Глава 6. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ЛЯПУНОВУ.

§ 1. Определение устойчивости по Ляпунову решения системы.

Рассматриваем систему

$$\dot{y} = Y(t, y), \tag{1}$$

где $y \in R^n$, $Y(t, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области $G \subset R^{n+1}$.

Пусть $y = \varphi(t)$ - решение системы (1), определенное при $t \in [t_0, +\infty)$.

Определение 1. Решение $y = \varphi(t)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любое решение $y = \psi(t)$ системы (1) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству

$$\left\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\right\| < \delta,$$

во-первых, определено при $t \in [t_0, +\infty)$, и, во-вторых, удовлетворяет неравенству

$$\left\|\psi(t) - \varphi(t)\right\| < \varepsilon$$

для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

В противном случае решение $y = \varphi(t)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*.

Определение 2. Решение $y = \varphi(t)$ системы (1) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если во-первых, оно устойчиво по Ляпунову, и, во-вторых, существует $\Delta > 0$ такое, что для любого решения $y = \psi(t)$ системы (1) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству

$$\left\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\right\| < \Delta,$$

выполнено условие

$$\left\|\psi(t) - \varphi(t)\right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0.$$

Замечание. На конечном отрезке $[a, b]$ ε-близость решений с δ-близкими начальными данными гарантирует теорема об интегральной непрерывности. Для устойчивости решения требуется ε-близость решений с δ-близкими начальными данными на луче $[t_0, +\infty)$.

Сделаем в системе (1) замену

$$y = \varphi(t) + x,$$

$t \in [t_0, +\infty)$, тогда

$$\dot{\varphi}(t) + \dot{x} = Y\big(t, \varphi(t) + x\big) \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}(t) = Y\big(t, \varphi(t)\big),$$

и система (1) приводится к системе

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{2}$$

где

$$X(t, x) = Y\big(t, \varphi(t) + x\big) - Y\big(t, \varphi(t)\big).$$

При этом решению $y = \varphi(t)$ системы (1) соответствует решение $x \equiv 0$ системы (2). Любому решению $y = \psi(t)$ системы (1) соответствует решение $x = \psi(t) - \varphi(t)$ системы (2).

И исследование на устойчивость решения $y = \varphi(t)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (2).

§ 2. Устойчивость решений линейной системы.

Рассматриваем линейную неоднородную систему

$$\dot{y} = P(t)y + q(t), \tag{1}$$

где матрица $P(t)$ и вектор $q(t)$ непрерывны при $t \in [t_0, +\infty)$.

Соответствующая (1) однородная система:

$$\dot{y} = P(t)y, \tag{2}$$

Теорема 1. Тип устойчивости любого решения $y = \varphi(t)$ системы (1) совпадает с типом устойчивости решения $y \equiv 0$ системы (2).

Доказательство теоремы. Сделаем в системе (1) замену $y = \varphi(t) + x$, предложенную в конце первого параграфа. В нашем случае

$$Y(t, y) = P(t)y + q(t),$$

$$X(t, x) = Y\big(t, \varphi(t) + x\big) - Y\big(t, \varphi(t)\big) =$$
$$= P(t)\big(\varphi(t) + x\big) + q(t) - \big(P(t)\varphi(t) + q(t)\big) = P(t)x,$$

и исследование на устойчивость решения $y = \varphi(t)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $y \equiv 0$ системы (2). Теорема доказана.

Таким образом, все решения системы (1) имеют одинаковый характер устойчивости. Все решения устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы одновременно с тривиальным решением соответствующей однородной системы.

Определение. Линейная система (1) (и линейная система (2)) называется *устойчивой*, *асимптотически устойчивой* или *неустойчивой*, если устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво решение $y \equiv 0$ однородной системы (2).

Теорема 2 (критерий устойчивости линейной однородной системы).

Следующие условия эквивалентны.

1. Решение $y \equiv 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову.
2. Любое решение системы (2) ограничено.
3. Любая фундаментальная матрица системы (2) ограничена.
4. Существует ограниченная фундаментальная матрица системы (2).

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что из второго условия следует третье, поскольку столбцы каждой фундаментальной матрицы системы (2) есть решения системы, и из третьего условия следует четвертое.

Осталось доказать, что из первого условия следует второе, а из четвертого условия следует первое.

Докажем, что из первого условия следует второе.

Решение $y \equiv 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любое решение $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $\|\psi(t_0)\| < \delta$, удовлетворяет неравенству $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Положим $\varepsilon = 1$, для этого ε существует $\delta > 0$ такое, что любое решение $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $\|\psi(t_0)\| < \delta$, удовлетворяет неравенству $\|\psi(t)\| < 1$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$, то есть ограничено.

Рассмотрим теперь решение $y = \psi(t)$, для которого $\|\psi(t_0)\| \geq \delta$. Фиксируем число $\alpha > 0$ такое, что $\|\alpha\psi(t_0)\| < \delta$.

Указанное число α существует, например, можно положить $\alpha = \delta / \left(2 \left\| \psi(t_0) \right\| \right)$.

Функция $\xi(t) = \alpha \psi(t)$ тоже является решением системы (2), и $\left\| \xi(t_0) \right\| = \left\| \alpha \psi(t_0) \right\| < \delta$, поэтому $\left\| \xi(t) \right\| < 1$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Следовательно, $\left\| \psi(t) \right\| < 1/\alpha$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$, то есть решение $y = \psi(t)$ ограничено. И мы доказали, что из первого условия следует второе.

Докажем теперь, что из четвертого условия следует первое.

Пусть $\Phi(t)$ - ограниченная фундаментальная матрица системы (2). Существует такое число $M > 0$, что $\left\| \Phi(t) \right\| \le M$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Докажем, что решение $y \equiv 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $\left\| \psi(t_0) \right\| < \delta$, удовлетворяет неравенству $\left\| \psi(t) \right\| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Решение $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $\left\| \psi(t_0) \right\| < \delta$, представим в виде

$$\psi(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \psi(t_0).$$

Тогда

$$\left\| \psi(t) \right\| \le \left\| \Phi(t) \right\| \cdot \left\| \Phi^{-1}(t_0) \right\| \cdot \left\| \psi(t_0) \right\| < MC\delta,$$

где $C = \left\| \Phi^{-1}(t_0) \right\| = const$.

Положим $\delta = \varepsilon / (MC)$, тогда из последнего неравенства следует, что $\left\| \psi(t) \right\| < \varepsilon$, и условие 1 доказано, а вместе с этим доказана и теорема.

Теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3 (критерий неустойчивости линейной однородной системы).

Следующие условия эквивалентны.

1. Решение $y \equiv 0$ системы (2) неустойчиво.
2. Существует неограниченное решение системы (2).
3. Существует неограниченная фундаментальная матрица системы (2).
4. Любая фундаментальная матрица системы (2) не ограничена.

Теорема 4 (критерий асимптотической устойчивости линейной однородной системы).

Следующие условия эквивалентны.

1. Решение $y \equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво.
2. $\left\|\psi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для любого решения $y = \psi(t)$ системы (2).
3. $\left\|\Phi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для любой фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (2).
4. Существует такая фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (2), что $\left\|\Phi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, что из второго условия следует третье, а из третьего условия следует четвертое.

Осталось доказать, что из первого условия следует второе, а из четвертого условия следует первое.

Докажем, что из первого условия следует второе.

Решение $y \equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво, следовательно, это решение устойчиво по Ляпунову, и существует $\Delta > 0$ такое, что для любого решения $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $\left\|\psi(t_0)\right\| < \Delta$, выполнено условие $\left\|\psi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Рассмотрим теперь решение $y = \psi(t)$, для которого $\left\|\psi(t_0)\right\| \geq \Delta$. Фиксируем такое число $\alpha > 0$, что $\left\|\alpha\psi(t_0)\right\| < \Delta$.

Функция $\xi(t) = \alpha\psi(t)$ - тоже решение системы (2), и $\left\|\xi(t_0)\right\| = \left\|\alpha\psi(t_0)\right\| < \Delta$, поэтому $\left\|\xi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Следовательно, $\left\|\psi(t)\right\| = \dfrac{1}{\alpha}\left\|\xi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. И мы доказали, что из первого условия следует второе.

Докажем теперь, что из четвертого условия следует первое.

Пусть $\Phi(t)$ - такая фундаментальная матрица системы (2), что $\left\|\Phi(t)\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Следовательно, $\Phi(t)$ ограничена, и согласно теореме 2, решение $y \equiv 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову.

Осталось доказать, что существует $\Delta > 0$ такое, что для любого решения $y = \psi(t)$ системы (2) с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $\|\psi(t_0)\| < \Delta$, выполнено условие $\|\psi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Решение $y = \psi(t)$ системы (2), для которого $\|\psi(t_0)\| < \Delta$, представим в виде

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\psi(t_0).$$

Тогда

$$\|\psi(t)\| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot \|\psi(t_0)\| < \|\Phi(t)\| C\Delta,$$

где $C = \|\Phi^{-1}(t_0)\| = const$.

И из условия $\|\Phi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ следует, что $\|\psi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, и условие 1 доказано, а вместе с этим доказана и теорема.

§ 3. Устойчивость решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. (часть материала есть в части 7)

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{y} = Ay, \tag{1}$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n, $t \in R$, $y \in R^n$.

Исследуем устойчивость решения $y \equiv 0$, $t \in [0, +\infty)$.

$\Phi(t) = e^{At}$ - фундаментальная матрица решений системы (1).

Сначала докажем некоторые свойства матрицы e^{At}, $t \ge 0$.

Пусть J - жорданова каноническая форма матрицы A, $A = SJS^{-1}$, $\det S \ne 0$.

Лемма 1.

1. Матрица e^{At} - ограничена при $t \in [0, +\infty)$ если, и только если ограничена матрица e^{Jt} при $t \in [0, +\infty)$.
2. $\|e^{At}\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ тогда и только тогда, когда $\|e^{Jt}\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Доказательство леммы. $e^{At}=S\,e^{Jt}S^{-1}$, согласно лемме 2 параграфа 8 четвертой главы.

$$\left\|e^{At}\right\|\le\|S\|\cdot\left\|e^{Jt}\right\|\cdot\left\|S^{-1}\right\|, \qquad (2)$$

и из ограниченности матрицы e^{Jt} при $t\in[0,+\infty)$ следует ограниченность e^{At}, поскольку $\|S\|$ и $\left\|S^{-1}\right\|$ - константы.

Если $\left\|e^{Jt}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$, то из оценки (2) следует, что и $\left\|e^{At}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$.

$e^{Jt}=S^{-1}e^{At}S$, и аналогично доказывается, что из ограниченности матрицы e^{At} при $t\in[0,+\infty)$ следует ограниченность e^{Jt}. И если $\left\|e^{At}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$, то и $\left\|e^{Jt}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$. Лемма доказана.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ - собственные числа матрицы A.

Лемма 2. Если $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ для всех $j=1,2,...,n$, то $\left\|e^{At}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$.

Доказательство леммы 2. Как следует из параграфа 8 четвертой главы, каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\dfrac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k\in\{0\}\cup N$.

$$\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right|=\frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}\underset{t\to+\infty}{\to}0,\text{ если }\operatorname{Re}\lambda_j<0.$$

Каждый элемент матрицы e^{Jt} стремится к нулю при $t\to+\infty$, следовательно, $\left\|e^{Jt}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$, и поэтому $\left\|e^{At}\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$. Лемма доказана.

Теорема 1 (об оценке нормы фундаментальной матрицы e^{At}).

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ - собственные числа матрицы A.

Тогда для любого $\delta>\max\limits_{j=1,2,...,n}\left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$ существует константа $K\ge1$ такая, что

$$\left\|e^{At}\right\|\le Ke^{\delta t}.$$

Доказательство теоремы. Фиксируем $\delta>\max\limits_{j=1,2,...,n}\left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$.

Собственные числа матрицы $B = A - \delta E$ есть $\mu_j = \lambda_j - \delta$, и $\operatorname{Re}\mu_j < 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$. И $\left\|e^{Bt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ по лемме 2. Тогда

$$e^{At} = e^{Bt+\delta Et} = e^{Bt}e^{\delta Et} = e^{Bt}Ee^{\delta t} = e^{Bt}e^{\delta t}. \tag{3}$$

Пусть $K = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left\|e^{Bt}\right\|$. Заметим: $K \geq 1$, поскольку $\left\|e^{Bt}\right\| = 1$ при $t = 0$.

Из равенства (3) следует, что $\left\|e^{At}\right\| \leq Ke^{\delta t}$. Теорема доказана.

Теорема 2 (тип устойчивости однородной системы с постоянными коэффициентами, некритический случай).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A.

1. Если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, то решение $y \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.
2. Если существует λ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то решение $y \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Доказательство теоремы. Доказательство первого пункта следует из леммы 2 и теоремы 4 предыдущего параграфа.

Для доказательства второго пункта покажем, что e^{At} - неограниченная матрица при $t \in [0, +\infty)$, если существует такое λ_j, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, и применим теорему 3 предыдущего параграфа. Из леммы 1 следует, что достаточно доказать неограниченность матрицы e^{Jt}.

Каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\dfrac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$. Если существует такое λ_j, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то матрица e^{Jt} имеет элемент $e^{\lambda_j t}$, и $\left|e^{\lambda_j t}\right| = e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$, поэтому e^{Jt} - неограниченная матрица при $t \in [0, +\infty)$. Теорема доказана.

Теорема 3 (тип устойчивости однородной системы с постоянными коэффициентами, критический случай).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A, $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, и существуют собственные числа λ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, такие, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$.

1. Если всем собственным числам λ_j, для которых $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, в жордановой форме матрицы A отвечают лишь одномерные клетки Жордана, то решение $y \equiv 0$ системы (1) устойчиво, но не асимптотически.

2. Если существует такое λ_j, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и этому λ_j в жордановой форме матрицы A отвечает клетка Жордана, размерность которой больше единицы, то решение $y \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Доказательство теоремы. Каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$.

Если собственное число λ_j таково, что $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то

$$\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right| = \frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Если $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечают лишь одномерные клетки Жордана, то каждая клетка представляет собой один элемент, равный $e^{\lambda_j t}$. И $\left|e^{\lambda_j t}\right| = e^0 = 1$.

Таким образом, все элементы матрицы e^{Jt} ограничены, то есть e^{Jt} - ограниченная матрица при $t \in [0, +\infty)$. И согласно лемме 1 и теореме 2 предыдущего параграфа, решение $y \equiv 0$ системы (1) устойчиво, но не асимптотически.

Если $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечает клетка Жордана размерности больше единицы, то матрица e^{Jt} имеет элемент, равный $te^{\lambda_j t}$. И $\left|te^{\lambda_j t}\right| = t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$. Таким образом, матрица e^{Jt} имеет неограниченные элементы, то есть e^{Jt} - неограниченная матрица при $t \in [0, +\infty)$. И согласно теореме 3 предыдущего параграфа, решение $y \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Теорема доказана.

§ 4. Устойчивость по первому приближению.

Рассматриваем систему

$$\dot{y} = Y(t, y), \tag{1}$$

где $y \in R^n$, $Y(t, x)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по y в области $G \subset R^{n+1}$.

Пусть $y = \varphi(t)$ - решение системы (1), определенное при $t \in [t_0, +\infty)$. Исследуем это решение на устойчивость.

Считаем, что существует $\rho_0 > 0$ такое, что множество

$$\{(t, y) : t \in [t_0, +\infty), \|y - \varphi(t)\| < \rho_0\}$$

содержится в области G.

Замена $y = \varphi(t) + x$, $t \in [t_0, +\infty)$, приводит систему (1) к системе

$$\dot{x} = Y(t, \varphi(t) + x) - Y(t, \varphi(t)),$$

или к системе

$$\dot{x} = P(t)x + g(t, x), \tag{2}$$

где $P(t) = \dfrac{\partial Y(t, \varphi(t))}{\partial y}$, $g(t, 0) = 0$ для $t \in [t_0, +\infty)$, $\dfrac{\|g(t, x)\|}{\|x\|} \underset{\|x\| \to 0}{\to} 0$.

Определение. Система

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{3}$$

называется *системой первого приближения* для системы (2).

Пусть $\Phi(t, \tau)$ - фундаментальная матрица Коши системы (3), $\Phi(\tau, \tau) = E$.

Теорема 1 (об устойчивости нулевого решения системы по первому приближению).

Пусть существуют константы $K \ge 1$, $\sigma > 0$ и $c \in (0, \sigma/K)$ такие, что

$$\|\Phi(t, \tau)\| \le K e^{-\sigma(t - \tau)} \tag{4}$$

для всех $t, \tau \in R$, удовлетворяющих условию $t_0 \le \tau < t < +\infty$, и

$$\|g(t, x)\| < c\|x\| \tag{5}$$

для всех $t \geq t_0$.

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (2) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что все решения системы (2) с начальными данными, близкими к нулю, определены при $t \geq t_0$.

Доказываем от противного.

Пусть $x = \xi(t)$ - решение системы (2) с начальными условиями $\left(t_0, \xi(t_0)\right)$, где $\left\|\xi(t_0)\right\| < \rho < \rho_0$. Предположим, что это решение определено при $t \in \left[t_0, \beta\right)$, $\beta < +\infty$, и $\left[t_0, \beta\right)$ - максимальный промежуток задания решения $x = \xi(t)$.

$$\dot{\xi}(t) = P(t)\xi(t) + g\left(t, \xi(t)\right).$$

Обозначим $g\left(t, \xi(t)\right) = q(t)$, тогда функция $\xi(t)$ есть решение линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), \tag{6}$$

и это решение можно записать в виде

$$\xi(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) q(\tau) d\tau \tag{7}$$

для всех $t \in \left[t_0, \beta\right)$.

$$\left\|\xi(t)\right\| \leq \left\|\Phi(t, t_0)\right\| \cdot \left\|\xi(t_0)\right\| + \left|\int_{t_0}^{t} \left\|\Phi(t, \tau)\right\| \cdot \left\|q(\tau)\right\| d\tau\right|,$$

и с учетом неравенств (4), (5),

$$\left\|\xi(t)\right\| \leq K e^{-\sigma(t - t_0)} \cdot \left\|\xi(t_0)\right\| + \left|\int_{t_0}^{t} K e^{-\sigma(t - \tau)} c \left\|\xi(\tau)\right\| d\tau\right|, \tag{8}$$

поскольку $\left\|q(t)\right\| = \left\|g\left(t, \xi(t)\right)\right\| \leq c\left\|\xi(t)\right\|$.

Умножим обе части неравенства (8) на $e^{\sigma(t - t_0)}$:

$$e^{\sigma(t - t_0)} \left\|\xi(t)\right\| \leq K \cdot \left\|\xi(t_0)\right\| + cK \left|\int_{t_0}^{t} e^{\sigma(\tau - t_0)} \left\|\xi(\tau)\right\| d\tau\right|,$$

и применим лемму Гронуолла к функции $u(t) = e^{\sigma(t - t_0)} \left\|\xi(t)\right\|$. Получим

$$e^{\sigma(t-t_0)}\left\|\xi(t)\right\| \le K\cdot\left\|\xi(t_0)\right\|e^{cK(t-t_0)},$$

или

$$\left\|\xi(t)\right\| \le K\cdot\left\|\xi(t_0)\right\|e^{(cK-\sigma)(t-t_0)} \tag{9}$$

для всех $t\in[t_0,\beta)$.

По условию теоремы $c\in(0,\sigma/K)$, поэтому $cK-\sigma<0$, и

$$\left\|\xi(t)\right\| \le K\cdot\left\|\xi(t_0)\right\| \tag{10}$$

для всех $t\in[t_0,\beta)$.

Положим $\Delta=\dfrac{\rho}{2K}$, и $\left\|\xi(t_0)\right\|<\Delta<\rho$, тогда из неравенства (10) следует, что

$$\left\|\xi(t)\right\|<\frac{\rho}{2} \tag{11}$$

для всех $t\in[t_0,\beta)$. И если $\beta<+\infty$, то график решения $x=\xi(t)$ содержится в компакте

$$D=\left\{(t,x):t\in[t_0,\beta],\left\|x\right\|\le\rho/2\right\},$$

что противоречит теореме о выходе максимально продолженного решения из компакта.

Из неравенства (11) следует, что решение $x=\xi(t)$ может покинуть компакт D только через «боковую» стенку $t=\beta$, то есть это решение может быть продолжено вправо. Поэтому наше предположение неверно, и $\beta=+\infty$.

Мы доказали, что все решения системы (2) с начальными данными $(t_0,\xi(t_0))$, где $\left\|\xi(t_0)\right\|<\Delta<\rho$, определены при $t\in[t_0,+\infty)$.

Докажем теперь асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2).

Фиксируем $\varepsilon>0$, и положим $\delta=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{2K},\Delta\right)$. Из неравенства (10) следует, что $\left\|\xi(t)\right\|<K\delta<\varepsilon$, если $\left\|\xi(t_0)\right\|<\delta$.

Кроме того, из неравенства (9) следует, что $\left\|\xi(t)\right\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$.

Следовательно, решение $x\equiv0$ системы (2) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x}=Ax+g(t,x), \tag{12}$$

где A - постоянная квадратная матрица размерности n, функция $g(t,x)$ непрерывна в области $G \subset R^{n+1}$,

$$\{(t,x): t \in [t_0,+\infty), \|x\| < \rho_0\} \subset G$$

для некоторого $\rho_0 > 0$, и $g(t,0) = 0$ для $t \in [t_0,+\infty)$.

Из этих условий следует, что система (12) имеет решение $x \equiv 0$, определенное при $t \in [t_0,+\infty)$.

Предполагаем, что $\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}$ стремится к нулю при $\|x\| \to 0$ равномерно по t при $t \in [t_0,+\infty)$.

Система первого приближения для системы (12) – линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax. \tag{13}$$

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости по первому приближению нулевого решения системы с постоянной матрицей линейной части).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A, $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ для всех $j = 1,2,...,n$, и

$\dfrac{\|g(t,x)\|}{\|x\|}$ стремится к нулю при $\|x\| \to 0$ равномерно по t при $t \in [t_0,+\infty)$.

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (12) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы. Покажем, что для системы (12) выполнены все условия теоремы 1.

$\Phi(t) = e^{At}$ - фундаментальная матрица решений системы (13), и

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{At}e^{-A\tau} = e^{A(t-\tau)}.$$

Выберем произвольное δ, удовлетворяющее неравенству

$$\max_{j=1,2,...,n}\left(\mathrm{Re}\lambda_j\right) < \delta < 0.$$

По теореме 1 третьего параграфа (об оценке нормы фундаментальной матрицы) для выбранного δ существует константа $K \geq 1$, и верно неравенство

$$\left\|e^{A(t-\tau)}\right\| \leq Ke^{\delta(t-\tau)}$$

для всех $t, \tau \in R$ таких, что $t_0 \leq \tau < t < +\infty$.

Положим $\sigma = -\delta$, и получим, что условие (4) выполнено.

Возьмем произвольное $c \in \left(0, \sigma/K\right)$.

$\frac{\left\|g\left(t,x\right)\right\|}{\left\|x\right\|}$ стремится к нулю при $\left\|x\right\| \to 0$ равномерно по t при $t \in \left[t_0, +\infty\right)$, поэтому существует такое $\rho \in \left(0, \rho_0\right)$, что из неравенства $\left\|x\right\| < \rho$ следует неравенство $\frac{\left\|g\left(t,x\right)\right\|}{\left\|x\right\|} < c$, и условие (5) выполнено.

Таким образом, для системы (12) выполнены все условия теоремы 1, и согласно этой теореме, решение $x \equiv 0$ системы (12) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Приведем без доказательства теорему о неустойчивости.

Теорема 3 (о неустойчивости по первому приближению нулевого решения системы с постоянной матрицей линейной части).

Пусть среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A существует такое λ_j, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, и

$\frac{\left\|g\left(t,x\right)\right\|}{\left\|x\right\|}$ стремится к нулю при $\left\|x\right\| \to 0$ равномерно по t при $t \in \left[t_0, +\infty\right)$.

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (12) неустойчиво.

Замечание. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные числа матрицы A. Если $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, и существуют такие собственные числа λ_j, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, то тип устойчивости решения $x \equiv 0$ системы (12) зависит от функции $g\left(t,x\right)$.

§ 5. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости решений.

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = X\left(t,x\right), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, функция $X\left(t,x\right)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x локально в области $G \subset R^{n+1}$.

Считаем, что

$$\left\{\left(t,x\right) : t \in \left[t_0, +\infty\right), \left\|x\right\| < \rho_0\right\} \subset G,$$

и $X(t,0)=0$ для всех $t\in[t_0,+\infty)$. Из этих условий следует, что $x\equiv 0$ - решение системы (1), определенное при $t\in[t_0,+\infty)$.

Определение 1. Непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, $V:G\to R$, такая, что $V(t,0)=0$ для всех $t\in[t_0,+\infty)$, называется *функцией Ляпунова*.

Определение 2. Линейный оператор D, заданный на множестве функций Ляпунова,

$$DV(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}X(t,x) \tag{2}$$

называется *производной функции V в силу системы (1)*.

Замечание. Для любого решения $x=\varphi(t)$ системы (1)

$$DV(t,\varphi(t))=\frac{dV(t,\varphi(t))}{dt}.$$

Действительно,

$$DV(t,\varphi(t))=\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial x}X(t,\varphi(t))=$$
$$=\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial x}\dot{\varphi}(t)=\frac{dV(t,\varphi(t))}{dt}.$$

Определение 3. Функция $V(x)$, не зависящая от t, называется *определенно положительной*, если $V(x)>0$ для всех $x\neq 0$.

Функция $V(t,x)$ называется *определенно положительной*, если существует определенно положительная функция $W(x)$, не зависящая от t, такая, что $V(t,x)\geq W(x)$ для всех $(t,x)\in G$.

Функция $V(t,x)$ называется *определенно отрицательной*, если функция $(-V(t,x))$ - определенно положительная.

Определение 4. Функция $V(t,x)$ называется *положительной*, если $V(t,x)\geq 0$ для всех $(t,x)\in G$.

Функция $V(t,x)$ называется *отрицательной*, если $V(t,x) \le 0$ для всех $(t,x) \in G$.

Определение 5. Функция Ляпунова $V(t,x)$ *допускает бесконечно малый высший предел*, если существует определенно положительная функция Ляпунова $W(x)$, не зависящая от t, такая, что $|V(t,x)| \le W(x)$ для всех $(t,x) \in G$.

Лемма. Пусть $x = \varphi(t)$ - решение системы (1), $\|\varphi(t)\| \le \rho < \rho_0$, $V(t,x)$ - определенно положительная функция Ляпунова, которая допускает бесконечно малый высший предел.

Тогда

$$\|\varphi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ если, и только если } V(t,\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Доказательство леммы. Функция Ляпунова $V(t,x)$ - определенно положительная и допускает бесконечно малый высший предел, следовательно, существуют определенно положительные функции Ляпунова $W_1(x)$ и $W_2(x)$ такие, что

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x). \tag{3}$$

$W_2(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, а значит, непрерывная, поэтому $W_2(x) \underset{\|x\|\to 0}{\to} 0$. И из неравенства (3) следует:

$$\text{если } \|\varphi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0, \text{ то } V(t,\varphi(t)) \le W_2(\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Докажем теперь от противного, что из условия $V(t,\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ следует условие $\|\varphi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

Пусть существуют последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и число $\lambda \in (0,\rho)$, такие, что $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ и $\lambda \le \|\varphi(t_k)\| \le \rho$.

Положим

$$l = \inf_{\lambda \le \|x\| \le \rho} W_1(x).$$

Заметим, что инфимум достигается (поскольку множество $\{x : \lambda \le \|x\| \le \rho\}$ ограничено и замкнуто), и $l > 0$.

Из неравенства (3) следует, что $V\left(t_k,\varphi\left(t_k\right)\right)\geq W_1\left(\varphi\left(t_k\right)\right)\geq l$, а это противоречит условию $V\left(t,\varphi\left(t\right)\right)\underset{t\to+\infty}{\to}0$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости).

Пусть существует определенно положительная функция Ляпунова $V\left(t,x\right)$, производная которой в силу системы (1) отрицательна в G.

Тогда решение $x\equiv0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство теоремы. Существует определенно положительная функция Ляпунова $W\left(x\right)$ такая, что $V\left(t,x\right)\geq W\left(x\right)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$, считаем ε достаточно малым: $\varepsilon<\rho_0$.

Пусть

$$l=\inf_{\|x\|=\varepsilon}W\left(x\right).$$

Из непрерывности функции $V\left(t_0,x\right)$ получаем: существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $\|x\|<\delta$ следует неравенство $V\left(t_0,x\right)<l$.

Будем считать, что $\delta<\varepsilon$.

Пусть $x=\varphi\left(t\right)$ - решение системы (1) с достаточно близкими к нулю начальными данными: $\left\|\varphi\left(t_0\right)\right\|<\delta$. Покажем, что $\left\|\varphi\left(t\right)\right\|<\varepsilon$ для всех $t\geq t_0$.

Предположим противное. Пусть существует $T>t_0$ такое, что $\left\|\varphi\left(T\right)\right\|=\varepsilon$ и $\left\|\varphi\left(t\right)\right\|<\varepsilon$ для всех $t\in\left[t_0,T\right)$.

Из отрицательности $DV\left(t,x\right)$ и замечания следует, что $V\left(t,\varphi\left(t\right)\right)$ - невозрастающая по t функция, следовательно,

$$V\left(T,\varphi\left(T\right)\right)\leq V\left(t_0,\varphi\left(t_0\right)\right),$$

кроме того, $V\left(t_0,\varphi\left(t_0\right)\right)<l$.

С другой стороны, $V\left(T,\varphi\left(T\right)\right)\geq W\left(\varphi\left(T\right)\right)\geq l$.

Из полученного противоречия следует, что наше предположение неверно. И для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенства $\left\|\varphi\left(t_0\right)\right\|<\delta$ следует неравенство $\left\|\varphi\left(t\right)\right\|<\varepsilon$ для всех $t\geq t_0$. Это и означает, что решение $x\equiv0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову. Теорема доказана.

Теорема 2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Пусть существует определенно положительная функция Ляпунова $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой в силу системы (1) определенно отрицательна в области G.

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы. Заметим, что условия теоремы 1 выполнены, поэтому решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, существует $\Delta > 0$ такое, что для любого решения $x = \varphi(t)$ системы (1) с достаточно близкими к нулю начальными данными: $\|\varphi(t_0)\| < \Delta$ выполнено неравенство $\|\varphi(t)\| \le \rho < \rho_0$ для всех $t \ge t_0$.

Осталось доказать, что $\|\varphi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для любого решения $x = \varphi(t)$, если $\|\varphi(t_0)\| < \Delta$. Согласно лемме достаточно доказать, что $V(t,\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

По условию теоремы $DV(t,x)$ - определенно отрицательная функция, и из замечания следует, что $V(t,\varphi(t))$ строго убывает по t, поэтому существует предел функции $V(t,\varphi(t))$ при $t \to +\infty$. Пусть

$$\lim_{t\to+\infty} V(t,\varphi(t)) = l \ne 0. \tag{4}$$

Заметим, что $l > 0$, поскольку $V(t,x)$ положительно определена.

Из условия (4) следует, что функция $V(t,\varphi(t))$ отделена от нуля, поэтому и функция $\varphi(t)$ отделена от нуля, то есть существует число λ такое, что $0 < \lambda < \rho$ и $\lambda \le \|\varphi(t)\| \le \rho$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

$DV(t,x)$ - определенно отрицательная функция, поэтому существует определенно положительная функция $W(x)$ такая, что $-DV(t,x) \ge W(x)$.

Пусть

$$l_1 = \inf_{\lambda \le \|x\| \le \rho} W(x).$$

Тогда $l_1 > 0$, и

$$DV(t,\varphi(t)) \le -W(\varphi(t)) \le -l_1. \tag{5}$$

Интегрируем неравенство (5) от t_0 до t:

$$V(t,\varphi(t)) - V(t_0,\varphi(t_0)) \le -l_1(t - t_0),$$

или

$$V\left(t,\varphi(t)\right) \le V\left(t_0,\varphi(t_0)\right) - l_1\left(t-t_0\right)$$

для всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Последнее неравенство противоречит положительной определенности функции $V(t,x)$. Поэтому наше предположение неверно, $V\left(t,\varphi(t)\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, и $\|\varphi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Это и означает, что решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Теорему о неустойчивости нулевого решения докажем только для функций Ляпунова, не зависящих от t.

Пусть $V(x)$ - функция Ляпунова, $0 < \rho < \rho_0$, M^+ - любая связная компонента множества

$$\left\{x:\ V(x) > 0,\ \|x\| \le \rho\right\},$$

и $0 \in \partial M^+$ (где ∂M^+ - граница множества M^+).

Теорема 3 (теорема Четаева о неустойчивости).

Пусть существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что для нее $M^+ \ne \varnothing$, и $DV(x) \ge W(x) > 0$ для всех $x \in M^+$и всех $t \in [t_0,+\infty)$, где $W(x)$ - тоже функция Ляпунова.

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (1) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство теоремы. Пусть $x = \varphi(t)$ - любое решение системы (1) с начальными данными $\left(t_0,\varphi(t_0)\right)$, где $\varphi(t_0) \in M^+$, и $\|\varphi(t_0)\| < \rho$.

Докажем, что существует $T > t_0$ такое, что $\|\varphi(T)\| = \rho$. Это и будет означать, что решение $x \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Доказываем от противного. Пусть $x = \varphi(t)$ - такое решение системы (1), что $\varphi(t_0) \in M^+$ и $\|\varphi(t)\| < \rho$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Покажем, что в этом случае $\varphi(t) \in M^+$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Пусть $\varphi(t) \in \partial M^+$ при некотором $t > t_0$. Тогда, по определению множества M^+, $V\left(\varphi(t)\right) = 0$. Но это невозможно, поскольку $V\left(\varphi(t_0)\right) > 0$, и по условию теоремы $V(\varphi(t))$ строго возрастает по t, если $t \in [t_0, +\infty)$ и $\varphi(t) \in M^+$.

Таким образом, $\varphi(t) \in M^+$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$, и

$$V(\varphi(t)) > V(\varphi(t_0)).$$

Последнее неравенство означает, что функция $V(\varphi(t))$ отделена от нуля, поэтому и функция $\varphi(t)$ отделена от нуля, то есть существует такое число λ, что $0 < \lambda < \rho$ и $\lambda \le \|\varphi(t)\| \le \rho$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Пусть

$$l = \inf_{\lambda \le \|x\| \le \rho} W(x).$$

Тогда $l > 0$, и

$$DV(\varphi(t)) \ge W(\varphi(t)) \ge l. \qquad (6)$$

Интегрируем неравенство (6) от t_0 до t:

$$V(\varphi(t)) - V(\varphi(t_0)) \ge l(t - t_0),$$

или

$$V(\varphi(t)) \ge V(\varphi(t_0)) + l(t - t_0)$$

для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Последнее неравенство противоречит ограниченности функции $V(x)$ при $\|x\| \le \rho$. Поэтому наше предположение неверно.

Таким образом, для каждого решения $x = \varphi(t)$ с начальными данными $(t_0, \varphi(t_0))$, где $\varphi(t_0) \in M^+$, существует такое $T > t_0$, что $\|\varphi(T)\| = \rho$. Это и означает, что решение $x \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Теорема доказана.

Примеры построения функции Ляпунова.

1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $|x| < a$, и

$$g(0) = 0,\ xg(x) > 0 \text{ при } 0 < |x| < a. \qquad (2)$$

((1) - уравнение движения нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы. Если $g(x)=\sin x$, то (1) – уравнение колебания маятника в среде без сопротивления.)

Соответствующая уравнению (1) система:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{3}$$

Функция Ляпунова

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\,ds \tag{4}$$

определенно положительная ($V(x,y)$ - полная энергия системы).

Производная $V(x,y)$ в силу системы (3):

$$DV(x,y) = y(-g(x)) + g(x)y \equiv 0\,. \tag{5}$$

Следовательно, тривиальное решение системы (3) устойчиво по Ляпунову. (Равенство (5) можно трактовать как закон сохранения энергии.)

Замечание. Фазовый портрет системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ мы строили, положение равновесия (0,0) этой системы – центр.

2. Рассмотрим уравнение (1), заменим условие (2) на условие

$$g(0)=0\,,\ g(x)<0 \text{ при } 0<x<a\,. \tag{6}$$

Функция Ляпунова $V(x,y)=xy$ - определенно положительная в секторе $M^+ = \{(x,y): x>0,\, y>0,\, x^2+y^2<a^2\}$ и обращается в ноль на боковых границах сектора (при $x=0$ и при $y=0$).

$$DV(x,y) = y^2 + x(-g(x)) > 0, \text{ если } (x,y)\in M^+\,.$$

Следовательно, тривиальное решение системы (3) - неустойчиво по Ляпунову.

3. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0\,, \tag{7}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица при $|x| < a$, для $g(x)$ выполнены условия (2), и $f(x) > 0$ при $|x| < a$.

Соответствующая уравнению (7) система:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x). \end{cases} \tag{8}$$

Производная функции Ляпунова (4) в силу системы (8):

$$DV(x,y) = y\left(-f(x)y - g(x)\right) + g(x)y \equiv -f(x)y^2 \tag{9}$$

отрицательна при $|x| < a$, поэтому тривиальное решение системы (8) устойчиво по Ляпунову.

В этом случае множество $\{(x,y) : DV(x,y) \equiv 0\} = \{(x,y) : y \equiv 0, |x| < a\}$ не содержит целых траекторий системы (8), за исключением особой точки (0,0). Поэтому можно утверждать, что тривиальное решение системы (8) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

(Про «усиление» теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно прочитать в учебнике Ю.Н. Бибикова «Обыкновенные дифференциальные уравнения».)