Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КАК ФУНКЦИЙ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ.

В этой главе рассматриваем систему уравнений, правая часть которой зависит от параметра

$$\dot{x} = X\left(t, x, \mu\right), \tag{1}$$

$x \in R^n$, вектор-функция $X\left(t, x, \mu\right)$ непрерывна при $\left(t, x\right) \in G$ и $\mu \in F$, G - область в R^{n+1}, F - область в R^m.

Обозначим через $x = \varphi\left(t, \theta, \xi, \mu\right)$ решение системы (1) с начальными данными $t = \theta$, $x = \xi$. Будем изучать дифференциальные свойства этого решения по всем аргументам.

§ 1. Теорема об интегральной непрерывности.

Сначала докажем лемму о сравнении решений двух систем.

Лемма. Рассмотрим две системы

$$\dot{x} = X\left(t, x\right), \tag{1}$$

$$\dot{y} = Y\left(t, y\right), \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^n$, функции $X\left(t, x\right)$ и $Y\left(t, y\right)$ непрерывны на множестве $D \subset R^{n+1}$, и $X\left(t, x\right)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве D:

$$\left\| X\left(t, \bar{x}\right) - X\left(t, \bar{\bar{x}}\right) \right\| \le L \left\| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right\| \tag{3}$$

для любых двух точек $\left(t, \bar{x}\right)$, $\left(t, \bar{\bar{x}}\right)$ из множества D.

Пусть $x = \varphi\left(t\right)$ - решение системы (1), а $y = \psi\left(t\right)$ - решение системы (2), определенные на отрезке $\left[c, d\right]$, $\theta \in \left[c, d\right]$.

Тогда для всех $t \in \left[c, d\right]$

$$\left\| \varphi\left(t\right) - \psi\left(t\right) \right\| \le \left(\left\| \varphi\left(\theta\right) - \psi\left(\theta\right) \right\| + \int_c^d \left\| X\left(\tau, \psi\left(\tau\right)\right) - Y\left(\tau, \psi\left(\tau\right)\right) \right\| d\tau \right) e^{L\left|t - \theta\right|}. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$\varphi(t)=\varphi(\theta)+\int_{\theta}^{t} X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)d\tau\,,$$

$$\psi(t)=\psi(\theta)+\int_{\theta}^{t} Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)d\tau\,.$$

Вычтем из одного уравнения другое и оценим норму разности:

$$\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|\le\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|+\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|. \tag{5}$$

Отдельно оценим интеграл, стоящий в формуле (5).

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|=\\ &=\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)+X\left(\tau,\psi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|\le\\ &\le\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|+\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\psi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|.\end{aligned} \tag{6}$$

В правой части неравенства (6) для оценки первого интеграла используем условие Липшица (3), а во втором интеграле изменим пределы интегрирования:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\theta}^{t}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|\le\\ &\qquad\le L\left|\int_{\theta}^{t}\left\|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\right\|d\tau\right|+\int_{c}^{d}\left\|X\left(\tau,\psi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau.\end{aligned}$$

И из неравенства (5) следует, что

$$\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|\le C+L\left|\int_{\theta}^{t}\left\|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\right\|d\tau\right|, \tag{7}$$

где C - константа,

$$C=\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|+\int_{c}^{d}\left\|X\left(\tau,\psi(\tau)\right)-Y\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\,.$$

Из неравенства (7), согласно лемме Гронуолла, получаем:

$$\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\| \le Ce^{L|t-\theta|}.$$

Последнее неравенство и есть неравенство (4). Лемма доказана.

Далее рассматриваем систему

$$\dot{x} = X(t,x,\mu), \tag{8}$$

где $x \in R^n$, вектор-функция $X(t,x,\mu)$ непрерывна при всех $(t,x) \in G$ и $\mu \in F$, G - область в R^{n+1}, F - область в R^m.

Предполагаем, что $X(t,x,\mu)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по x при каждом фиксированном $\mu \in F$.

Теорема 1. Пусть решение $x=\varphi(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)$ системы (8) определено при $t \in [a,b]$, где $\theta_0 \in [a,b]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении условий

$$|\theta-\theta_0| < \delta,\ \theta \in [a,b],\ \|\xi-\xi_0\| < \delta,\ \|\mu-\mu_0\| < \delta, \tag{9}$$

на отрезке $[a,b]$ определено решение $x=\psi(t,\theta,\xi,\mu)$ системы (8), и

$$\left\|\varphi(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)-\psi(t,\theta,\xi,\mu)\right\| < \varepsilon \tag{10}$$

для всех $t \in [a,b]$.

Доказательство теоремы 1. Для краткости записи введем обозначения:

$$\varphi(t)=\varphi(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0),\ \ \psi(t)=\psi(t,\theta,\xi,\mu).$$

Множество $\Gamma=\{(t,x): t \in [a,b], x=\varphi(t)\}$ замкнуто и ограниченно, и $\Gamma \subset G$. Выберем ε достаточно малым, чтобы множество

$$D=\left\{(t,x): t \in [a,b], \left\|x-\varphi(t)\right\| \le \varepsilon\right\}$$

содержалось в области G.

D- замкнутое и ограниченное множество, по теореме Вейерштрасса существует $M > 0$ такое, что для всех $(t,x) \in D$

$$\left\|X(t,x,\mu_0)\right\| \le M.$$

Кроме того, $X(t,x,\mu_0)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве D, то есть существует константа $L>0$ такая, что

$$\left\|X(t,\overline{x},\mu_0)-X(t,\overline{\overline{x}},\mu_0)\right\|\le L\left\|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right\|$$

для любых точек $(t,\overline{x})$, $(t,\overline{\overline{x}})$ из множества D.

Выберем $\Delta>0$, подчиненное неравенству

$$(1+M+b-a)e^{L(b-a)}\Delta<\varepsilon. \qquad (11)$$

По теореме Кантора для такого Δ существует $\delta_1>0$ такое, что

$$\left\|X(t,x,\mu_0)-X(t,x,\mu)\right\|<\Delta, \qquad (12)$$

если $(t,x)\in D$ и $\|\mu-\mu_0\|<\delta_1$.

Положим $\delta=\min(\Delta,\delta_1)$ и покажем, что это δ - искомое.

Будем доказывать от противного. Возможны два случая:

а) существуют θ,ξ,μ, удовлетворяющие условию (9) такие, что решение $\psi(t)=\psi(t,\theta,\xi,\mu)$ не определено для всех $t\in[a,b]$,

б) для всех θ,ξ,μ, удовлетворяющих условию (9), решения $\psi(t)=\psi(t,\theta,\xi,\mu)$ системы (8) определены на отрезке $[a,b]$, но существуют θ,ξ,μ, удовлетворяющие (9), и существует $t^*\in[a,b]$, такие, что неравенство (10) не верно при $t=t^*$:

$$\left\|\varphi(t^*)-\psi(t^*)\right\|\ge\varepsilon. \qquad (13)$$

В случае а) есть решение $x=\psi(t)$ системы (8), определенное на интервале (α,β), и отрезок $[a,b]$ не содержится в (α,β), то есть либо $\alpha\ge a$, либо $\beta\le b$. При приближении к концу максимального промежутка задания решение $x=\psi(t)$ покидает компакт D, следовательно, и в этом случае, как и в случае б), существует $t^*\in[a,b]$, удовлетворяющее неравенству (13).

Оценим норму разности $\varphi(\theta)-\psi(\theta)$.

Решение $x=\varphi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению, и

$$\varphi(\theta)=\varphi(\theta_0)+\int_{\theta_0}^{\theta} X\left(\tau,\varphi(\tau),\mu_0\right)d\tau ,$$

$\left(t,\varphi(t)\right)\in D$ для всех $t\in[a,b]$, поэтому $\left\|X\left(t,\varphi(t),\mu_0\right)\right\|\le M$, следовательно,

$$\left\|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)\right\|\le\left|\int_{\theta_0}^{\theta}\left\|X\left(\tau,\varphi(\tau),\mu_0\right)\right\|d\tau\right|\le\left|\int_{\theta_0}^{\theta}Md\tau\right|=M\left|\theta-\theta_0\right|. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|\le\left\|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)\right\|+\left\|\varphi(\theta_0)-\psi(\theta)\right\|,$$

$\varphi(\theta_0)=\xi_0$, $\psi(\theta)=\xi$, и из последнего неравенства и (14) следует, что

$$\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|\le M\left|\theta-\theta_0\right|+\left\|\xi-\xi_0\right\|. \tag{15}$$

$\delta\le\Delta$ по выбору δ, и из неравенств (9), (11) и (15) следует, что

$$\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|\le M\delta+\delta\le(M+1)\Delta<\varepsilon . \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует, что $t^*\ne\theta$, для определенности будем считать, что $t^*>\theta$. Тогда существует $T\in\left(\theta,t^*\right]$ такое, что

$$\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|<\varepsilon \quad \text{при} \quad t\in(\theta,T), \text{ и}$$

$$\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|=\varepsilon . \tag{17}$$

Применим лемму о сравнении решений двух систем. Будем считать, что $[c,d]=[\theta,T]$, $X(t,x)=X\left(t,x,\mu_0\right)$ и $Y(t,y)=X\left(t,x,\mu\right)$. Тогда неравенство (4) для $t=T$ принимает вид

$$\begin{gathered}\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|\le\\ \le\left(\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|+\int_{\theta}^{T}\left\|X\left(\tau,\psi(\tau),\mu_0\right)-X\left(\tau,\psi(\tau),\mu\right)\right\|d\tau\right)e^{L(T-\theta)}.\end{gathered} \tag{18}$$

$\delta\le\delta_1$ по выбору δ, $\left(t,\psi(t)\right)\in D$ при $t\in[\theta,T]$, и из неравенств (9) и (12) следует, что для всех $t\in[\theta,T]$

$$\left\|X\left(t,\psi(t),\mu_0\right)-X\left(t,\psi(t),\mu\right)\right\|<\Delta ,$$

поэтому из неравенств (15) и (18) получаем:

$$\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|\le\left(\left\|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right\|+\int_{\theta}^{T}\Delta\,d\tau\right)e^{L(T-\theta)},$$

и

$$\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|\le\left(M\left|\theta-\theta_0\right|+\left\|\xi-\xi_0\right\|+\Delta\left|T-\theta\right|\right)e^{L(T-\theta)}.$$

Согласно условиям (9), (11) и (16):

$$\left\|\varphi(T)-\psi(T)\right\|\le\left(1+M+b-a\right)e^{L(b-a)}\Delta<\varepsilon .$$

Последнее неравенство противоречит (17), полученное противоречие и доказывает теорему.

Рассмотрим систему без параметра

$$\dot{x}=X\left(t,x\right), \tag{19}$$

где $x\in R^n$, вектор-функция $X\left(t,x\right)$ непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области $G\subset R^{n+1}$.

Теорема 2. Пусть решение $x=\varphi\left(t,\theta_0,\xi_0\right)$ системы (19) определено при $t\in\left[a,b\right]$, где $\theta_0\in\left[a,b\right]$.

Тогда существуют константы $\delta>0$, $M>0$ и $L>0$, такие, что при выполнении условий

$$\left|\theta-\theta_0\right|<\delta\,,\ \theta\in\left[a,b\right],\ \left\|\xi-\xi_0\right\|<\delta\,, \tag{20}$$

на отрезке $\left[a,b\right]$ определено решение $x=\psi\left(t,\theta,\xi\right)$ системы (19), и

$$\left\|\varphi\left(t,\theta_0,\xi_0\right)-\psi\left(t,\theta,\xi\right)\right\|\le\left(M\left|\theta-\theta_0\right|+\left\|\xi-\xi_0\right\|\right)e^{L\left|t-\theta\right|} \tag{21}$$

для всех $t\in\left[a,b\right]$.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 во многом повторяет доказательство предыдущей теоремы. Введем обозначения:

$$\varphi\left(t\right)=\varphi\left(t,\theta_0,\xi_0\right),\ \ \psi\left(t\right)=\psi\left(t,\theta,\xi\right).$$

Множество $\Gamma=\left\{\left(t,x\right):t\in\left[a,b\right],x=\varphi\left(t\right)\right\}$ замкнуто и ограниченно, и $\Gamma\subset G$.

Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что множество $D = \{(t,x) : t \in [a,b], \|x - \varphi(t)\| \le \varepsilon\}$ тоже содержится в области G.

D - замкнутое, ограниченное множество, по теореме Вейерштрасса существует $M > 0$ такое, что для всех $(t,x) \in D$

$$\|X(t,x)\| \le M,$$

кроме того, $X(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве D, то есть существует $L > 0$, такое, что выполнено неравенство (3) для любых точек $(t,\bar{x})$, $(t,\bar{\bar{x}})$ из множества D.

Согласно доказательству теоремы 1, существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении условий (20) решение $x = \psi(t,\theta,\xi)$ системы (19) определено на отрезке $[a,b]$, и

$$\|\varphi(t,\theta_0,\xi_0) - \psi(t,\theta,\xi)\| < \varepsilon$$

для всех $t \in [a,b]$.

Применим лемму о сравнении решений двух систем, полагая здесь $[c,d] = [a,b]$ и $X(t,x) = Y(t,y)$. Неравенство (4) в этом случае имеет вид

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \le (\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\|) e^{L|t-\theta|}$$

для всех $t \in [a,b]$.

Для $\|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\|$ выполнена оценка (15), следовательно,

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \le (M|\theta - \theta_0| + \|\xi - \xi_0\|) e^{L|t-\theta|}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть решение $x = \varphi(t,\theta_0,\xi_0)$ системы (19) определено при $t \in [a,b]$, $\theta_0 \in [a,b]$.

Тогда существуют константы $\delta > 0$ и $K > 0$ такие, что при выполнении условий (20), на отрезке $[a,b]$ определено решение $x = \psi(t,\theta,\xi)$ системы (19), и

$$\|\varphi(t,\theta_0,\xi_0) - \psi(t,\theta,\xi)\| \le K(|\theta - \theta_0| + \|\xi - \xi_0\|) \qquad (22)$$

для всех $t \in [a,b]$.

Доказательство следствия. Из теоремы 2 следует, что при выполнении условий (20) решение $x=\psi(t,\theta,\xi)$ системы (19) определено на $[a,b]$, и удовлетворяет неравенству (21).

Заметим, что $|t-\theta|\le b-a$ для всех $t\in[a,b]$, $\theta\in[a,b]$.

Пусть $K=\max(1,M)e^{L(b-a)}$. При таком K из (21) следует оценка (22). Следствие доказано.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x}=P(t,\mu)x, \tag{23}$$

$x\in R^n$, матрица $P(t,\mu)$ непрерывна при $t\in(a,b)$ и $\mu\in F$, F - область в R^m.

Обозначим через $\Phi(t,\theta,\mu)$ фундаментальную матрицу Коши системы (23), то есть такую матрицу, что $\Phi(\theta,\theta,\mu)=E$.

Теорема 3. Матрица $\Phi(t,\theta,\mu)$ непрерывна по всем своим аргументам при $t\in(a,b)$, $\theta\in(a,b)$, $\mu\in F$.

Доказательство теоремы 3. Матрица $\Phi(t,\theta,\mu)$ определена при $t\in(a,b)$, $\theta\in(a,b)$, $\mu\in F$. Пусть $\varphi_j(t,\theta,\mu)$ - столбцы матрицы $\Phi(t,\theta,\mu)$, $j=1,2,...,n$. Все $\varphi_j(t,\theta,\mu)$ - решения системы (23).

Матрица $\Phi(t,\theta,\mu)$ непрерывна, и даже непрерывно дифференцируема по t при $t\in(a,b)$, $\theta\in(a,b)$, $\mu\in F$.

Выберем произвольные $t_0\in(a,b)$, $\theta_0\in(a,b)$ и $\mu_0\in F$. Существуют $c>a$ и $d<b$ такие, что $t_0\in[c,d]$, $\theta_0\in[c,d]$. По теореме 1 все решения $\varphi_j(t,\theta,\mu)$ системы (23) непрерывны по θ и μ в точке $\theta=\theta_0$, $\mu=\mu_0$ равномерно относительно $t\in[c,d]$. Следовательно, все решения $\varphi_j(t,\theta,\mu)$ непрерывны в точке (t_0,θ_0,μ_0), $j=1,2,...,n$, то есть непрерывна в этой точке матрица $\Phi(t,\theta,\mu)$. В силу произвольности точки (t_0,θ_0,μ_0), теорема доказана.

§ 2. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам.

Сначала рассмотрим систему без параметра

$$\dot{x} = X(t,x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, вектор-функция $X(t,x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области $G \subset R^{n+1}$.

Замечание. Пусть D - замкнутое, ограниченное множество, $D \subset G$. Тогда для любых двух точек (t,x), $(t,\bar{x})$ из множества D верна формула

$$X(t,x) - X(t,\bar{x}) = \frac{\partial X(t,\bar{x})}{\partial x}(x-\bar{x}) + g(t,x,\bar{x}), \tag{2}$$

где

$$\frac{\|g(t,x,\bar{x})\|}{\|x-\bar{x}\|} \underset{\|x-\bar{x}\|\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{3}$$

и стремление дроби к нулю в (3) равномерное по всем (t,x), $(t,\bar{x})$ из D.

Доказательство замечания можно найти в курсе математического анализа.

Теорема 1. Пусть решение $x = \varphi(t,\theta_0,\xi_0)$ системы (1) определено при $t \in [a,b]$, где $\theta_0 \in [a,b]$.

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении условий

$$|\theta - \theta_0| < \delta,\ \theta \in (a,b),\ \|\xi - \xi_0\| < \delta, \tag{4}$$

решение $x = \psi(t,\theta,\xi)$ системы (1) определено на отрезке $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемо по θ и ξ.

Доказательство теоремы. Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, чтобы множество

$$D = \{(t,x) : t \in [a,b], \|x - \varphi(t,\theta_0,\xi_0)\| \le \varepsilon\}$$

содержалось в области G. Для этого ε, в согласии с теоремой 1 предыдущего параграфа, существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении условий (4) решение $x = \psi(t,\theta,\xi)$ системы (1) определено на отрезке $[a,b]$. Покажем, что это решение дифференцируемо по θ и ξ.

1. Сначала докажем дифференцируемость решения $x=\psi(t,\theta,\xi)$ по ξ_j, $j=1,2,...,n$.

Пусть $\bar{\xi}=\xi+he_j$, где e_j - единичный j-ый орт. Выбираем h столь малым, чтобы выполнялось неравенство $\left\|\bar{\xi}-\xi_0\right\|<\delta$. Тогда решение $x=\phi(t,\theta,\bar{\xi})$ системы (1) определено на $[a,b]$.

По определению

$$\frac{\partial\psi(t,\theta,\xi)}{\partial\xi_j}=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(t,\theta,\bar{\xi})-\psi(t,\theta,\xi)}{h}. \qquad (5)$$

Докажем существование этого предела. Введем обозначения:

$$\psi(t)=\psi(t,\theta,\xi),\ \ \phi(t)=\phi(t,\theta,\bar{\xi}),\ \ u(t)=\phi(t)-\psi(t).$$

Тогда

$$\dot{u}(t)=\dot{\phi}(t)-\dot{\psi}(t)=X(t,\phi(t))-X(t,\psi(t))$$

и согласно формуле (2),

$$\dot{u}(t)=\frac{\partial X(t,\psi(t))}{\partial x}u(t)+g(t,\phi(t),\psi(t))$$

Положим $P(t)=\dfrac{\partial X(t,\psi(t))}{\partial x}$, $q(t)=g(t,\phi(t),\psi(t))$. Тогда из последнего равенства следует, что $u(t)$ есть решение линейной неоднородной системы

$$\dot{x}=P(t)x+q(t) \qquad (6)$$

Обозначим через $\Phi(t)=\Phi(t,\theta,\xi)$ фундаментальную матрицу решений соответствующей однородной системы

$$\dot{x}=P(t)x, \qquad (7)$$

и запишем общее решение системы (6) в форме Коши:

$$u(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\theta)u(\theta)+\Phi(t)\int_{\theta}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau. \qquad (8)$$

В формуле (8)

$$u(\theta)=\phi(\theta)-\psi(\theta)=\bar{\xi}-\xi=he_j,$$

и

$$\frac{u(t)}{h}=\Phi(t)\Phi^{-1}(\theta)e_j+\int_{\theta}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\frac{q(\tau)}{h}d\tau. \qquad (9)$$

Оценим интеграл, стоящий в равенстве (9).

$$\left\|\int_{\theta}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\frac{q(\tau)}{h}d\tau\right\|\le\left|\int_{\theta}^{t}\|\Phi(t)\|\cdot\left\|\Phi^{-1}(\tau)\right\|\frac{\|q(\tau)\|}{|h|}d\tau\right|. \qquad (10)$$

Матрицы $\Phi(t)=\Phi(t,\theta,\xi)$ и $\Phi^{-1}(t)=\Phi^{-1}(t,\theta,\xi)$ (по теореме 3 предыдущего параграфа) непрерывны по всем своим аргументам, и поэтому ограничены при фиксированных θ, ξ и достаточно малых h, то есть существуют $M_1>0$ и $M_2>0$ такие, что

$$\|\Phi(t)\|\le M_1 \text{ и } \left\|\Phi^{-1}(t)\right\|\le M_2 \text{ для всех } t\in[a,b].$$

По следствию из теоремы 2 предыдущего параграфа существует константа $K>0$ такая, что

$$\|u(t)\|=\|\phi(t)-\psi(t)\|\le K\left\|\overline{\xi}-\xi\right\|=K|h|,$$

поэтому $\|u(t)\|$ стремится к нулю при $h\to 0$ равномерно по t при $t\in[a,b]$. Отсюда и из условия (3) следует, что дробь

$$\frac{\|q(t)\|}{\|u(t)\|}=\frac{\|g(t,\phi(t),\psi(t))\|}{\|u(t)\|}$$

стремится к нулю при $h\to 0$ равномерно по t.

Следовательно,

$$\frac{\|q(t)\|}{|h|}=\frac{\|q(t)\|}{\|u(t)\|}\frac{\|u(t)\|}{|h|}\le K\frac{\|q(t)\|}{\|u(t)\|}\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

и стремление к нулю равномерное по t при $t\in[a,b]$.

С учетом этих рассуждений из оценки (10) получаем:

$$\left\|\int_{\theta}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\frac{q(\tau)}{h}d\tau\right\|\le\left|\int_{\theta}^{t}M_1M_2\frac{\|q(\tau)\|}{|h|}d\tau\right|\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

И из (9) следует, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(t)}{h}=\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\theta)e_j,$$

то есть, согласно (5),

$$\frac{\partial\psi(t,\theta,\xi)}{\partial\xi_j}=\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\theta)e_j.$$

$\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\theta)$ - фундаментальная матрица Коши, она непрерывна по всем своим аргументам (по теореме 3 предыдущего параграфа), следовательно, и $\dfrac{\partial\psi(t,\theta,\xi)}{\partial\xi_j}$ непрерывна по t, θ и ξ.

2. Теперь докажем дифференцируемость решения $x=\psi(t,\theta,\xi)$ по θ.

Даем приращение h по аргументу θ, и рассматриваем решение $x=\phi(t,\theta+h,\xi)$.

По определению

$$\frac{\partial\psi(t,\theta,\xi)}{\partial\theta}=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(t,\theta+h,\xi)-\psi(t,\theta,\xi)}{h}. \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\psi(t)=\psi(t,\theta,\xi),\;\; \phi(t)=\phi(t,\theta+h,\xi),\;\; u(t)=\phi(t)-\psi(t).$$

Как и в первой части доказательства, $u(t)$ есть решение линейной неоднородной системы (6), где $P(t)=\dfrac{\partial X(t,\psi(t))}{\partial x}$, $q(t)=g(t,\phi(t),\psi(t))$.

Поэтому $u(t)$ представимо в виде (8), где $\varPhi(t)=\varPhi(t,\theta,\xi)$ - фундаментальная матрица решений однородной системы (7).

$$\frac{u(t)}{h}=\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\theta)\frac{u(\theta)}{h}+\int_\theta^t\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\tau)\frac{q(\tau)}{h}d\tau. \tag{12}$$

Так же, как и в первой части доказательства, не трудно показать, что интеграл, стоящий в (12), стремится к нулю при $h\to 0$:

$$\left\|\int_\theta^t\varPhi(t)\varPhi^{-1}(\tau)\frac{q(\tau)}{h}d\tau\right\|\underset{h\to 0}{\to}0.$$

Докажем существование предела $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(\theta)}{h}$.

$$\psi(t)=\xi+\int_{\theta}^{t}X\left(\tau,\psi(\tau)\right)d\tau,\ \ \phi(t)=\xi+\int_{\theta+h}^{t}X\left(\tau,\phi(\tau)\right)d\tau,$$

следовательно,

$$\psi(\theta)=\xi,\ \ \phi(\theta)=\xi+\int_{\theta+h}^{\theta}X\left(\tau,\phi(\tau)\right)d\tau,$$

и

$$\frac{u(\theta)}{h}=\frac{\phi(\theta)-\psi(\theta)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}X\left(\tau,\phi(\tau)\right)d\tau. \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}X\left(\tau,\phi(\tau)\right)d\tau=\\ =\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}X\left(\tau,\psi(\tau)\right)d\tau+\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}\Big(X\left(\tau,\phi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)\Big)d\tau.\end{gathered} \tag{14}$$

По теореме об интегральной непрерывности $\phi(t)$ стремится к $\psi(t)$ при $h\to 0$ равномерно по t при $t\in[a,b]$, поэтому и

$$X\left(t,\phi(t)\right)-X\left(t,\psi(t)\right)\underset{h\to 0}{\to}0$$

равномерно по t, то есть для произвольного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $|h|<\delta$ верно неравенство

$$\left\|X\left(t,\phi(t)\right)-X\left(t,\psi(t)\right)\right\|<\varepsilon$$

для всех $t\in[a,b]$, и

$$\begin{gathered}\left\|\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}\Big(X\left(\tau,\phi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)\Big)d\tau\right\|\le\\ \le\frac{1}{|h|}\left|\int_{\theta+h}^{\theta}\left\|X\left(\tau,\phi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)\right\|d\tau\right|\le\frac{1}{|h|}\left|\int_{\theta+h}^{\theta}\varepsilon\,d\tau\right|=\varepsilon,\end{gathered}$$

то есть

$$\left\|\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}\Big(X\left(\tau,\phi(\tau)\right)-X\left(\tau,\psi(\tau)\right)\Big)d\tau\right\|\underset{h\to 0}{\to}0.$$

Отсюда и из (13), (14) следует, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(\theta)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\theta+h}^{\theta}X\left(\tau,\psi(\tau)\right)d\tau=-X\left(\theta,\psi(\theta)\right)=-X\left(\theta,\xi\right).$$

И согласно (11), (12)

$$\frac{\partial\psi(t,\theta,\xi)}{\partial\theta}=-\Phi(t)\Phi^{-1}(\theta)X(\theta,\xi),$$

непрерывность $\partial\psi(t,\theta,\xi)/\partial\theta$ по t, θ и ξ доказывается аналогично непрерывности $\partial\psi(t,\theta,\xi)/\partial\xi_j$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему с параметром

$$\dot{x}=X\left(t,x,\mu\right), \tag{15}$$

где $x\in R^n$, вектор-функция $X\left(t,x,\mu\right)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и μ при $(t,x)\in G$, $\mu\in F$, где G - область в R^{n+1}, F - область в R^m.

Теорема 2. Пусть $(\theta_0,\xi_0)\in G$, $\mu_0\in F$, и решение $x=\varphi(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)$ системы (15) определено при $t\in[a,b]$.

Тогда существует $\delta>0$ такое, что при выполнении условий

$$|\theta-\theta_0|<\delta\,,\ \theta\in(a,b),\ \|\xi-\xi_0\|<\delta\,,\ \|\mu-\mu_0\|<\delta\,, \tag{16}$$

решение $x=\psi(t,\theta,\xi,\mu)$ системы (15) определено на отрезке $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемо по θ, ξ и μ.

Доказательство теоремы. Наряду с системой (15) рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot{x}=X\left(t,x,y\right),\\ \dot{y}=0,\end{cases} \tag{17}$$

где $y\in F\subset R^m$. По условию вектор-функция $X(t,x,y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и y при $(t,x)\in G$, $y\in F$.

Пусть $x=x(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)$, $y=y(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)$ - решение системы (17) с начальными данными $t=\theta_0$, $x=\xi_0$, $y=\mu_0$. Тогда $y(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)=\mu_0$, а $x=x(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0)$ - решение системы

$$\dot{x} = X\left(t, x, \mu_0\right) \tag{18}$$

с начальными данными $t = \theta_0$, $x = \xi_0$, то есть $x(t, \theta_0, \xi_0, \mu_0) = \varphi(t, \theta_0, \xi_0, \mu_0)$.

По теореме 1 существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении условий (16) на отрезке $[a, b]$ определено решение $x = x(t, \theta, \xi, \mu)$, $y = y(t, \theta, \xi, \mu)$ системы (17) с начальными данными $t = \theta$, $x = \xi$, $y = \mu$, и это решение непрерывно дифференцируемо по θ, ξ и μ.

Из вида системы (17) следует, что $y(t, \theta, \xi, \mu) = \mu$, а $x(t, \theta, \xi, \mu) = \psi(t, \theta, \xi, \mu)$ - решение системы (15). Тем самым и доказана непрерывная дифференцируемость решения $x = \psi(t, \theta, \xi, \mu)$ системы (15) по θ, ξ и μ. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $x = x(t, \theta, \xi, \mu)$ - решение системы (15). Продифференцируем по μ_j тождество

$$\dot{x}(t, \theta, \xi, \mu) = X\left(t, x(t, \theta, \xi, \mu), \mu\right). \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \mu_j} \frac{\partial x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial X\left(t, x(t, \theta, \xi, \mu), \mu\right)}{\partial x} \frac{\partial x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial X\left(t, x(t, \theta, \xi, \mu), \mu\right)}{\partial \mu_j}. \end{gathered} \tag{20}$$

Мы знаем, что $\dfrac{\partial x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial \mu_j}$ существует и является решением некоторой линейной системы, поэтому существует и непрерывна производная $\dfrac{\partial^2 x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial t \, \partial \mu_j}$. Из (20) следует, что существует и непрерывна производная $\dfrac{\partial^2 x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial \mu_j \, \partial t}$, следовательно, $\dfrac{\partial^2 x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial t \, \partial \mu_j} = \dfrac{\partial^2 x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial \mu_j \, \partial t}$, и $\dfrac{\partial x(t, \theta, \xi, \mu)}{\partial \mu_j}$ удовлетворяет линейной системе

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X\left(t, x(t, \theta, \xi, \mu), \mu\right)}{\partial x} z + \frac{\partial X\left(t, x(t, \theta, \xi, \mu), \mu\right)}{\partial \mu_j}.$$

Дифференцируя по μ_j тождество

$$x(\theta,\theta,\xi,\mu)=\xi, \tag{21}$$

получаем:

$$\frac{\partial x(\theta,\theta,\xi,\mu)}{\partial \mu_j}=0,$$

если ξ не зависит от параметра μ.

Таким образом, матрица $\dfrac{\partial x(t,\theta,\xi,\mu)}{\partial \mu}$ является решением линейного матричного уравнения

$$\dot{Y}=\frac{\partial X\big(t,x(t,\theta,\xi,\mu),\mu\big)}{\partial x}Y+\frac{\partial X\big(t,x(t,\theta,\xi,\mu),\mu\big)}{\partial \mu} \tag{22}$$

с начальными условиями $\dfrac{\partial x(\theta,\theta,\xi,\mu)}{\partial \mu}=0$ (если ξ не зависит от μ).

Аналогично, дифференцируя тождества (19) и (21) по ξ_j, получаем, что матрица $\dfrac{\partial x(t,\theta,\xi,\mu)}{\partial \xi}$ является решением линейного однородного матричного уравнения

$$\dot{Y}=\frac{\partial X\big(t,x(t,\theta,\xi,\mu),\mu\big)}{\partial x}Y \tag{23}$$

с начальными условиями $\dfrac{\partial x(\theta,\theta,\xi,\mu)}{\partial \xi}=E$, где E - единичная матрица размерности n.

Дифференцируя тождество (19) по θ, получаем, что вектор $\dfrac{\partial x(t,\theta,\xi,\mu)}{\partial \theta}$ - тоже решение уравнения (23).

Найдем начальные данные для этого решения.

Считаем здесь, что t и x - фиксированные (начальные данные), а θ и ξ - переменные, то есть $\xi=\xi(\theta,t,x,\mu)$ - решение системы $\dfrac{d\xi}{d\theta}=X(\theta,\xi,\mu)$.

Дифференцируем по θ тождество

$$x\big(t,\theta,\xi(\theta,t,x,\mu),\mu\big)=x,$$

получаем:

$$\frac{\partial x\left(t,\theta,\xi\left(\theta,t,x,\mu\right),\mu\right)}{\partial\theta}+\frac{\partial x\left(t,\theta,\xi\left(\theta,t,x,\mu\right),\mu\right)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi\left(\theta,t,x,\mu\right)}{\partial\theta}=0,$$

и при $t=\theta,\ x=\xi$

$$\frac{\partial x\left(\theta,\theta,\xi,\mu\right)}{\partial\theta}=-\frac{\partial x\left(\theta,\theta,\xi,\mu\right)}{\partial\xi}X\left(\theta,\xi,\mu\right)=-X\left(\theta,\xi,\mu\right).$$

Матричные уравнения (22) и (23) называются *уравнениями в вариациях*.

Теперь предположим, что вектор-функция $X\left(t,x,\mu\right)$, стоящая в правой части системы (15), непрерывна по всем аргументам и l раз непрерывно дифференцируема по x и μ в области $G\times F$.

Теорема 3. Пусть $X\left(t,x,\mu\right)$ непрерывна в области $G\times F$ и имеет непрерывные всевозможные частные производные по x_j и μ_k до порядка l включительно ($j\in\{1,2,...,n\}$, $k\in\{1,2,...,m\}$).

Пусть $\left(\theta_0,\xi_0\right)\in G$, $\mu_0\in F$, и решение $x=\varphi\left(t,\theta_0,\xi_0,\mu_0\right)$ системы (15) определено при $t\in\left[a,b\right]$.

Тогда существует $\delta>0$ такое, что при выполнении условий (16) решение $x=x\left(t,\theta,\xi,\mu\right)$ системы (15) определено на отрезке $\left[a,b\right]$ и имеет непрерывные всевозможные частные производные по ξ_j и μ_k до порядка l включительно.

Доказательство теоремы 3. Доказываем теорему методом математической индукции. При $l=1$ теорема доказана выше.

Пусть теорема верна для $\left(l-1\right)$.

Матрица $\dfrac{\partial x\left(t,\theta,\xi,\mu\right)}{\partial\mu}$ является решением матричного уравнения (22). Согласно условию теоремы, $\dfrac{\partial X\left(t,x\left(t,\theta,\xi,\mu\right),\mu\right)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial X\left(t,x\left(t,\theta,\xi,\mu\right),\mu\right)}{\partial\mu}$ имеют непрерывные всевозможные частные производные по x_j и μ_k ($j\in\{1,2,...,n\}$, $k\in\{1,2,...,m\}$) до порядка $\left(l-1\right)$ включительно.

Следовательно, по индукционному предположению, $\frac{\partial x(t,\theta,\xi,\mu)}{\partial \mu}$ имеет непрерывные частные производные по ξ_j и μ_k до порядка $(l-1)$ включительно.

Аналогично, $\frac{\partial x(t,\theta,\xi,\mu)}{\partial \xi}$ является решением уравнения в вариациях (23), и поэтому имеет непрерывные частные производные по ξ_j и μ_k до порядка $(l-1)$ включительно.

Следовательно, $x = x(t,\theta,\xi,\mu)$ имеет непрерывные всевозможные частные производные по ξ_j и μ_k до порядка l включительно.

Теорема доказана.

§ 3. Теорема Коши.

Рассматриваем систему

$$\dot{y}_j = Y_j(t, y_1, y_2, ..., y_n), \tag{1}$$

где $j = 1, 2, ..., n$,

$$Y_j(t, y_1, ..., y_n) = \sum_{m,m_1,...,m_n=0}^{+\infty} L^{[j]}_{m,m_1,...,m_n} (t-t_0)^m (y_1 - y_{10})^{m_1} ... (y_n - y_{n0})^{m_n}, \tag{2}$$

и ряды (2) сходятся абсолютно в области

$$G = \left\{ (t, y_1, ..., y_n) : |t - t_0| < \rho, |y_j - y_{j0}| < \rho,\ j = 1, 2, ..., n \right\},\ \ \rho > 0.$$

Теорема 1 (теорема Коши). Существует $\rho_1 > 0$ такое, что система (1) имеет решение с начальными данными $t = t_0$, $y_j = y_{j0}$, $j = 1, 2, ..., n$, аналитическое по t при $|t - t_0| < \rho_1$.

Доказательство теоремы. Замена $t - t_0 = \tau$, $y_j - y_{j0} = x_j$, $j = 1, 2, ..., n$, приводит систему (1) к виду

$$\frac{dx_j}{d\tau} = X_j(\tau, x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3}$$

$$X_j\left(\tau,x_1,...,x_n\right)=\sum_{m,m_1,...,m_n=0}^{+\infty} L^{[j]}_{m,m_1,...,m_n}\tau^m x_1^{m_1}...x_n^{m_n}\ ,\ j=1,2,...,n \tag{4}$$

и ряды (4) сходятся абсолютно в области

$$\tilde{G}=\left\{\left(\tau,x_1,...,x_n\right):\left|\tau\right|<\rho,\left|x_j\right|<\rho,\ j=1,2,...,n\right\}.$$

Решение системы (3) с начальными данными $\tau=0$, $x_j=0$, $j=1,2,...,n$, будем искать в виде

$$x_j\left(\tau\right)=\varphi_j\left(\tau\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{[j]}\tau^k\ . \tag{5}$$

Подставляя ряды (5) в систему (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим, что коэффициенты $a_k^{[j]}$ находятся однозначно из рекуррентных формул:

$$\begin{cases} a_1^{[j]}=L_{0,0,...0}^{[j]}, \\ ... \\ (k+1)a_{k+1}^{[j]}=T_k\left(a_l^{[s]},L_{m,m_1,...,m_n}^{[j]}\right), \\ ... \end{cases} \tag{6}$$

где T_k - многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от $a_l^{[s]}$ и $L^{[j]}_{m,m_1,...m_n}$ с индексами $l\le k$, $m+m_1+...+m_n\le k$, $s=1,...,n$.

Наряду с системой (3) рассмотрим систему

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\sum_{m,m_1,...,m_n=0}^{+\infty} K^{[j]}_{m,m_1,...,m_n}\tau^m x_1^{m_1}...x_n^{m_n}\ ,\quad j=1,...,n, \tag{7}$$

коэффициенты которой удовлетворяют неравенству

$$\left|L^{[j]}_{m,m_1,...,m_n}\right|\le K^{[j]}_{m,m_1,...,m_n}\ . \tag{8}$$

Система (7), коэффициенты которой удовлетворяют (8), называется *системой сравнения* или *мажорирующей системой* для системы (3).

Ищем решение системы (7) с начальными условиями $\tau=0$, $x_j=0$, $j=1,2,...,n$, в виде ряда

$$x_j\left(\tau\right)=\psi_j\left(\tau\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^{[j]}\tau^k\ . \tag{9}$$

Аналогично предыдущему случаю получим:

$$\begin{cases} b_1^{[j]} = K_{0,0,\ldots 0}^{[j]}, \\ \ldots \\ (k+1)\, b_{k+1}^{[j]} = T_k\left(b_l^{[s]}, K_{m,m_1,\ldots,m_n}^{[j]}\right), \\ \ldots \end{cases}$$

где T_k - те же многочлены, что и в равенствах (6).

Поскольку T_k - многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами, верна оценка

$$(k+1)\left|a_{k+1}^{[j]}\right| = \left|T_k\left(a_l^{[s]}, L_{m,m_1,\ldots,m_n}^{[j]}\right)\right| \le T_k\left(\left|a_l^{[s]}\right|, \left|L_{m,m_1,\ldots,m_n}^{[j]}\right|\right).$$

Из последней оценки и (8) следует, что

$$\left|a_{k+1}^{[j]}\right| \le b_{k+1}^{[j]}$$

для всех $j=1,\ldots,n$, $k \ge 0$, то есть ряды (9) мажорируют ряды (5).

Подберем систему сравнения и докажем, что ряды (9), доставляющие ее решение, сходятся абсолютно при $|\tau| < \rho_1$ для некоторого $\rho_1 > 0$. Тем самым будет доказано, что и ряды (5) сходятся при $|\tau| < \rho_1$.

Выберем произвольное r такое, что $0 < r < \rho$. Ряды в правой части системы (3) сходятся абсолютно в области $\tilde{G}$. Следовательно, сходятся и ряды

$$\sum_{m,m_1,\ldots,m_n=0}^{+\infty} \left|L_{m,m_1,\ldots m_n}^{[j]}\right| r^{m+m_1+\ldots+m_n},$$

для всех $j=1,\ldots,n$.

Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, следовательно, существует константа M такая, что

$$\left|L_{m,m_1,\ldots,m_n}^{[j]}\right| r^{m+m_1+\ldots+m_n} \le M$$

для всех $j=1,\ldots,n$ и $m \ge 0$, $m_j \ge 0$. Поэтому в качестве коэффициентов системы сравнения можно взять

$$K_{m,m_1,\ldots m_n}^{[j]} = \frac{M}{r^{m+m_1+\ldots+m_n}},$$

и система (7) принимает вид

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\sum_{m,m_1,\dots,m_n=0}^{+\infty} M\left(\frac{\tau}{r}\right)^m\left(\frac{x_1}{r}\right)^{m_1}\dots\left(\frac{x_n}{r}\right)^{m_n},\quad j=1,\dots,n. \qquad (10)$$

Справа в системе (10) стоит геометрическая прогрессия, и мы можем записать систему в виде

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\frac{M}{(1-\tau/r)(1-x_1/r)\dots(1-x_n/r)},\quad j=1,\dots,n. \qquad (11)$$

Наряду с системой (11) рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{M}{(1-\tau/r)(1-u/r)^n}. \qquad (12)$$

Заметим, если функция $u=\psi(\tau)$ - решение уравнения (12) с начальными данными $\tau=0,\ u=0$, то функции $x_j=\psi(\tau)$ дают решение системы (11) с начальными данными $\tau=0,\ x_j=0,\ j=1,\dots,n$.

Интегрируя уравнение (12) находим, что искомое решение имеет вид

$$\psi(\tau)=r\left(1-\left(1+M(n+1)\ln(1-\tau/r)\right)^{1/(n+1)}\right). \qquad (13)$$

Функция $\ln(1-\tau/r)$ - аналитическая при $|\tau|<r$, биномиальная функция $\left(1+M(n+1)\ln(1-\tau/r)\right)^{1/(n+1)}$ - аналитическая при $|\tau|<r_1$, где

$$r_1=r\left(1-\exp\left(-\frac{1}{M(n+1)}\right)\right).$$

Очевидно, что $0<r_1<r$, поэтому функция $\psi(\tau)$ - аналитическая при $|\tau|<r_1$. Следовательно, при $|\tau|<r_1$ сходятся ряды (9), и сходятся ряды (5).

Число r - произвольное, подчиненное условию $0<r<\rho$. Устремляя r к ρ, получим, что ряды (5) сходятся при $|\tau|<\rho_1$, где

$$\rho_1=\rho\left(1-\exp\left(-\frac{1}{M(n+1)}\right)\right).$$

Теорема доказана.

Теорема Коши для линейных систем.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t) y_k + q_j(t), \tag{14}$$

$j = 1,2,...,n$, где

$$p_{jk}(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} L_m^{[j,k]} (t - t_0)^m, \quad q_j(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} L_m^{[j]} (t - t_0)^m, \tag{15}$$

$j,k = 1,2,...,n$, и ряды (15) сходятся абсолютно при $|t - t_0| < \rho,\ \rho > 0$.

Теорема 2. Решение системы (14) с начальными данными $t = t_0$, $y_j = y_{j0}$, $j = 1,2,...,n$, - аналитическая по t функция при $|t - t_0| < \rho$.

Доказательство теоремы. В случае линейной системы доказательство теоремы в основном повторяет доказательство теоремы 1, но специальный вид системы (14) позволяет подобрать другую систему сравнения и доказать аналитичность решения при $|t - t_0| < \rho$.

Замена $t - t_0 = \tau$, $y_j - y_{j0} = x_j$, $j = 1,2,...,n$, приводит систему (14) к виду

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_{jk}(t) x_k + \bar{q}_j(t), \quad j = 1,2,...,n, \tag{16}$$

где

$$\bar{p}_{jk}(\tau) = \sum_{m=0}^{+\infty} \bar{L}_m^{[j,k]} \tau^m, \quad \bar{q}_j(\tau) = \sum_{m=0}^{+\infty} \bar{L}_m^{[j]} \tau^m \tag{17}$$

$j,k = 1,2,...,n$, и ряды (17) сходятся абсолютно при $|\tau| < \rho$.

Система (16) есть частный случай системы (3), поэтому решение системы (16) с начальными данными $\tau = 0$, $x_j = 0$, $j = 1,2,...,n$, представляется рядами (5), сходящимися при достаточно малых $|\tau|$. Нужно доказать, что в действительности эти ряды сходятся при $|\tau| < \rho$.

Следуя методу доказательства теоремы 1, построим для (16) специальную систему сравнения.

Выберем произвольное r такое, что $0 < r < \rho$. Ряды (17) сходятся абсолютно при $|\tau| < \rho$. Следовательно, сходятся и ряды

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left| \bar{L}_m^{[j,k]} \right| r^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \left| \bar{L}_m^{[j]} \right| r^m$$

для всех $j=1,...,n$.

Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, следовательно, существует константа M такая, что

$$\left|\bar{L}_{m}^{[j,k]}\right| r^m \le M\,,\quad \left|\bar{L}_{m}^{[j]}\right| r^m \le M$$

для всех $j=1,...,n$ и $m \ge 0$. Поэтому все ряды (17) мажорируются прогрессией

$$\sum_{m=0}^{+\infty} M\left(\frac{\tau}{r}\right)^m = \frac{M}{1-\tau/r}\,,$$

и в качестве системы сравнения можно взять систему

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{M}{1-\tau/r}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + 1\right),\quad j=1,2,...,n. \tag{18}$$

Наряду с системой (18) рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{M}{\left(1-\tau/r\right)}\left(nu+1\right). \tag{19}$$

Если функция $u=\psi\left(\tau\right)$ - решение уравнения (19) с начальными данными $\tau=0,\ u=0$, то функции $x_j=\psi\left(\tau\right)$, дают решение системы (18) с начальными данными $\tau=0,\ x_j=0$, $j=1,...,n$.

Интегрируя уравнение (19) находим, что искомое решение имеет вид

$$\psi\left(\tau\right) = \frac{1}{n}\left(\left(1-\tau/r\right)^{-Mnr} - 1\right). \tag{20}$$

Функция $\psi\left(\tau\right)$ - аналитическая при $\left|\tau\right| < r$, следовательно, при таких τ она представима сходящимся степенным рядом, который мажорирует ряды (5). И при $\left|\tau\right| < r$ сходятся ряды (5).

Число r - произвольное, подчиненное условию $0<r<\rho$. Устремляя r к ρ, получим, что ряды (5) сходятся при $\left|\tau\right| < \rho$. Теорема доказана.