Глава 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Рассматриваем линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t), \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $p_{jk}(t)$, $q_j(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Система (1) есть система в нормальной форме, правые части всех уравнений системы (1)

$$X_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k + q_j(t)$$

непрерывны в области

$$G = \{(t,x) : t \in (a,b), \|x\| < +\infty\}$$

и удовлетворяют условию Липшица по $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in R^n$ локально, поскольку в G существуют непрерывные частные производные $\partial X_j(t,x)/\partial x_k = p_{jk}(t)$, $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Поэтому задача Коши для системы (1)

$$t = t_0, \quad x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n0}, \tag{2}$$

где $t_0 \in (a,b)$, $x_0 = (x_{10},\ldots,x_{n0})^T \in R^n$, имеет единственное решение.

Кроме того, в седьмом параграфе второй главы доказано, что все решения линейной системы определены на интервале (a,b), поэтому далее считаем все решения (1) заданными на (a,b).

Определение. Система (1) называется *однородной*, если $q_j(t) \equiv 0$ для всех $j = 1,2,\ldots,n$. В противном случае система называется *неоднородной*.

§ 1. Векторная запись линейной системы.

Сначала напомним сведения из теории матриц, которые будем использовать в дальнейшем.

Матрицу A размерности $n \times m$ будем записывать в виде $A_{[n\times m]} = \{a_{jk}\}$, или $A = \{a_{jk}\}_{[n\times m]}$, где a_{jk} ($j = 1,2,...,n$, $k = 1,2,...,m$) - элементы матрицы, или в виде $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$, где a_j - j-ый столбец матрицы A.

Если $A_{[n\times m]} = \{a_{jk}\}$, $B_{[n\times m]} = \{b_{jk}\}$, то $(A+B)_{[n\times m]} = \{a_{jk} + b_{jk}\}$.

Если $B_{[s\times n]} = \{b_{jl}\} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $A_{[n\times m]} = \{a_{lk}\}$, то $(BA)_{[s\times m]} = \left\{\sum_{l=1}^{n} b_{jl} a_{lk}\right\}$, или $(BA)_{[s\times m]} = (Ba_1, Ba_2, ..., Ba_m)$. Кроме того, если $x = (x_1, ..., x_n)^T$, то $Bx = b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n$.

Если матрица A - квадратная размерности n, то под нормой матрицы A понимаем *операторную норму*:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

где (как и раньше) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ - евклидова норма вектора $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

Не трудно показать, что для норм матриц $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ верны неравенства

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \text{ и } \|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Если $x = (x_1, ..., x_n)^T$, то

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

(это неравенство называется свойством согласованности операторной нормы матрицы и евклидовой нормы вектора).

Матрица $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jk}(t)\}$ *непрерывна* на промежутке $\langle a,b \rangle$, если все функции $u_{jk}(t)$ непрерывны на $\langle a,b \rangle$, и *непрерывно дифференцируема*, если все $u_{jk}(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\langle a,b \rangle$ ($j = 1,2,...,s$, $k = 1,2,...,n$).

При этом

$$\dot{U}(t)_{[s\times n]} = \{\dot{u}_{jk}(t)\}.$$

Если $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jk}(t)\}$ и $V(t)_{[n\times m]} = \{v_{kl}(t)\}$ - матрицы, непрерывно дифференцируемые на $\langle a,b\rangle$, то их произведение тоже непрерывно дифференцируемо на $\langle a,b\rangle$, и легко показать, что

$$\frac{d}{dt}\big(U(t)V(t)\big) = \dot{U}(t)V(t) + U(t)\dot{V}(t).$$

Если матрица $U(t)_{[s\times n]} = \{u_{jk}(t)\}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по определению

$$\int_a^b U(t)\,dt = \left\{\int_a^b u_{jk}(t)\,dt\right\}.$$

Не трудно показать, что для квадратной матрицы $U(t)$ размерности n

$$\left\|\int_a^b U(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|U(t)\|\,dt.$$

Пусть $x = (x_1,\dots,x_n)^T$, $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$, $q(t) = (q_1(t),\dots,q_n(t))^T$.

Линейную систему запишем в векторном виде

$$\dot{x} = P(t)x + q(t). \tag{1}$$

Считаем, что матрица $P(t)$ и вектор $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b).

Напомним, что решение системы (1) – вектор-функция $x = \varphi(t)$, определенная на (a,b), которая, будучи подставлена в (1), обращает систему в тождество.

Задача Коши для системы (1):

$$t = t_0,\ x = x_0,$$

где $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in R^n$.

§ 2. Матричное уравнение. Основное свойство линейной однородной системы.

Рассмотрим сначала линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

где матрица $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a,b).

Пусть вектор-функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1). Составим матрицу

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)). \tag{2}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\dot{X} = P(t)X, \tag{3}$$

где X - любая матрица с n строками.

Решением уравнения (3) называется матрица $X = X(t)$, непрерывно дифференцируемая на (a,b) и удовлетворяющая уравнению (3).

Утверждение. $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ есть решения системы (1) тогда, и только тогда, когда матрица $\Phi_m(t)$ - решение уравнения (3).

Доказательство утверждения. Если $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1), то $\dot{\varphi}_j(t) = P(t)\varphi_j(t)$ для всех $j = 1, 2, ..., m$. Согласно (2),

$$\dot{\Phi}_m(t) = (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), ..., \dot{\varphi}_m(t)) =$$
$$= (P(t)\varphi_1(t), P(t)\varphi_2(t), ..., P(t)\varphi_m(t)) = P(t)\Phi_m(t),$$

то есть матрица $\Phi_m(t)$ - решение уравнения (3).

Обратно, если $\Phi_m(t)$ - решение уравнения (3), то

$$(\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), ..., \dot{\varphi}_m(t)) = \dot{\Phi}_m(t) =$$
$$= P(t)\Phi_m(t) = (P(t)\varphi_1(t), P(t)\varphi_2(t), ..., P(t)\varphi_m(t)),$$

и $\dot{\varphi}_j(t) = P(t)\varphi_j(t)$ для всех $j = 1, 2, ..., m$, то есть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1). Утверждение доказано.

Замечание. Для матричного уравнения (3) можно ставить задачу Коши

$$t = t_0,\ X = A_0,$$

где $t_0 \in (a,b)$, A_0 - матрица с n строками. Разумеется, для решения этой задачи верна теорема существования и единственности.

Основное свойство линейной однородной системы.

Теорема. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1), тогда вектор-функция

$$\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_m\varphi_m(t),$$

где c_1, $c_2, \ldots$, c_m - произвольные постоянные числа, также есть решение системы (1) на (a,b).

Доказательство теоремы 1. Функции $\varphi_j(t)$, $j = 1,2,...,m$, - решения системы (1), а значит, матрица $\Phi_m(t)$ - решение уравнения (3).

Заметим, что $\psi(t) = \Phi_m(t)c$, где $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ - m-мерный постоянный вектор, и

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\Phi}_m(t)c = P(t)\Phi_m(t)c = P(t)\psi(t),$$

то есть $\psi(t)$ - решение уравнения (1). Теорема доказана.

§3. Линейно независимые решения линейной однородной системы.

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

матрица $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a,b).

Пусть вектор-функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1),

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) \tag{2}$$

- составленная из решений матрица.

Определение 1. Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно зависимы* на интервале (a,b), если существуют постоянные c_1, $c_2, \ldots$, c_m, не все равные нулю, такие, что на (a,b)

$$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + ... + c_m \varphi_m(t) \equiv 0 . \quad (3)$$

Определение 1 можно переформулировать с помощью матрицы (2).

Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно зависимы* на интервале (a,b), если существует m-мерный постоянный вектор $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ такой, что $c \neq 0$, а $\Phi_m(t)c \equiv 0$ на (a,b).

Определение 2. Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно независимы* на (a,b), если они не являются линейно зависимыми на этом интервале.

Иными словами, решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ *линейно независимы* на (a,b), если из тождества $\Phi_m(t)c \equiv 0$ следует, что вектор c равен нулю.

Теорема 1. Пусть решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) линейно зависимы на интервале (a,b). Тогда для всех $t \in (a,b)$

$$rank\, \Phi_m(t) < m .$$

Доказательство теоремы 1. По условию теоремы, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, $\varphi_m(t)$ - линейно зависимы, то есть существует m-мерный постоянный вектор $\bar{c} \neq 0$ такой, что $\Phi_m(t)\bar{c} \equiv 0$ на (a,b).

Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\Phi_m(t) z = 0, \quad (4)$$

где $z = (z_1, z_2, ..., z_m)^T$ - искомый вектор.

Система (4) имеет ненулевое решение $z = \bar{c}$ для каждого $t \in (a,b)$, поэтому $rank\, \Phi_m(t) < m$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 мы не пользовались тем, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1). Теорема 1 верна для любого набора вектор-функций, определенных на интервале (a,b).

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1).

Если существует точка $t_0 \in (a,b)$ такая, что

$$rank\, \Phi_m(t_0) < m,$$

то $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\Phi_m(t_0) z = 0, \tag{5}$$

где вектор $z = (z_1, z_2, ..., z_m)^T$ - искомый.

По условию $rank\, \Phi_m(t_0) < m$, следовательно, система (5) имеет ненулевое решение $z = \overline{c}$.

Положим $\psi(t) = \Phi_m(t)\overline{c}$. Согласно основному свойству решений линейного однородного уравнения, $x = \psi(t)$ - решение системы (1).

Поскольку $z = \overline{c}$ - решение системы (5), $\psi(t_0) = \Phi_m(t_0)\overline{c} = 0$, то есть $x = \psi(t)$ - решение задачи Коши $t = t_0$, $x = 0$ для системы (1). Эту же задачу Коши решает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1).

Из теоремы единственности следует, что $\psi(t) \equiv 0$ на интервале (a,b). И отсюда вытекает линейная зависимость функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$, поскольку $\overline{c} \neq 0$. Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1), $t \in (a,b)$. Тогда из теорем 1 и 2 следуют два утверждения.

Следствие 1. Если существует такая точка $t_0 \in (a,b)$, что $rank\, \Phi_m(t_0) < m$, то $rank\, \Phi_m(t) < m$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Следствие 2. Если существует такая точка $t_1 \in (a,b)$, что $rank\, \Phi_m(t_1) = m$, то $rank\, \Phi_m(t) = m$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ линейно независимы на (a,b).

Теорема 3. Система (1) не может иметь больше, чем n линейно независимых решений.

Доказательство теоремы 3. Пусть $m > n$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ - решения системы (1), $t \in (a,b)$.

Составим матрицу (2). Эта матрица имеет размерность $n \times m$, поэтому $rank\ \Phi_m(t) \leq n < m$, и из теоремы 1 следует, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b). Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ - набор из n решений системы (1). Составим матрицу

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)).$$

Если $m = n$, то индекс у функции $\Phi(t)$ обычно не пишут.

Определение. Определитель матрицы $\Phi(t)$ называется *определителем Вронского* для функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ на интервале (a,b) или *вронскианом*.

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Следствие 3. Если существует такая точка $t_0 \in (a,b)$, что $W(t_0) = 0$, то $W(t) \equiv 0$ на (a,b), и решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно зависимы.

Следствие 4. Если существует такая точка $t_1 \in (a,b)$, что $W(t_1) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b).

Замечание. Определение вронскиана для линейной системы (1) является обобщением соответствующего определения для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Не трудно показать, что при переходе от уравнения к системе по стандартному правилу, описанному в начале третьей главы, из определения вронскиана для системы следует определение вронскиана для уравнения.

§4. Фундаментальная система решений. Общее решение.

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

где матрица $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a,b).

Определение 1. Набор $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ из n линейно независимых решений системы (1) называется *фундаментальной системой решений* (1).

Матрица

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)), \tag{2}$$

составленная из этих решений называется *фундаментальной матрицей решений* системы (1).

Теорема 1. Линейная система (1) имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство теоремы 1. Пусть A - произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det A \neq 0$.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$, и поставим задачу Коши

$$t = t_0,\ X = A$$

для матричного уравнения

$$\dot{X} = P(t)X, \tag{3}$$

Как было показано во втором параграфе, эта задача Коши имеет решение $X = \Phi(t)$. Столбцы матрицы $\Phi(t)$ есть решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ системы (1). При этом

$$\det\Phi(t_0) = W(t_0) = \det A \neq 0,$$

и по следствию 4 предыдущего параграфа, решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b), то есть образуют фундаментальную систему решений. Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1), c - произвольный постоянный n-мерный вектор. Составим формулу:

$$x(t) = \Phi(t)c. \tag{4}$$

Правая часть формулы (4) называется *общим решением* системы (1).

Теорема 2. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1). Тогда

1) для любого постоянного вектора c формула (4) дает решение (1),

2) если $x=\xi(t)$ - решение (1), то существует вектор $\overline{c}$ такой, что $\xi(t)=\Phi(t)\overline{c}$ для всех $t\in(a,b)$.

Доказательство теоремы2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейной однородной системы.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)z=\xi(t_0), \tag{5}$$

где вектор z - искомый.

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (1). Следовательно, система (5) имеет единственное решение $z=\overline{c}$.

Положим

$$\eta(t)=\Phi(t)\overline{c}.$$

$x=\eta(t)$ - решение системы (1), и, согласно (5), $\eta(t_0)=\xi(t_0)$, то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши для системы (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

Общее выражение для фундаментальной матрицы системы (1).

Теорема 3. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (1).

1). Если B - произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det B\neq 0$, то матрица $\Psi(t)=\Phi(t)B$ - тоже фундаментальная матрица решений системы (1).

2). Если $\Psi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1), то существует такая квадратная матрица B порядка n, $\det B\neq 0$, что $\Psi(t)=\Phi(t)B$ для всех $t\in(a,b)$.

Доказательство теоремы3. Докажем первое утверждение. $\Phi(t)$ есть решение матричного уравнения (3), $\Psi(t)=\Phi(t)B$, тогда

$$\dot{\Psi}(t)=\dot{\Phi}(t)B=P(t)\Phi(t)B=P(t)\Psi(t),$$

то есть $\Psi(t)$ - тоже решение уравнения (3).

Кроме того, $\det\Psi(t)=\det\Phi(t)\cdot\det B\neq 0$ для всех $t\in(a,b)$. Следовательно, $\Psi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1).

Докажем второе утверждение. Пусть $\Psi(t)$ - фундаментальная матрица решений (1). Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и положим

$$B=\Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0).$$

$\det B=\det\Phi^{-1}(t_0)\cdot\det\Psi(t_0)\neq 0$, и по доказанному в первом пункте, матрица $X(t)=\Phi(t)B$ есть фундаментальная матрица решений системы (1).

$$X(t_0)=\Phi(t_0)B=\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0)=\Psi(t_0),$$

Следовательно, матрицы $X(t)$ и $\Psi(t)$ решают одну задачу Коши для матричного уравнения (3). Из теоремы единственности следует, что $X(t)\equiv\Psi(t)$ на интервале (a,b). Теорема доказана.

Определение 3. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1), B - произвольная квадратная матрица порядка n, $\det B\neq 0$.

Составим формулу:

$$X(t)=\Phi(t)B. \tag{6}$$

Правая часть формулы (6) называется *общим выражением для фундаментальных матриц* системы (1).

Фундаментальная матрица $X(t,t_0)$, которая при $t=t_0$ обращается в единичную матрицу, называется *фундаментальной матрицей Коши*.

Замечание. Если $\Phi(t)$ - какая-либо фундаментальная матрица решений системы (1), то $X(t,t_0)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ - фундаментальная матрица Коши.

Действительно, $X(t_0,t_0)=\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)=E$.

§5. Формулы Лиувилля.

Запишем линейную однородную систему в виде

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t) x_k, \; j = 1,2,...,n, \tag{1}$$

функции $p_{jk}(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k = 1,2,...,n$.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ - решения системы (1),

$$\varphi_m(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1m}(t) \\ ... \\ \varphi_{nm}(t) \end{pmatrix},$$

$m = 1,2,...,n$.

Вронскиан этой системы решений:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & ... & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & ... & \varphi_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & ... & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

По определению

$$W(t) = \sum_{\Delta} (-1)^{\alpha} \varphi_{1j_1}(t) ... \varphi_{nj_n}(t),$$

где знак суммы означает суммирование по правилу определителя, то есть суммирование ведется по всем перестановкам $\Delta = (j_1, j_2, ..., j_n)$ натуральных чисел $(1,2,...,n)$. При этом $\alpha = 0$, если перестановка $(j_1, j_2, ..., j_n)$ - четная, и $\alpha = 1$, если перестановка нечетная.

$$\dot{W}(t) = \sum_{\Delta} (-1)^{\alpha} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{1j_1}(t) ... \varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t) \dot{\varphi}_{sj_s}(t) \varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t) ... \varphi_{nj_n}(t) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\Delta} (-1)^{\alpha} \varphi_{1j_1}(t) ... \varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t) \dot{\varphi}_{sj_s}(t) \varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t) ... \varphi_{nj_n}(t).$$

Внутренняя сумма в последнем равенстве есть определитель, который отличается от вронскиана лишь тем, что в s-ой строке стоят производные соответствующих компонент решений системы (1).

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dot{\varphi}_{s1}(t) & \dot{\varphi}_{s2}(t) & \dots & \dot{\varphi}_{sn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-\textit{ая строка}).$$

$\varphi_m(t)$ - решения системы (1), поэтому

$$\dot{\varphi}_{sm}(t)=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{km}(t)$$

для всех $s=1,2,\dots,n$, $m=1,2,\dots,n$, следовательно,

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k2}(t) & \dots & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-\textit{ая строка}),$$

или

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{k1}(t) & \varphi_{k2}(t) & \dots & \varphi_{kn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-\textit{ая строка}),$$

Определители под знаком суммы в последней формуле при $s\neq k$ отличаются от вронскиана тем, что на месте s-ой строки у них стоит k-ая строка. И эти определители равны нулю, поскольку имеют две одинаковые строки. При $s=k$ определители под знаком суммы просто совпадают с вронскианом. Следовательно,

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)W(t),$$

или

$$\dot{W}(t)=W(t)TrP(t), \tag{2}$$

где $Tr\,P(t)$ - след матрицы $P(t)=\{p_{jk}(t)\}_{[n\times n]}$.

Интегрируя уравнение (2), получим

$$W(t) = c\exp\left(\int Tr\, P(t)\,dt\right), \tag{3}$$

или

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} TrP(\tau)\,d\tau\right), \tag{4}$$

где $t_0 \in (a,b)$.

Определение. Формулы (3) и (4) называются *формулами Лиувилля*.

Замечание. Из формул Лиувилля для линейной однородной системы легко получаются аналогичные формулы для линейного однородного уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = 0, \tag{5}$$

где функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k = 1,2,\ldots,n$.

По стандартной процедуре, описанной в начале третьей главы, с помощью обозначений

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x},\ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

уравнение (5) может быть приведено к линейной однородной системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \ldots - p_1(t)x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Формулы Лиувилля для системы (6) и, следовательно, для линейного уравнения (5) принимают вид:

$$W(t) = c\exp\left(-\int p_1(t)\,dt\right),$$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)\,d\tau\right),$$

где $t_0 \in (a,b)$.

§6. Общее решение линейной неоднородной системы.

Рассматриваем линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), \tag{1}$$

где матрица $P(t)$ и вектор $q(t)$ непрерывны при $t \in (a,b)$.

Соответствующая (1) однородная система:

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $x = \psi(t)$ - решение системы (1), а $x = \varphi(t)$ - решение системы (2), тогда $x = \varphi(t) + \psi(t)$ - решение (1).

Доказательство теоремы 1. $\psi(t)$ - решение (1), а $\varphi(t)$ - решение (2), это значит, что $\dot{\psi}(t) = P(t)\psi(t) + q(t)$ и $\dot{\varphi}(t) = P(t)\varphi(t)$ на интервале (a,b). Тогда

$$\dot{\psi}(t) + \dot{\varphi}(t) = P(t)\psi(t) + q(t) + P(t)\varphi(t) = P(t)\big(\psi(t) + \varphi(t)\big) + q(t),$$

и вектор-функция $\varphi(t) + \psi(t)$ есть решение системы (1). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\psi(t)$ - решение уравнения (1), $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (2), c - произвольный постоянный n-мерный вектор. Составим формулу:

$$x(t) = \Phi(t)c + \psi(t). \tag{3}$$

Правая часть формулы (2) называется *общим решением* системы (1).

Теорема 2. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (2). Тогда

1) для любого постоянного вектора c формула (3) дает решение (1),

2) если $x = \xi(t)$ - решение (1), то существует вектор $\overline{c}$ такой, что $\xi(t) = \Phi(t)\overline{c} + \psi(t)$ для всех $t \in (a,b)$.

Доказательство теоремы2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейной однородной системы и теоремы 1.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$ и составим линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)z+\psi(t_0)=\xi(t_0), \tag{4}$$

где вектор z - искомый.

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (2). Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z=\overline{c}$.

Положим

$$\eta(t)=\Phi(t)\overline{c}+\psi(t).$$

$x=\eta(t)$ - решение системы (1), и, согласно (4), $\eta(t_0)=\xi(t_0)$, то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши для системы (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Пусть мы знаем фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ решений системы (2). Будем искать частное решение $x=\psi(t)$ неоднородной системы (1) в виде

$$\psi(t)=\Phi(t)u(t), \tag{5}$$

где $u(t)$ - новая неизвестная вектор-функция.

Из равенства (5) и тождества $\dot{\psi}(t)=P(t)\psi(t)+q(t)$ следует, что

$$\dot{\Phi}(t)u(t)+\Phi(t)\dot{u}(t)=P(t)\Phi(t)u(t)+q(t). \tag{6}$$

Заметим, что $\dot{\Phi}(t)=P(t)\Phi(t)$, и равенство (6) можно переписать в виде

$$\Phi(t)\dot{u}(t)=q(t),$$

или

$$\dot{u}(t)=\Phi^{-1}(t)q(t),$$

следовательно,

$$u(t)=\int\Phi^{-1}(t)q(t)dt$$

(первообразная здесь может быть любая), или

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau$$

где $t_0\in(a,b)$.

Формула (3) для общего решения линейной неоднородной системы (1), с учетом равенства (5), принимает вид

$$x(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)q(t)dt. \qquad (7)$$

Решение задачи Коши

$$t=t_0,\, x=x_0,$$

для системы (1) имеет вид

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

или

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)q(\tau)d\tau, \qquad (9)$$

где $\Phi(t,t_0)$ - фундаментальная матрица Коши.

Формулы (8)-(9) называются *формулами Коши* для решения линейной неоднородной системы (1).

§7. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x}=Ax, \qquad (1)$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n.

Ищем, следуя Эйлеру, решение системы (1) в виде $x=\gamma e^{\lambda t}$, где γ - постоянный вектор размерности n, λ - скаляр.

Подставим вектор-функцию $\gamma e^{\lambda t}$ в (1):

$$\lambda\gamma e^{\lambda t}=A\gamma e^{\lambda t},$$

следовательно,

$$(A-\lambda E)\gamma=0. \qquad (2)$$

Система (2) имеет ненулевое решение, если и только если

$$\det(A-\lambda E)=0. \qquad (3)$$

Определение. Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* для системы (1), корни этого уравнения называются *характеристическими числами*.

Из равенства (2) следует, что вектор-функция $x=\gamma e^{\lambda t}$ является решением системы (1) тогда, и только тогда, когда λ - собственное число матрицы A, а γ - соответствующий этому числу собственный вектор.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – соответствующие этим числам собственные вектора.

Построим фундаментальную систему решений системы (1) методом Эйлера. Линейную независимость построенной системы докажем в следующем параграфе.

1. Если все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ вещественные и простые (то есть не кратные), то система (1) имеет фундаментальную систему решений

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t},\ \gamma_2 e^{\lambda_2 t}, ...,\ \gamma_n e^{\lambda_n t}.$$

2. Пусть все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ простые, но среди них есть комплексные.

Лемма. Если $u(t)$, $v(t)$ - вещественные вектор-функции, и комплекснозначная функция $w(t)=u(t)+iv(t)$ ($i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица) - решение системы (1), то $u(t)$ и $v(t)$ - решения системы (1).

Доказательство леммы. С одной стороны, $\dot{w}(t)=\dot{u}(t)+i\dot{v}(t)$, с другой стороны,

$$\dot{w}(t)=Aw(t)=A\big(u(t)+iv(t)\big)=Au(t)+iAv(t).$$

Поэтому $\dot{u}(t)=Au(t)$ и $\dot{v}(t)=Av(t)$, то есть $u(t)$ и $v(t)$ - решения системы (1), и лемма доказана.

Пусть $\lambda_j=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, $j\in\{1,2,...,n\}$, - собственное число матрицы A, γ_j - соответствующий λ_j собственный вектор, тогда и $\bar{\lambda}_j=\alpha-i\beta$ - собственное число матрицы A, а $\bar{\gamma}_j$ - соответствующий $\bar{\lambda}_j$ собственный вектор. Функции $\gamma_j e^{\lambda_j t}$ и $\bar{\gamma}_j e^{\bar{\lambda}_j t}$ - решения системы (1), и, согласно лемме, вещественные функции $\operatorname{Re}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ и $\operatorname{Im}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ - тоже решения системы (1). Эта пара функций в фундаментальной системе решений соответствует паре характеристических чисел λ_j и $\bar{\lambda}_j$.

3. Пусть среди корней характеристического уравнения (3) есть кратные.

Если вещественный корень λ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, имеет кратность $d \geq 2$, то решения системы (1), отвечающие в фундаментальной системе решений числу λ_j, следует искать в виде

$$x = \gamma_j(t) e^{\lambda_j t}, \tag{4}$$

где $\gamma_j(t)$ - векторный многочлен степени $(d-1)$. Существует ровно d линейно-независимых решений такого вида.

Если $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, - характеристическое число кратности d, то и $\bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ - характеристическое число кратности d. Разделяя в решениях вида (4) вещественные и мнимые части, мы получим $2d$ линейно независимых решений, отвечающих в фундаментальной системе решений паре корней характеристического уравнения λ_j и $\bar{\lambda}_j$ кратности d.

Описанным выше методом можно построить n различных решений, отвечающих n корням уравнения (5). В следующем параграфе докажем, что такая система действительно является фундаментальной, и уточним вид решений (4) в случае кратных собственных чисел матрицы A.

§8. Матричный метод интегрирования линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Сначала напомним некоторые сведения из теории матриц.

Последовательность матриц $A_k = \left\{a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}$ *сходится* к матрице $A = \left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$ при $k \to +\infty$ (пишем $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$), если $\left\|A_k - A\right\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Заметим, что $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$ если, и только если $a_{jm}^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, $m = 1, 2, ..., n$.

Ряд из матриц $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ сходится к матрице A, если сходится к A последовательность его частичных сумм. При этом пишем $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k = A$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k = A$ если, и только если $\sum_{k=1}^{s} a_{jm}^{[k]} \underset{s\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j,m \in \{1,2,...,n\}$.

Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится, и $\|A_k\| \le b_k$ для всех $k \in N$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ тоже сходится.

Пусть $A = \{a_{jm}\}_{[n\times n]}$ - постоянная матрица. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \qquad (1)$$

где $0! = 1$, $A^0 = E_{[n\times n]}$ ($E_{[n\times n]} = E$ - единичная матрица размерности n).

$\|A^k\| \le \|A\|^k$, и числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ сходится, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$, поэтому ряд (1) тоже сходится.

Определение. Сумма ряда (1) называется *экспонентой матрицы* A. Обозначение: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^A$.

Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - произвольные квадратные матрицы. Тогда, вообще говоря, e^{A+B} не равно $e^A e^B$. Но если A и B коммутируют, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - квадратные матрицы. Если $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Доказательство леммы 1. Сравним ряды

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k$$

и

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}B^m\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!(k-s)!}A^{k-s}B^s\right).$$

Очевидно, что первые два члена этих рядов (при $k=0$ и при $k=1$) совпадают.

При $k=2$ член первого ряда равен $\frac{1}{2}(A+B)^2 = \frac{1}{2}\left(A^2+AB+BA+B^2\right)$, а член второго ряда равен $\frac{1}{2}\left(A^2+2AB+B^2\right)$. Если $AB=BA$, то эти слагаемые равны между собой.

Дальнейшее доказательство ничем не отличается от доказательства тождества $e^{a+b}=e^a e^b$ в скалярном случае:

$$\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!(k-s)!}A^{k-s}B^s = \frac{1}{k!}(A+B)^k$$

для произвольного k, если $AB=BA$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - квадратные матрицы, и существует матрица $S_{[n\times n]}$ такая, что $\det S \neq 0$, и $A = SBS^{-1}$, тогда

$$e^A = S\, e^B S^{-1}.$$

Доказательство леммы 2. Оценим норму $\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k - S\,e^B S^{-1}\right\|$.

$$A^k = \left(SBS^{-1}\right)^k = SBS^{-1}SBS^{-1}...SBS^{-1} = SB^k S^{-1},$$

и

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k - Se^BS^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}SB^kS^{-1} - Se^BS^{-1}\right\| =$$

$$= \left\|S\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}B^k - e^B\right)S^{-1}\right\| \le \|S\|\cdot\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}B^k - e^B\right\|\cdot\left\|S^{-1}\right\| \underset{m\to+\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $e^A = S\,e^BS^{-1}$, и лемма доказана.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \qquad (2)$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n.

Теорема. e^{At} - фундаментальная матрица решений системы (2).

Доказательство теоремы. $A=\left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$, пусть $A^k=\left\{a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}$, тогда

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}.$$

Элементы этой матрицы - сходящиеся при всех t степенные ряды, и по определению

$$\frac{d}{dt}e^{At}=\left\{\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}=\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k=$$

$$=A\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}=A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=Ae^{At},$$

то есть e^{At} удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X}=AX,$$

и столбцы матрицы e^{At} есть решения системы (2).

$W(t)=\det e^{At}$ - вронскиан матрицы e^{At}, $W(0)=\det e^{A\cdot 0}=\det E=1$.

Следовательно, e^{At} - фундаментальная матрица решений системы (2), и теорема доказана.

Пусть B - жорданова каноническая форма матрицы A, а S - приводящая матрица, $\det S\neq 0$, и $A=SBS^{-1}$. Тогда $e^{At}=S\,e^{Bt}S^{-1}$ по лемме 2.

Найдем вид матрицы e^{Bt}.

B - блочно-диагональная матрица с блоками $B_1,B_2,...,B_d$, будем писать:

$$B=diag\left(B_1,B_2,...,B_d\right). \qquad (3)$$

$$B_s=\begin{pmatrix}\lambda_p & 0 & ... & 0 & 0\\ 1 & \lambda_p & 0 & ... & 0\\ ... & 1 & ... & ... & ...\\ ... & ... & ... & \lambda_p & 0\\ 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_p\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]},$$

$s=1,2,...,d$.

Блок B_s можно представить в виде

$$B_s = \lambda_p E_s + H_s, \tag{4}$$

где λ_p - собственное число матрицы A, E_s - единичная матрица размерности v_s, а $H_s = \{h_{jm}\}_{[v_s \times v_s]}$ - матрица, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, то есть $h_{jm} = 1$, если $m = j-1$, и $h_{jm} = 0$, если $m \neq j-1$, $j = 2,3,...,v_s$.

Из равенства (4) следует:

$$e^{B_s t} = e^{(\lambda_p E_s + H_s)t},$$

и согласно лемме 1, поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей,

$$e^{B_s t} = e^{\lambda_p E_s t} e^{H_s t}. \tag{5}$$

$$e^{\lambda_p E_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} E_s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} E_s = E_s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} = E_s e^{\lambda_p t}, \tag{6}$$

При умножении матрицы H_s на себя получается матрица $H_s^2 = \{h_{jm}^{[2]}\}$, где $h_{jm}^{[2]} = 1$, если $m = j-2$, и $h_{jm}^{[2]} = 0$, если $m \neq j-2$, $j = 3,4,...,v_s$.

Если $k \le v_s - 1$, то $H_s^k = \{h_{jm}^{[k]}\}$, где $h_{jm}^{[k]} = 1$, если $m = j-k$, и $h_{jm}^{[k]} = 0$, если $m \neq j-k$, $j = (k+1),...,v_s$.

И $H_s^k = 0$ в случае $k \ge v_s$, где $0 = 0_{[v_s \times v_s]}$ - нулевая матрица.

Поэтому

$$e^{H_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} H_s^k = E_s + tH_s + \frac{t^2}{2} H_s^2 + ... + \frac{t^{v_s - 1}}{(v_s - 1)!} H_s^{v_s - 1}. \tag{7}$$

Заметим, что ряд (7) содержит конечное число членов, поэтому сходится.

И из равенств (5)-(7) получаем:

$$e^{B_s t} = e^{\lambda_p t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & t & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dfrac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!} & \dots & \dots & t & 1 \end{pmatrix}_{[v_s \times v_s]}$$

или

$$e^{B_s t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_p t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t} & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{t^2}{2}e^{\lambda_p t} & te^{\lambda_p t} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_p t} & 0 \\ \dfrac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!}e^{\lambda_p t} & \dots & \dots & te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}_{[v_s \times v_s]} \qquad (8)$$

Из определения экспоненты матрицы и формулы (3) следует, что e^{Bt} блочно-диагональная матрица:

$$e^{Bt} = diag\left(e^{B_1 t}, e^{B_2 t}, \dots, e^{B_d t}\right), \qquad (9)$$

каждый блок этой матрицы имеет вид (8).

Умножая равенство $e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}$ на S справа, получаем:

$$e^{At}S = Se^{Bt}.$$

S - постоянная матрица, $\det S \neq 0$, и согласно теореме 3 четвертого параграфа, $e^{At}S$ - фундаментальная матрица решений системы (2), то есть $S\,e^{Bt}$ - фундаментальная матрица решений (2). Из (8) и (9) следует, что столбцы этой матрицы имеют вид

$$x = \gamma_p(t)e^{\lambda_p t},$$

где $\gamma_p(t)$ - векторный многочлен степени не выше, чем $(d-1)$, если d - кратность собственного числа λ_p матрицы A.

Этим оправдан метод Эйлера построения фундаментальной системы решений системы (2) и доказана линейная независимость решений, составляющих фундаментальную систему.

Замечание. Для нахождения частного решения $x = \psi(t)$ линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + q(t), \tag{10}$$

где $A_{[n\times n]}$ - постоянная матрица, а $q(t)$ непрерывная на R вектор-функция специального вида, существует метод неопределенных коэффициентов, аналогичный соответствующему методу для линейных неоднородных уравнений.

Приведем без доказательства теоремы этого метода (доказательство здесь аналогично доказательству соответствующих теорем для линейных уравнений).

Соответствующая (10) линейная однородная система имеет вид (2), характеристическое уравнение для системы (2):

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{11}$$

1. Пусть неоднородность системы (10) имеет вид

$$q(t) = R_m(t)e^{\lambda_0 t}, \tag{12}$$

где $R_m(t)$ - векторный многочлен степени m.

Теорема 1. Если λ_0 - не корень характеристического уравнения (11), то система (10) с нелинейностью (12) имеет решение вида

$$\psi(t) = Q_m(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $Q_m(t)$ - векторный многочлен степени m.

Теорема 2. Если λ_0 - корень характеристического уравнения (11) кратности $d \geq 1$, то система (10) с нелинейностью (12) имеет решение вида

$$\psi(t) = Q_{m+d}(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $Q_{m+d}(t)$ - векторный многочлен степени $(m+d)$.

2. Пусть неоднородность уравнения (1) имеет вид

$$q(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{13}$$

где $\tilde{R}_{m_1}(t)$ и $\hat{R}_{m_2}(t)$ - векторные многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Теорема 3. Если $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ - не корень характеристического уравнения (11), то система (10) с нелинейностью (13) имеет решение вида

$$\psi(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m=\max(m_1,m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$- векторные многочлены степени m.

Теорема 4. Если $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ - корень характеристического уравнения (11) кратности $d\geq 1$, то система (10) с нелинейностью (13) имеет решение вида

$$\psi(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_{m+d}(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_{m+d}(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m=\max(m_1,m_2)$, $\tilde{Q}_{m+d}(t)$ и $\hat{Q}_{m+d}(t)$- векторные многочлены степени $(m+d)$.

§9. Линейная однородная система с периодическими коэффициентами.

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x}=A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$ - квадратная матрица размерности n, непрерывная на всей числовой оси, периодическая с периодом $\omega>0$:

$$A(t+\omega)=A(t) \text{ для всех } t\in R.$$

Свойства фундаментальных матриц решений системы (1).

1. Если $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1), то $\Phi(t+\omega)$ - тоже фундаментальная матрица.

Доказательство. $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (1), поэтому $\det\Phi(t)\neq 0$ для всех $t\in R$, и

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t).$$

Следовательно, $\det\Phi(t+\omega)\neq 0$ для всех $t\in R$, и

$$\dot{\Phi}(t+\omega)=A(t+\omega)\Phi(t+\omega)=A(t)\Phi(t+\omega),$$

то есть $\Phi(t+\omega)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X}=A(t)X\,, \tag{2}$$

и значит, является фундаментальной матрицей решений (1). Доказательство закончено.

2. Существует квадратная матрица B порядка n, $\det B\neq 0$, такая, что для всех $t\in R$

$$\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B.$$

Это свойство следует из теоремы 3 четвертого параграфа об общем виде фундаментальных матриц системы.

3. Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы решений системы (1), $\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B$, а $\Psi(t+\omega)=\Psi(t)\tilde{B}$, то существует матрица S такая, что $\det S\neq 0$, и $\tilde{B}=S^{-1}BS$.

Доказательство. $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы решений (1), и по теореме об общем виде фундаментальных матриц, существует матрица S такая, что $\det S\neq 0$, и $\Psi(t)=\Phi(t)S$. Тогда

$$\Psi(t+\omega)=\Phi(t+\omega)S=\Phi(t)BS=\Phi(t)S\,S^{-1}BS=\Psi(t)S^{-1}BS\,,$$

с другой стороны, $\Psi(t+\omega)=\Psi(t)\tilde{B}$, следовательно, $\tilde{B}=S^{-1}BS$, и доказательство закончено.

Замечание 1. Из третьего свойства следует, что у матриц B, порождаемых различными фундаментальными матрицами, одинаковый набор собственных чисел и одинаковая жорданова форма.

Логарифм матрицы.

Определение. Матрица B называется *логарифмом матрицы* A, если $A = e^{B}$. Обозначение: $B = Ln\,A$.

Лемма. Если $\det A \neq 0$, то существует $Ln\,A$.

Доказательство леммы. Пусть C - жорданова каноническая форма матрицы A, $A = SCS^{-1}$, $\det S \neq 0$.

C - блочно-диагональная матрица с блоками $C_1, C_2, ..., C_d$:

$$C = diag\left(C_1, C_2, ..., C_d\right).$$

Пусть v_s - размерность блока C_s, $s = 1,2,...,d$. Тогда блок C_s можно представить в виде

$$C_s = \lambda_p E_s + H_s,$$

где λ_p - собственное число матрицы A, E_s - единичная матрица размерности v_s, матрица H_s - квадратная матрица размерности v_s, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$\det A \neq 0$, поэтому $\lambda_p \neq 0$, и

$$C_s = \lambda_p \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right).$$

По аналогии с рядом Тейлора для скалярной функции $\ln\left(1 + z\right)$ положим

$$Ln\,C_s = E_s\,Ln\,\lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k, \qquad (3)$$

где

$$Ln\lambda_p = Ln\left|\lambda_p\right| + i\left(\arg\lambda_p + 2\pi m\right),\ m \in Z. \qquad (4)$$

Заметим, что матрица $Ln\,C_s$ определена неоднозначно из-за неоднозначности определения $Ln\,\lambda_p$.

Ряд, стоящий в правой части (3) сходится, поскольку имеет конечное число членов ($H_s^k = 0$, если $k \geq v_s$, как показано выше).

Проверим, что формула (3) действительно определяет $Ln\,C_s$.

$$e^{LnC_s} = \exp\left(E_s\, Ln\lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right),$$

по лемме 1 предыдущего параграфа (поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей)

$$e^{LnC_s} = \exp\left(E_s\, Ln\lambda_p \right) \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right). \qquad (5)$$

Поскольку скалярные и матричные ряды для функций e^z и $\ln(1+z)$ задаются внешне одинаковыми формулами, то (аналогично доказательству в скалярном случае) не трудно показать, что вторым множителем в формуле (5) стоит $\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right)$. Поэтому

$$e^{LnC_s} = E_s e^{Ln\lambda_p} \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right) = E_s \lambda_p + H_s = C_s,$$

и формула (3) дает определение логарифма для жорданова блока C_s.

Положим

$$Ln\, C = diag\left(Ln\, C_1, Ln\, C_2, ..., Ln\, C_d \right), \qquad (6)$$

и

$$Ln\, A = S\, Ln\, C\, S^{-1}. \qquad (7)$$

Проверим, что такое определение логарифма матрицы корректно.

По лемме 2 предыдущего параграфа

$$e^{Ln\, A} = e^{S\, Ln\, C\, S^{-1}} = S\, e^{Ln\, C}\, S^{-1},$$

используя формулы (6), (7) и определение матрицы C, получаем

$$e^{Ln\, A} = S\, e^{diag\left(Ln\, C_1, Ln\, C_2, ..., Ln\, C_d \right)} S^{-1} = S\, diag\left(e^{Ln\, C_1}, e^{Ln\, C_2}, ..., e^{Ln\, C_d} \right) S^{-1} =$$
$$= S\, diag\left(C_1, C_2, ..., C_d \right) S^{-1} = S\, C S^{-1} = A.$$

Таким образом, формулы (3), (6), (7) определяют $Ln\, A$, лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A. Тогда из определения логарифма следует, что $Ln\lambda_1, Ln\lambda_2, ..., Ln\lambda_n$ - собственные числа матрицы $Ln\, A$.

Замечание 3. Как уже отмечалось в доказательстве леммы, $Ln A$ определяется неоднозначно, в силу (4). И у вещественной матрицы не всегда существует вещественный логарифм.

Утверждение. Вещественная матрица A, $\det A \neq 0$, имеет вещественный логарифм, если среди ее собственных чисел нет вещественных отрицательных, либо каждому отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы A четное число одинаковых клеток Жордана.

Доказательство утверждения. Если все собственные числа матрицы A вещественные и положительные, то $Ln A$ может быть вещественным (для каждого собственного числа λ_p нужно положить в формуле (4) $m = 0$).

Если среди собственных чисел A есть комплексные, то комплексно-сопряженным собственным числам λ_p и $\bar{\lambda}_p$ соответствуют комплексно-сопряженные клетки Жордана $C_s(\lambda_p)$ и $\bar{C}_s(\bar{\lambda}_p)$, и действуя стандартным алгебраическим преобразованием на матрицу $diag\left(LnC_s(\lambda_p), Ln\bar{C}_s(\bar{\lambda}_p)\right)$, получим вещественную каноническую форму этой матрицы.

Если среди собственных чисел матрицы A есть отрицательные, и каждому отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы A четное число одинаковых клеток Жордана, то взяв пару одинаковых клеток Жордана, отвечающих собственному числу $\lambda_p < 0$, и положив в формуле (4) для одной клетки $Ln\lambda_p = Ln|\lambda_p| + i\pi$, а для другой - $Ln\lambda_p = Ln|\lambda_p| - i\pi$, мы получим пару комплексно-сопряженных клеток Жордана, и как в предыдущем случае, можем построить вещественную матрицу $Ln A$. Утверждение доказано.

Теорема Флоке. Теорема о мультипликаторах.

Теорема 1 (теорема Флоке). Любая фундаментальная матрица системы (1) представима в виде

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}, \tag{8}$$

где R - постоянная матрица, а $Q(t)$ - матрица ω-периодическая.

Доказательство теоремы 1. По второму свойству фундаментальных матриц системы (1), существует матрица B, $\det B \neq 0$, такая, что

$$\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B$$

для всех вещественных t.

Положим $R=\frac{1}{\omega}Ln\,B$, $Q(t)=\Phi(t)e^{-Rt}$, и докажем, что $Q(t)$ - матрица ω-периодическая.

Заметим, что $Be^{-R\omega}$ - единичная матрица, и

$$Q(t+\omega)=\Phi(t+\omega)e^{-R(t+\omega)}=\Phi(t)Be^{-R\omega}e^{-Rt}=\Phi(t)e^{-Rt}=Q(t).$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Из замечания 3 следует, что матрица R в представлении (8), вообще говоря, комплексная. Этого можно избежать, если в теореме от матрицы $Q(t)$ требовать 2ω-периодичности, а не ω-периодичности.

Действительно,

$$\Phi(t+2\omega)=\Phi(t+\omega)B=\Phi(t)B^2.$$

Матрица B^2 не имеет вещественных отрицательных собственных чисел, поэтому существует вещественная матрица $\tilde{R}=\frac{1}{2\omega}Ln\,B^2$. Положим $\tilde{Q}(t)=\Phi(t)e^{-\tilde{R}t}$, тогда

$$\tilde{Q}(t+2\omega)=\Phi(t+2\omega)e^{-\tilde{R}(t+2\omega)}=\Phi(t)B^2e^{-2\tilde{R}\omega}e^{-\tilde{R}t}=\Phi(t)e^{-\tilde{R}t}=Q(t),$$

то есть $\tilde{Q}(t)$ - матрица 2ω-периодическая, и $\Phi(t)=\tilde{Q}(t)e^{\tilde{R}t}$.

Замечание 5. Из представления (8) следует, что характер поведения решений системы (1) при $t\to+\infty$ зависит от поведения на бесконечности элементов матрицы e^{Rt}.

e^{Rt} - фундаментальная матрица решений системы

$$\dot{z}=Rz, \tag{9}$$

а характер поведения решений системы (9) (следовательно, и системы (1)) при $t\to+\infty$ зависит от собственных чисел матрицы R.

Если $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ - собственные числа матрицы B, то из определения логарифма следует, что

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega} Ln\,\rho_1,\ \mu_2 = \frac{1}{\omega} Ln\,\rho_2, \ldots,\ \mu_n = \frac{1}{\omega} Ln\,\rho_n$$

- собственные числа матрицы R.

Пусть $\Phi(t) = \Phi(t,0)$ - фундаментальная матрица Коши, $\Phi(0) = E$. Положим $t = 0$ в равенстве $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$, тогда $B = \Phi(\omega)$.

Определение. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица системы (1), такая, что $\Phi(0) = E$. Матрица $\Phi(\omega)$ называется *матрицей монодромии*, а ее собственные числа называются *мультипликаторами* системы (1).

Теорема 2. ρ - мультипликатор системы (1) если, и только если у системы (1) существует нетривиальное решение $x = \xi(t)$ такое, что

$$\xi(t+\omega) = \rho\xi(t) \tag{10}$$

для всех вещественных t.

Доказательство теоремы 2. Пусть ρ - мультипликатор системы (1), тогда по определению, ρ - собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица (1), и $\Phi(0) = E$. Пусть собственному числу ρ соответствует собственный вектор S, тогда

$$\left(\Phi(\omega) - \rho E\right)S = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим решение $x = \xi(t)$ системы (1) с начальными условиями $\xi(0) = S$. Это решение можно записать в виде

$$\xi(t) = \Phi(t)\xi(0). \tag{12}$$

Докажем, что $\xi(t)$ - искомое решение.

$$\xi(t+\omega) = \Phi(t+\omega)\xi(0) = \Phi(t)\Phi(\omega)\xi(0),$$

и согласно (11),

$$\xi(t+\omega) = \Phi(t)\rho\xi(0) = \rho\Phi(t)\xi(0) = \rho\xi(t),$$

то есть решение $x = \xi(t)$ удовлетворяет условию (10).

Пусть теперь решение $x = \xi(t)$ системы (1) удовлетворяет условию (10), докажем, что ρ - мультипликатор (1).

Сначала положим $t = 0$ в равенстве (10), получим: $\xi(\omega) = \rho\xi(0)$.

Теперь положим $t = \omega$ в равенстве (12), тогда $\xi(\omega) = \Phi(\omega)\xi(0)$.

Из двух последних равенств следует, что

$$\Phi(\omega)\xi(0) = \rho\xi(0),$$

то есть ρ - собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, а $\xi(0)$ - отвечающий ρ собственный вектор. Теорема доказана.

Определение. Решение системы (1), удовлетворяющее условию (10), называется *нормальным решением*.

Следствие 1. ω-периодическая система (1) имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный 1.

Следствие 2. ω-периодическая система (1) имеет 2ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный (-1).

Действительно, из равенства (10) при $\rho = -1$ следует, что

$$\xi(t + 2\omega) = -\xi(t + \omega) = \xi(t).$$

Приводимость системы с периодическими коэффициентами.

Определение. Система с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = P(t)x \tag{13}$$

называется *приводимой к системе с постоянными коэффициентами*

$$\dot{z} = Cz, \tag{14}$$

или просто *приводимой*, если существует преобразование

$$x = L(t)z, \tag{15}$$

где матрица $L(t)$ непрерывно дифференцируема и обратима, и матрицы $L(t)$, $L^{-1}(t)$, $dL(t)/dt$ ограничены, приводящее систему (13) к системе (14).

Матрица $L(t)$ называется *матрицей Ляпунова*, преобразование (15) называется *преобразованием Ляпунова*.

Теорема 3 (теорема Ляпунова). Система (1) с периодическими коэффициентами приводима.

Доказательство теоремы 3. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (1) представима в виде (8). Докажем, что $Q(t)=\Phi(t)e^{-Rt}$ - матрица Ляпунова.

$Q(t)$ - непрерывно дифференцируемая и обратимая, поскольку $\det Q(t)=\det\Phi(t)\cdot\det e^{-Rt}\neq 0$.

$Q(t)$, $Q^{-1}(t)$, $dQ(t)/dt$ - матрицы ω-периодические, определенные для всех вещественных t, следовательно, ограниченные.

Сделаем в системе (1) замену $x=Q(t)z$, или $x=\Phi(t)e^{-Rt}z$.

С одной стороны,

$$\dot{x}=\dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z+\Phi(t)(-R)e^{-Rt}z+\Phi(t)e^{-Rt}\dot{z},$$

с другой стороны,

$$\dot{x}=A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z,$$

следовательно,

$$\dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z+\Phi(t)e^{-Rt}(-R)z+\Phi(t)e^{-Rt}\dot{z}=A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z. \qquad (16)$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет соответствующему системе (1) матричному уравнению, то есть

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t),$$

поэтому (16) можно переписать в виде

$$\Phi(t)e^{-Rt}(-Rz+\dot{z})=0.$$

Умножая последнее равенство на матрицу $e^{Rt}\Phi^{-1}(t)$ слева, получаем систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}=Rz.$$

Теорема доказана.