = x_0 + \dot{\varphi}(t_0)(\tau - t_0),$$

или прямая

$$x(\tau) = x_0 + X(t_0, \varphi(t_0))(\tau - t_0).$$

Таким образом, на множестве D система (1) задает *поле направлений* (или *поле касательных векторов* или *поле линейных элементов*). Направление поля в каждой точке $(t_0, x_0) \in D$ совпадает с направлением касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Важно отметить, что для построения поля направлений вовсе не требуется умение находить интегральные кривые системы. Указанные касательные прямые строятся в любой точке множества D с помощью лишь правой части системы.

Механическая интерпретация системы (1).

Система (1) определяет движение материальной точки x: решение системы (1) $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, – *закон движения точки*.

В момент времени t системой задается мгновенная скорость материальной точки, проходящей через точку $\varphi(t)$, следующим образом:

$$\dot{\varphi}(t) = X\left(t, \varphi(t)\right).$$

Тем самым правая часть системы (1) задает поле мгновенных скоростей, а решения системы (1) – это движения, которые в каждой точке x в момент времени t имеют указанную мгновенную скорость.

Пусть

$$D = \left\{(t, x) : |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\right\},$$

$a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$.

Поставим задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Функция $X(t, x)$ непрерывна на D. Согласно теореме Вейерштрасса об ограниченности по норме непрерывной функции на компакте, существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|X(t, x)\| \le M \text{ для всех } (t, x) \in D.$$

Положим $h = \min(a, b/M)$.

Теорема (теорема Пеано)**.** При высказанных выше предположениях на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует решение задачи Коши (1), (2).

Доказательство теоремы Пеано для системы (1) почти дословно повторяет доказательство теоремы для уравнения первого порядка [1], и мы не будем приводить его здесь.

§ 2. Условие Липшица.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X(t,x) = X(t,x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} X_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ X_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$ – вектор-функция, t – скаляр.

Определение 1. Функция $X(t,x)$ *удовлетворяет условию Липшица* по x на множестве $D \subset R^{n+1}$ (обозначение: $X(t,x) \in Lip_x(D)$), если существует константа $L > 0$ такая, что для любых двух точек $(t,\overline{x})$, $(t,\overline{\overline{x}})$ из множества D выполнено неравенство

$$\left\| X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}}) \right\| \le L \left\| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right\|. \tag{1}$$

Определение 2. Функция $X(t,x)$ *удовлетворяет локально условию Липшица* по x в области $G \subset R^{n+1}$ (обозначение: $X(t,x) \in Lip_x^{loc}(G)$), если для любой точки $(t_0,x_0) \in G$ существует окрестность $U(t_0,x_0) \subset G$ такая, что $X(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве $U(t_0,x_0)$ в смысле определения 1.

Теорема 1. Пусть $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет локально условию Липшица по x в области $G \subset R^{n+1}$, тогда на любом замкнутом ограниченном множестве D, содержащемся в G, функция $X(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x глобально.

Доказательство теоремы 1. Доказываем от противного. Допустим, что для некоторого замкнутого ограниченного множества $D \subset G$ для любой константы $L > 0$ существует пара точек $(t,\overline{x}),(t,\overline{\overline{x}}) \in D$ такая, что

$$\left\| X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}}) \right\| > L \left\| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right\|.$$

Возьмем произвольную числовую последовательность $\{L_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такую, что $L_{k+1} > L_k > 0$ для всех $k \in N$ и

$$L_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty. \tag{2}$$

Для каждого L_k найдется пара точек $(t_k,\overline{x}_k),(t_k,\overline{\overline{x}}_k) \in D$ такая, что

$$\left\| X\left(t_k,\overline{x}_k\right)-X\left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\right\| > L_k \left\|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right\|. \tag{3}$$

Множество D ограничено и замкнуто, поэтому (согласно теореме Больцано-Вейерштрасса) из любой последовательности, принадлежащей этому множеству, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Выберем сначала из последовательности $\left\{\left(t_k,\overline{x}_k\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\left\{\left(t_{k_j},\overline{x}_{k_j}\right)\right\}_{j=1}^{+\infty}$, затем из подпоследовательности $\left\{\left(t_{k_j},\overline{\overline{x}}_{k_j}\right)\right\}_{j=1}^{+\infty}$ выбираем сходящуюся подпоследовательность $\left\{\left(t_{k_{jm}},\overline{\overline{x}}_{k_{jm}}\right)\right\}_{m=1}^{+\infty}$. Последовательности $\left\{\left(t_{k_{jm}},\overline{x}_{k_{jm}}\right)\right\}_{m=1}^{+\infty}$ и $\left\{\left(t_{k_{jm}},\overline{\overline{x}}_{k_{jm}}\right)\right\}_{m=1}^{+\infty}$ сходятся к некоторым точкам $\left(t_0,\overline{x}_0\right)$ и $\left(t_0,\overline{\overline{x}}_0\right)$ из D (поскольку множество D замкнуто).

Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что сами последовательности $\left\{\left(t_k,\overline{x}_k\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, $\left\{\left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ сходятся:

$$\left(t_k,\overline{x}_k\right)\underset{k\to+\infty}{\to}\left(t_0,\overline{x}_0\right) \text{ и } \left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\underset{k\to+\infty}{\to}\left(t_0,\overline{\overline{x}}_0\right). \tag{4}$$

1. Если $\overline{x}_0 \neq \overline{\overline{x}}_0$, то из (4), по непрерывности функции $X\left(t,x\right)$, следует:

$$\frac{\left\| X\left(t_k,\overline{x}_k\right)-X\left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\right\|}{\left\|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right\|}\underset{k\to+\infty}{\to} M, \tag{5}$$

где M – конечное число.

Согласно (5), существует $k_0 \in N$ такое, что для всех $k > k_0$

$$\frac{\left\| X\left(t_k,\overline{x}_k\right)-X\left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\right\|}{\left\|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right\|} < M+1, \tag{6}$$

а согласно (2), существует $\tilde{k} \in N$ такое, что

$$L_k > M+1 \tag{7}$$

для всех $k > \tilde{k}$.

Пусть $k > \max\left(k_0,\tilde{k}\right)$, тогда из неравенств (3) и (6) следует, что

$$L_k \left\|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right\| < \left\| X\left(t_k,\overline{x}_k\right)-X\left(t_k,\overline{\overline{x}}_k\right)\right\| < \left(M+1\right)\left\|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right\|,$$

а это неравенство противоречит (7). Таким образом, случай $\overline{x}_0 \neq \overline{\overline{x}}_0$ невозможен.

2. Пусть $\overline{x}_0 = \overline{\overline{x}}_0$. Согласно условию теоремы и определению 2, существует окрестность $U(t_0,\overline{x}_0) \subset G$ такая, что $X(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве $U(t_0,\overline{x}_0)$. То есть существует такая константа $L>0$, что для любых двух точек $(t,\overline{x})$, $(t,\overline{\overline{x}})$ из $U(t_0,\overline{x}_0)$ выполнено неравенство (1).

Из условия (4) при $(t_0,\overline{x}_0) = (t_0,\overline{\overline{x}}_0)$ следует, что существует число $k_0 \in N$ такое, что $(t_k,\overline{x}_k),(t_k,\overline{\overline{x}}_k) \in U(t_0,\overline{x}_0)$ для всех $k > k_0$, а из условия (2) следует, что существует $\tilde{k} \in N$ такое, что $L_k > L$ для всех $k > \tilde{k}$.

Пусть $k > \max(k_0,\tilde{k})$, тогда

$$\left\| X(t_k,\overline{x}_k) - X(t_k,\overline{\overline{x}}_k) \right\| < L \left\| \overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k \right\|,$$

и это неравенство противоречит (3), поскольку $L_k > L$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $X(t,x)$ непрерывно дифференцируема по компонентам x в области G, тогда $X(t,x) \in Lip_x^{loc}(G)$.

Доказательство теоремы 2. По условию теоремы частные производные $\partial X_j(t,x_1,...,x_n)/\partial x_k$ существуют и непрерывны в G для всех $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$.

Возьмем произвольную точку $(t_0,x_0) \in G$. Поскольку G – открытое множество, существуют $a,b \in R$, $a>0$, $b>0$, такие, что

$$D = \left\{ (t,x) : |t-t_0| \le a, \left\| x - x_0 \right\| \le b \right\} \subset G .$$

Выберем и зафиксируем произвольные точки $(t,\overline{x}),(t,\overline{\overline{x}}) \in D$, и оценим разность $X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}})$ для произвольного фиксированного $j \in \{1,2,...,n\}$.

Для этого введем функцию $f(s) = X_j(t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}})$, определенную при $0 \le s \le 1$. Заметим, что $f(s)$ корректно определена, то есть точка $(t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}})$ принадлежит D для всех $s \in [0,1]$. Действительно,

$$\left\| s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}} - x_0 \right\| = \left\| s\overline{x} - sx_0 + (1-s)\overline{\overline{x}} - (1-s)x_0 \right\| \le$$

$$\le s\left\| \overline{x} - x_0 \right\| + (1-s)\left\| \overline{\overline{x}} - x_0 \right\| \le sb + (1-s)b = b.$$

Согласно формуле конечных приращений (теореме Лагранжа) существует значение $\sigma \in (0,1)$ такое, что

$$X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}}) = f(1) - f(0) = f'(\sigma). \tag{8}$$

Кроме того,

$$f'(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j\left(t, \sigma\overline{x} + (1-\sigma)\overline{\overline{x}}\right)}{\partial x_k}\left(\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k\right),$$

и

$$\left| f'(\sigma) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial X_j\left(t, \sigma\overline{x} + (1-\sigma)\overline{\overline{x}}\right)}{\partial x_k} \right| \left| \overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k \right|. \tag{9}$$

Из непрерывности частных производных $\partial X_j(t,x)/\partial x_k$ на множестве D следует их ограниченность в D: существует $K > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\partial X_j(t,x)}{\partial x_k} \right| \le K \text{ для всех } j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,n.$$

Кроме того, $\left| \overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k \right| \le \left\| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right\|$ для всех $k = 1,2,...,n$. Поэтому из (8), (9) следует, что

$$\left| X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}}) \right| \le nK \left\| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right\|, \tag{10}$$

и эта оценка справедлива для всех $j \in \{1,2,...,n\}$.

По определению евклидовой нормы вектора

$$\left\| X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}}) \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}}) \right)^2} \le n\sqrt{n}K \left\| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right\|. \tag{11}$$

Полагая в (11) $n\sqrt{n}K = L$ получим, что для любой пары точек $(t,\overline{x}),(t,\overline{\overline{x}}) \in D$ верно неравенство (1).

Поскольку точка (t_0, x_0) - произвольная точка области G, теорема доказана.

§ 3. Метод последовательных приближений Пикара.

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = X(t, x), \qquad (1)$$

$x \in R^n$, $X(t,x) \in C(D)$, $D \subset R^{n+1}$.

Пусть $(t_0, x_0) \in D$, ставим задачу Коши с начальными данными

$$t = t_0,\ x = x_0. \qquad (2)$$

Рассмотрим векторное интегральное уравнение (систему интегральных уравнений):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))d\tau. \qquad (3)$$

Определение. *Решением интегрального уравнения* (3) называется непрерывная вектор-функция $x = \varphi(t)$, определенная на промежутке $\langle a,b \rangle$, $t_0 \in \langle a,b \rangle$, которая будучи подставлена в (3), обращает уравнение (3) в тождество.

Утверждение *(об эквивалентности задачи Коши и интегрального уравнения).* Уравнение (3) эквивалентно задаче Коши (1), (2).

Доказательство утверждения. Пусть $t_0 \in \langle a,b \rangle$, и функция $x = \varphi(t)$ – решение (3), определенное на $\langle a,b \rangle$, тогда

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau))d\tau \qquad (4)$$

для всех $t \in \langle a,b \rangle$.

Положим в (4) $t = t_0$, получим: $\varphi(t_0) = x_0$.

Подынтегральная вектор-функция в правой части тождества (4) непрерывна на промежутке $\langle a,b \rangle$, следовательно, правая часть (4) непрерывно дифференцируема, значит, непрерывно дифференцируема и функция $\varphi(t)$.

Дифференцируя тождество (4) по t, получаем:

$$\dot{\varphi}(t) \equiv X(t, \varphi(t)), \qquad (5)$$

а это значит, что функция $x = \varphi(t)$ является решением системы (1), удовлетворяющим условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Пусть теперь $x=\varphi(t)$ – решение задачи Коши (1), (2), $t\in\langle a,b\rangle$, $t_0\in\langle a,b\rangle$. Это значит, что при $t\in\langle a,b\rangle$ выполняется (5) и $\varphi(t_0)=x_0$.

Интегрируем тождество (5) от t_0 до t:

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)\equiv\int_{t_0}^{t}X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)d\tau,$$

то есть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет (4), и является решением интегрального уравнения (3). Утверждение доказано.

Следуя Пикару, будем решать уравнение (3) *методом последовательных приближений.*

В качестве *нулевого приближения* выберем функцию

$$\varphi_0(t)\equiv x_0.$$

Это приближение определено для всех $t\in R$.

Предположим, что существует промежуток $\langle a_1,b_1\rangle$ такой, что $t_0\in\langle a_1,b_1\rangle$ и $\left(t,\varphi_0(t)\right)\in D$ для всех $t\in\langle a_1,b_1\rangle$. Тогда при $t\in\langle a_1,b_1\rangle$ определена вектор-функция

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X\left(\tau,\varphi_0(\tau)\right)d\tau,$$

которая называется *первым приближением Пикара*.

Если существует промежуток $\langle a_2,b_2\rangle$ такой, что $\langle a_2,b_2\rangle\subset\langle a_1,b_1\rangle$, $t_0\in\langle a_2,b_2\rangle$ и $\left(t,\varphi_1(t)\right)\in D$ для всех $t\in\langle a_2,b_2\rangle$, то при $t\in\langle a_2,b_2\rangle$ определено *второе приближение*:

$$\varphi_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X\left(\tau,\varphi_1(\tau)\right)d\tau.$$

Продолжим, если возможно, этот процесс далее. Предположим, что $(k-1)$-е приближение $\varphi_{k-1}(t)$ определено на промежутке $\langle a_{k-1},b_{k-1}\rangle$, $k\in N$.

Пусть существует промежуток $\langle a_k,b_k\rangle$ такой, что $\langle a_k,b_k\rangle\subset\langle a_{k-1},b_{k-1}\rangle$, $t_0\in\langle a_k,b_k\rangle$ и $\left(t,\varphi_{k-1}(t)\right)\in D$ для всех $t\in\langle a_k,b_k\rangle$, тогда на промежутке $\langle a_k,b_k\rangle$ определено k*-е приближение Пикара*:

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X\left(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)\right) d\tau . \qquad (6)$$

Теорема 1 (теорема Пикара). Пусть на замкнутом множестве D вектор-функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x.

Предположим, что все приближения Пикара $\varphi_k(t)$, $k \in \{0\} \cup N$, определены на одном и том же сегменте $[a,b]$.

Тогда последовательность приближений Пикара $\varphi_k(t)$ сходится при $k \to +\infty$ равномерно на отрезке $[a,b]$ к функции $\varphi(t)$, и $\varphi(t)$ есть решение уравнения (3) и решение задачи Коши (1), (2).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим ряд

$$S(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\right), \qquad (7)$$

где $t \in [a,b]$.

Для частичных сумм ряда (7) верно равенство:

$$S_m(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{m} \left(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\right) = \varphi_m(t),$$

поэтому равномерная сходимость ряда (7) эквивалентна равномерной сходимости последовательности $\left\{\varphi_k(t)\right\}_{\kappa=0}^{+\infty}$.

Покажем с помощью признака Вейерштрасса, что ряд (7) равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, указав сходящийся числовой ряд, мажорирующий (7) на отрезке $[a,b]$.

По определению

$$\left\|\varphi_0(t)\right\| = \left\|x_0\right\|.$$

Далее,

$$\left\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\right\| = \left\|\int\limits_{t_0}^{t} X\left(\tau, \varphi_0(\tau)\right) d\tau\right\| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left\|X\left(\tau, x_0\right)\right\| d\tau\right|. \qquad (8)$$

Функция $X(t,x_0)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и следовательно, ограничена: существует $M > 0$ такое, что $\left\|X(t,x_0)\right\| \le M$ для всех $t \in [a,b]$. Из оценки (8) следует:

$$\left\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\right\| \le M\left|t - t_0\right|. \qquad (9)$$

Далее,

$$\left\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} X\left(\tau,\varphi_1(\tau)\right)d\tau - \int_{t_0}^{t} X\left(\tau,\varphi_0(\tau)\right)d\tau\right\| \le$$
$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|X\left(\tau,\varphi_1(\tau)\right) - X\left(\tau,\varphi_0(\tau)\right)\right\| d\tau\right|. \tag{10}$$

По условию теоремы $X(t,x) \in Lip_x(D)$, то есть существует константа $L > 0$ такая, что для любых двух точек $(t,\overline{x}), (t,\overline{\overline{x}}) \in D$ выполнено неравенство

$$\left\|X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}})\right\| \le L\left\|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right\|. \tag{11}$$

По условию $(t,\varphi_0(t)) \in D$ и $(t,\varphi_1(t)) \in D$ для всех $t \in [a,b]$. Поэтому из (10), (11) следует, что

$$\left\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\right\| \le L\left|\int_{t_0}^{t} \left\|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)\right\| d\tau\right|,$$

и из (9) заключаем:

$$\left\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\right\| \le ML\left|\int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|\, d\tau\right| = \frac{M}{L}\frac{\left(L|t-t_0|\right)^2}{2}. \tag{12}$$

Докажем методом математической индукции неравенство

$$\left\|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\right\| \le \frac{M}{L}\frac{\left(L|t-t_0|\right)^k}{k!} \tag{13}$$

для всех $k \in N$.

Базу индукции дает неравенство (9) или неравенство (12).

Индукционный переход. Предположим, что неравенство (13) верно. Тогда

$$\left\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|X\left(\tau,\varphi_k(\tau)\right) - X\left(\tau,\varphi_{k-1}(\tau)\right)\right\| d\tau\right|. \tag{14}$$

Точки $(t,\varphi_k(t))$ и $(t,\varphi_{k-1}(t))$ принадлежат множеству D для всех $t \in [a,b]$, поэтому из (11), (14), используя индукционное предположение (13), получаем:

$$\left\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\right\| \le L\left|\int_{t_0}^{t}\left\|\varphi_k(\tau)-\varphi_{k-1}(\tau)\right\|d\tau\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{M}{L}\frac{\left(L|\tau-t_0|\right)^k}{k!}d\tau\right| = \frac{M}{L}\frac{\left(L|t-t_0|\right)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Последнее неравенство доказывает индукционный переход, и таким образом, неравенство (13) верно для всех $k \in N$.

Заметим, что $|t-t_0| \le (b-a)$ (поскольку $t, t_0 \in [a,b]$), и из (13) следует, что для всех $k \in N$

$$\left\|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\right\| \le \frac{M}{L}\frac{\left(L(b-a)\right)^k}{k!}. \tag{15}$$

Оценка (15) означает, что ряд (7) мажорируется сходящимся числовым рядом $\|x_0\| + \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(L(b-a)\right)^k}{k!}$. Сумма этого числового ряда равна $\|x_0\| + \frac{M}{L}\left(\exp\left(L(b-a)\right)-1\right)$.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (7) равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ при $k \to +\infty$ к некоторой функции $\varphi(t)$. Очевидно, что к $\varphi(t)$ равномерно сходится и последовательность $\varphi_k(t)$.

Заметим, что $\left(t,\varphi(t)\right) \in D$, поскольку $\left(t,\varphi_k(t)\right) \in D$ для всех $k \in N$, а D – замкнутое множество.

Согласно условию (11)

$$\left\|X\left(t,\varphi_k(t)\right)-X\left(t,\varphi(t)\right)\right\| \le L\left\|\varphi_k(t)-\varphi(t)\right\|. \tag{16}$$

Норма, стоящая в правой части неравенства (16), стремится к нулю при $k \to +\infty$ равномерно на $[a,b]$, следовательно, равномерно стремится к нулю и норма, стоящая в левой части (16). То есть последовательность $X\left(t,\varphi_k(t)\right)$ при $k \to +\infty$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к функции $X\left(t,\varphi(t)\right)$.

Таким образом, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (6):

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)d\tau.$$

Это значит, что функция $x=\varphi(t)$ – решение (3), определенное на $[a,b]$, и, согласно доказанному выше утверждению об эквивалентности задачи Коши и интегрального уравнения, решение задачи Коши (1), (2). Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $X(t,x)$ непрерывна на множестве

$$D=\{(t,x):|t-t_0|\le a, \|x-x_0\|\le b\},$$

$a,b\in R,\ a>0,\ b>0$.

Тогда существует $M>0$ такое, что $\|X(t,x)\|\le M$ для всех $(t,x)\in D$.

Положим $h=\min(a,b/M)$.

Теорема 2. Пусть функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на множестве D. Тогда все последовательные приближения Пикара $\varphi_k(t)$, $k\in\{0\}\cup N$, определены на отрезке Пеано $[t_0-h,\ t_0+h]$, и последовательность $\varphi_k(t)$ сходится при $k\to+\infty$ равномерно на $[t_0-h,\ t_0+h]$ к решению $x=\varphi(t)$ задачи Коши (1), (2).

Доказательство теоремы 2. Докажем с помощью принципа математической индукции, что все $\varphi_k(t)$ определены при $|t-t_0|\le h$.

База индукции. Нулевое приближение $\varphi_0(t)=x_0$ определено на отрезке $[t_0-h,\ t_0+h]$.

Индукционный переход. Предположим, что приближение $\varphi_{k-1}(t)$, $k\in N$, определено при $|t-t_0|\le h$, и $(t,\varphi_{k-1}(t))\in D$ для всех $t\in[t_0-h,t_0+h]$.

Тогда, согласно (6),

$$\varphi_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X(\tau,\varphi_{k-1}(\tau))d\tau,$$

и $\varphi_k(t)$ определено при $|t-t_0|\le h$.

Кроме того, $\|X(t,\varphi_{k-1}(t))\|\le M$ для всех $t\in[t_0-h,t_0+h]$, и

$$\|\varphi_k(t)-x_0\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\|X(\tau,\varphi_{k-1}(\tau))\|d\tau\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}M\,d\tau\right|\le M|t-t_0|\le Mh\le b.$$

Это означает, что $(t,\varphi_k(t))\in D$, и в силу принципа математической индукции, $\varphi_k(t)$ определены при $|t-t_0|\le h$ для всех $k\in N$.

Как доказано в теореме 1, последовательность $\varphi_k(t)$ сходится при $k \to +\infty$ равномерно на $[t_0 - h, t_0 + h]$ к решению $x = \varphi(t)$ задачи Коши (1), (2).

Теорема доказана.

Замечание. Все последовательные приближения Пикара могут быть определены на всей числовой оси (например, если $D = R^{n+1}$). Но из этого факта не следует, что решение $x = \varphi(t)$ задачи Коши (1), (2) определено при всех $t \in R$. Это показывает простой пример.

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x^2 + 1$. Его решение $x = tg\, t$ с начальными условиями $(t_0, x_0) = (0, 0)$ определено на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, хотя все приближения Пикара $\varphi_k(t)$ определены при $t \in R$.

Заметим, что из теорем 1 и 2 следует теорема существования решения.

Терема. Пусть функция $X(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует $h > 0$ такое, что при $|t - t_0| \le h$ определено решение задачи Коши (1), (2).

Но этот результат слабее, чем теорема Пеано.

§ 4. Теорема единственности.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$.

Возьмем точку $(t_0, x_0) \in G$ и поставим задачу Коши с начальными данными

$$t = t_0,\ x = x_0. \tag{2}$$

Теорема. Пусть на промежутке $\langle a,b \rangle$, $t_0 \in \langle a,b \rangle$, заданы два решения $x = \varphi(t)$ и $x = \xi(t)$ задачи (1), (2). Тогда $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ на $\langle a,b \rangle$.

Доказательство теоремы. Возьмем произвольную точку $\theta \in \langle a,b \rangle$ и покажем, что $\varphi(\theta) = \xi(\theta)$.

Заметим, что $\varphi(t_0) \equiv \xi(t_0) = x_0$. Если $\theta \neq t_0$, то для определенности будем считать, что $\theta > t_0$ (случай $\theta < t_0$ рассматривается аналогично).

Положим

$$\Gamma_1 = \{(t,x) : t \in [t_0, \theta],\ x = \varphi(t)\},\ \Gamma_2 = \{(t,x) : t \in [t_0, \theta],\ x = \xi(t)\},\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Множество Γ содержится в G, ограничено и замкнуто, поскольку $\Gamma_1 \subset G$, $\Gamma_2 \subset G$, и каждое из множеств Γ_1, Γ_2 ограничено и замкнуто.

Из теоремы 1 параграфа 2 следует, что на множестве Γ функция $X(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x глобально, то есть существует константа $L > 0$ такая, что для любых двух точек $(t, \bar{x})$, $(t, \bar{\bar{x}})$ из Γ выполнено неравенство

$$\left\| X(t,\bar{x}) - X(t,\bar{\bar{x}}) \right\| \le L \left\| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right\|.$$

Следовательно, для всех $t \in [t_0, \theta]$

$$\left\| X(t,\varphi(t)) - X(t,\xi(t)) \right\| \le L \left\| \varphi(t) - \xi(t) \right\|. \tag{3}$$

Задача Коши (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau,$$

поэтому для $t \in \langle a, b \rangle$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau \text{ и } \xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, \xi(\tau)\right) d\tau.$$

Вычитая из первого равенства второе и рассматривая норму разности, получаем с учетом неравенства (3), что для всех $t \in [t_0, \theta]$

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \xi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau - \int_{t_0}^{t} X\left(\tau, \xi(\tau)\right) d\tau \right\| \le \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| X\left(\tau, \varphi(\tau)\right) - X\left(\tau, \xi(\tau)\right) \right\| d\tau \right| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi(\tau) - \xi(\tau)\| d\tau \right|. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $u(t) = \|\varphi(\tau) - \xi(\tau)\|$, тогда неравенство (4) принимает вид

$$u(t) \le L \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|,$$

и по следствию из леммы Гронуолла [1], $u(t) \equiv 0$, то есть $\varphi(t) \equiv \xi(t)$, на отрезке $[t_0, \theta]$, и в частности, $\varphi(\theta) = \xi(\theta)$. Теорема доказана.

§ 5. *Интегралы системы.*

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$, $X(t,x) = X(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ X_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ – вектор-функция, непрерывная в области $G \subset R^{n+1}$.

Определение 1. Скалярная функция $u(t,x) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ называется *интегралом* системы (1) в области G, если выполнены следующие условия:

1) $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема в G,
2) в каждой точке области G хотя бы одна из частных производных $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x_j$, $j = 1, \dots, n$, не равна нулю,
3) в G выполняется тождество

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} X_j(t,x) \equiv 0. \tag{2}$$

По определению $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n} \right)$, поэтому условие (2) может быть записано в виде

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} X(t,x) \equiv 0. \tag{2'}$$

Заметим, что второе слагаемое в равенстве (2’) представляет собой произведение строки $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ на столбец $X(t,x)$.

Замечание 1. $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \neq 0$ в каждой точке области G .

Действительно, если $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0$, то из условия (2’) следует, что $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 0$, а это противоречит второму условию из определения интеграла.

Замечание 2. Зная интеграл $u(t,x)$, легко построить много других интегралов по следующему правилу.

Пусть $f(\xi)$ – непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента, определенная при $\xi \in (-\infty,+\infty)$, и $f'(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in R$. Тогда функция $v(t,x) = f(u(t,x))$ – тоже интеграл системы (1) в G.

Действительно, $v(t,x)$ – непрерывно дифференцируема, причем

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = f'(u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = f'(u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial x},$$

поэтому для $v(t,x)$ выполнено условие (2'):

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} X(t,x) = f'(u(t,x))\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} X(t,x)\right) \equiv 0.$$

Отметим, что интегралы $u(t,x)$ и $f(u(t,x))$ называются *функционально зависимыми*.

Теорема 1. Пусть $u(t,x)$ – интеграл системы (1) в области G, а $x = \varphi(t)$ – решение (1), определенное при $t \in \langle a,b \rangle$. Тогда $u(t,\varphi(t)) = const$ на промежутке $\langle a,b \rangle$.

Доказательство теоремы 1. Применяя формулу дифференцирования сложной функции и (2'), получим

$$\frac{du(t,\varphi(t))}{dt} = \frac{\partial u(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial u(t,\varphi(t))}{\partial x}\dot{\varphi}(t) =$$
$$= \frac{\partial u(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial u(t,\varphi(t))}{\partial x} X(t,\varphi(t)) \equiv 0,$$

поэтому $u(t,\varphi(t)) = const$, и теорема доказана.

Таким образом, интеграл системы – это функция, которая не меняется вдоль решений. Это свойство является ключевым свойством интеграла.

Определение 2. Интегралы $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, …, $u_k(t,x)$ системы (1) называются *независимыми* в области G, если в каждой точке $(t,x) \in G$

$$rank\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} & \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} & \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t} & \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k. \quad (3)$$

Из (3) сразу следует, что число независимых интегралов системы не превосходит n, где n – порядок системы.

Обозначим $u^{[k]}(t,x) = \left(u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_k(t,x)\right)^T$, тогда

$$\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

и равенство (3) можно переписать в виде

$$rank\left(\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x}\right) = k. \quad (3')$$

Лемма. Если $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, …, $u_k(t,x)$ – интегралы системы (1) в области G, то

$$rank\left(\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x}\right) = rank\left(\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x}\right). \quad (4)$$

Доказательство леммы. Для каждого из интегралов $u_m(t,x)$, $m = 1,2,\dots,k$, в G выполнено условие (2'), то есть в каждой точке $(t,x) \in G$, в наших обозначениях

$$\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x} X(t,x) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим векторное равенство

$$\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x}z\equiv 0, \tag{6}$$

где $z=(z_1,z_2,...,z_n)^T$, как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно z в точке $(t,x)\in G$.

По теореме Кронекера-Капелли, система (6) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено (4). Но, как следует из (5), система (6) имеет решение $z=X(t,x)$, поэтому равенство (4) верно. Лемма доказана.

Согласно лемме, условие (3) в определении 2 (и условие (3')) можно записать в виде

$$rank\left(\frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x}\right)=k. \tag{7}$$

Замечание 3. Пусть $u(t,x)$ – скалярный интеграл системы (1) в G, $v(t,x)=f(u(t,x))$ – интеграл, построенный из $u(t,x)$ в замечании 2. Тогда $u(t,x)$ и $v(t,x)$ зависимы.

Действительно,

$$rank\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}f'(u(t,x))\end{pmatrix}=1<2=k.$$

Понижение порядка системы с помощью промежуточных интегралов.

Определение 2. Набор из k независимых интегралов $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, …, $u_k(t,x)$ системы (1), где $0<k<n$, называется *промежуточным интегралом*.

Покажем, как с помощью промежуточного интеграла понизить порядок системы в окрестности любой точки из области G на k единиц.

Пусть $u^{[k]}(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_k(t,x))^T$ – промежуточный интеграл системы (1) в G.

Возьмем точку (t_0, x_0) из области G. Согласно (7), в этой точке

$$rank\left(\frac{\partial u^{[k]}(t_0,x_0)}{\partial x}\right) = rank\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t_0,x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t_0,x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t_0,x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t_0,x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k .$$

Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(t_0,x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(t_0,x_0)}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k(t_0,x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_k(t_0,x_0)}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0 , \tag{8}$$

этого всегда можно добиться изменением нумерации координат вектора x.

Положим

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y(t,x) = \begin{pmatrix} X_1(t,x) \\ \dots \\ X_k(t,x) \end{pmatrix},\ Z(t,x) = \begin{pmatrix} X_{k+1}(t,x) \\ \dots \\ X_n(t,x) \end{pmatrix},$$

тогда

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ X(t,x) = \begin{pmatrix} Y(t,y,z) \\ Z(t,y,z) \end{pmatrix},$$

и система (1) может быть записана в виде

$$\dot{y} = Y(t,y,z),\ \dot{z} = Z(t,y,z). \tag{1'}$$

Сделаем в (1’) замену переменных $(t,y,z) \to (t,v,z)$, определив новую переменную v по формуле

$$v = u^{[k]}(t,x) = u^{[k]}(t,y,z). \tag{9}$$

Заметим, что согласно (8), определитель $\det\left(\frac{\partial u^{[k]}(t,y,z)}{\partial y}\right)$ не равен нулю в точке $(t_0,\, y_0,\, z_0)$. И по теореме о неявной функции равенство (9) однозначно разрешимо относительно y в окрестности точки $t = t_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Обозначим через $y = h(t, v, z)$ решение (9). Пусть $v_0 = u^{[k]}(t_0, y_0, z_0)$, тогда $y_0 = h(t_0, v_0, z_0)$, и в силу равенства (5)

$$\frac{dv(t,x)}{dt} = \frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u^{[k]}(t,x)}{\partial x} X(t,x) = 0$$

в окрестности точки $(t_0,\, y_0,\, z_0)$.

Поэтому после указанной замены система (1') принимает вид

$$\dot{v} = 0,\ \dot{z} = Z\big(t, h(t, v, z), z\big). \tag{10}$$

Первое из уравнений (10) интегрируется, его решение $v = c$, где c – произвольный постоянный k-мерный вектор, взятый из достаточно малой окрестности вектора v_0, поскольку все рассмотрение ведется в окрестности точки (t_0, x_0). И система (10) сводится к системе

$$\dot{z} = Z\big(t, h(t, c, z), z\big),$$

порядок которой равен $(n - k)$.

Полный интеграл системы. Общий интеграл.

Определение 3. Набор из n независимых интегралов системы (1) называется *полным интегралом*.

Пусть $u^{[n]}(t,x) = \big(u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x)\big)^T$ – полный интеграл системы (1). Покажем, что знание полного интеграла позволяет решить любую задачу Коши для системы (1).

Пусть точка (t_0, x_0) принадлежит G. Рассмотрим равенство

$$u^{[n]}(t,x) = u^{[n]}(t_0, x_0) \tag{11}$$

как уравнение относительно x.

Теорема 2. Уравнение (11) имеет единственное решение $x = \varphi(t)$, определенное на некотором интервале (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $x_0 = \varphi(t_0)$. Это решение непрерывно дифференцируемо на (α,β) и является решением системы (1).

Доказательство теоремы 2. В силу условия (7) независимости интегралов, составляющих $u^{[n]}(t,x)$, для всех точек $(t,x)\in G$

$$rank\left(\frac{\partial u^{[n]}(t,x)}{\partial x}\right)=n,$$

то есть

$$\det\left(\frac{\partial u^{[n]}(t,x)}{\partial x}\right)\neq 0. \qquad (12)$$

По теореме о неявной функции равенство (11) имеет единственное решение $x=\varphi(t)$, определенное и непрерывно дифференцируемое на некотором интервале (α,β), при этом $t_0\in(\alpha,\beta)$ и $x_0=\varphi(t_0)$.

Покажем, что $x=\varphi(t)$ – решение системы (1). Вектор-функция $\varphi(t)$ – решение (11), поэтому для всех $t\in(\alpha,\beta)$

$$u^{[n]}(t,\varphi(t))=u^{[n]}(t_0,x_0).$$

Дифференцируя последнее равенство по t, получаем:

$$\frac{\partial u^{[n]}(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial u^{[n]}(t,\varphi(t))}{\partial x}\dot{\varphi}(t)=0 \qquad (13)$$

при $t\in(\alpha,\beta)$.

С другой стороны, из равенства (5) следует, что для $t\in(\alpha,\beta)$

$$\frac{\partial u^{[n]}(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial u^{[n]}(t,\varphi(t))}{\partial x}X(t,\varphi(t))=0. \qquad (14)$$

Вычитаем (14) из (13):

$$\frac{\partial u^{[n]}(t,\varphi(t))}{\partial x}\left(\dot{\varphi}(t)-X(t,\varphi(t))\right)=0. \qquad (15)$$

Согласно (12), матрица $\dfrac{\partial u^{[n]}(t,x)}{\partial x}$ имеет обратную матрицу в каждой точке $(t,x)\in G$. Умножая слева обе части равенства (15) на матрицу, обратную к $\dfrac{\partial u^{[n]}(t,x)}{\partial x}$, получим:

$$\dot{\varphi}(t)-X\left(t,\varphi(t)\right)=0,$$

то есть $x=\varphi(t)$ – решение системы (1). Теорема доказана.

Определение 4. Если $u^{[n]}(t,x)$ – полный интеграл системы (1), то равенство $u^{[n]}(t,x)=c$, где c – произвольный постоянный n-мерный вектор, называется *общим интегралом* системы.

Таким образом, под полным интегралом мы понимаем набор из n независимых интегралов, а под общим интегралом – равенство, указанное в определении.

§6. Продолжение решений.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$.

Определение 1. Пусть решение $x = \varphi(t)$ системы (1) определено на интервале (a,b). Это решение *продолжимо вправо* за точку b, если существует число $\overline{b} > b$ такое, что на интервале $(a,\overline{b})$ определено решение $x = u(t)$, и $u(t) \equiv \varphi(t)$ на (a,b).

При этом говорят, что решение $x = \varphi(t)$ продолжимо вправо до $\overline{b}$, а решение $x = u(t)$ называют его *продолжением вправо* до $\overline{b}$.

Если же такого числа $\overline{b} > b$ не существует, то говорят, что решение $x = \varphi(t)$ *непродолжимо вправо* за точку b.

Аналогично определяется продолжение решения влево за a.

Определение 2. Решение $x = \varphi(t)$ системы (1), определенное на интервале (a,b), *продолжимо влево* за точку a, если существует число $\overline{a} < a$ такое, что на интервале $(\overline{a},b)$ определено решение $x = v(t)$, и $v(t) \equiv \varphi(t)$ на (a,b).

При этом говорят, что решение $x = \varphi(t)$ продолжимо влево до $\overline{a}$, а решение $x = v(t)$ – его *продолжение влево* до $\overline{a}$.

Если такого числа $\overline{a} < a$ не существует, то говорят, что решение $x = \varphi(t)$ *непродолжимо влево* за точку a.

Теорема 1. Для того, чтобы решение $x = \varphi(t)$ системы (1), определенное на интервале (a,b), было продолжимо вправо за b, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{t \to b-0} \varphi(t) = \xi$, и точка (b,ξ) при этом принадлежала области G.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Если решение $x = \varphi(t)$ системы (1), определенное на (a,b), продолжимо вправо за b, то существует решение $x = u(t)$, определенное на интервале $(a, \bar{b})$, где $\bar{b} > b$, такое, что $u(t) \equiv \varphi(t)$ на (a,b). Поэтому существует предел

$$\lim_{t \to b-0} \varphi(t) = \lim_{t \to b} u(t) = u(b) = \xi,$$

и по определению решения системы, точка $(b, u(b))$ принадлежит области G.

Достаточность. Пусть существует предел $\lim\limits_{t \to b-0} \varphi(t) = \xi$, и $(b, \xi) \in G$.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$, положим $x_0 = \varphi(t_0)$, и поставим задачу Коши

$$t = t_0, \; x = x_0. \tag{2}$$

Вектор-функция $x = \varphi(t)$ решает эту задачу, поэтому $\varphi(t)$ при $t \in (a,b)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau)) d\tau, \tag{3}$$

то есть

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{4}$$

Доопределим по непрерывности функцию $\varphi(t)$ при $t = b$, положив $\varphi(b) = \xi$. Переходя в (4) к пределу при $t \to b$, убеждается в том, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (3) при $t \in (a,b]$, и следовательно, решение системы (1) при $t \in (a,b]$.

Поставим задачу Коши

$$t = b, \; x = \xi. \tag{5}$$

Функция $x = \varphi(t)$ есть решение задачи Коши (1), (5) при $t \in (a,b]$, поскольку $\varphi(b) = \xi$. С другой стороны, по теореме существования решения, существует $h > 0$ такое, что при $|t - t_0| \le h$ определено решение $x = \psi(t)$ задачи Коши (1), (5). Мы можем считать, что $h < b - a$, уменьшив h, если это необходимо. Таким образом, $a < b - h < b < b + h$.

На отрезке $[b-h, b]$ определены два решения задачи Коши (1), (5): $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, и по теореме единственности $\varphi(t) = \psi(t)$ при $t \in [b-h, b]$.

Положим

$$u(t)=\begin{cases}\varphi(t), \ \textit{если} \ t\in(a,b],\\ \psi(t), \ \textit{если} \ t\in[b-h,b+h].\end{cases}$$

Такое определение корректно, $x=u(t)$ – продолжение решения $x=\varphi(t)$ вправо до $b+h$. Теорема доказана.

Сформулируем аналогичную теорему для продолжения решения влево за точку a.

Теорема 2. Для того, чтобы решение $x=\varphi(t)$ системы (1), определенное на интервале (a,b), было продолжимо влево за a, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{t\to a+0}\varphi(t)=\zeta$, и точка (a,ζ) принадлежала G.

Максимально продолженное решение.

Теорема 3. Пусть решение $x=\varphi(t)$ системы (1) определено на интервале (a,b), и $b<+\infty$. Тогда существует такое $\beta\ge b$, что на интервале (a,β) определено решение $x=u(t)$, которое является продолжением $x=\varphi(t)$ вправо до β, и при этом $x=u(t)$ не может быть продолжено вправо за β.

Доказательство теоремы 3. Если решение $x=\varphi(t)$ непродолжимо вправо за b, то полагаем $\beta=b$.

Пусть $x=\varphi(t)$ продолжимо вправо за b.

Обозначим через $x=u_{\bar b}(t)$ решение системы (1), которое является продолжением решения $x=\varphi(t)$ вправо до $\bar b>b$, а через B – множество таких $\bar b>b$, что решение $x=\varphi(t)$ продолжимо вправо до $\bar b$.

Положим $\beta=\sup B$ (может оказаться, что $\beta=+\infty$).

Очевидно: если $\bar b\in B$, и $b<\tilde b<\bar b$, то и $\tilde b\in B$.

По определению супремума, для любого t такого, что $b\le t<\beta$, найдется $\bar b\in B$, лежащее между t и β: $t<\bar b\le\beta$. И для всех $t\in(a,\bar b)$ определено решение $x=u_{\bar b}(t)$. Положим $u(t)=u_{\bar b}(t)$. Покажем, что такое определение корректно, то есть значение $u(t)$ не зависит от выбора $\bar b$.

Пусть существуют две точки $\bar{b}$ и $\tilde{b}$ из множества B, такие, что $b \le t < \bar{b} < \beta$ и $b \le t < \tilde{b} < \beta$. Не умаляя общности считаем, что $\tilde{b} < \bar{b}$. Тогда $\left(a,\tilde{b}\right) \subset \left(a,\bar{b}\right)$, и решения $u_{\tilde{b}}(t)$, $u_{\bar{b}}(t)$ являются продолжениями решения $x=\varphi(t)$ на интервалы $\left(a,\tilde{b}\right)$ и $\left(a,\bar{b}\right)$ соответственно. При этом $u_{\tilde{b}}(t) \equiv u_{\bar{b}}(t)$ на интервале $\left(a,\tilde{b}\right)$ в силу единственности решения. Это означает, что $u(t)=u_{\tilde{b}}(t)=u_{\bar{b}}(t)$.

Покажем, что $x=u(t)$ – решение системы (1), определенное на интервале (a,β). Действительно, $u(t)$ для любого $t\in(a,\beta)$ совпадает в некоторой окрестности точки t с решением $u_{\bar{b}}(t)$ для некоторого $\bar{b}$, принадлежащего интервалу (t,β).

Таким образом, решение $x=u(t)$ определено при $t\in(a,\beta)$ и является продолжением решения $x=\varphi(t)$ вправо до β.

Осталось доказать, что решение $x=u(t)$ непродолжимо вправо за β.

Если $\beta=+\infty$, то это по определению так.

Если $\beta<+\infty$, то допустим вопреки нашему утверждению, что $x=u(t)$ продолжимо вправо за β до $\bar{\beta}>\beta$. Тогда по определению, существует решение $x=\bar{u}(t)$ системы (1), определенное на интервале $\left(a,\bar{\beta}\right)$, такое, что $u(t)=\bar{u}(t)$ при $t\in(a,\beta)$. И, следовательно, решение $x=\varphi(t)$ продолжимо вправо до $\bar{\beta}$, то есть $\bar{\beta}\in B$, что противоречит определению супремума множества B. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Пусть решение $x=\varphi(t)$ системы (1) определено на интервале (a,b), и $a>-\infty$. Тогда существует такое $\alpha\le a$, что на интервале (α,b) определено решение $x=v(t)$, которое является продолжением $x=\varphi(t)$ влево до α, и при этом решение $x=v(t)$ не может быть продолжено влево за α.

Следствием из теорем 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Пусть решение $x=\varphi(t)$ системы (1) определено на интервале (a,b). Тогда существуют $\alpha\le a$ и $\beta\ge b$ такие, что на интервале (α,β)

определено решение $x=\psi(t)$ системы (1), которое непродолжимо влево за α и непродолжимо вправо за β, и $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на интервале (a,b).

Доказательство теоремы 5. Если $b<+\infty$, то, согласно теореме 3, существует такое $\beta\geq b$, что на интервале (a,β) определено решение $x=u(t)$, которое непродолжимо вправо за β, и является продолжением решения $x=\varphi(t)$ вправо до β.

Если $b=+\infty$, то полагаем $\beta=+\infty$, и $u(t)=\varphi(t)$ при $t\in(a,\beta)$.

Если $a>-\infty$, то, согласно теореме 4, существует такое $\alpha\leq a$, что на интервале (α,b) определено решение $x=v(t)$, которое непродолжимо влево за α, и является продолжением решения $x=\varphi(t)$ влево до α.

Если $a=-\infty$, то полагаем $\alpha=-\infty$, и $v(t)=\varphi(t)$ при $t\in(\alpha,b)$.

Положим

$$\psi(t)=\begin{cases} u(t), \ \textit{если} \ t\in(a,\beta), \\ v(t), \ \textit{если} \ t\in(\alpha,b). \end{cases}$$

Такое определение корректно, поскольку $v(t)\equiv\varphi(t)\equiv u(t)$ на интервале (a,b). Функция $x=\psi(t)$ - решение системы (1), которое, согласно теоремам 3 и 4, не может быть продолжено ни влево за α, ни вправо за β. Кроме того, $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на (a,b). Теорема доказана.

Определение 3. Если решение $x=\psi(t)$ системы (1), определенное на интервале (α,β), не может быть продолжено ни влево за α, ни вправо за β, то это решение называется *максимально продолженным*, а интервал (α,β) называется *максимальным промежутком задания* решения $x=\psi(t)$.

Таким образом, каждой точке (t_0,x_0) области G ставится в соответствие интервал (α,β) такой, что на этом интервале определено максимально продолженное решение задачи Коши (1), (2).

§7. Поведение решений при приближении к границе максимального промежутка задания.

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, вектор-функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$.

Пусть область G ограничена, $\bar{G}$ – замыкание G, а ∂G – граница G, $\partial G = \bar{G} \setminus G$.

Теорема 1. Пусть функция $X(t,x)$ ограничена в G.

Если решение $x = \varphi(t)$ системы (1), определенное на интервале (a,b), $b < +\infty$, не продолжимо вправо за b, то существует предел $\lim\limits_{t \to b-0} \varphi(t) = \xi$, и $(b,\xi) \in \partial G$.

Доказательство теоремы 1. По условию теоремы функция $X(t,x)$ ограничена в G, то есть существует $M > 0$ такое, что $\|X(t,x)\| \le M$ для всех $(t,x) \in G$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и положим $\delta = \min(b-a,\, \varepsilon/M)$.

Пусть $t_1, t_2 \in (b-\delta, b)$, $x_1 = \varphi(t_1)$, тогда $x = \varphi(t)$ решает задачу Коши $t = t_1$, $x = x_1$, и при $t \in (a,b)$

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} X(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau .$$

В частности,

$$\varphi(t_2) = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau ,$$

следовательно,

$$\|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau \right\| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} \|X(\tau, \varphi(\tau))\|\,d\tau \right| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} M d\tau \right| = M\,|t_2 - t_1|. \tag{2}$$

Заметим, что $|t_2 - t_1| < \delta$, поскольку $t_1, t_2 \in (b-\delta, b)$, и из неравенства (2) следует, что

$$\left\|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\right\|<M\delta\le\varepsilon .$$

Из последнего неравенства, в силу произвольности ε, следует существование предела $\lim\limits_{t\to b-0}\varphi(t)=\xi$, согласно критерию Коши для последовательностей.

Точка $(t,\varphi(t))$ принадлежит множеству G при всех $t\in(a,b)$, поэтому предельная точка (b,ξ) принадлежит $\bar{G}$. Если бы точка (b,ξ) принадлежала G, то, согласно теореме 1 предыдущего параграфа, решение $x=\varphi(t)$ было бы продолжимо вправо за b, что противоречит условию. Поэтому $(b,\xi)\in\bar{G}\setminus G=\partial G$. Теорема доказана.

Справедлива аналогичная теорема для левого конца промежутка.

Теорема 2. Пусть функция $X(t,x)$ ограничена в G.

Если решение $x=\varphi(t)$ системы (1), определенное на интервале (a,b), $a>-\infty$, не продолжимо влево за a, то существует предел $\lim\limits_{t\to a+0}\varphi(t)=\zeta$, и $(a,\zeta)\in\partial G$.

Теорема 3 *(теорема о выходе максимально продолженного решения из компакта)*. Пусть $x=\varphi(t)$ – максимально продолженное решение системы (1), определенное на интервале (α,β), $\beta<+\infty$. Тогда для любого замкнутого ограниченного множества $D\subset G$ существует $\delta>0$ такое, что $(t,\varphi(t))\notin D$ для всех $t\in(\beta-\delta,\beta)$.

Доказательство теоремы 3. Доказываем теорему методом от противного. Предположим, что существует замкнутое ограниченное множество $D\subset G$, и для этого множества при любом $\delta>0$ найдется $t\in(\beta-\delta,\beta)$ такое, что $(t,\varphi(t))\in D$.

Выберем произвольную последовательность $\{\delta_j\}_{j=1}^{+\infty}$, $0<\delta_{j+1}<\delta_j$, $\delta_1<\beta-\alpha$, $\delta_j\underset{j\to+\infty}{\to}0$. Тогда для каждого δ_j существует $t_j\in(\beta-\delta_j,\beta)$ такое, что $(t_j,\varphi(t_j))\in D$.

Множество D ограничено и замкнуто, поэтому у последовательности точек $\left\{\left(t_j,\varphi\left(t_j\right)\right)\right\}_{j=1}^{+\infty}\subset D$ существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{\left(t_k,\varphi\left(t_k\right)\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, при этом

$$t_k \underset{k\to+\infty}{\to} \beta\,,\ \ \varphi\left(t_k\right) \underset{k\to+\infty}{\to} \xi\,, \tag{3}$$

и $\left(\beta,\xi\right)\in D$.

$D\subset G$, поэтому $\left(\beta,\xi\right)\in G$, следовательно, существуют $a,b\in R$, $a>0$, $b>0$, такие, что

$$D_0=\left\{\left(t,x\right):\left|t-\beta\right|\le 2a,\left\|x-\xi\right\|\le 2b\right\}\subset G\,.$$

Функция $X\left(t,x\right)$ непрерывна на компакте D_0, поэтому существует $M>0$ такое, что $\left\|X\left(t,x\right)\right\|\le M$ для всех $\left(t,x\right)\in D_0$.

Положим $h=\min\left(a,\,b/M\right)$. Из условий (3) следует, что существует k_1 такое, что для всех $k>k_1$

$$\beta-h<t_k<\beta\,, \tag{4}$$

и существует k_2 такое, что для всех $k>k_2$

$$\left\|\varphi\left(t_k\right)-\xi\right\|<b\,, \tag{5}$$

Выберем и зафиксируем $k>\max\left(k_1,k_2\right)$, для этого k справедливы неравенства (4) и (5).

Определим множество

$$D_1=\left\{\left(t,x\right):\left|t-t_k\right|\le a,\left\|x-\varphi\left(t_k\right)\right\|\le b\right\}.$$

Покажем, что $D_1\subset D_0$.

Пусть $\left(t,x\right)\in D_1$, то есть

$$\left|t-t_k\right|\le a\,,\ \ \left\|x-\varphi\left(t_k\right)\right\|\le b\,. \tag{6}$$

Из неравенств (4) и (6) следует:

$$\left|t-\beta\right|\le\left|t-t_k\right|+\left|t_k-\beta\right|\le h+a\le 2a\,, \tag{7}$$

из (5) и (6) следует:

$$\left\|x-\xi\right\|\le\left\|x-\varphi\left(t_k\right)\right\|+\left\|\varphi\left(t_k\right)-\xi\right\|\le b+b=2b\,, \tag{8}$$

неравенства (7), (8) доказывают, что $(t,x)\in D_0$. И мы показали, что $D_1 \subset D_0$.

Поэтому $\|X(t,x)\| \le M$ и для всех $(t,x)\in D_1$.

Поставим задачу Коши

$$t = t_k,\ \ x = \varphi(t_k). \tag{9}$$

Решение $x=\varphi(t)$ определено при $t\in(\alpha,\beta)$ и удовлетворяет задаче (9).

Из неравенства (4) следует, что

$$\alpha < t_k < \beta < t_k + h, \tag{10}$$

С другой стороны, в силу выбора h и определения множества D_1, из теоремы 2 третьего параграфа следует, что на отрезке $[t_k - h, t_k + h]$ существует решение $x=\psi(t)$ задачи Коши (1), (9).

Два решения $x=\varphi(t)$ и $x=\psi(t)$ определены при $t\in[t_k,\beta)$ и решают одну задачу Коши, и по теореме единственности $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на $[t_k,\beta)$.

Определим следующую вектор-функцию:

$$u(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ \textit{если}\ \ t\in(\alpha,\beta),\\ \psi(t),\ \textit{если}\ \ t\in[t_k,t_k+h].\end{cases}$$

Функция $x=u(t)$ – решение системы (1). Из неравенства (10) следует, что $x=u(t)$ есть продолжение решения $x=\varphi(t)$ вправо за точку β, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогичная теорема верна и для левого конца промежутка.

Теорема 4. Пусть $x=\varphi(t)$ – максимально продолженное решение системы (1), определенное на интервале (α,β), $\alpha > -\infty$. Тогда для любого замкнутого ограниченного множества $D \subset G$ существует $\delta > 0$ такое, что $(t,\varphi(t)) \notin D$ для всех $t\in(\alpha,\alpha+\delta)$.

§8. Системы, сравнимые с линейными.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $X(t,x) = (X_1(t,x), X_2(t,x), ..., X_n(t,x))^T$, вектор-функция $X(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$,

$$G = \{(t,x) : t \in (a,b), \|x\| < +\infty\},$$

при этом может быть $a = -\infty$ или $b = +\infty$.

Определение. Система (1) называется в области G *системой, сравнимой с линейной*, если существуют функции $M(t)$ и $N(t)$, непрерывные и неотрицательные на интервале (a,b), такие, что для всех $(t,x) \in G$

$$\|X(t,x)\| \le M(t)\|x\| + N(t). \tag{2}$$

Теорема 1. Если (1) – система, сравнимая с линейной в области G, то максимальный промежуток задания любого решения системы (1) равен (a,b)

Доказательство теоремы 1. Допустим, напротив, что существует решение $x = \varphi(t)$ системы (1), максимальный промежуток задания этого решения равен (α, β), и (α, β) не совпадает с (a,b). Из определения области G следует, что $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$. Для определенности считаем, что $\beta < b$.

Пусть $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 = \varphi(t_0)$, тогда $x = \varphi(t)$ есть решение задачи Коши $t = t_0$, $x = x_0$, и для всех $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau))d\tau. \tag{3}$$

Оценим $\varphi(t)$ при $t \in [t_0, \beta)$.

Заметим, что $\beta < +\infty$, поскольку $\beta < b \le +\infty$. Из (3) получаем:

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \left\|\int_{t_0}^{t} X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)d\tau\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int_{t_0}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)\right\|d\tau,$$

и из неравенства (2) следует, что

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int_{t_0}^{t} M(\tau)\left\|\varphi(\tau)\right\|d\tau + \int_{t_0}^{t} N(\tau)d\tau. \tag{4}$$

$[t_0,\beta] \subset (a,b)$, поскольку $a \le \alpha < t_0 < \beta < b$. Функция $M(t)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[t_0,\beta]$, поэтому существует константа $L > 0$ такая, что $0 \le M(t) \le L$ для всех $t \in [t_0,\beta]$. И из (4) вытекает неравенство

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int_{t_0}^{\beta} N(\tau)d\tau + L\int_{t_0}^{t}\left\|\varphi(\tau)\right\|d\tau \tag{5}$$

при $t \in [t_0,\beta)$.

Обозначим в последнем неравенстве константу $\left\|x_0\right\| + \int\limits_{t_0}^{\beta} N(\tau)d\tau$ через c, и перепишем (5) в виде

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le c + L\int_{t_0}^{t}\left\|\varphi(\tau)\right\|d\tau.$$

Таким образом, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на промежутке $[t_0,\beta)$ условиям леммы Гронуолла, и для $\varphi(t)$ верно неравенство

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le ce^{L(t-t_0)},$$

следовательно,

$$\left\|\varphi(t)\right\| \le ce^{L(\beta-t_0)} \tag{6}$$

для всех $t \in [t_0,\beta)$.

Множество $D = \left\{(t,x) : t \in [t_0,\beta], \left\|x\right\| \le ce^{L(\beta-t_0)}\right\}$ замкнуто, ограничено и содержится в G. Из (6) следует, что $\left(t,\varphi(t)\right) \in D$ при $t \in [t_0,\beta)$, и это противоречит теореме 3 предыдущего параграфа о выходе максимально продолженного решения из компакта. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t), \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t), \end{cases} \qquad (7)$$

где все функции $p_{jk}(t)$, $q_j(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$.

Определение. Система (7) называется *линейной системой*.

Покажем, что линейная система удовлетворяет условиям теоремы 1 в области G.

Система (7) есть система (1), где

$$X_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k + q_j(t).$$

Функции $X_j(t,x)$ непрерывны в области G, и удовлетворяют условию Липшица по x локально, поскольку в G существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_j(t,x)}{\partial x_k} = p_{jk}(t)$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$.

Положим

$$p(t) = \max_{j,k=1,...,n}\left(\left|p_{jk}(t)\right|,\left|q_j(t)\right|\right).$$

Заметим, что функция $p(t)$ непрерывна и неотрицательна на интервале (a,b).

Тогда для любого $j \in \{1,2,...,n\}$

$$\left|X_j(t,x)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|p_{jk}(t)\right|\left|x_k\right| + \left|q_j(t)\right| \le p(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right| + 1\right). \qquad (8)$$

Поскольку $\left|x_k\right| \le \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ для всех $k=1,2,...,n$, то из (8) следует, что

$$\left|X_j(t,x)\right| \le p(t)\left(n\|x\| + 1\right),$$

и

$$\|X(t,x)\| = \sqrt{X_1^2(t,x) + \ldots + X_n^2(t,x)} \le$$
$$\le \sqrt{np^2(t)\left(n\|x\|+1\right)^2} = n\sqrt{n}\,p(t)\|x\| + \sqrt{n}\,p(t). \qquad (9)$$

Полагая в (9) $M(t) = n\sqrt{n}\,p(t)$, $N(t) = \sqrt{n}\,p(t)$, получим оценку (2) для правой части системы (7). Таким образом, линейная система (7) является системой, сравнимой с линейной, и для нее верна теорема 1.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Максимальный промежуток задания любого решения линейной системы (7) равен (a,b).

Задачи для самостоятельного решения

1. Сведите задачу Коши для уравнения $y''' = \dfrac{ye^x \sin x - xy''}{\left(y' - x\right)^a}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$, к задаче для системы нормального вида. При каких a решение полученной задачи Коши существует и единственно?

2. Решите интегральные уравнения:

   а). $x(t) = \int\limits_0^t x(s)ds + t + 1$;

   б). $\int\limits_0^t sx(s)ds = \dfrac{3}{4}t\int\limits_0^t x(s)ds$.

3. Докажите, что любое решение уравнения $\dot{x} = tg(tx)$ является решением интегрального уравнения $\int\limits_0^x \exp\left(s^2/2\right)\cdot\cos(ts)ds = c\exp\left(t^2/2\right)$, и наоборот, каждое решение интегрального уравнения является решением дифференциального.

4. Постройте последовательные приближения Пикара $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ к решению задачи Коши:

   а) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$;

   б) $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$;

   в) $y' = 1 + x\sin y$, $y(\pi) = 2\pi$.

5. Постройте нулевое, первое и второе последовательные приближения Пикара к решению с указанными начальными данными для следующих систем:

   а) $\begin{cases} y' = 2x + z, \\ z' = y, \end{cases}$ $y(1) = 1,\ z(1) = 0$;

   б) $\begin{cases} y' = z, \\ z' = y^2, \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 2$.

6. Укажите какой-либо отрезок, на котором существует решение задачи Коши:

   а) $y' = 2y^2 - x$, $y(1) = 1$;

   б) $y' = x + e^y$, $y(1) = 0$;

   в) $\begin{cases} y' = z^2, \\ z' = y^2, \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 2$.

7. Дана система уравнений $\dot{x} = X(t,x)$, где $X(t,x) \in C(G)$, G – область в R^{n+1}. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность решений системы, определенных на общем отрезке $[a,b]$, которая равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции $\varphi(t)$. Докажите, что $\varphi(t)$ - тоже решение исходной системы, определенное на $[a,b]$.

8. Пусть $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ – конечный набор решений дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t,x)$, где $f(t,x) \in C(R^2)$. Предположим, что все $\varphi_k(t)$ $(k = 1,2,...,n)$ определены на общем промежутке $\langle a,b \rangle$. Докажите, что функции $\psi_1(t) = \min\limits_{k=1,...,n}\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$, $\psi_2(t) = \max\limits_{k=1,...,n}\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ тоже будут решениями исходного уравнения на $\langle a,b \rangle$.

9. Дано уравнение $\dot{x} = f(t,x)$, где $f(t,x) \in C(R^2)$. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ - равномерно ограниченная последовательность его решений, определенных на общем промежутке $\langle a,b \rangle$. Докажите, что функции $\psi_1(t) = \inf\limits_{n \in N}\{\varphi_n(t)\}$ и $\psi_2(t) = \sup\limits_{n \in N}\{\varphi_n(t)\}$ тоже будут решениями исходного уравнения на $\langle a,b \rangle$.

10. Дана система дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(t,x)$, где $(t,x) \in G \subset R^{n+1}$, $X(t,x) \in C(G)$ и $X(t,x) \in Lip_x^{loc}(G)$, G – область. Пусть последовательность точек $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^{+\infty} \subset G$ сходится к точке

$(t_0, x_0) \in G$. Обозначим через $\varphi_k(t)$ решение исходной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_k(t_k) = x_k$. Покажите, что

а). существуют такое число $h > 0$, что все решения $\varphi_k(t)$ определены на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$;

б). последовательность $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ сходится к некоторой функции $\varphi_0(t)$;

в). функция $\varphi_0(t)$ является решением исходной системы с начальным условием $\varphi_0(t_0) = x_0$.

Доказав эти свойства решений, вы покажете, что решение системы непрерывно зависит от начальной точки.

11. Дано уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, где $f(t, x) \in C(G)$, $G \subset R^2$, G - область. Докажите: если через точку $(t_0, x_0) \in G$ проходит две различные интегральные кривые уравнения, то через эту точку проходит бесконечно много интегральных кривых.

12. Дано уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, где функция $f(t, x)$ непрерывна и ограничена на множестве $D = [a, b] \times R$. Поставим задачу Коши $x(t_0) = x_0$, где $(t_0, x_0) \in D$. Докажите, что любое решение задачи Коши определено на $[a, b]$, и существуют два решения $x = \varphi_*(t)$ и $x = \varphi^*(t)$ этой задачи, обладающие следующим свойством: для любого решения $x = \varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ выполнено неравенство $\varphi_*(t) \le \varphi(t) \le \varphi^*(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

    Решения $\varphi_*(t)$ и $\varphi^*(t)$ называются *нижним* и *верхним* решениями задачи Коши $x(t_0) = x_0$ Множество, заключенное между графиками этих решений, называется *интегральной воронкой* или *сектором неединственности*. (Если для уравнения выполнено условие единственности решений, то, разумеется, $\varphi_*(t) \equiv \varphi^*(t)$.)

13. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделите области на плоскости (x, y), в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения:

    а) $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$;

б) $(y-x)y'=y\ln x$;

в) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

14. При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений:

а) $(x+1)y''=y+\sqrt{y}$;

б) $(x-y)y'y'''=\ln(xy)$;

в) $y''-yy'''=\sqrt[5]{y'-x}$.

15. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости (x,y) пересекаться в некоторой точке (x_0,y_0)?

а) для уравнения $y'=x+y^2$;

б) для уравнения $y''=x+y^2$.

16. Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости (x,y) касаться друг друга в некоторой точке (x_0,y_0)?

а) для уравнения $y'=x+y^2$;

б) для уравнения $y''=x+y^2$;

в) для уравнения $y'''=x+y^2$.

Сколько существует решений уравнения $y^{(n)}=x+y^2$ $(n\in N)$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0)=1,\ y'(0)=2$?

17. Для уравнения $y''=(y')^2y^{-1}-1$ известны два решения: $y_1(x)=1+\sin x$ и $y_2(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1\right)^2$. Как это согласуется с теоремой единственности решений?

18. Сколько решений уравнения $y^{(n)}=f(x,y)$, где $f(x,y)\in C\left(R^2\right)$ и $f_y'(x,y)\in C\left(R^2\right)$, $n\in N$, проходит через точку (x_0,y_0) по заданному направлению, образующему угол α с осью Ox?

19. При каких $n \in N$ уравнение $y^{(n)} = f(x,y)$, где $f(x,y) \in C\left(R^2\right)$ и $f'_y(x,y) \in C\left(R^2\right)$, может иметь среди своих решений две функции: $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x + x^4$?

20. При каких $n \in N$ уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = \sin x$?

21. Укажите значения параметров α, a и b, при которых существует единственное решение задачи Коши
$\alpha(t+1)y''' + 2\alpha y'' - (\alpha - 1)x^2 y\, tgx = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$, $y(a) = 1, y'(a) = b, y''(a) = \alpha$.
На какой максимальный интервал можно продолжить решение этой задачи в случае $\alpha = -1$, $a = -2$, $b = -3$?

22. Сколько решений имеет указанная задача в зависимости от значения параметра a?
а) $\left(a^3 - a\right)y''' + \left(a^2 + 2a\right)y'' + y' - 2y = x + a$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;
б) $\left(1 - a^2\right)\left(ay''' - y''\right) = ay' + y^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

23. Докажите, что решение задачи Коши $y' = x^3 - y^3$, $y(x_0) = y_0$, где (x_0, y_0) – произвольная точка из R^2, продолжимо на луч $[x_0, +\infty)$.

24. Докажите, что решение задачи Коши $y' = arctg\, x - y^3$, $y(x_0) = y_0$, где (x_0, y_0) – произвольная точка из R^2, продолжимо на луч $[x_0, +\infty)$ и ограничено на указанном луче.

25. Существует ли при $-\infty < x < +\infty$ решение задачи Коши $y' = e^{-y}\sin\left(e^y\right)$, $y(0) = 0$?

26. Для задачи $\left(2 - x^2\right)y' - xy^2 = 0$, $y(x_0) = y_0$, где $x_0 = \sqrt{2 + 3e^{-1}}$, $y_0 = -2$, определите максимальный интервал существования решения, нарисуйте график решения.

27. При каких a каждое решение уравнения продолжимо на всю числовую ось $-\infty < x < +\infty$?

а) $y' = |y|^a$;

б) $y' = \left(y^2 + e^x\right)^a$;

в) $y' = |y|^{a-1} + \left|x\sqrt[3]{y}\right|^{2a}$.

28. Пусть на всей плоскости (x, y) функции $f(x, y)$, $f_y'(x, y)$ и $k(x)$ непрерывны, и $f_y'(x, y) \le k(x)$. Докажите, что решение уравнения $y' = f(x, y)$ с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует на промежутке $[x_0, +\infty)$.

29. Докажите, что любое решение уравнения $\dot{x} = \left(1 + t^2 + x^2\right)^{-1}$ продолжимо на всю числовую ось и имеет горизонтальные асимптоты при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

30. а). Докажите, что решение задачи Коши $y' = \exp\left(-x^2\right) - y^3$, $y(x_0) = y_0$, где (x_0, y_0) – произвольная точка из R^2, продолжимо на луч $[x_0, +\infty)$ и ограничено на этом луче.
б). Докажите, что только одно решение данного уравнения определено и ограничено на всей числовой оси.

31. Покажите, что решение задачи Коши $\dot{x} = -(1+t)x^2 + t$, $x(-1) = 1$, определено на всей числовой оси и стремится к единице при $t \to +\infty$.

32. Дано уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, где $f(t, x) \in C\left(R^2\right)$ и $f(t, x) \in Lip_x^{loc}\left(R^2\right)$. Пусть $x = \varphi(t)$ – максимально продолженное решение уравнения, определенное на интервале (α, β). Докажите: если α и β - конечные, то прямые $x = \alpha$ и $x = \beta$ являются вертикальными асимптотами для графика решения $x = \varphi(t)$.

33. Докажите, что решение уравнения Риккати $y' = y^2 + x$ с начальным условием $y(0) = 0$ непродолжимо на отрезок $[0, 3]$.

34. Докажите, что для любого решения $y=\varphi(x)$ уравнения Риккати $y'=y^2+x$ существует конечное число x_0 такое, что $\varphi(x) \underset{x\to x_0-0}{\to} +\infty$, то есть прямая $x=x_0$ – асимптота графика $\varphi(x)$. Докажите, что разным решениям соответствуют разные асимптоты.

35. Дано уравнение $\dot{x}=ax^{2k+1}+f(t)$, где $a\neq 0$, $k\in N$, $f(t)\in C(R)$ и $f(t)$ – T-периодическая функция. Докажите, что существует только одно решение уравнения, продолжимое на всю числовую ось, и это решение является T-периодическим.

36. Дано уравнение $\dot{x}=f(t,x)$, где $f(t,x)\in C^2\left(R^2\right)$, $f(t,x)\geq 0$, $f'_x(t,x)\leq 0$ и $f'_t(t,x)\leq 0$ для всех $(t,x)\in R^2$. Докажите, что для любой точки $(t_0,x_0)\in R^2$ решение уравнения $x=\varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ продолжимо на промежуток $[t_0,+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\varphi(t)$.

37. Докажите, что любое решение дифференциального уравнения $\dot{x}=P(x)$, где $P(x)$ – многочлен нечетной степени, может быть неограниченно продолжено либо вправо до $+\infty$, либо влево до $-\infty$, либо на всю числовую ось. Указание: достаточно доказать, что любое решение уравнения ограничено либо сверху, либо снизу.

38. Дано уравнение $\dot{x}=f(t,x)$, где $f(t,x)\in C(D)$ и $f(t,x)\in Lip_x^{loc}(D)$, $D=[-A,A]\times R$. Пусть $x=\varphi(t)$ – решение уравнения с начальными данными $(0,y_0)$, и это решение ограничено снизу и непродолжимо на отрезок $[0,a]$, где $0<a<A$. Докажите, что все решения уравнения с начальными данными $(0,\bar{y})$, где $\bar{y}\geq y_0$ тоже непродолжимы на $[0,a]$.

39. Дана система уравнений $\dot{x}=X(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы существования решения в окрестности каждой точки $(t,x)\in R^{n+1}$. Пусть в каждой точке области $\{(t,x):|x|>b\}$ верно неравенство $x\cdot X(t,x)\leq k(t)|x|^2$, где $x\cdot X(t,x)$ - скалярное произведение векторов, а функция $k(t)$ - непрерывна. Докажите, что

решение системы $x=\varphi(t)$ с любым начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ существует на промежутке $[t_0,+\infty)$.

40. Дана система уравнений $\dot{x}=X(t,x)$, где $X(t,x)\in C(G)$, G - область в R^{n+1}. Пусть $x=\varphi(t)$ – решение системы, определенное на интервале (a,b), и для некоторой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такой, что $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} b-0$, существует конечный предел $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi(t_k)=\xi$, причем $(b,\xi)\in G$. Докажите, что тогда существует предел $\lim\limits_{t\to b-0}\varphi(t)$.

41. Дано уравнение $\dot{x}=f(t,x)$, где $f(t,x)\in C(G)$ и $f(t,x)\in Lip_x^{loc}(G)$, $G\subset R^2$, G – область. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ – два интеграла этого уравнения, определенные на G. Докажите, что для любой точки $(t_0,x_0)\in G$ существует скалярная функция $F(s)$ такая, что в некоторой окрестности точки (t_0,x_0) выполнено тождество $u_2(t,x)=F(u_1(t,x))$.

42. Для данных систем дифференциальных уравнений проверьте, являются ли функции φ_1, φ_2 интегралами этих систем.

а) $\begin{cases}\dot{x}=\left(x^2-t\right)y^{-1},\\ \dot{y}=-x,\end{cases}$ $\varphi_1=t^2+2xy$, $\varphi_2=x^2-ty$;

б) $\begin{cases}\dot{x}=xy,\\ \dot{y}=x^2+y^2,\end{cases}$ $\varphi_1=x\ln y-x^2y$, $\varphi_2=y^2x^{-2}-2\ln x$.

43. Рассмотрим дифференциальное уравнение Ньютона $m\ddot{x}=F(x)$, описывающее движение материальной точки массы m под действием силы F, где $F\in C^1(R)$. Здесь x – координата точки, $\dot{x}$ – мгновенная скорость, $\ddot{x}$ – ускорение материальной точки. Данное уравнение – это второй закон Ньютона, записанный в дифференциальной форме. Считается, что сила $F=F(x)$ зависит только от x (то есть система консервативная).

а). Введите новую переменную $v=\dot{x}$ и запишите уравнение Ньютона в виде нормальной системы дифференциальных уравнений с неизвестными функциями x и v.

б). Покажите, что функция $E(x,v)=\frac{1}{2}mv^2-\int\limits_{x_0}^{x}F(s)ds$ – интеграл для полученной системы. $E(x,v)$ представляет собой интеграл полной энергии системы, где $K(x,v)=\frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия, а $\Pi(x,v)=-\int\limits_{x_0}^{x}F(s)ds$ – потенциальная. То, что $E(x,v)$ - интеграл системы, означает, что полная энергия не меняется при движении точки (в соответствии с законом сохранения энергии).

в). Покажите, что для любого другого интеграла системы $u(x,v)$ и любой точки $(x_0,v_0)\in R^2$ существует скалярная функция $H(s)$ такая, что в некоторой окрестности (x_0,v_0) выполнено тождество $u(x,v)=H\left(E(x,v)\right)$ (то есть любой интеграл системы, не зависящий от t, выражается в виде функции от интеграла полной энергии).

44. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\ddot{x}=-\sin x$, которое описывает движение математического маятника (здесь x – угол отклонения нити, на которой подвешен груз, от нижнего устойчивого положения равновесия $x=0$). (Это уравнение является частным случаем уравнения Ньютона, о котором идет речь в задаче № 43.)
Введите новую переменную $v=\dot{x}$ и запишите уравнение маятника в виде нормальной системы дифференциальных уравнений с неизвестными функциями x и v. С помощью интеграла полной энергии $E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+\int\limits_{x_0}^{x}\sin s\,ds$ покажите, что уравнение маятника имеет решение $x(t)$, обладающее свойством: $x(t)\underset{t\to+\infty}{\to}\pi$, $\dot{x}(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ (то есть уравнение имеет решение, которое асимптотически приближается к положению верхнего неустойчивого равновесия $x=\pi$).

Список литературы для самостоятельной работы

Основная литература

1. Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., Плисс В.А., Родионова А.А. Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений. Учебно-методическое пособие. Опубликовано в репозитории СПбГУ. 2021.
2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: «Лань». 2011. https://proxy.library.spbu.ru:2190/book/1542
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-пресс, 1998.

Дополнительная литература

1. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. 2005.
2. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Издание 7-е, дополненное. СПб.: «Лань», 2002.
3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Минск, 1987.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1984.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.
6. Рейзинь Л.Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, 1971.
7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1978.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.
10. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.