§8. Матричный метод интегрирования линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Сначала напомним некоторые сведения из теории матриц.

Последовательность матриц $A_k = \left\{a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}$ ($k \in N$) *сходится* к матрице $A = \left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$ при $k \to +\infty$ (пишем $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$), если $\left\|A_k - A\right\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Нетрудно проверить, что $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$ если, и только если $a_{jm}^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j, m \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ряд из матриц $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ *сходится* к матрице A, если сходится к A последовательность его частичных сумм. При этом пишем $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = A$.

Ясно, что $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = A$ если, и только если $\sum\limits_{k=0}^{s} a_{jm}^{[k]} \underset{s\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j, m \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ряд из матриц $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ *сходится абсолютно*, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left\|A_k\right\|$. При этом из абсолютной сходимости матричного ряда следует его сходимость.

Для матричных рядов существует аналог признака Вейерштрасса. Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится, и $\left\|A_k\right\| \le b_k$ для всех $k \in N$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ тоже сходится, причем абсолютно. При этом говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Пусть $A = \left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$ - постоянная матрица. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k , \qquad (1)$$

где $0!=1$, $A^0 = E_{[n\times n]}$ ($E_{[n\times n]} = E$ - единичная матрица размерности n).

Поскольку $\left\|A^k\right\| \le \left\|A\right\|^k$, а числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left\|A\right\|^k$ сходится к $e^{\|A\|}$, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится абсолютно.

Определение. Сумма ряда (1) называется *экспонентой матрицы* A. Обозначение: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^A$.

Если $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - произвольные квадратные матрицы, то, вообще говоря, e^{A+B} не равно $e^A e^B$.

Упражнение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $e^{A+B} = \begin{pmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{pmatrix}$, а $e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Но если A и B коммутируют, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - квадратные матрицы. Если $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Доказательство леммы 1. Сравним ряды

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(A+B\right)^k$$

и

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} B^m\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!\left(k-s\right)!} A^{k-s} B^s\right).$$

Очевидно, что первые два члена этих рядов (при $k=0$ и при $k=1$) совпадают.

При $k=2$ член первого ряда равен $\frac{1}{2}\left(A+B\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A^2 + AB + BA + B^2\right)$, а член второго ряда равен $\frac{1}{2}\left(A^2 + 2AB + B^2\right)$. Если $AB = BA$, то эти слагаемые равны между собой.

Для доказательства равенства членов этих рядов при $k \geq 3$, достаточно доказать, что

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} A^{k-s} B^{s} = \frac{1}{k!}(A+B)^{k},$$

то есть

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!(k-s)!} A^{k-s} B^{s} = (A+B)^{k}.$$

Последнее равенство хорошо известно в скалярном случае (формула бинома Ньютона). Доказательство этой формулы в случае, когда A и B - коммутирующие матрицы, ничем не отличается от скалярного случая.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ - квадратные матрицы, и существует матрица $S_{[n\times n]}$ такая, что $\det S \neq 0$, и $A = SBS^{-1}$, тогда

$$e^{A} = S\, e^{B} S^{-1}.$$

Доказательство леммы 2. Оценим норму $\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k} - S\, e^{B} S^{-1} \right\|$.

$$A^{k} = \left(SBS^{-1}\right)^{k} = SBS^{-1}SBS^{-1}...SBS^{-1} = SB^{k}S^{-1},$$

и

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k} - Se^{B}S^{-1} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} SB^{k}S^{-1} - Se^{B}S^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| S\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^{k} - e^{B} \right) S^{-1} \right\| \leq \|S\| \cdot \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^{k} - e^{B} \right\| \cdot \left\| S^{-1} \right\| \underset{m\to+\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $e^{A} = S\, e^{B} S^{-1}$, и лемма доказана.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n.

Теорема. e^{At} - фундаментальная матрица решений системы (2).

Доказательство теоремы. По определению экспоненты

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k .$$

Элементы этой матрицы есть сходящиеся при всех $t \in R$ степенные ряды, что нетрудно доказать, например, используя признак Даламбера сходимости рядов. Эти ряды можно почленно дифференцировать, поэтому

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k .$$

Матрицу A в последнем равенстве можно вынести за знак суммы, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k$ сходится абсолютно для всех $t \in R$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{At},$$

то есть e^{At} удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X} = AX ,$$

и столбцы матрицы e^{At} есть решения системы (2).

Вронскиан этих решений равен $W(t) = \det e^{At}$.

Заметим, что $W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E = 1$, и эти решения линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений.

Следовательно, e^{At} - фундаментальная матрица решений системы (2). Теорема доказана.

Пусть J - жорданова каноническая форма матрицы A, а S - приводящая матрица, $\det S \neq 0$, и $A = S\,J\,S^{-1}$. Тогда $e^{At} = S\,e^{Jt}S^{-1}$ по лемме 2.

Найдем вид матрицы e^{Jt}.

Известно, что

$$J = diag\left(J_1, J_2, ..., J_d\right) \tag{3}$$

- блочно-диагональная матрица с блоками $J_1, J_2, ..., J_d$, где

$$J_s = \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_p & 0 & ... & 0 \\ ... & 1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_p \end{pmatrix}_{[v_S \times v_S]} \quad , \; s = 1,2,...,d .$$

По диагонали блока J_s стоит собственное число λ_p матрицы A, v_s - размерность этого блока Жордана.

Если $v_s = 1$, то блок J_s будем называть *простым*, в противном случае – *кратным*.

Матрицу J_s можно представить в виде

$$J_s = \lambda_p E_s + H_s , \tag{4}$$

где E_s - единичная матрица размерности v_s, а $H_s = \left\{ h_{jm} \right\}_{[v_S \times v_S]}$ - матрица, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, то есть $h_{jm} = 1$, если $m = j-1$, и $h_{jm} = 0$, если $m \neq j-1$, $j = 2,3,...,v_s$.

Из равенства (4) следует, что

$$e^{J_S t} = e^{\left(\lambda_p E_S + H_S\right)t},$$

и согласно лемме 1, поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей,

$$e^{J_S t} = e^{\lambda_p E_S t} e^{H_S t} . \tag{5}$$

$$e^{\lambda_p E_S t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t\right)^k}{k!} E_s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t\right)^k}{k!} E_s = E_s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t\right)^k}{k!} = E_s e^{\lambda_p t} , \tag{6}$$

При умножении матрицы H_s на себя получается матрица $H_s^2 = \left\{ h_{jm}^{[2]} \right\}$, где $h_{jm}^{[2]} = 1$, если $m = j-2$, и $h_{jm}^{[2]} = 0$, если $m \neq j-2$, $j = 3,4,...,v_s$.

Если $k \le v_s - 1$, то $H_s^k = \left\{ h_{jm}^{[k]} \right\}$, где $h_{jm}^{[k]} = 1$, если $m = j-k$, и $h_{jm}^{[k]} = 0$, если $m \neq j-k$, $j = (k+1),...,v_s$.

И, наконец, $H_s^k = 0$ в случае $k \geq v_s$, где $0 = 0_{[v_s \times v_s]}$ - нулевая матрица.

Поэтому

$$e^{H_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} H_s^k = E_s + tH_s + \frac{t^2}{2!} H_s^2 + \ldots + \frac{t^{v_s - 1}}{(v_s - 1)!} H_s^{v_s - 1}. \qquad (7)$$

Заметим, что ряд (7) содержит конечное число членов, и $e^{H_s t}$ является матричным многочленом.

И из равенств (5)-(7) получаем:

$$e^{J_s t} = e^{\lambda_p t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \frac{t^{v_s - 1}}{(v_s - 1)!} & \ldots & \ldots & t & 1 \end{pmatrix}_{[v_s \times v_s]}$$

или

$$e^{J_s t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_p t} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_p t} & te^{\lambda_p t} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & e^{\lambda_p t} & 0 \\ \frac{t^{v_s - 1}}{(v_s - 1)!} e^{\lambda_p t} & \ldots & \ldots & te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}_{[v_s \times v_s]} \qquad (8)$$

Из определения экспоненты матрицы и формулы (3) следует, что e^{Jt} есть блочно-диагональная матрица

$$e^{Jt} = diag\left(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \ldots, e^{J_d t}\right), \qquad (9)$$

где каждый блок имеет вид (8).

Умножая равенство $e^{At} = Se^{Jt} S^{-1}$ на S справа, получаем:

$$e^{At}S = Se^{Jt}.$$

Поскольку $\det S \neq 0$, то согласно теореме 3 четвертого параграфа, $e^{At}S$ также будет фундаментальной матрицей решений системы (2), откуда следует, что и $S e^{Jt}$ будет фундаментальной матрицей решений (2).

Столбцы матрицы $S e^{Jt}$ образуют фундаментальную систему решений системы (2). Из (8) и (9) следует, что эти решения имеют вид

$$x = \gamma_p(t) e^{\lambda_p t}, \tag{10}$$

где $\gamma_p(t)$ - векторный многочлен степени не выше, чем $(v_s - 1)$.

Пусть λ_p - собственное число матрицы A, алгебраическая кратность которого равна $d_p \geq 2$. Заметим, что суммарная размерность всех блоков J_s в матрице J, отвечающих λ_p, равна d_p. И в построенной фундаментальной системе решений существует ровно d_p решений вида (10), отвечающих кратному собственному числу λ_p.

Тем самым обоснован метод построения фундаментальной системы решений, описанный в предыдущем параграфе, для случая кратных корней характеристического уравнения.

Если среди характеристических чисел матрицы A есть комплексные, то в том же параграфе дан способ «овеществления» построенной комплекснозначной фундаментальной системы решений.

Замечание. Для нахождения частного решения $x = \psi(t)$ линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + q(t), \tag{11}$$

где $A_{[n\times n]}$ - постоянная матрица, а $q(t)$ непрерывная на R вектор-функция специального вида, существует метод неопределенных коэффициентов, аналогичный соответствующему методу для линейных неоднородных уравнений.

Приведем без доказательства теоремы этого метода (доказательство здесь аналогично доказательству соответствующих теорем для линейных уравнений).

Соответствующая (11) линейная однородная система имеет вид (2), характеристическое уравнение для системы (2):

$$\det\left(A-\lambda E\right)=0\,. \tag{12}$$

1. Пусть неоднородность системы (11) имеет вид

$$q(t)=R_m(t)e^{\lambda_0 t}\,, \tag{13}$$

где $R_m(t)$ - векторный многочлен степени m.

Теорема 1. Если λ_0 - не корень характеристического уравнения (12), то система (11) с нелинейностью (13) имеет единственное решение вида

$$\psi(t)=Q_m(t)e^{\lambda_0 t}\,,$$

где $Q_m(t)$ - векторный многочлен степени m.

Теорема 2. Если λ_0 - кратный корень характеристического уравнения (12), то есть собственное число матрицы A кратности $d\geq 1$, то система (11) с нелинейностью (13) имеет решение вида

$$\psi(t)=Q_{m+d}(t)e^{\lambda_0 t}\,,$$

где $Q_{m+d}(t)$ - векторный многочлен степени не выше, чем $(m+d)$.

Можно доказать, что на самом деле степень многочлена $Q_{m+d}(t)$ не превышает $(m+\nu_0)$, где ν_0 - максимальная из размерностей всех клеток Жордана, отвечающих в жордановой форме матрицы A собственному числу λ_0.

2. Пусть неоднородность уравнения (11) имеет вид

$$q(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{14}$$

где $\tilde{R}_{m_1}(t)$ и $\hat{R}_{m_2}(t)$ - векторные многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Теорема 3. Если $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ - не корень характеристического уравнения (12), то система (11) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$\psi(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$ - векторные многочлены степени m.

Теорема 4. Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ - корень характеристического уравнения (12) кратности $d \geq 1$, то система (11) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$\psi(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_{m+d}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_{m+d}(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_{m+d}(t)$ и $\hat{Q}_{m+d}(t)$ - векторные многочлены степени не выше, чем $(m+d)$.

§ 9. Асимптотическое поведение решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \qquad (1)$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n, $t \in R$, $x \in R^n$.

Во многих прикладных задачах большую роль играет вопрос об асимптотическом поведении решений линейной системы при $t \to +\infty$. Важно знать такие свойства решений как стремление к нулю при $t \to +\infty$, ограниченность или неограниченность.

Поскольку e^{At} - фундаментальная матрица решений системы (1), то каждое решение системы может быть представлено в виде $x(t) = e^{At}c$, где c - постоянный вектор. Следовательно, поведение на бесконечности решений (1) определяется свойствами матрицы e^{At}.

Ясно, что все решения системы (1) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, если и только если $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ (то есть каждая компонента матрицы e^{At} стремится к нулю при $t \to +\infty$).

Все решения системы (1) ограничены на промежутке $[0, +\infty)$, если и только если $\left\|e^{At}\right\| < +\infty$ на этом промежутке (то есть каждая компонента матрицы e^{At} ограничена на $[0, +\infty)$).

И наконец, существуют неограниченные на промежутке $[0,+\infty)$ решения системы (1), если $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ (то есть существует хотя бы одна компонента матрицы e^{At}, которая стремится к бесконечности при $t\to+\infty$).

Докажем некоторые простые свойства матрицы e^{At} при $t\ge 0$.

Пусть J - жорданова каноническая форма матрицы A, $A=S\,J\,S^{-1}$, $\det S\ne 0$.

Лемма 1.

1. Матрица e^{At} - ограничена на промежутке $[0,+\infty)$, если и только если на этом промежутке ограничена матрица e^{Jt}.
2. $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ тогда и только тогда, когда $\left\|e^{Jt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Доказательство леммы. Согласно лемме 2 восьмого параграфа, если $A=S\,J\,S^{-1}$, то $e^{At}=S\,e^{Jt}S^{-1}$, следовательно,

$$\left\|e^{At}\right\|\le\|S\|\cdot\left\|e^{Jt}\right\|\cdot\left\|S^{-1}\right\|, \qquad (2)$$

и из ограниченности матрицы e^{Jt} при $t\in[0,+\infty)$ следует ограниченность e^{At}, поскольку S и S^{-1} - постоянные матрицы.

Если $\left\|e^{Jt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, то из оценки (2) следует, что и $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Аналогично доказывается, что из ограниченности матрицы e^{At} при $t\in[0,+\infty)$ следует ограниченность e^{Jt}, поскольку $e^{Jt}=S^{-1}e^{At}S$.

И, кроме того, если $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, то и $\left\|e^{Jt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Лемма доказана.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ - собственные числа матрицы A, каждое из которых выписано столько раз, какова его кратность.

Теорема 1 (о стремлении к нулю фундаментальной матрицы).

Норма матрицы e^{At} стремится к нулю при $t\to+\infty$, если и только если $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ для всех $j=1,2,\ldots,n$.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме, достаточно доказать теорему для нормы матрицы e^{Jt}.

Как следует из предыдущего параграфа, каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$.

Заметим, что согласно формуле Эйлера $\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right| = \frac{t^k}{k!}e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t}$, и эта величина стремится к нулю при $t \to +\infty$, если и только если $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$.

Таким образом, все элементы матрицы e^{Jt} стремятся к нулю при $t \to +\infty$ (то есть $\left\|e^{Jt}\right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$), если и только если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Теорема доказана.

Теорема 2 (об ограниченности фундаментальной матрицы).

Норма матрицы e^{At} ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, если и только если $\mathrm{Re}\,\lambda_j \le 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, и всем собственным числам с нулевыми вещественными частями в жордановой форме матрицы A соответствуют лишь одномерные (простые) клетки Жордана.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме, достаточно доказать теорему для нормы матрицы e^{Jt}.

Как показано выше, каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$. При этом $\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right| = \frac{t^k}{k!}e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t}$.

Если собственное число λ_j таково, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, то $\frac{t^k}{k!}e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ для всех $k \in \{0\} \cup N$, и $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$ есть величина, ограниченная при $t \ge 0$.

Если λ_j таково, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$, то $\frac{t^k}{k!}e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t} \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$ (даже для $k = 0$), и в матрице e^{Jt} существует неограниченный элемент.

Если $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечают лишь одномерные клетки Жордана, то каждая такая клетка представляет собой один элемент, равный $e^{\lambda_j t}$. При этом $\left|e^{\lambda_j t}\right| = e^0 = 1$, и этот элемент есть величина ограниченная.

Если $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечает клетка Жордана размерности больше единицы, то матрица e^{Jt} имеет элемент, равный $te^{\lambda_j t}$. Этот элемент неограничен при $t \ge 0$, поскольку $\left|te^{\lambda_j t}\right| = t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$.

Таким образом, все элементы матрицы e^{Jt} ограничены на промежутке $\left[0,+\infty\right)$ (то есть ограничена норма матрицы e^{Jt}) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ для всех $j = 1,2,...,n$, и всем собственным числам с нулевыми вещественными частями в матрице J соответствуют лишь одномерные клетки Жордана. Теорема доказана.

Теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3 (о неограниченности фундаментальной матрицы).

Матрица e^{At} неограничена по норме на промежутке $\left[0,+\infty\right)$, если и только если среди собственных чисел матрицы A существует хотя бы одно число с положительной вещественной частью или хотя бы одно число с нулевой вещественной частью, которому в жордановой форме матрицы A соответствует клетка Жордана размерности больше единицы.

Оценим теперь норму фундаментальной матрицы e^{At} с помощью собственных чисел матрицы A.

Теорема 4 (об оценке нормы фундаментальной матрицы).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A, каждое из которых выписано столько раз, какова его кратность.

Тогда для любого $\delta > \max\limits_{j=1,2,...,n}\left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$ существует константа $K \ge 1$ такая, что

$$\left\|e^{At}\right\| \le Ke^{\delta t}.$$

Доказательство теоремы 4. Фиксируем $\delta > \max\limits_{j=1,2,...,n}\left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$.

Собственные числа матрицы $B = A - \delta E$ равны $\mu_j = \lambda_j - \delta$, и $\operatorname{Re}\mu_j < 0$ для всех $j = 1,2,...,n$. Следовательно, $\left\|e^{Bt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ согласно теореме 1. Тогда

$$e^{At} = e^{Bt+\delta Et} = e^{Bt} e^{\delta Et} = e^{Bt} E e^{\delta t} = e^{Bt} e^{\delta t}. \tag{3}$$

Пусть $K = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left\| e^{Bt} \right\|$. Заметим: $K \ge 1$, поскольку $\left\| e^{Bt} \right\| = 1$ при $t = 0$.

Из равенства (3) следует, что $\left\| e^{At} \right\| \le K e^{\delta t}$. Теорема доказана.

§10. Линейная однородная система с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$ - квадратная матрица размерности n, непрерывная на всей числовой оси, периодическая с периодом $\omega > 0$:

$$A(t+\omega) = A(t) \text{ для всех } t \in R.$$

Свойства фундаментальных матриц решений системы (1).

1. Если $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (1), то $\Phi(t+\omega)$ - тоже фундаментальная матрица.

Доказательство. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений (1), поэтому $\det \Phi(t) \ne 0$ для всех $t \in R$, и

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Следовательно, $\det \Phi(t+\omega) \ne 0$ для всех $t \in R$, и

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega),$$

то есть $\Phi(t+\omega)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{2}$$

и значит, является фундаментальной матрицей решений (1). Доказательство закончено.

2. Существует квадратная матрица B порядка n, $\det B \neq 0$, такая, что для всех $t \in R$

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B.$$

Это свойство следует из теоремы 3 четвертого параграфа об общем виде фундаментальных матриц системы.

3. Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы решений системы (1), $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$, а $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\tilde{B}$, то существует матрица S такая, что $\det S \neq 0$, и $\tilde{B} = S^{-1}BS$.

Доказательство. $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - фундаментальные матрицы решений (1), и по теореме об общем виде фундаментальных матриц, существует матрица S такая, что $\det S \neq 0$, и $\Psi(t) = \Phi(t)S$. Тогда

$$\Psi(t+\omega) = \Phi(t+\omega)S = \Phi(t)BS = \Phi(t)S\,S^{-1}BS = \Psi(t)S^{-1}BS,$$

с другой стороны, $\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\tilde{B}$, следовательно, $\Psi(t)S^{-1}BS = \Psi(t)\tilde{B}$.

Фундаментальная матрица всегда обратима. Умножая обе части последнего равенства на $\Psi^{-1}(t)$ слева, получим нужное равенство $\tilde{B} = S^{-1}BS$.

Доказательство закончено.

Замечание 1. Из третьего свойства следует, что у матриц B и $\tilde{B}$, порождаемых различными фундаментальными матрицами, одинаковый набор собственных чисел и одинаковая жорданова форма.

Теорема о мультипликаторах.

Рассмотрим одну из фундаментальных матриц системы (1), а именно фундаментальную матрицу Коши $\Phi(t) = \Phi(t,0)$, которая обращается в единичную при $t = 0$. Положим $t = 0$ в равенстве $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$, тогда $B = \Phi(\omega)$.

Определение. Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица Коши системы (1) (такая, что $\Phi(0) = E$). Матрица $\Phi(\omega)$ называется *матрицей монодромии*, а ее собственные числа называются *мультипликаторами* системы (1).

Теорема 1. Число ρ - мультипликатор системы (1) если, и только если у системы (1) существует нетривиальное решение $x=\xi(t)$ такое, что

$$\xi(t+\omega)=\rho\xi(t) \tag{3}$$

для всех $t\in R$.

Заметим, что это решение может быть комплекснозначным.

Доказательство теоремы 1. Пусть ρ - мультипликатор системы (1), тогда по определению, ρ - собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица Коши системы (1) ($\Phi(0)=E$). Пусть собственному числу ρ соответствует собственный вектор γ, тогда

$$\Phi(\omega)\gamma=\rho\gamma. \tag{4}$$

Любое решение $x=\xi(t)$ системы (1) можно записать в виде

$$\xi(t)=\Phi(t)\xi(0). \tag{5}$$

Рассмотрим решение с начальными условиями $\xi(0)=\gamma$. Докажем, что $\xi(t)$ - искомое решение. Действительно,

$$\xi(t+\omega)=\Phi(t+\omega)\xi(0)=\Phi(t)\Phi(\omega)\xi(0),$$

и согласно (4),

$$\xi(t+\omega)=\Phi(t)\rho\xi(0)=\rho\Phi(t)\xi(0)=\rho\xi(t),$$

то есть решение $x=\xi(t)$ удовлетворяет условию (3).

Пусть теперь решение $x=\xi(t)$ системы (1) удовлетворяет условию (3), докажем, что ρ - мультипликатор (1).

Сначала положим $t=0$ в равенстве (3), и получим: $\xi(\omega)=\rho\xi(0)$.

Теперь положим $t=\omega$ в равенстве (5), тогда $\xi(\omega)=\Phi(\omega)\xi(0)$.

Из двух последних равенств следует, что

$$\Phi(\omega)\xi(0)=\rho\xi(0),$$

то есть ρ - собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, а $\xi(0)$ - отвечающий ρ собственный вектор. Теорема доказана.

Определение. Решение системы (1), удовлетворяющее условию (3), называется *нормальным решением*.

Следствие 1. ω-периодическая система (1) имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный 1.

Следствие 2. ω-периодическая система (1) имеет периодическое решение с наименьшим положительным периодом, равным 2ω, тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный (-1).

Доказательство следствия 2. Если существует мультипликатор $\rho = -1$, то система (1) имеет решение $\xi(t)$, удовлетворяющее условию (3). Тогда

$$\xi(t+2\omega) = -\xi(t+\omega) = \xi(t),$$

и это решение является 2ω-периодическим.

Пусть теперь система (1) имеет 2ω-периодическое решение $\xi(t) = \Phi(t)\xi(0)$, и 2ω есть наименьший положительный период этого решения. Тогда

$$\xi(t+2\omega) = \Phi(t+2\omega)\xi(0) = \Phi(t+\omega)\Phi(\omega)\xi(0) = \Phi(t)\Phi^2(\omega)\xi(0).$$

Поскольку $\xi(t+2\omega) = \xi(t)$, то $\Phi(t)\Phi^2(\omega)\xi(0) = \Phi(t)\xi(0)$.

Умножая обе части последнего равенства на $\Phi^{-1}(t)$ слева, получим:

$$\Phi^2(\omega)\xi(0) = \xi(0),$$

то есть единица есть собственное число матрицы $\Phi^2(\omega)$, а $\xi(0)$ - отвечающий этому числу собственный вектор. Следовательно, $\rho = 1$ или $\rho = -1$ является собственным числом матрицы $\Phi(\omega)$ или мультипликатором системы (1).

Если предположим, что $\rho = 1$ - мультипликатор системы (1), то получим, что $\xi(t)$ является ω-периодическим решением. Это противоречит тому, что наименьший положительный период $\xi(t)$ равен 2ω.

Следовательно, $\rho = -1$. И следствие доказано.

Логарифм матрицы.

Определение. Матрица B называется *логарифмом матрицы* A, если $A = e^B$.

Множество всех логарифмов матрицы A будем обозначать через $Ln A$. Как будет ясно из дальнейшего изложения, если определитель A не равен нулю, то множество $Ln A$ бесконечно. Для конкретной матрицы $B \in Ln A$ будем использовать обозначение $B = ln A$.

Лемма. Если $\det A \neq 0$, то множество $Ln A$ не пусто.

Доказательство леммы. Пусть J - жорданова каноническая форма матрицы A, $A = S\,J\,S^{-1}$, $\det S \neq 0$.

Хорошо известно, что $J = diag\left(J_1, J_2, ..., J_d\right)$ - блочно-диагональная матрица с блоками $J_1, J_2, ..., J_d$.

Пусть v_s - размерность блока J_s, $s \in \{1, 2, ..., d\}$. Тогда блок J_s можно представить в виде

$$J_s = \lambda_p E_s + H_s,$$

где λ_p - собственное число матрицы A, E_s - единичная матрица размерности v_s, матрица H_s - квадратная матрица размерности v_s, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

По условию $\det A \neq 0$, поэтому $\lambda_p \neq 0$, и мы можем написать

$$J_s = \lambda_p \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right).$$

По аналогии с рядом Тейлора для скалярной функции $\ln\left(1+z\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} z^k$ положим

$$ln\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k. \quad (6)$$

Тогда

$$ln\, J_s = E_s\, ln\, \lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k, \quad (7)$$

где

$$ln\lambda_p = ln\left|\lambda_p\right| + i\left(\arg\lambda_p + 2\pi m\right), \qquad (8)$$

$\arg\lambda_p \in \left(-\pi, \pi\right]$, m - некоторое фиксированное целое число.

Заметим, что матрица $ln\, J_s$ определена неоднозначно из-за неоднозначности определения $ln\,\lambda_p$. Формула (8) задает одну из ветвей многозначной функции $Ln\,\lambda_p$ при фиксированном значении m.

Ряд, стоящий в правых частях равенств (6) и (7), сходится, поскольку имеет конечное число членов ($H_s^k = 0$, если $k \ge v_s$, как показано в восьмом параграфе).

Проверим, что формула (7) действительно определяет $ln\, J_s$, то есть $e^{ln\, J_s} = J_s$. Из (7) следует, что

$$e^{ln\, J_s} = \exp\left(E_s\, ln\lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right).$$

И поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей (согласно лемме 1 восьмого параграфа)

$$e^{ln\, J_s} = e^{E_s\, ln\,\lambda_p} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right). \qquad (9)$$

Из определения матричной экспоненты следует, что $e^{E_s\, ln\,\lambda_p} = E_s e^{ln\lambda_p}$.

Из курса математического анализа известно, что для скалярной переменной z справедливо тождество $e^{\ln(1+z)} = 1 + z$. Поскольку скалярные и матричные ряды для функций e^z и $\ln\left(1+z\right)$ задаются одинаковыми буквенными формулами, с которыми можно оперировать формально одинаково, то и для матричных рядов будет справедливо аналогичное тождество. Поэтому (с учетом равенства (6))

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right) = \exp\left(\ln\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right)\right) = E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s.$$

И равенство (9) можно переписать в виде

$$e^{Ln\,J_s} = E_s e^{ln\lambda_p}\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s\right).$$

Следовательно,

$$e^{Ln\,J_s} = \lambda_p\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s\right) = E_s\lambda_p + H_s = J_s\,,$$

и формула (7) определяет логарифм для жорданова блока J_s.

Положим

$$ln\,J = diag\left(ln\,J_1, ln\,J_2, ..., ln\,J_d\right), \tag{10}$$

и

$$ln\,A = S\,ln\,J\,S^{-1}. \tag{11}$$

Проверим, что $e^{ln\,A} = A$.

По лемме 2 восьмого параграфа

$$e^{ln\,A} = e^{S\,ln\,J\,S^{-1}} = S\,e^{ln\,J}\,S^{-1}.$$

Используя формулы (10), (11) и определение матрицы J, получаем

$$e^{ln\,A} = S\,e^{diag\left(ln\,J_1, ln\,J_2, ..., ln\,J_d\right)}\,S^{-1} = S\,diag\left(e^{ln\,J_1}, e^{ln\,J_2}, ..., e^{ln\,J_d}\right)S^{-1} =$$

$$= S\,diag\left(J_1, J_2, ..., J_d\right)S^{-1} = S\,J\,S^{-1} = A.$$

Таким образом, формулы (7), (10) и (11) определяют $ln\,A$, лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A. Тогда из формул (7) и (10) следует, что $ln\lambda_1, ln\lambda_2, ..., ln\lambda_n$ являются собственными числами для построенной выше матрицы $ln\,A$.

Замечание 3. Как уже отмечалось в доказательстве леммы, $ln\,A$ определяется неоднозначно, в силу формулы (8). Кроме того, у вещественной матрицы не всегда существует вещественный логарифм.

Утверждение. Вещественная матрица A, $\det A \neq 0$, имеет вещественный логарифм, если и только если среди ее собственных чисел нет вещественных отрицательных, либо каждому отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы A четное число одинаковых клеток Жордана.

Доказательство этого утверждения можно найти в книге Ф.Р. Гантмахера «Теория матриц» [9]. Здесь мы оставляем это утверждение без доказательства.

Теорема Флоке.

Теорема 2 (теорема Флоке). Любая фундаментальная матрица системы (1) представима в виде

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}, \tag{12}$$

где R - постоянная матрица, а $Q(t)$ - матрица ω-периодическая.

Доказательство теоремы 2. По второму свойству фундаментальных матриц системы (1), существует матрица B, $\det B \neq 0$, такая, что

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$$

для всех t.

Положим $R = \frac{1}{\omega} \ln B$, $Q(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$, и докажем, что $Q(t)$ - матрица ω-периодическая.

Заметим, что из определения матрицы R следует, что $Be^{-R\omega}$ - единичная матрица, поэтому

$$Q(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t)Be^{-R\omega}e^{-Rt} = \Phi(t)e^{-Rt} = Q(t).$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Из замечания 3 следует, что матрица R в представлении (12), вообще говоря, комплексная. Этого можно избежать, если в теореме от матрицы $Q(t)$ требовать 2ω-периодичности, а не ω-периодичности.

Действительно,

$$\Phi(t+2\omega) = \Phi(t+\omega)B = \Phi(t)B^2.$$

Известно, что матрица B^2 либо не имеет вещественных отрицательных собственных чисел, либо каждому ее отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы B^2 четное число одинаковых клеток Жордана [9].

Поэтому существует вещественная матрица $\tilde{R} = \frac{1}{2\omega} \ln B^2$.

Положим $\tilde{Q}(t) = \Phi(t)e^{-\tilde{R}t}$, тогда

$$\tilde{Q}(t+2\omega) = \Phi(t+2\omega)e^{-\tilde{R}(t+2\omega)} = \Phi(t)B^2e^{-2\tilde{R}\omega}e^{-\tilde{R}t} = \Phi(t)e^{-\tilde{R}t} = Q(t),$$

то есть $\tilde{Q}(t)$ - матрица 2ω-периодическая, и $\Phi(t) = \tilde{Q}(t)e^{\tilde{R}t}$.

Замечание 5. Из представления (12) следует, что характер поведения решений системы (1) при $t \to +\infty$ зависит от поведения на бесконечности элементов матрицы e^{Rt}, поскольку $Q(t)$ есть матрица ограниченная (как непрерывная, ω-периодическая матрица, определенная на всей числовой оси).

Матрица e^{Rt} является фундаментальной матрицей решений системы

$$\dot{z} = Rz,$$

а характер поведения решений этой системы при $t \to +\infty$ зависит от собственных чисел матрицы R, как было показано в предыдущем параграфе.

Если $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ - собственные числа матрицы B (то есть мультипликаторы системы (1)), то из определения логарифма следует, что

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega} ln\,\rho_1,\ \ \mu_2 = \frac{1}{\omega} ln\,\rho_2,\ ...,\ \ \mu_n = \frac{1}{\omega} ln\,\rho_n$$

- собственные числа матрицы R.

Приводимость системы с периодическими коэффициентами.

Определение. Система с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = P(t)x \tag{13}$$

называется *приводимой к системе с постоянными коэффициентами*

$$\dot{z} = Cz, \tag{14}$$

или просто *приводимой*, если существует преобразование

$$x = L(t)z, \tag{15}$$

приводящее систему (13) к системе (14), такое, что матрица $L(t)$ непрерывно дифференцируема и обратима, и матрицы $L(t)$, $L^{-1}(t)$, $dL(t)/dt$ ограничены.

Матрица $L(t)$ называется *матрицей Ляпунова*, преобразование (15) называется *преобразованием Ляпунова*.

Теорема 3 (теорема Ляпунова). Система (1) с периодическими коэффициентами приводима.

Доказательство теоремы 3. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (1) представима в виде (12). Докажем, что $Q(t)=\Phi(t)e^{-Rt}$ - матрица Ляпунова.

$Q(t)$ - непрерывно дифференцируемая и обратимая, поскольку $\det Q(t)=\det\Phi(t)\cdot\det e^{-Rt}\neq 0$.

$Q(t)$, $Q^{-1}(t)$, $dQ(t)/dt$ есть матрицы непрерывные, ω-периодические, определенные на всей числовой оси, и следовательно, эти матрицы ограничены.

Сделаем в системе (1) замену $x=Q(t)z$, или $x=\Phi(t)e^{-Rt}z$.

С одной стороны,

$$\dot{x}=\dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z+\Phi(t)(-R)e^{-Rt}z+\Phi(t)e^{-Rt}\dot{z},$$

с другой стороны,

$$\dot{x}=A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z,$$

следовательно,

$$\dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z+\Phi(t)e^{-Rt}(-R)z+\Phi(t)e^{-Rt}\dot{z}=A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z. \qquad (16)$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет соответствующему системе (1) матричному уравнению $\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t)$, поэтому (16) можно переписать в виде

$$\Phi(t)e^{-Rt}(-Rz+\dot{z})=0.$$

Умножая обе части последнего равенства на матрицу $e^{Rt}\Phi^{-1}(t)$ слева, получаем систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}=Rz.$$

Теорема доказана.