

## ГЛАВА 7. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ.

### § 1. Основные определения. Характеристическое свойство автономных систем.

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = F(x), \quad (1)$$

правая часть которой не зависит явно от  $t$ . Здесь  $x \in M \subset R^n$ ,  $t \in R$ , вектор-функция  $F(x)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по  $x$  локально в области  $M$ .

**Определение.** Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в правую часть системы явно не входит независимая переменная  $t$ .

$M$  называется *фазовым пространством* автономной системы (1).

Пусть  $x = \varphi(t)$  - решение системы (1), определенное при  $t \in (a, b)$ .

Напомним, что график решения, то есть множество

$$\Gamma_{\varphi(t)} = \{(t, x) : x = \varphi(t), t \in (a, b)\},$$

называется *интегральной кривой*.

**Определение.** Проекция интегральной кривой решения  $x = \varphi(t)$  на фазовое пространство  $M$ , то есть множество

$$L_{\varphi(t)} = \{\varphi(t) : t \in (a, b)\},$$

называется *траекторией* этого решения.

*Геометрическая интерпретация автономной системы (1).*

Система (1) на фазовом пространстве  $M$  индуцирует *векторное поле*.

Каждой точке  $x \in M$  ставится в соответствие вектор  $F(x)$ , который касается траектории, проходящей через эту точку.

Независимая переменная  $t$  становится здесь параметром и задает направление движения по траектории при возрастании  $t$ .

**Теорема 1** (характеристическое свойство автономных систем).

Пусть  $x = \varphi(t)$  - решение системы (1),  $(a, b)$  - максимальный промежуток задания этого решения.

Тогда для любой константы  $c$  функция  $x = \varphi(t+c)$  - тоже решение системы (1), и  $(a-c, b-c)$  - максимальный промежуток задания этого решения.

*Доказательство теоремы.* Фиксируем произвольную константу  $c$ . Положим  $\xi(t) = \varphi(t+c)$ . Тогда

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\varphi}(t+c) = F(\varphi(t+c)) = F(\xi(t)),$$

и  $x = \xi(t)$  - решение системы (1), определенное при  $t+c \in (a, b)$ , то есть при  $t \in (a-c, b-c)$ .

Если  $(a-c, b-c)$  - не максимальный промежуток задания решения  $x = \xi(t)$ , то это решение может быть продолжено вправо за  $(b-c)$  или влево за  $(a-c)$ . Тогда и решение  $x = \varphi(t) = \xi(t-c)$  может быть продолжено вправо за  $b$  или влево за  $a$ , что противоречит условию. Поэтому  $(a-c, b-c)$  - максимальный промежуток задания решения  $x = \xi(t)$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Очевидно, что решениям  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , и  $x = \varphi(t+c)$ ,  $t \in (a-c, b-c)$ , соответствует одна и та же траектория:  $L_{\varphi(t)} = L_{\varphi(t+c)}$ .

**Теорема 2.** Траектории, соответствующие различным решениям, не пересекаются или совпадают.

*Доказательство теоремы.* Пусть решение  $x = \varphi(t)$  определено на интервале  $(a_1, b_1)$ , и  $(a_1, b_1)$  - максимальный промежуток задания  $\varphi(t)$ , а решение  $x = \psi(t)$  определено на интервале  $(a_2, b_2)$ , и  $(a_2, b_2)$  - максимальный промежуток задания  $\psi(t)$ .

Пусть существуют точки  $t_1 \in (a_1, b_1)$  и  $t_2 \in (a_2, b_2)$  такие, что  $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ . Тогда

$$\varphi(t_1) = \psi(t_1 + (t_2 - t_1)) = \psi(t_1 + c),$$

где  $c = t_2 - t_1$ , и решения  $x = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t+c)$  системы (1) решают одну и ту же задачу Коши  $(t_1, \varphi(t_1))$ . По теореме единственности решений  $(a_1, b_1) = (a_2 - c, b_2 - c)$ , и  $\varphi(t) \equiv \psi(t+c)$  на интервале  $(a_1, b_1)$ .

Решениям  $x = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t+c)$  и  $x = \psi(t)$  соответствует одна и та же траектория:  $L_{\varphi(t)} = L_{\psi(t+c)} = L_{\psi(t)}$  Теорема доказана.

## § 2. Виды траекторий.

Рассматриваем автономную систему

$$\dot{x} = F(x), \quad (1)$$

где  $x \in M \subset R^n$ ,  $t \in R$ , функция  $F(x)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по  $x$  локально в области  $M$ .

Пусть  $\varphi(t) \equiv x_0$ , где  $x_0 = const$ ,  $x_0 \in M$ , - решение системы (1). Тогда траектория, отвечающая этому решению, есть точка:  $L_{\varphi(t)} = \{x_0\}$ .

**Определение.** Траектория  $L_{\varphi(t)} = \{x_0\}$  (или точка  $x_0$ ) называется *точкой покоя* или *положением равновесия* или *стационарной точкой* или *особой точкой* системы (1).

**Лемма 1** (о положении равновесия).  $x_0$  - положение равновесия системы (1) если, и только если  $F(x_0) = 0$ .

*Доказательство леммы 1.* Если  $x_0$  - положение равновесия, то  $\varphi(t) \equiv x_0$  - решение системы (1), и  $\dot{\varphi}(t) = 0$ , следовательно,  $F(\varphi(t)) = F(x_0) = 0$ .

Если  $F(x_0) = 0$ , то  $\varphi(t) \equiv x_0$  - решение системы (1), и  $x_0$  - положение равновесия. Лемма доказана.

**Лемма 2** (условие периодичности решения). Пусть  $x = \varphi(t)$  - решение системы (1), определенное на интервале  $(a, b)$ ,  $\varphi(t) \neq const$ , и  $(a, b)$  - максимальный промежуток задания решения  $\varphi(t)$ .

Пусть существуют  $t_1 \in (a, b)$  и  $t_2 \in (a, b)$ , такие, что  $t_1 \neq t_2$  и  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ .

Тогда  $(a, b) = R$  и  $\varphi(t + (t_2 - t_1)) = \varphi(t)$  для всех  $t \in R$ , то есть  $x = \varphi(t)$  - периодическое решение с периодом  $(t_2 - t_1)$ .

**Определение.** Если  $x = \varphi(t)$  - периодическое решение,  $\varphi(t) \neq const$ , то траектория  $L_{\varphi(t)}$  - замкнутая кривая, которая называется *циклом*.

Если в фазовом пространстве существует окрестность цикла  $L_{\varphi(t)}$ , которая не содержит других циклов (то есть  $L_{\varphi(t)}$  - замкнутая траектория, изолированная от других замкнутых траекторий), то  $L_{\varphi(t)}$  называется *предельным циклом*.

*Доказательство леммы.* Положим  $c = t_2 - t_1$ , тогда  $\xi(t) = \varphi(t + c)$  - решение системы (1), определенное на интервале  $(a - c, b - c)$ , и

$$\xi(t_1) = \varphi(t_1 + c) = \varphi(t_2) = \varphi(t_1).$$

Следовательно,  $x = \varphi(t)$  и  $x = \xi(t)$  решают одну и ту же задачу Коши  $(t_1, \varphi(t_1))$ . По теореме единственности решений  $(a, b) = (a - c, b - c)$ , и  $\varphi(t) \equiv \xi(t)$  для всех  $t \in (a, b)$ .

$(a, b) = (a - c, b - c)$ ,  $c \neq 0$ , то есть интервал  $(a, b)$  инвариантен относительно сдвига. Отсюда следует, что  $(a, b) = R$  и  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$  для всех  $t \in R$ . Лемма доказана.

Таким образом, любая траектория системы (1) является траекторией одного из трех типов:

$L_{\varphi(t)}$  - точка покоя, если  $\varphi(t) \equiv x_0$ , это решение задано для всех  $t \in R$ ,

$L_{\varphi(t)}$  - замкнутая траектория или цикл, если  $x = \varphi(t)$  - периодическое решение, это решение задано для всех  $t \in R$ ,

$L_{\varphi(t)}$  - незамкнутая траектория, или *траектория общего вида*, если  $\varphi(t) \neq const$  и  $x = \varphi(t)$  - непериодическое решение, это решение может быть задано на интервале  $(a, b) \neq R$ .

**Теорема 1** (о структуре траектории общего вида). Пусть  $L_{\varphi(t)}$  - незамкнутая траектория, соответствующая решению  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ,  $\varphi(t) \neq const$ . Тогда отображение  $\varphi: (a, b) \rightarrow L_{\varphi(t)}$  является регулярным.

*Доказательство теоремы.* Отображение  $\varphi: (a, b) \rightarrow L_{\varphi(t)}$  непрерывно дифференцируемое и взаимно-однозначное (по лемме 2 незамкнутая траектория не может иметь самопересечений).

Докажем, что  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  для всех  $t \in (a, b)$ . Пусть существует точка  $t_0 \in (a, b)$  такая, что  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ . Тогда  $x_0 = \varphi(t_0)$  - точка покоя, и  $x_0 \in L_{\varphi(t)}$ , что противоречит теореме 2 предыдущего параграфа (траектории, отвечающие различным решениям, не пересекаются или совпадают). Следовательно,  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  для всех  $t \in (a, b)$ , и отображение  $\varphi: (a, b) \rightarrow L_{\varphi(t)}$  - регулярное.

Теорема доказана.

**Теорема 2** (о структуре замкнутой траектории). Пусть  $x = \varphi(t)$  - периодическое решение системы (1),  $t \in R$ ,  $\varphi(t) \neq const$ .

Тогда существует наименьший положительный период функции  $\varphi(t)$ , и замкнутая траектория  $L_{\varphi(t)}$  - регулярный образ окружности.

*Доказательство теоремы.* По условию теоремы  $x = \varphi(t)$  - периодическое решение системы (1),  $\varphi(t) \neq const$ . Поэтому существует  $\tau > 0$  такое, что  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$  для всех  $t \in (a, b)$ . Пусть

$$T = \{\tau \in (0, +\infty) : \varphi(t + \tau) = \varphi(t), t \in R\}.$$

$T \neq \emptyset$ , поэтому существует  $\omega = \inf T$ , и  $\omega \geq 0$ .

Докажем сначала, что  $\omega \neq 0$ .

Предположим, что  $\omega = 0$ . Тогда в множестве  $T$  есть точки, сколь угодно близкие к нулю, то есть существует последовательность  $\{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset T$  такая, что  $\tau_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Фиксируем произвольное  $t \in R$ . Для каждого  $\tau_k$  число  $t$  представимо в виде  $t = m_k \tau_k + r_k$ , где  $m_k$  - целое число,  $0 \leq r_k < \tau_k$ , и  $r_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

По определению множества  $T$

$$\varphi(t) = \varphi(m_k \tau_k + r_k) = \varphi(r_k) \text{ для всех } k \in N.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при  $k \rightarrow +\infty$ , получим:  $\varphi(t) = \varphi(0)$  для всех  $t \in R$ , что противоречит условию  $\varphi(t) \neq const$ . Таким образом,  $\omega > 0$ .

Докажем, что  $\omega \in T$ .

Предположим, что  $\omega \notin T$ . Тогда в множестве  $T$  есть точки, сколь угодно близкие к  $\omega$ , то есть существует последовательность  $\{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset T$  такая, что  $\tau_k \rightarrow \omega$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Фиксируем произвольное  $t \in R$ . По определению множества  $T$

$$\varphi(t + \tau_k) = \varphi(t) \text{ для всех } k \in N.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при  $k \rightarrow +\infty$ , получим:  $\varphi(t + \omega) = \varphi(t)$  для всех  $t \in R$ , что противоречит условию  $\omega \notin T$ . Таким образом,  $\omega \in T$ , и  $\omega$  - наименьший положительный период функции  $\varphi(t)$ .

Пусть  $S^1$  - единичная окружность:  $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in R\}$ . Точки на окружности - это классы эквивалентности

$$[(\cos \theta, \sin \theta)] = \{(\cos \theta_1, \sin \theta_1) : \theta_1 \equiv \theta \pmod{2\pi}\}.$$

$L_{\varphi(t)}$  - замкнутая траектория, отвечающая периодическому решению  $x = \varphi(t)$  с наименьшим положительным периодом  $\omega$ .

Точки на траектории  $L_{\varphi(t)}$  - это классы эквивалентности

$$[\varphi(t)] = \{\varphi(t_1) : t_1 \equiv t \pmod{\omega}\}.$$

Пусть отображение  $h$  ставит в соответствие точке  $[(\cos \theta, \sin \theta)]$ , лежащей на окружности, точку  $\left[\varphi\left(\theta \frac{\omega}{2\pi}\right)\right]$ , лежащую на траектории  $L_{\varphi(t)}$ .

Заметим, что отображение  $h$  определено корректно:

если  $\theta_1 \equiv \theta \pmod{2\pi}$ ,  $t = \theta \frac{\omega}{2\pi}$ ,  $t_1 = \theta_1 \frac{\omega}{2\pi}$ , то  $t_1 \equiv t \pmod{\omega}$ .

$h$  - взаимно-однозначное отображение. Действительно,

если  $\varphi\left(\theta_1 \frac{\omega}{2\pi}\right) = \varphi\left(\theta_2 \frac{\omega}{2\pi}\right)$ , то  $\theta_1 \frac{\omega}{2\pi} \equiv \theta_2 \frac{\omega}{2\pi} \pmod{\omega}$ , и  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ .

Отображение  $h$  непрерывно дифференцируемо, поскольку функция  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема.

Докажем, что производная  $h$  не обращается в ноль, то есть  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  для всех  $t \in R$ . Пусть существует точка  $t_0 \in R$  такая, что  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ . Тогда  $x_0 = \varphi(t_0)$  - точка покоя, и  $x_0 \in L_{\varphi(t)}$ , что противоречит теореме 2 предыдущего параграфа. Следовательно, отображение  $h$  - регулярное. Теорема доказана.

### § 3. Классификация Пуанкаре особых точек линейной однородной системы второго порядка.

Рассматриваем линейную однородную автономную систему второго порядка

$$\dot{y} = Ay, \quad (1)$$

где  $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$ ,  $A$  - постоянная матрица размерности  $[2 \times 2]$ ,  $\det A \neq 0$ .

Система (1) имеет единственное положение равновесия  $y = 0$ .

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - собственные числа матрицы  $A$ ,  $J$  - жорданова форма  $A$ ,  $A = S^{-1}JS$ , и  $\det S \neq 0$ .

Тогда система (1) принимает вид  $\dot{y} = S^{-1}JSy$ , или  $S\dot{y} = JSy$ , и замена  $x = Sy$  приводит (1) к системе

$$\dot{x} = Jx. \quad (2)$$

Изучим поведение траекторий системы (2) на фазовой плоскости.

1. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - вещественные,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , и систему

(2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3):

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in R. \end{cases} \quad (4)$$

Решению  $x_1 = 0, x_2 = 0$  ( $t \in R$ ), отвечает траектория  $L_0 = \{0\}$ .

Решениям  $x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, x_2 = 0$  при  $c_1 > 0$  соответствует траектория  $L_{1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$ , а при  $c_1 < 0$  - траектория  $L_{-1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 < 0\}$ .

Аналогично, решениям  $x_1 = 0, x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$  при  $c_2 > 0$  соответствует траектория  $L_{0,1} = \{(0, x_2) : x_2 > 0\}$ , а при  $c_2 < 0$  - траектория  $L_{0,-1} = \{(0, x_2) : x_2 < 0\}$ .

Решениям (4) при  $c_1 c_2 \neq 0$  отвечают траектории

$$L_{\varphi(t)} = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = c_2 \left( x_1 / c_1 \right)^{\lambda_2 / \lambda_1} \right\}. \quad (5)$$

а). Если  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , то траектория (5) (при фиксированных  $c_1$  и  $c_2$ ) представляет собой ветвь гиперболы, лежащую (в зависимости от знаков  $c_1$  и  $c_2$ ) в одной из координатных четвертей.

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x=0$  системы (2) называется *седлом*. Траектории  $L_{1,0}$ ,  $L_{-1,0}$ ,  $L_{0,1}$  и  $L_{0,-1}$  называются *сепаратрисами седла*.

Пусть для определенности  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, 0)$  движется по траекториям  $L_{1,0}$  и  $L_{-1,0}$  к особой точке  $x=0$ , а фазовая точка  $(0, x_2)$  движется по траекториям  $L_{0,1}$  и  $L_{0,-1}$  от особой точки, на рисунке 1 это движение показано стрелками. Движение фазовой точки  $(x_1, x_2)$  по траекториям вида (5) на рисунке 1 тоже отмечено стрелками.

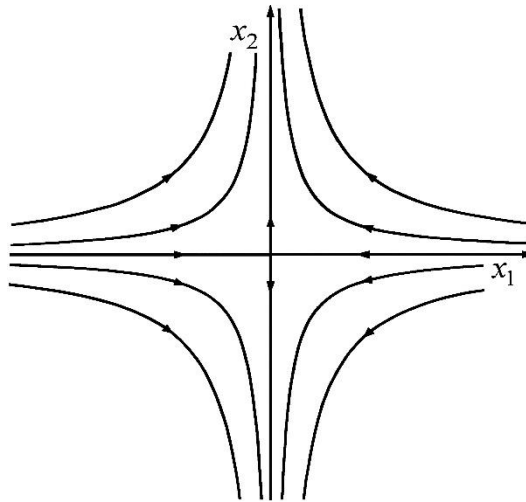


Рис. 1 (особая точка  $x=0$  - седло,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ).

б). Если  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , то траектории (5) представляют собой ветви параболы, лежащие в зависимости от знаков  $c_1$  и  $c_2$  в одной из координатных четвертей.

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x=0$  системы (2) называется *узлом*.

Пусть для определенности  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  и  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, x_2)$  движется по всем траекториям к особой точке  $x=0$ , на рисунке 2 это движение показано стрелками. В силу условия  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , траектории вида (5) примыкают к особой



точке  $(0,0)$ , касаясь оси  $Ox_1$  (траектории касаются направления, которое соответствует меньшему по абсолютной величине собственному числу).

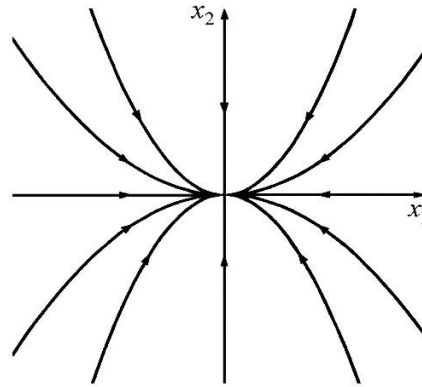


Рис. 2 (особая точка  $x=0$  - узел,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ).

2. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - вещественные,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Тогда жорданова форма матрицы  $A$  имеет вид  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  или  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

а) Если  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , то систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6):

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad t \in R. \end{cases} \quad (7)$$

Решению  $x_1 = 0, x_2 = 0$  ( $t \in R$ ), отвечает траектория  $L_0 = \{0\}$ .

Решениям  $x_1 = c_1 e^{\lambda t}, x_2 = 0$  при  $c_1 > 0$  соответствует траектория  $L_{1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$ , а при  $c_1 < 0$  - траектория  $L_{-1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 < 0\}$ .

Аналогично, решениям  $x_1 = 0, x_2 = c_2 e^{\lambda t}$  при  $c_2 > 0$  соответствует траектория  $L_{0,1} = \{(0, x_2) : x_2 > 0\}$ , а при  $c_2 < 0$  - траектория  $L_{0,-1} = \{(0, x_2) : x_2 < 0\}$ .

Решениям (7) при  $c_1 c_2 \neq 0$  отвечают траектории

$$L_{\varphi(t)} = \{(x_1, x_2) : x_2 = (c_2/c_1)x_1\}, \quad (8)$$

которые представляют собой лучи, лежащие в зависимости от знаков  $c_1$  и  $c_2$  в одной из координатных четвертей.

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x = 0$  системы (2) называется *диркритическим узлом*.

Пусть для определенности  $\lambda < 0$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, x_2)$  движется по всем траекториям к особой точке  $x = 0$ , на рисунке 3 это движение показано стрелками.

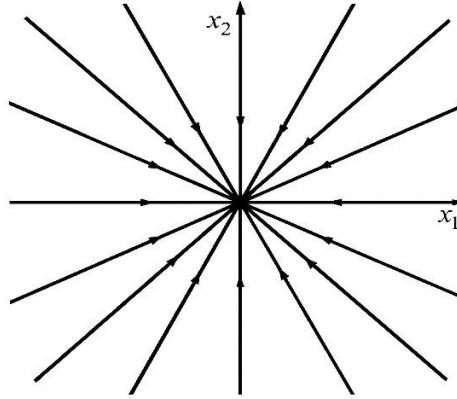


Рис. 3 (особая точка  $x = 0$  - диркритический узел,  $\lambda < 0$ ).

б). Если  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , то систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2. \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы (9):

$$\begin{cases} x_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad t \in R. \end{cases} \quad (10)$$

Решению  $x_1 = 0, x_2 = 0$  ( $t \in R$ ), отвечает траектория  $L_0 = \{0\}$ .

Решениям  $x_1 = c_1 e^{\lambda t}, x_2 = 0$  при  $c_1 > 0$  соответствует траектория  $L_{1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$ , а при  $c_1 < 0$  - траектория  $L_{-1,0} = \{(x_1, 0) : x_1 < 0\}$ .

Решениям (10) при  $c_2 \neq 0$  отвечают траектории

$$L_{\varphi(t)} = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \left( c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \ln \frac{x_2}{c_2} \right) \frac{x_2}{c_2} \right\}, \quad (11)$$

которые представляют собой кривые, лежащие (в зависимости от знака  $c_2$ ) в верхней или нижней полуплоскости.

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x = 0$  системы (2) называется *вырожденным узлом*.

Пусть для определенности  $\lambda < 0$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, x_2)$  движется по всем траекториям к особой точке  $x = 0$ , на рисунке 4 это движение показано стрелками.

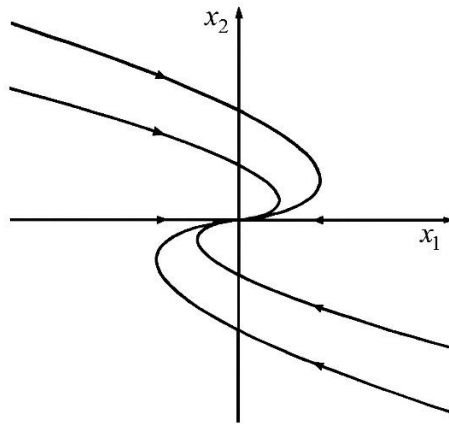


Рис. 4 (особая точка  $x = 0$  - вырожденный узел,  $\lambda < 0$ ).

3. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексные, сопряженные,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Тогда  $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , и систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2. \end{cases} \quad (12)$$

Перейдем в системе (12) к полярным координатам, то есть сделаем замену:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \theta \in R. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r, \\ \dot{\theta} = \beta, \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (14):

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t}, \\ \theta = \theta_0 + \beta t. \end{cases} \quad (15)$$

а). Если  $\alpha \neq 0$ , то траектории, отвечающие решениям (15), представляют собой спирали. Фазовая точка (при увеличении  $t$ ) движется по спирали к началу координат, если  $\alpha < 0$ , и от начала координат, если  $\alpha > 0$ .

Движение идет в положительном направлении, если  $\beta > 0$ , и в отрицательном направлении, если  $\beta < 0$ .

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x = 0$  системы (2) называется *фокусом*.

Пусть для определенности  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, 0)$  движется по спирали, закручивающейся в отрицательном направлении, к особой точке  $x = 0$ , на рисунке 5 это движение показано стрелками.

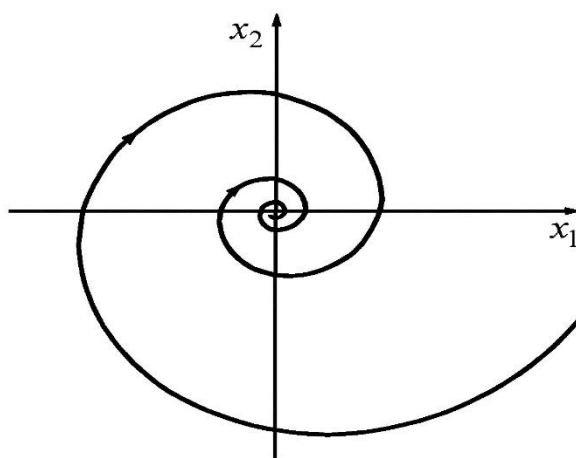


Рис. 5 (особая точка  $x = 0$  - фокус,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ ).

б). Если  $\alpha = 0$ , то траектории (15) представляют собой окружности.

При таком расположении траекторий на фазовой плоскости особая точка  $x = 0$  системы (2) называется *центром*.

Пусть для определенности  $\beta > 0$ .

Тогда при увеличении  $t$  фазовая точка  $(x_1, x_2)$  движется по окружностям в положительном направлении, на рисунке 6 это движение показано стрелками.

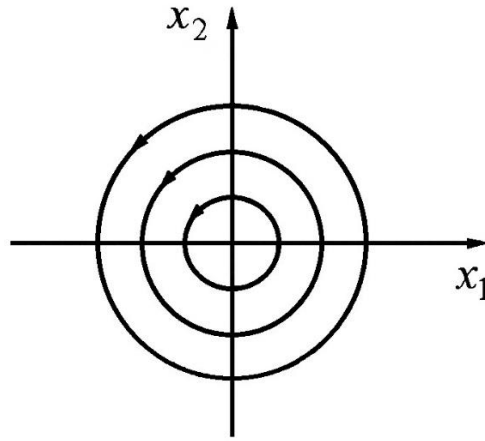


Рис. 6 (особая точка  $x=0$  - центр,  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ ).

**Замечание 1.** Фазовый портрет системы (1) получается из фазового портрета системы (2) с помощью аффинного преобразования координат (с помощью замены  $y = S^{-1}x$ ). Особая точка  $y=0$  системы (1) имеет тот же тип Пуанкаре, что и особая точка  $x=0$  системы (2). То есть

- если собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  вещественные,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ , то особая точка  $y=0$  системы (1) является *седлом*;
- если  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественные,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $\lambda_1\lambda_2 > 0$ , то особая точка  $y=0$  системы (1) - *узел*;
- если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то особая точка  $y=0$  системы (1) - *дискритический узел* или *вырожденный узел*;
- если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ , то особая точка  $y=0$  системы (1) – *фокус*;
- если  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , то особая точка  $y=0$  системы (1) является *центром*.

На рис. 7 изображен фазовый портрет системы (1) в случае, когда особая точка системы – седло. Направления сепаратрис седла определяются собственными векторами  $v_1$  и  $v_2$  матрицы  $A$ , которые отвечают собственным числам  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 > 0$  соответственно.

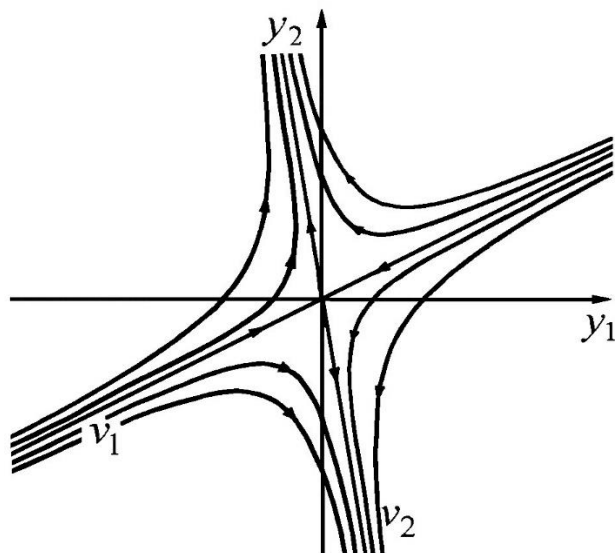


Рис.7 (особая точка  $y = 0$  - седло,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ).

На рис. 8 изображен фазовый портрет системы (1) в случае, когда особая точка системы – центр.

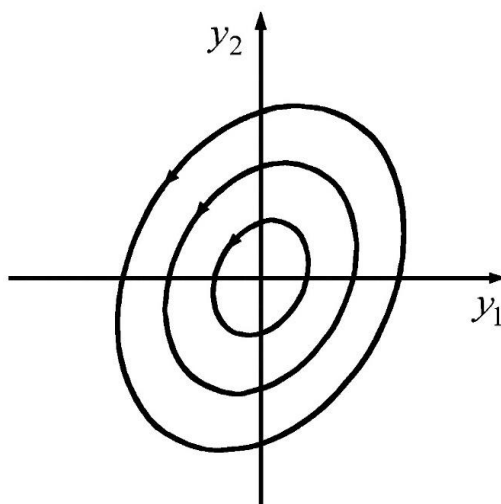


Рис. 8 (особая точка  $y = 0$  - центр,  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ ).

**Замечание 2.** Тип устойчивости по Ляпунову решения  $y \equiv 0$  ( $t \in R$ ) системы (1) зависит от знаков вещественных частей собственных чисел матрицы  $A$ .

- если особая точка системы (1) – седло, то решение  $y \equiv 0$  неустойчиво;
- если особая точка системы – узел, дикритический узел или вырожденный узел, то решение  $y \equiv 0$  неустойчиво в случае  $\lambda_{1,2} > 0$ , и асимптотически устойчиво в случае  $\lambda_{1,2} < 0$ ;

- если особая точка системы – фокус, то решение неустойчиво при  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$ , и асимптотически устойчиво при  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$ ;
- если особая точка системы (1) – центр, то решение  $y \equiv 0$  устойчиво, но не асимптотически (устойчиво нейтрально).

**Замечание 3.** Если  $\det A = 0$ , то особые точки системы (1) не являются изолированными.

Если  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ , то  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , система (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \end{cases} \quad (16)$$

все точки вида  $(x_1, 0)$ , где  $x_1 \in R$ , - особые точки системы (16). На каждой прямой  $l_c = \{(c, x_2), c = \text{const}\}$  лежит три траектории: состояние равновесия  $L_c = \{(c, 0)\}$  и траектории  $L_{c+} = \{(c, x_2) : x_2 > 0\}$ ,  $L_{c-} = \{(c, x_2) : x_2 < 0\}$ . Направление движения фазовой точки по траекториям  $L_{c+}$  и  $L_{c-}$  определяется вторым уравнением системы (16).

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  и  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , то система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

и все точки вида  $(x_1, 0)$ ,  $x_1 \in R$ , - особые точки системы (17). Остальные траектории представляют собой прямые  $L_c = \{(x_1, c) : c = \text{const} \neq 0\}$ , направление движения фазовой точки по траекториям определяется первым уравнением системы (17).

В случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  и  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , каждая точка фазовой плоскости есть положение равновесия системы.

#### **§ 4. Особые точки системы второго порядка. Проблема различения центра и фокуса.**

Рассматриваем автономную систему второго порядка

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$ ,  $A$  - постоянная матрица размерности  $[2 \times 2]$ ,  $\det A \neq 0$ ,  $g(x) \in C^2(M)$ ,  $M$  - область в  $R^2$ ,  $0 \in M$ ,  $g(0) = 0$ , и

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 0.$$

Предполагаем, что положение равновесия  $x = 0$  системы (1) – изолированное (то есть в некоторой окрестности точки  $x = 0$  нет других положений равновесия системы (1)).

Наряду с системой (1) рассмотрим ее линеаризацию

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

в окрестности точки  $x = 0$ . Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - собственные числа матрицы  $A$ .

Приведем без доказательства теорему Пуанкаре.

**Теорема** (Пуанкаре). Если

$$\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

то особая точка  $x = 0$  системы (1) принадлежит тому же типу Пуанкаре, что и особая точка  $x = 0$  системы (2).

**Замечание 1.** Если правая часть нелинейной системы (1) имеет такую линеаризацию (2) в окрестности точки  $x = 0$ , что выполнено условие (3), то особая точка системы (1) (вместе с особой точкой системы (2)) является либо седлом, либо фокусом, либо узлом (может быть, вырожденным или дикритическим узлом). И в некоторой окрестности особой точки  $x = 0$  (локально) фазовый портрет системы (1) мало отличается от фазового портрета системы (2). Сохраняется не только тип особой точки, но и направления, по которым траектории системы примыкают к положению равновесия (при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ ).

**Замечание 2.** Если особая точка  $x = 0$  линеаризованной системы является центром, то условие (3) не выполнено, и теорема Пуанкаре не применима. В этом случае положение равновесия системы (1) может быть центром или фокусом или центрофокусом. При этом говорят, что в задаче определения типа особой точки возникает *проблема различения центра и фокуса*.

*Центрофокусом* называется положение равновесия, в любой (достаточно малой) окрестности которого существуют как замкнутые траектории, так и незамкнутые.



**Пример 1.** Линеаризация системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (4)$$

имеет вид (2), где  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\lambda_{1,2} = \pm i$  - собственные числа матрицы  $A$ , и в задаче определения типа особой точки  $x = 0$  возникает *проблема различения центра и фокуса*.

Система (4) в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dot{r} = ar^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

И очевидно, что

- при  $a > 0$  положение равновесия  $x = 0$  системы (4) является неустойчивым фокусом (здесь  $\dot{r} > 0$ , и  $r$  увеличивается с ростом  $t$ );
- при  $a = 0$  положение равновесия есть центр (здесь  $\dot{r} = 0$ );
- при  $a < 0$  особая точка  $x = 0$  системы - устойчивый фокус (здесь  $\dot{r} < 0$ , и  $r$  уменьшается с ростом  $t$ ).

Согласно уравнению  $\dot{\theta} = 1$ , фазовая точка движется по любой траектории, отличной от состояния равновесия, (при возрастании  $t$ ) в положительном направлении.

**Пример 2.** Положение равновесия  $x = 0$  системы

$$\begin{cases} \dot{r} = r \sin(1/r), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (5)$$

записанной в полярных координатах, является центрофокусом.

Действительно,  $\sin(1/r) = 0$  при  $r = 1/(\pi k)$  для любого натурального  $k$ , поэтому концентрические окружности (с центром в нуле) радиуса  $r = 1/(\pi k)$  являются предельными циклами системы (5). Радиусы окружностей стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

Через каждую точку фазовой плоскости, не лежащую на предельном цикле, проходит траектория общего вида.

Направление движения по траекториям системы определяет второе уравнение системы (5).

**Пример 3.** Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1 - x_1^2 \end{cases} \quad (6)$$

имеет две особые точки:  $B_1(-1, 0)$  и  $B_2(1, 0)$ .

Линеаризация системы (6) в окрестности особой точки  $B_1$  имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = x_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 2\tilde{x}_1. \end{cases} \quad (7)$$

$\lambda_1 = \sqrt{2}$  и  $\lambda_2 = -\sqrt{2}$  - собственные числа матрицы  $A$  системы (7). Поэтому особая точка  $(0,0)$  системы (7) является седлом. Тот же тип Пуанкаре имеет и особая точка  $B_1$  системы (6). Сепаратрисы седла примыкают к  $B_1$  по направлениям собственных векторов:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  и  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Линеаризация системы (6) в окрестности точки  $B_2$ :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = x_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -2\tilde{x}_1. \end{cases} \quad (8)$$

$\lambda_1 = i\sqrt{2}$  и  $\lambda_2 = -i\sqrt{2}$  - собственные числа матрицы  $A$  системы (8). И в этом случае возникает проблема различения центра и фокуса, которая здесь легко решается, поскольку векторное поле системы (6) симметрично относительно оси  $Ox_1$ .

Действительно, система (6) не меняется при замене  $x_2 \mapsto -x_2$  и  $t \mapsto -t$ , поэтому траектории (или части траекторий) системы, лежащие в верхней полуплоскости, симметричны траекториям (или их частям), лежащим в нижней полуплоскости. Следовательно, особая точка  $B_2$  системы (6) – центр.

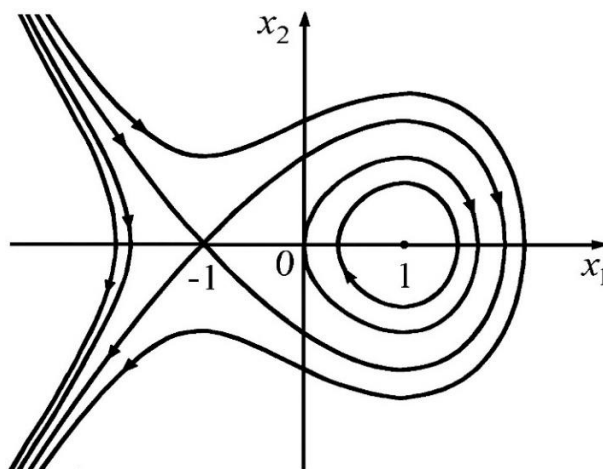


Рис. 1 (глобальный фазовый портрет системы (6)).

Движение фазовой точки по любой траектории легко определяется с помощью первого уравнения системы (6).

$\dot{x}_1 > 0$ , и  $x_1$  возрастает с увеличением  $t$ , если  $x_2 > 0$ . И наоборот,  $\dot{x}_1 < 0$ , и  $x_1$  убывает с ростом  $t$ , если  $x_2 < 0$ .

Глобальный фазовый портрет системы (6) изображен на рис. 1. Сепаратрисы седла  $B_1$  здесь образуют петлю, которая так и называется: *петля сепаратрисы седла*.

В данном примере мы можем нарисовать (или уточнить) фазовый портрет системы, проинтегрировав уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1-x_1^2}{x_2}, \quad (9)$$

которое соответствует системе (6) (соответствует в том смысле, что интегральные кривые уравнения (9) и траектории системы (6) задаются одинаковыми формулами).

**Замечание 3.** В формулировке теоремы Пуанкаре мы предполагаем, что функция  $g(x)$  в правой части системы (1) дважды непрерывно дифференцируема. Это требование можно ослабить в случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

- Если собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  вещественные и различные, то достаточно требовать непрерывной дифференцируемости функции  $g(x)$  в области  $M$ ;
- если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ , то теорема Пуанкаре верна, если  $g(x) \in Lip_x^{loc}(M)$ .

Следующий пример показывает, что в случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  требование  $g(x) \in C^2(M)$  в условии теоремы Пуанкаре существенно.

**Пример 4** (пример Перрона). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 / \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 / \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \quad (10)$$

в достаточно малой окрестности нуля, например, на множестве

$$M = \left\{ (x_1, x_2) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1/2 \right\}, \text{ доопределив функцию } g(x) = \begin{pmatrix} -x_2 / \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_1 / \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$$

и ее частные производные первого порядка  $\partial g(x)/\partial x_1$  и  $\partial g(x)/\partial x_2$  в нуле по непрерывности:  $g(0) = 0$ ,  $\partial g(0)/\partial x_1 = 0$  и  $\partial g(0)/\partial x_2 = 0$ .

Особая точка  $x = 0$  системы является фокусом, в то время как особая точка  $x = 0$  линеаризованной системы – дикритический узел. Это не трудно доказать, если перейти в системе (10) к полярным координатам.

Теорема Пуанкаре здесь не верна, поскольку в этом примере (после доопределения функции  $g(x)$  и ее частных производных в нуле)  $g(x) \in C^1(M)$ , но  $g(x) \notin C^2(M)$ .

**Замечание 4.** Если хотя бы одно из собственных чисел матрицы  $A$  равно нулю, то теорема Пуанкаре не применима.

Если  $A \equiv 0$ , то исследование поведения траекторий в окрестности изолированной особой точки  $x = 0$  системы (1) может быть достаточно сложной задачей. Для решения этой задачи существуют регулярные методы, но их изучение выходит за рамки этого курса.

Заметим, что для систем с аналитическими правыми частями окрестность вырожденной особой точки разбивается на конечное число секторов трех типов: гиперболические, параболические и эллиптические сектора.

*Эллиптический сектор* характеризуется тем, что любая фазовая точка, лежащая в этом секторе, по траектории системы стремится к особой точке и при  $t \rightarrow +\infty$ , и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Точка, лежащая в *параболическом секторе*, по траектории системы стремится к особой точке при  $t \rightarrow +\infty$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  покидает достаточно малую, фиксированную окрестность особой точки, либо наоборот, стремится к особой точке при  $t \rightarrow -\infty$ , а при  $t \rightarrow +\infty$  покидает окрестность.

Эллиптический сектор всегда окружен двумя параболическими, границы между этими секторами четко не определены, они зависят от выбора окрестности особой точки.

Точка, лежащая в *гиперболическом секторе*, по траектории системы покидает достаточно малую, фиксированную окрестность особой точки и при  $t \rightarrow +\infty$ , и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Границы гиперболического сектора четко определены. Траектории, ограничивающие этот сектор, называются *сепаратрисами*.

**Пример 5.** Фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \quad (11)$$

изображен на рис. 2.

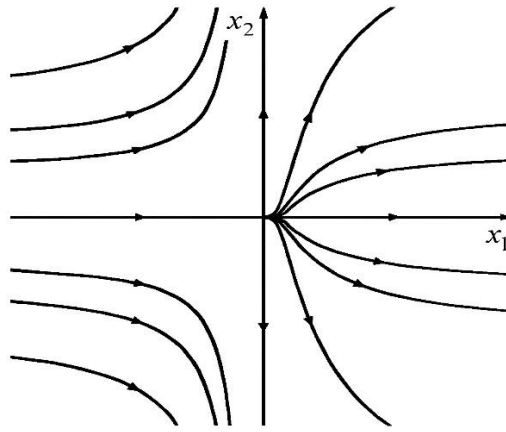


Рис. 2 (особая точка  $x = 0$  - седло-узел).

Особая точка  $x = 0$  здесь – *седло-узел*, ее окрестность состоит из двух гиперболических и одного параболического сектора.

Фазовый портрет системы можно построить с помощью интегрирования уравнения  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1^2}$ , соответствующего системе (11), или с помощью метода изоклин.

**Пример 6.** Фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^4, \end{cases} \quad (12)$$

изображен на рис. 3. Окрестность особой точки  $x = 0$  состоит из двух эллиптических и двух параболических секторов.

Траектории системы можно построить, если проинтегрировать уравнение  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2 - x_1^4}{x_1 x_2}$ , соответствующее системе (12), или использовать метод изоклин.

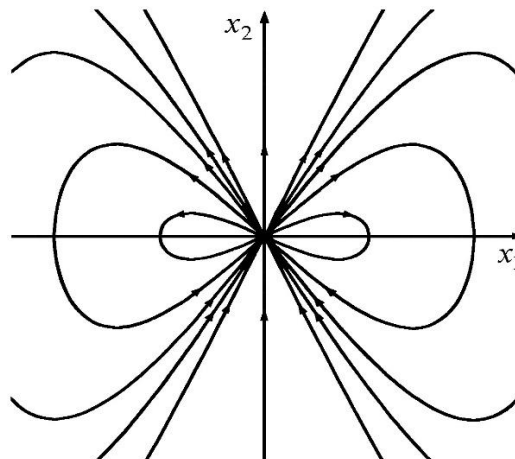


Рис. 3 (особая точка с двумя эллиптическими секторами).

В заключение отметим, что задача построения глобального фазового портрета нелинейной системы часто бывает очень сложной. Чтобы построить фазовый портрет такой системы, нужно знать не только расположение и тип особых точек, но и иметь информацию о наличии и расположении предельных циклов системы и о глобальном поведении сепаратрис особых точек.

Методы и приемы, позволяющие решить такую задачу, не рассматриваются в этом курсе и составляют предмет отдельной теории - качественной теории дифференциальных уравнений.

#### ***Список литературы для самостоятельной работы.***

1. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. 2005.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-пресс, 1998.
3. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: «Лань». 2011.
4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Издание 7-е, дополненное. СПб.: «Лань», 2002.
5. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Минск, 1987.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. 1967.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1984.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. «Наука». 1966.

10. Плисс В.А., Ильин Ю.А. Теория нелинейных колебаний. I. Основные свойства периодических систем. II. Периодические решения автономных систем. СПб.: Издательский дом Санкт-Петербургского государственного университета. 2012.
11. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М. 1977.
12. Бибииков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Монография. Издательство Ленинградского университета. Л. 1991.
13. Рейзинь Л.Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, 1971.
14. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
15. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
16. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1978.
17. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.
18. Адрианова Л.Я, Крыжевич С.Г. Некоторые коэффициентные критерии свойств решений линейных уравнений второго порядка. Изд-во СПбГУ. 2002.
19. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л. 1949.
20. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., «Наука», ГРФМЛ. 1990.
21. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2004. Часть 2. Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2009.