Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = q(t), \qquad (1)$$

где $x^{(k)} = d^k x / dt^k$, все функции $p_k(t)$ и функция $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k = 1,2,\ldots,n$.

Если $q(t) \equiv 0$ на (a,b), то уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае уравнение (1) – *неоднородное*.

Перейдем от уравнения к системе по общему правилу.
Положим

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x},\ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3,\ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n,$$

и, как следует из (1),

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = -p_1(t)x_n - \ldots - p_{n-1}(t)x_2 - p_n(t)x_1 + q(t).$$

Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \ldots - p_1(t)x_n + q(t). \end{cases} \qquad (2)$$

Как показано в последнем параграфе второй главы, все решения этой системы продолжимы на интервал (a,b), поэтому и все решения уравнения (1) продолжимы на (a,b). В дальнейшем будем под решением уравнения (1) понимать решение, определенное на интервале (a,b).

Пусть $t_0 \in (a,b)$, $x_0 = (x_{10},\ldots,x_{n0})^T \in R^n$. Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом:

$$t = t_0, \;\; x_1 = x_{10}, \;\; x_2 = x_{20}, \;\; \ldots, \;\; x_n = x_{n0}, \tag{3}$$

и задача Коши для уравнения (1):

$$t = t_0, \;\; x = x_{10}, \;\; \dot{x} = x_{20}, \;\; \ldots, \;\; x^{(n-1)} = x_{n0}. \tag{4}$$

Решить задачу Коши (1), (4) означает: найти решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) такое, что $\varphi(t_0) = x_{10}$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_{20}$, …, $\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}$.

Правые части уравнений системы (2) непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x_k (для всех $k = 1, 2, ..., n$) в области

$$G = \left\{ (t, x_1, ..., x_n) : t \in (a, b), \; |x_k| < +\infty, \; k = 1, 2, ..., n \right\},$$

и, следовательно, любая задача Коши (2), (3) имеет единственное решение. Поэтому и задача Коши (4) для уравнения (1) имеет единственное решение, определенное на интервале (a, b).

Обозначим левую часть уравнения (1) через $L(x)$.

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}, \text{ где } p_0(t) \equiv 1, \; x^{(0)} = x.$$

Замечание. $L(x)$ есть линейный дифференциальный оператор:

$$L\big(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\big) = c_1 L\big(x_1(t)\big) + c_2 L\big(x_2(t)\big)$$

для любых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, определенных на (a, b), и произвольных констант c_1, c_2.

§1. Основное свойство решений линейного однородного уравнения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0. \tag{1}$$

Теорема. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ - решения уравнения (1). Тогда функция

$$\psi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \ldots + c_m \varphi_m(t),$$

где c_1, $c_2, \ldots$, c_m - произвольные постоянные числа, также есть решение уравнения (1) на (a,b).

Доказательство теоремы 1. $\varphi_j(t)$ - решение уравнения (1), это значит, что $L(\varphi_j(t)) \equiv 0$ на интервале (a,b) для всех $j = 1,2,\ldots,m$.

Следовательно,

$$L(\psi(t)) = L\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j L(\varphi_j(t)) = 0,$$

и $\psi(t)$ - решение уравнения (1). Теорема доказана.

§2. Линейно независимые функции.

Определение 1. Функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_n(t)$, непрерывные на интервале (a,b), называются *линейно зависимыми* на (a,b), если существуют постоянные c_1, $c_2, \ldots$, c_n, не все равные нулю, такие, что

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0 \tag{1}$$

на (a,b).

В противном случае функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_n(t)$ называются *линейно независимыми* на (a,b).

Иными словами, непрерывные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_n(t)$ линейно независимы на интервале (a,b), если из тождества (1) следует, что $c_k = 0$ для всех $k = 1,2,\ldots,n$.

Предположим, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_n(t)$ непрерывно дифференцируемы $(n-1)$ раз на интервале (a,b). Составим определитель

$$W(t) = W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) & \ldots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Определение 2. Определитель (2) называется *определителем Вронского* для системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ на интервале (a,b) или *вронскианом*.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ непрерывно дифференцируемы $(n-1)$ раз на интервале (a,b) и линейно зависимы. Тогда $W(t)\equiv 0$ на (a,b).

Доказательство теоремы 1. По условию теоремы, существуют такие постоянные c_1, $c_2,\dots,$ c_n, не все равные нулю, что на (a,b) выполнено тождество (1). Продифференцируем это тождество $(n-1)$ раз и составим систему тождеств:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0, \\ c_1\dot{\varphi}_1(t)+c_2\dot{\varphi}_2(t)+\ldots+c_n\dot{\varphi}_n(t)\equiv 0, \\ \ldots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+c_2\varphi_2^{(n-1)}(t)+\ldots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(t)\equiv 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для произвольного фиксированного $t\in(a,b)$ рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t)+z_2\varphi_2(t)+\ldots+z_n\varphi_n(t)=0, \\ z_1\dot{\varphi}_1(t)+z_2\dot{\varphi}_2(t)+\ldots+z_n\dot{\varphi}_n(t)=0, \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t)$ для функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ в точке $t\in(a,b)$. Согласно (3), система (4) имеет ненулевое решение $z_1=c_1$, $z_2=c_2,\dots,$ $z_n=c_n$, поэтому определитель $W(t)$ системы (4) равен нулю. Из произвольности t следует, что $W(t)\equiv 0$ на (a,b). Теорема доказана.

Замечание. Обратное к теореме 1 утверждение, вообще говоря, не верно. Это доказывает следующий пример.

Пример. Пусть $n=2$,

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}0, \; если \; -1<t\le 0,\\ t^2, \; если \; 0<t<1,\end{cases} \quad \varphi_2(t)=\begin{cases}t^2, \; если \; -1<t\le 0,\\ 0, \; если \; 0<t<1.\end{cases}$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - непрерывно дифференцируемые на интервале $(-1,1)$ функции,

$W(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=\begin{vmatrix}0 & t^2\\ 0 & 2t\end{vmatrix}$, если $-1<t\le 0$, и $W(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=\begin{vmatrix}t^2 & 0\\ 2t & 0\end{vmatrix}$, если $0<t<1$. Следовательно, $W(t)\equiv 0$ на $(-1,1)$.

Покажем, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независимы на $(-1,1)$.

Составим тождество

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)\equiv 0. \tag{5}$$

Положим сначала $t=1/2$ в (5), получим: $c_1=0$. Положим теперь $t=-1/2$ в (5), и получим: $c_2=0$. Таким образом, из тождества (5) следует, что $c_1=c_2=0$, и функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независимы на $(-1,1)$.

Рассмотрим теперь линейное однородное уравнение

$$L(x)=0, \tag{6}$$

где $L(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)}$, $p_0(t)\equiv 1$, $x^{(0)}=x$, функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b) для всех $k=1,2,...,n$.

Если $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ - решения уравнения (6), то верно более сильное утверждение, чем обратное к теореме 1.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ - решения уравнения (6).

Если существует точка $t_0\in(a,b)$ такая, что $W(t_0)=0$, то функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0) + z_2\varphi_2(t_0) + \ldots + z_n\varphi_n(t_0) = 0, \\ z_1\dot{\varphi}_1(t_0) + z_2\dot{\varphi}_2(t_0) + \ldots + z_n\dot{\varphi}_n(t_0) = 0, \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0) + \ldots + z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0) = 0$. Поэтому система (7) имеет ненулевое решение $z_1 = c_1$, $z_2 = c_2, \ldots, z_n = c_n$.

Положим

$$\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t). \tag{8}$$

$x = \psi(t)$ - решение уравнения (6), согласно основному свойству решений линейного однородного уравнения.

Поскольку c_1, $c_2, \ldots, c_n$ - решение системы (7), то

$$\psi(t_0) = 0,\ \dot{\psi}(t_0) = 0,\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

то есть $x = \psi(t)$ - решение задачи Коши

$$t = t_0,\ \ x = 0,\ \ \dot{x} = 0,\ \ \ldots,\ \ x^{(n-1)} = 0$$

для уравнения (6). Эту же задачу Коши решает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (6).

Из теоремы единственности следует, что $\psi(t) \equiv 0$ на интервале (a,b). И из (8) вытекает линейная зависимость функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, поскольку c_1, $c_2, \ldots, c_n$ - ненулевое решение системы (7). Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ - решения уравнения (6), $t \in (a,b)$. Тогда из теорем 1 и 2 следуют два утверждения.

Следствие 1. Если существует точка $t_0 \in (a,b)$ такая, что $W(t_0) = 0$, то $W(t) \equiv 0$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Следствие 2. Если существует точка $t_1 \in (a,b)$ такая, что $W(t_1) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b).

§3. Фундаментальная система решений.

Рассматриваем линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0, \qquad (1)$$

где $L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}$, $p_0(t) \equiv 1$, $x^{(0)} = x$, функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b) для всех $k = 1,2,...,n$.

Определение 1. Набор $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, состоящий из n линейно независимых решений уравнения (1), называется *фундаментальной системой решений* уравнения (1).

Теорема 1. Линейное однородное уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A = \left\{a_{jk}\right\}_{j,k=1}^{n}$ - произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det A \neq 0$.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$, и поставим n задач Коши для уравнения (1):

$$t = t_0, \ \ x = a_{1k}, \ \ \dot{x} = a_{2k}, \ \ \ldots, \ \ x^{(n-1)} = a_{nk},$$

$k = 1,2,...,n$.

Пусть $\varphi_k(t)$ - решение k-ой задачи Коши. Составим вронскиан для системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ на (a,b).

По нашему выбору задач Коши

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \ldots & \varphi_n(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \dot{\varphi}_2(t_0) & \ldots & \dot{\varphi}_n(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = \det A \neq 0,$$

и по следствию 2 предыдущего параграфа, решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b), то есть образуют фундаментальную систему решений. Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений уравнения (1), c_1, $c_2,\ldots,\ c_n$ - произвольные константы. Составим формулу:

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t). \tag{2}$$

Правая часть формулы (2) называется *общим решением* уравнения (1).

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений (1). Тогда

1) при любом наборе констант c_1, $c_2,\ldots,\ c_n$ формула (2) дает решение уравнения (1),

2) если $x=\xi(t)$ - решение (1), то существует такой набор постоянных $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2,\ldots,\ \overline{c}_n$, что $\xi(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t)$.

Доказательство теоремы 2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейного однородного уравнения.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0)+z_2\varphi_2(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n(t_0)=\xi(t_0), \\ z_1\dot{\varphi}_1(t_0)+z_2\dot{\varphi}_2(t_0)+\ldots+z_n\dot{\varphi}_n(t_0)=\dot{\xi}(t_0), \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0). \end{cases} \tag{3}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений (1). Следовательно, система (3) имеет единственное решение $z_1=\overline{c}_1$, $z_2=\overline{c}_2,\ldots,$ $z_n=\overline{c}_n$.

Положим

$$\eta(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t). \tag{4}$$

$x=\eta(t)$ - решение уравнения (1), и, согласно (3)

$$\eta(t_0)=\xi(t_0),\ \dot{\eta}(t_0)=\dot{\xi}(t_0),\ \ldots,\ \eta^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0),$$

то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши

$$t = t_0, \quad x = \xi(t_0), \quad \dot{x} = \dot{\xi}(t_0), \quad \ldots, \quad x^{(n-1)} = \xi^{(n-1)}(t_0)$$

для уравнения (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t) \equiv \eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

§4. Линейное неоднородное уравнение.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L(x) = q(t), \tag{1}$$

где $L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}$, $p_0(t) \equiv 1$, $x^{(0)} = x$, функции $p_k(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$, и $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b).

Соответствующее уравнению (1) однородное уравнение:

$$L(x) = 0, \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $x = \psi(t)$ - решение уравнения (1), а $x = \varphi(t)$ - решение уравнения (2), тогда $x = \varphi(t) + \psi(t)$ - решение уравнения (1).

Доказательство теоремы 1. Функция $\psi(t)$ - решение уравнения (1), а $\varphi(t)$ - решение уравнения (2), это значит, что $L(\psi(t)) \equiv q(t)$ и $L(\varphi(t)) \equiv 0$ на интервале (a,b). Следовательно,

$$L(\varphi(t) + \psi(t)) = L(\varphi(t)) + L(\psi(t)) = 0 + q(t) = q(t),$$

и функция $\varphi(t) + \psi(t)$ есть решение уравнения (1). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть функция $\psi(t)$ - решение уравнения (1), а набор функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots,$ $\varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений уравнения (2), c_1, $c_2, \ldots,$ c_n - произвольные константы.

Составим формулу:

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \psi(t). \tag{3}$$

Правая часть формулы (3) называется *общим решением* уравнения (1).

Теорема 2. Пусть $\psi(t)$ - решение уравнения (1), а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда

1) при любом наборе констант c_1, $c_2,\ldots,$ c_n формула (3) дает решение уравнения (1),

2) если $x=\xi(t)$ - решение (1), то существует такой набор постоянных $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2,\ldots,$ $\overline{c}_n$, что $\xi(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t)+\psi(t)$.

Доказательство теоремы 2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейного однородного уравнения и теоремы 1.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0)+z_2\varphi_2(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n(t_0)+\psi(t_0)=\xi(t_0), \\ z_1\dot{\varphi}_1(t_0)+z_2\dot{\varphi}_2(t_0)+\ldots+z_n\dot{\varphi}_n(t_0)+\dot{\psi}(t_0)=\dot{\xi}(t_0), \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)+\psi^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0). \end{cases} \tag{4}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений (2). Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z_1=\overline{c}_1$, $z_2=\overline{c}_2,\ldots,$ $z_n=\overline{c}_n$.

Положим

$$\eta(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t)+\psi(t). \tag{5}$$

$x=\eta(t)$ - решение уравнения (1), и, согласно (4)

$$\eta(t_0)=\xi(t_0),\ \dot{\eta}(t_0)=\dot{\xi}(t_0),\ \ldots,\ \eta^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0),$$

то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши

$$t=t_0,\quad x=\xi(t_0),\quad \dot{x}=\dot{\xi}(t_0),\quad \ldots,\quad x^{(n-1)}=\xi^{(n-1)}(t_0)$$

для уравнения (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

§5. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L(x) = q(t), \tag{1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0, \tag{2}$$

$L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}$, $p_0(t) \equiv 1$, $x^{(0)} = x$, функции $p_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, и $q(t)$ непрерывны на интервале (a, b).

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Частное решение $x = \psi(t)$ уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \varphi_j(t), \tag{3}$$

где $u_j(t)$ - неизвестные функции, $j = 1, 2, ..., n$.

При этом

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \dot{\varphi}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t) \varphi_j(t).$$

Положим

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t) \varphi_j(t) = 0, \tag{4}$$

следовательно,

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \dot{\varphi}_j(t),$$

и

$$\ddot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \ddot{\varphi}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t) \dot{\varphi}_j(t).$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t) \dot{\varphi}_j(t) = 0,$$

и аналогично далее будем полагать, что для всех $s = 1, ..., (n-2)$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) = 0. \qquad (5)$$

Тогда

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) \qquad (6)$$

для всех $s = 1,...,(n-1)$, и

$$\psi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t). \qquad (7)$$

Подставим функцию $\psi(t)$ вместе с ее производными в уравнение (1), используя формулы (3), (6), (7) и тот факт, что $L(\varphi_j(t)) \equiv 0$ на интервале (a,b).

$$L(\psi(t)) = L\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t)\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)L(\varphi_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t),$$

и $x = \psi(t)$ - решение уравнения (1), если

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = q(t). \qquad (8)$$

Таким образом, функция $\psi(t)$, определенная формулой (3), является решением уравнения (1), если выполнены условия (4), (5), (8).

Соберем эти условия в одну систему.

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t)\varphi_1(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2(t) + ... + \dot{u}_n(t)\varphi_n(t) = 0, \\ \dot{u}_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{\varphi}_2(t) + ... + \dot{u}_n(t)\dot{\varphi}_n(t) = 0, \\ \cdots \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-2)}(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-2)}(t) + ... + \dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + ... + \dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) = q(t). \end{cases} \qquad (9)$$

Определение. Система (9) называется *системой в вариациях*.

При каждом $t \in (a,b)$ система (9) - линейная неоднородная алгебраическая система относительно $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t),\ldots$, $\dot{u}_n(t)$. Определитель этой системы есть вронскиан $W(t)$, и $W(t) \neq 0$. Поэтому при каждом $t \in (a,b)$ система (9) имеет решение $\dot{u}_j(t) = f_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Все коэффициенты линейной системы (9) непрерывно зависят от t на интервале (a,b), а решения этой системы непрерывно зависят от коэффициентов, следовательно, функции $f_j(t)$ непрерывны на (a,b), $j = 1,2,\ldots,n$, и

$$u_j(t) = \int f_j(t)dt, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Первообразные здесь любые.

Согласно формуле (3)

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int f_j(t)dt,$$

И формула (3) предыдущего параграфа для общего решения уравнения (1) принимает вид

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int f_j(t)dt$$

§6. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пусть

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{(n-k)}, \tag{1}$$

$a_0 = 1$, a_k - вещественные числа, $k = 1,2,\ldots,n$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0, \tag{2}$$

Ищем, следуя Эйлеру, решение уравнения (2) в виде $x = e^{\lambda t}$. Подставим функцию $e^{\lambda t}$ в $L(x)$:

$$L\left(e^{\lambda t}\right) = P(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{3}$$

где

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} . \qquad (4)$$

Определение. Многочлен $P(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*. Уравнение

$$P(\lambda)=0 \qquad (5)$$

- *характеристическое уравнение*, его корни - *характеристические числа* уравнения (2).

Функция $x=e^{\lambda t}$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда λ - корень характеристического уравнения (5).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - корни уравнения (5). Построим фундаментальную систему решений уравнения (2).

1. Если все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ вещественные и различные, то уравнение (2) имеет фундаментальную систему решений

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}, ...,\ e^{\lambda_n t} .$$

Линейную независимость этих функций докажем позже, после полного построения фундаментальной системы решений.

2. Пусть все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ различные, но среди них есть комплексные.

Лемма. Если $u(t),\ v(t)$ - вещественные функции, и комплекснозначная функция $w(t)=u(t)+iv(t)$ (где $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица) - решение уравнения (2), то $u(t)$ и $v(t)$ - решения (2).

Доказательство леммы. С одной стороны, $L(w(t))=0$, с другой стороны,

$$L(w(t))=L(u(t)+iv(t))=L(u(t))+iL(v(t)).$$

Поэтому $L(u(t))+iL(v(t))=0$, то есть $L(u(t))=0$ и $L(v(t))=0$. Из последних двух равенств следует, что $u(t)$ и $v(t)$ - решения (2), и лемма доказана.

Пусть $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $j \in \{1, 2, ..., n\}$, - корень характеристического уравнения (5), $\beta \neq 0$, тогда и $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ - корень характеристического уравнения, и функции $e^{\lambda_j t}$, $e^{\overline{\lambda}_j t}$ - решения уравнения (2).

По формуле Эйлера

$$e^{\lambda_j t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

и в силу леммы, функции

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \text{ и } e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

являются решениями уравнения (2). Эта пара функций в фундаментальной системе решений соответствует паре корней λ_j и $\overline{\lambda}_j$ характеристического уравнения (5).

3. Пусть среди корней характеристического уравнения есть кратные, и корень λ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, имеет кратность $d \geq 2$. Это значит, что

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = P''(\lambda_j) = ... = P^{(d-1)}(\lambda_j) = 0. \tag{6}$$

Продифференцируем равенство (3) m раз по λ.

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}L\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}\left(\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}e^{\lambda t}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}\left(t^m e^{\lambda t}\right) = L\left(t^m e^{\lambda t}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

и с другой стороны, согласно формуле Лейбница,

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(P(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)\frac{\partial^{m-s}}{\partial\lambda^{m-s}}e^{\lambda t} = \sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)t^{m-s}e^{\lambda t}, \tag{8}$$

Из равенств (3) и (7), (8) следует, что

$$L\left(t^m e^{\lambda t}\right) = \sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)t^{m-s}e^{\lambda t}. \tag{9}$$

И формула (9) верна для любых значений t и λ, и любых целых неотрицательных m.

Положим теперь в (9) $\lambda = \lambda_j$, а $m = 1, 2, ..., (d-1)$. Тогда из (6) следует, что правая часть в равенстве (9) равна нулю, и $L\left(t^m e^{\lambda_j t}\right) = 0$ для всех $m = 1, 2, ..., (d-1)$, то есть уравнение (2) имеет ровно d решений

$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ t^2 e^{\lambda_j t}, ...,\ t^{d-1} e^{\lambda_j t}, \tag{10}$$

которые в фундаментальной системе соответствуют корню λ_j кратности d.

Если $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, - корень уравнения (5) кратности d, то и $\bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ - корень уравнения (5) кратности d. Разделяя в решениях (10) вещественные и мнимые части, мы получим $2d$ решений

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ te^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t), ...,\ t^{d-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$
$$e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ te^{\alpha t}\sin(\beta t),\ t^2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), ...,\ t^{d-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

отвечающих в фундаментальной системе решений паре корней λ_j и $\bar{\lambda}_j$ кратности d характеристического уравнения (5).

Таким образом, мы построили n различных решений, отвечающих n корням уравнения (5). Докажем, что построена система линейно независимых решений.

Теорема. Построенная система решений является фундаментальной.

Доказательство теоремы. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ - различные корни характеристического уравнения (5), d_j - кратность корня λ_j, $j = 1, 2, ..., s$, $\sum_{j=1}^{s} d_j = n$. Предположим, что решения

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^2 e^{\lambda_1 t}, ...,\ t^{d_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_s t},\ te^{\lambda_s t},\ t^2 e^{\lambda_s t}, ...,\ t^{d_s - 1} e^{\lambda_s t}$$

уравнения (2) линейно зависимы, то есть существуют константы c_{jm}, $j = 1, 2, ..., s$, $m = 1, 2, ..., d_j$, не все равные нулю, такие, что

$$c_{11} e^{\lambda_1 t} + c_{12} te^{\lambda_1 t} + c_{13} t^2 e^{\lambda_1 t} + ... + c_{1d_1} t^{d_1 - 1} e^{\lambda_1 t} + ... +$$
$$+ c_{s1} e^{\lambda_s t} + c_{s2} te^{\lambda_s t} + c_{s3} t^2 e^{\lambda_s t} + ... + c_{sd_s} t^{d_s - 1} e^{\lambda_s t} \equiv 0$$

для всех $t \in R$, или

$$R_{10}(t)e^{\lambda_1 t}+R_{20}(t)e^{\lambda_2 t}+\ldots+R_{s0}(t)e^{\lambda_s t}\equiv 0, \tag{11}$$

где $R_{j0}(t)$ - многочлен степени (d_j-1), $j=1,2,\ldots,s$, и не все из этих многочленов тождественно равны нулю.

Пусть для определенности $R_{s0}(t)\neq 0$. Перепишем тождество (11) в виде

$$R_{10}(t)+R_{20}(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\ldots+R_{s0}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t}\equiv 0, \tag{12}$$

и продифференцируем (12) d_1 раз. Получим тождество

$$R_{21}(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+\ldots+R_{s1}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t}\equiv 0, \tag{13}$$

где $R_{j1}(t)$ - многочлены той же степени, что и $R_{j0}(t)$, $j=2,3,\ldots,s$. Кроме того, $R_{j1}(t)\equiv 0$ если, и только если $R_{j0}(t)\equiv 0$.

Из тождества (13) следует, что

$$R_{21}(t)+R_{31}(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t}+\ldots+R_{s1}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_2)t}\equiv 0. \tag{14}$$

Дифференцируем (14) d_2 раз, и получаем тождество

$$R_{32}(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t}+\ldots+R_{s2}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_2)t}\equiv 0,$$

где $R_{j2}(t)$ - многочлены той же степени, что и $R_{j0}(t)$, $j=3,\ldots,s$. И $R_{j2}(t)\equiv 0$ если, и только если $R_{j0}(t)\equiv 0$.

Проделав описанную процедуру $(s-1)$ раз, получим тождество

$$R_{s(s-1)}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})t}\equiv 0,\ \text{или}\ \ R_{s(s-1)}(t)\equiv 0,$$

которое верно, если $R_{s0}(t)\equiv 0$. Но по нашему предположению $R_{s0}(t)\neq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§7. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $L(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^{(n-k)}$, где $x^{(0)}=x$, $a_0=1$, a_k - вещественные числа, $k=1,2,\ldots,n$.

Рассматриваем линейное неоднородное уравнение

$$L(x)=q(t), \tag{1}$$

где функция $q(t)$ непрерывна для всех $t\in R$.

Соответствующее уравнению (1) однородное уравнение:

$$L(x)=0. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (2):

$$P(\lambda)=0, \tag{3}$$

где $P(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}$.

Пусть $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Такая система построена в предыдущем параграфе. Для того, чтобы получить общее решение неоднородного уравнения (1), осталось найти частное решение $x=\psi(t)$ уравнения (1). Это решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, но если уравнение (2) - уравнение с постоянными коэффициентами, а функция $q(t)$ имеет специальный вид, то решение $x=\psi(t)$ может быть получено *методом неопределенных коэффициентов*, который изложен ниже.

1. Пусть неоднородность уравнения (1) имеет вид

$$q(t)=R_m(t)e^{\lambda_0 t}, \tag{4}$$

где $R_m(t)$ - многочлен степени m: $R_m(t)=\sum\limits_{j=0}^{m}r_j\,t^{m-j}$.

Теорема 1. Если $P(\lambda_0)\neq 0$, то есть λ_0 - не корень характеристического уравнения (3), то уравнение (1) с нелинейностью (4) имеет решение вида

$$\psi(t)=Q_m(t)e^{\lambda_0 t}, \tag{5}$$

где $Q_m(t)$ - многочлен степени m: $Q_m(t)=\sum\limits_{j=0}^{m}q_j\,t^{m-j}$.

Доказательство теоремы 1. Коэффициенты многочлена $Q_m(t)$ находим подстановкой функции (5) в уравнение (1).

$$L\left(\psi(t)\right)=L\left(Q_m(t)e^{\lambda_0 t}\right)=L\left(\sum_{j=0}^{m} q_j\, t^{m-j}e^{\lambda_0 t}\right)=\sum_{j=0}^{m} q_j\, L\left(t^{m-j}e^{\lambda_0 t}\right).$$

Согласно формуле (9) предыдущего параграфа

$$L\left(t^{m-j}e^{\lambda_0 t}\right)=\sum_{s=0}^{m-j} C_{m-j}^{s}P^{(s)}(\lambda_0)t^{m-j-s}e^{\lambda_0 t}, \tag{6}$$

следовательно,

$$L\left(\psi(t)\right)=e^{\lambda_0 t}\sum_{j=0}^{m} q_j\left(\sum_{s=0}^{m-j} C_{m-j}^{s}P^{(s)}(\lambda_0)t^{m-j-s}\right). \tag{7}$$

Подставим полученное равенство (7) в уравнение

$$L\left(\psi(t)\right)=R_m(t)e^{\lambda_0 t}.$$

Тогда

$$q_0\sum_{s=0}^{m} C_m^s P^{(s)}(\lambda_0)t^{m-s}+q_1\sum_{s=0}^{m-1} C_{m-1}^s P^{(s)}(\lambda_0)t^{m-1-s}+$$

$$+q_2\sum_{s=0}^{m-2} C_{m-2}^s P^{(s)}(\lambda_0)t^{m-2-s}+\ldots+q_{m-1}\sum_{s=0}^{1} C_1^s P^{(s)}(\lambda_0)t^{1-s}+q_m C_0^0 P(\lambda_0)= \tag{8}$$

$$=r_0t^m+r_1t^{m-1}+\ldots+r_{m-1}t+r_m.$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему для определения коэффициентов многочлена $Q_m(t)$:

$$\begin{cases} q_0\, P(\lambda_0)=r_0, \\ q_0\, C_m^1\, P'(\lambda_0)+q_1 P(\lambda_0)=r_1, \\ q_0\, C_m^2\, P''(\lambda_0)+q_1\, C_{m-1}^1 P'(\lambda_0)+q_2\, P(\lambda_0)=r_2, \\ \ldots \\ q_0\, P^{(m)}(\lambda_0)+q_1 P^{(m-1)}(\lambda_0)+\ldots+q_m\, P(\lambda_0)=r_m. \end{cases} \tag{9}$$

Из системы (9) рекуррентно находятся q_j, $j=0,1,\ldots,m$, поскольку $P(\lambda_0)\neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если λ_0 - корень характеристического уравнения (3) кратности $d \geq 1$, то есть

$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = P''(\lambda_0) = \ldots = P^{(d-1)}(\lambda_0) = 0\,,\;\; P^{(d)}(\lambda_0) \neq 0\,, \tag{10}$$

то уравнение (1) с нелинейностью (4) имеет решение вида

$$\psi(t) = t^d Q_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{11}$$

где $Q_m(t)$ - многочлен степени m: $Q_m(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^{m-j}$.

Доказательство теоремы 2. Как и в доказательстве теоремы 1, коэффициенты многочлена $Q_m(t)$ находим подстановкой (11) в уравнение (1).

$$L(\psi(t)) = L\left(t^d Q_m(t) e^{\lambda_0 t}\right) = L\left(\sum_{j=0}^{m} q_j t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{j=0}^{m} q_j L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right),$$

и согласно формуле (6),

$$L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{s=0}^{m+d-j} C_{m+d-j}^{s} P^{(s)}(\lambda_0) t^{m+d-j-s} e^{\lambda_0 t} .$$

Из равенств (10) следует, что

$$L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) =$$

$$= \sum_{s=d}^{m+d-j} C_{m+d-j}^{s} P^{(s)}(\lambda_0) t^{m+d-j-s} e^{\lambda_0 t} = \sum_{s=0}^{m-j} C_{m+d-j}^{s+d} P^{(s+d)}(\lambda_0) t^{m-j-s} e^{\lambda_0 t},$$

и

$$L(\psi(t)) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{m} q_j \left(\sum_{s=0}^{m-j} C_{m+d-j}^{s+d} P^{(s+d)}(\lambda_0) t^{m-j-s}\right). \tag{12}$$

Подставляя полученное равенство (12) в уравнение

$$L(\psi(t)) = R_m(t) e^{\lambda_0 t}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему для определения коэффициентов многочлена $Q_m(t)$:

$$
\begin{cases}
q_0\, C_{d+m}^{d} P^{(d)}(\lambda_0) = r_0, \\
q_0\, C_{d+m}^{d+1} P^{(d+1)}(\lambda_0) + q_1\, C_{d+m-1}^{d} P^{(d)}(\lambda_0) = r_1, \\
q_0\, C_{d+m}^{d+2} P^{(d+2)}(\lambda_0) + q_1\, C_{d+m-1}^{d+1} P^{(d+1)}(\lambda_0) + q_2\, C_{d+m-2}^{d} P^{(d)}(\lambda_0) = r_2, \\
\ldots \\
q_0\, P^{(d+m)}(\lambda_0) + q_1\, P^{(d+m-1)}(\lambda_0) + \ldots + q_m\, P^{(d)}(\lambda_0) = r_m.
\end{cases} \tag{13}
$$

$P^{(d)}(\lambda_0) \neq 0$, поэтому из системы (13) рекуррентно находятся коэффициенты q_j, $j = 0,1,\ldots,m$. Теорема доказана.

2. Пусть неоднородность уравнения (1) имеет вид

$$
q(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{14}
$$

где $\tilde{R}_{m_1}(t)$ и $\hat{R}_{m_2}(t)$ - многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Теорема 3. Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ - не корень характеристического уравнения (3), то уравнение (1) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$
\psi(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{15}
$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$- многочлены степени m.

Теорема 4. Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ - корень характеристического уравнения (3) кратности d, то уравнение (1) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$
\psi(t) = t^d e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{16}
$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$- многочлены степени m.

Перед доказательством теорем 3 и 4 докажем простое утверждение.

Утверждение. Если $\psi_1(t)$ - решение уравнения $L(x) = q_1(t)$, а $\psi_2(t)$ - решение уравнения $L(x) = q_2(t)$, то функция $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ является решением уравнения $L(x) = q_1(t) + q_2(t)$.

Доказательство утверждения. По условию $L\left(\psi_1(t)\right)=q_1(t)$ и $L\left(\psi_2(t)\right)=q_2(t)$, следовательно,

$$L\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)=L\left(\psi_1(t)\right)+L\left(\psi_2(t)\right)=q_1(t)+q_2(t),$$

то есть функция $\psi_1(t)+\psi_2(t)$ - решение уравнения $L(x)=q_1(t)+q_2(t)$. Утверждение доказано.

Доказательство теорем 3 и 4. Согласно формулам Эйлера

$$e^{\alpha_0 t}\cos(\beta_0 t)=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda_0 t}+e^{\bar{\lambda}_0 t}\right),\ \ e^{\alpha_0 t}\sin(\beta_0 t)=\frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_0 t}-e^{\bar{\lambda}_0 t}\right),$$

где $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$, $\bar{\lambda}_0=\alpha_0-i\beta_0$.

Поэтому

$$q(t)=\frac{1}{2}\tilde{R}_{m_1}(t)\left(e^{\lambda_0 t}+e^{\bar{\lambda}_0 t}\right)+\frac{1}{2i}\hat{R}_{m_2}(t)\left(e^{\lambda_0 t}-e^{\bar{\lambda}_0 t}\right)=$$

$$=e^{\lambda_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)+\hat{R}_{m_2}(t)\right)+e^{\bar{\lambda}_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)-\hat{R}_{m_2}(t)\right).$$

Положим

$$q_1(t)=e^{\lambda_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)+\hat{R}_{m_2}(t)\right),\ \ q_2(t)=e^{\bar{\lambda}_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)-\hat{R}_{m_2}(t)\right).$$

Тогда $q(t)=q_1(t)+q_2(t)$, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ есть функции вида (4), степень многочленов

$$\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)+\hat{R}_{m_2}(t)\right)\ \text{ и }\ \frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t)-\hat{R}_{m_2}(t)\right)$$

(с комплексными коэффициентами) равна $m=\max(m_1,m_2)$.

Согласно теоремам 1 и 2, уравнения

$$L(x)=q_1(t)\ \text{ и }\ L(x)=q_2(t)$$

имеют соответственно комплекснозначные решения $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ вида (5), если λ_0 - не корень характеристического уравнения (3), и вида (11), если λ_0 - корень уравнения (3) кратности d.

По доказанному выше утверждению, уравнение (1) имеет решение $\psi_0(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$ вида

$$\psi_0(t) = \tilde{U}_m(t)e^{\lambda_0 t} + \hat{U}_m(t)e^{\bar{\lambda}_0 t}, \qquad (17)$$

если λ_0 - не корень характеристического уравнения (3), и вида

$$\psi_0(t) = t^d\left(\tilde{U}_m(t)e^{\lambda_0 t} + \hat{U}_m(t)e^{\bar{\lambda}_0 t}\right), \qquad (18)$$

если λ_0 - корень характеристического уравнения (3) кратности d, здесь $\tilde{U}_m(t)$ и $\hat{U}_m(t)$ - многочлены с комплексными коэффициентами степени m.

Лемма. Если комплекснозначная функция $w(t) = u(t) + iv(t)$ - решение уравнения (1), где $q(t) = f(t) + ih(t)$ ($i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, $u(t)$, $v(t)$ и $f(t)$, $h(t)$ - вещественные функции), то $u(t)$ - решение уравнения $L(x) = f(t)$, а $v(t)$ - решение уравнения $L(x) = h(t)$.

Доказательство леммы. С одной стороны, $L(w(t)) = f(t) + ih(t)$, с другой стороны,

$$L(w(t)) = L(u(t) + iv(t)) = L(u(t)) + iL(v(t)).$$

Из равенства $L(u(t)) + iL(v(t)) = f(t) + ih(t)$ следует, что $L(u(t)) = f(t)$ и $L(v(t)) = h(t)$, то есть $u(t)$ и $v(t)$ - решения уравнений $L(x) = f(t)$ и $L(x) = h(t)$ соответственно, и лемма доказана.

Разделяя в решении вида (17) вещественные и мнимые части, согласно лемме, получим утверждение теоремы 3. Аналогично, разделяя вещественные и мнимые части в решении вида (18), получим утверждение теоремы 4.

Доказательство теорем закончено.