

# Геометрия и топология

Курс Солынина А.А.

Осень 2022 г.

---

# Оглавление

---

Оглавление	i
<b>I Дифференциальная геометрия кривых</b>	<b>1</b>
1 <b>Понятие кривой</b>	<b>2</b>
1.1 Параметрическое задание кривой . . . . .	3
1.2 Перепараметризация . . . . .	6
2 <b>Длина кривой</b>	<b>7</b>
3 <b>Касательный вектор</b>	<b>10</b>
4 <b>Репёр Френé</b>	<b>13</b>
5 <b>Соприкасающаяся плоскость</b>	<b>16</b>
6 <b>Вычисление кривизны и кручения</b>	<b>20</b>
7 <b>Натуральные уравнения кривой</b>	<b>25</b>
<b>II Дифференциальная геометрия поверхностей</b>	<b>28</b>
8 <b>Касательная плоскость</b>	<b>29</b>
8.1 Перепараметризация поверхности . . . . .	30
8.2 Кривая на поверхности . . . . .	31

<b>9</b>	<b>Первая квадратичная форма</b>	<b>35</b>
<b>10</b>	<b>Площадь поверхности</b>	<b>40</b>
10.1	Что такое площадь поверхности? . . . . .	41
<b>11</b>	<b>Кривизна кривой на поверхности</b>	<b>45</b>
<b>12</b>	<b>Соприкасающийся параболоид</b>	<b>49</b>
12.1	Вычисление главных направлений . . . . .	53
12.2	Вычисление главных кривизн . . . . .	54
12.3	Блистательная теорема Гаусса . . . . .	54
<b>13</b>	<b>Деривационные формулы</b>	<b>57</b>
13.1	Уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци . . . . .	60
<b>14</b>	<b>Сферическое отображение</b>	<b>62</b>
<b>15</b>	<b>Геодезическая кривизна</b>	<b>65</b>
<b>16</b>	<b>Геодезические линии</b>	<b>68</b>
16.1	Полугеодезическая система координат . . . . .	70

**Часть I**

**Дифференциальная  
геометрия кривых**

---

# Глава 1

## Понятие кривой

---

05.09.22

Кривую можно задать множеством способов, например:

- в декартовых координатах:  $y = f(x)$
- в полярных координатах:  $r = r(\varphi)$
- неявным уравнением:  $F(x, y) = 0$

но обычно её задают в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

В таком случае кривая

- в декартовых координатах принимает вид:  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$
- в полярных координатах:  $\begin{cases} x = r(t) \cos t \\ y = r(t) \sin t \end{cases}$
- для неявных уравнений свои методы, т.к. не очень понятно как с ними работать

Например, для неявных уравнений существует следующая теорема:

**Теорема (О неявной функции).** Если  $F(x, y) = 0$  и  $F(x_0, y_0) = 0$ , а так же  $\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$  существуют и непрерывны в окрестности  $(x_0, y_0)$ , тогда существует  $f(x)$  в некоторой окрестности  $x_0$ , что  $F(x, f(x)) = 0$ .

**Пример 1.1.** Имеем стандартное уравнение окружности:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . В окрестности большинства его точек можно выразить  $y$  через  $x$ :  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ . Но это выражение перестает работать в точке  $x = -1$  или  $x = 1$  (то есть для любой другой точки, можно найти окрестность, такую что функция будет иметь конкретный знак, в то время как для  $x = \pm 1$  такое сделать невозможно). Воспользуемся теоремой выше, соблюдены почти все условия, кроме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y|_{\substack{x=\pm 1 \\ y=0}} = 0$$

Соответственно, именно в этих точках найти искомую  $f$  нельзя.

## 1.1. Параметрическое задание кривой

$\mathbf{f}(t)$  — векторное уравнение.  $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Кривую определяет вектор-функция.

**Определение 1.1 (Вектор-функция).**  $\mathbf{f}$  — вектор-функция как выше. На протяжении всего курса предполагаем, что у функции необходимая нам гладкость.

**Определение 1.2 (Предел вектор-функции).**  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |t - t_0| < \delta \implies |\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}| < \varepsilon$$

**Свойства.** Везде считаем, что свойство выполнено, если существуют соответствующие пределы.

1.  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$
2.  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t)\mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$

3.  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$
4. Смешанное произведение аналогично

**Определение 1.3** (Производная вектор-функции).

$$\mathbf{f}'(t)|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

**Свойства.**

1.  $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \pm \mathbf{g}'$
2.  $(c\mathbf{f})' = c\mathbf{f}'$
3.  $(\mathbf{f}\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\mathbf{g} + \mathbf{f}\mathbf{g}'$
4.  $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} \times \mathbf{g}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t_0) \times \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}'(t_0) \end{aligned}$$

5.  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' = (\mathbf{f}', \mathbf{g}, \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}', \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}')$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' &= ((\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h})' = (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}' = \\ &= (\mathbf{f}' \times \mathbf{g})\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g}')\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}' \end{aligned}$$

В свойствах отсутствует деление, т.к. операция деления векторов не определена. В вещественном анализе множество теорем доказывается с помощью следующей теоремы:

**Теорема (Лагранжа).** Если  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , тогда существует  $c \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

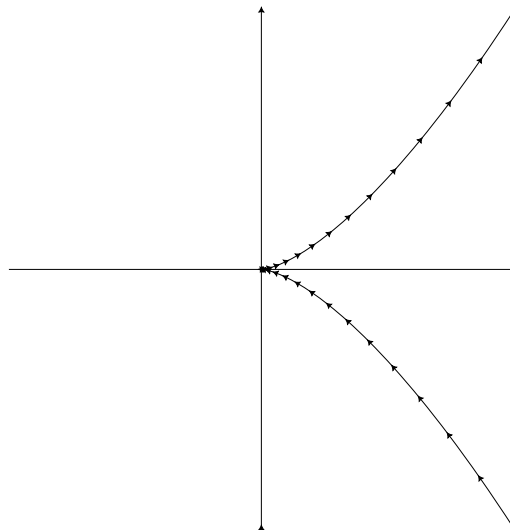
Для вектор-функций эта теорема, однако, не существует!

**Определение 1.4** (Интеграл вектор-функции).

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \lim_{\max|\Delta_i t| \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{f}(\sigma_i)\Delta_i t.$$

**Определение 1.5** (Кривая). Кривая — образ  $\mathbf{f}(t)$ . Кривая не пересекает саму себя, то есть  $\mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$ .  $\mathbf{f}(t)$  — параметризация кривой. Параметризация регулярна, если  $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$ .

**Пример 1.2** (Нерегулярная параметризация).  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$  или  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$  — полукубическая парабола.  $y = x^{3/2}$  (плохо при  $x < 0$ ).



$(0, 0)$  — точка излома (т.е. точка, в которой параметризация теряет регулярность).



## 1.2. Перепараметризация

Пусть  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $\varphi$  строго возрастает,  $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$ , также существует  $\varphi^{-1}$ .  $\mathbf{f} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , тогда  $\mathbf{g} := \mathbf{f} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . В таком случае  $\mathbf{g}$  — перепараметризация кривой и  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi^{-1}$ .

Если такая  $\varphi$  существует, то  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$  (эквивалентны).

Если образы  $\mathbf{f}(t)$  и  $\mathbf{g}(t)$  совпадают, кривые не самопересекаются, а их параметризации регулярны, то существует такое  $\varphi$  и  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi$ .

---

## Глава 2

### Длина кривой

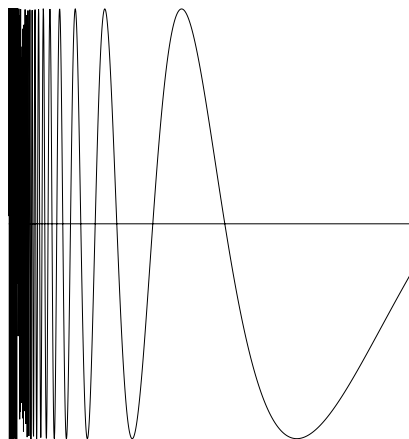
---

**Определение 2.1** (Длина кривой).  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ .

$$L := \lim_{\max \Delta_i t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

**Определение 2.2** (Спрямяемая кривая). Прямая называется спрямяемой, если существует её длина.

**Пример 2.1.**  $y = \sin 1/x$  на  $(0, 1]$  не спрямяемая.



**Пример 2.2.**  $y = \sqrt{x} \sin 1/x$ ,  $y(0) = 0$ , ее сумма оценивается  $L \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \infty$ .

**Теорема 2.1.**

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt$$

**Замечание.**  $|\sum \mathbf{f}_i| \leq \sum |\mathbf{f}_i|$ ,  $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leq |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$ ,  $|\int \mathbf{f} dt| \leq \int |\mathbf{f}| dt$ .

**Доказательство.** Хотим доказать:

$$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \rightarrow 0$$

оценим это:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| = \\ & \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t + \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \\ & \leq \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| + \\ & \quad \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \end{aligned}$$

$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| \rightarrow 0$  по определению интеграла.

$\mathbf{f}'$  непрерывная, значит равномерно непрерывна, тогда если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |x_1 - x_2| < \delta \implies |\mathbf{f}'(x_1) - \mathbf{f}'(x_2)| < \varepsilon$ . Выберем любое  $\varepsilon$  и зафиксируем  $\delta$ , удовлетворяющее мелкости разбиения и получим:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| = \\ & \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i)| dt - \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{f}'(t) dt \right| \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i) - \mathbf{f}'(t)| dt \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \varepsilon(b-a) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

■

Попытаемся понять как вычислять длину прямой в некоторых случаях:

12.09.22

- в случае явного задания:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow y = f(t)$$

$$|(x', y')| = \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} dt$$

К сожалению, такая формула мало применима, так как интегралы берутся редко.

- в случае параметрического задания:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

- в случае полярных координат:

$$r = r(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = \\ &= r'^2 \cos^2 \varphi - 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ r'^2 \sin^2 \varphi + 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = \\ &= r'^2 + r^2 \end{aligned}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

---

## Глава 3

# Касательный вектор

---

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathbf{f}(t)$  — вектор-функция, тогда

$$|\mathbf{f}(t)| = \text{const} \Leftrightarrow \mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$$

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ : Из  $\mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$  получаем:  $(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 \forall t$ . Возьмем производную скалярного квадрата и получим:

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t))' = 2(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 = |\mathbf{f}(t)|^2'$$

Тогда,  $|\mathbf{f}(t)| = \text{const}$ .

$\Rightarrow$ : Если  $|\mathbf{f}(t)| = \text{const}$ , то и  $\mathbf{f}^2(t) = \text{const}$ , а дальше обратить доказательство  $\Leftarrow$ . ■

**Определение 3.1** (Касательный вектор).  $\mathbf{f}'(t_0)$  называется касательным вектором к кривой в точке  $t_0$ . Прямая, на которой лежит  $\mathbf{f}'(t_0)$  — касательная прямая.

**Теорема 3.2.** Касательная прямая не зависит от параметризации, если она регулярна.

**Доказательство.**  $\varphi$  — скалярная функция,  $\mathbf{f}(t)$  — вектор-функция. Также  $\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{g}(t)$ .  $\mathbf{f}'(t)$ ,  $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi'(t)$  — касательные векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  соответственно. Обозначим  $\tau = \varphi(t)$ .  $\mathbf{f}'(\tau)$  и  $\mathbf{g}'(t)$  отличаются друг от друга на скаляр, тогда  $\mathbf{f}'(\tau) \parallel \mathbf{g}'(t)$ . Следовательно, при перепараметризации касательный вектор будет параллелен предыдущему, значит касательная прямая инвариантно определена. ■

**Замечание.** Регулярная параметризация — это параметризации для которой в любой точке существует касательная прямая.

**Определение 3.2** (Натуральная параметризация). Параметризация  $\mathbf{f}(t)$  называется натуральной, если  $|\mathbf{f}'(t)| \equiv 1 \forall t$ .

По сути, мы идем по кривой с единичной скоростью. Но пока не ясно существует и единственна ли натуральная параметризация.

**Доказательство.** Проверить единственность достаточно просто:  
 $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$ ,  $\varphi(t) = \tau$

$$|\mathbf{g}'(t)| = |\mathbf{f}'(\tau)||\varphi'(t)| \implies |\varphi'(t)| = 1$$

тогда  $\varphi = t + t_0$  (с точностью до выбора начального момента времени). ■

**Теорема 3.3.** Натуральная параметризация существует.

**Доказательство.** Вспомним про длину кривой. Глобальная идея: параметризация говорит сколько мы проходим по кривой за данное время; чтобы перейти к натуральной параметризации мы откажемся от стандартного времени, и скажем, что новое время это тот участок кривой, за которое мы его проходим, или единичное расстояние мы проходим за единичное время, значит параметр времени — это участок дуги.

Реализуем эту идею:

$$s = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

$s$  — искомый натуральный параметр. Будем считать  $t - t_0$  време-

нем. Обозначим  $s = \varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Заметим, что  $\varphi(t)$  возрастает и непрерывна. Значит существует  $t = \varphi^{-1}(s) = \psi(s)$ . Тогда  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\psi(s))$  должна быть натуральной параметризацией.

Теперь докажем, что  $\mathbf{f}(\psi(s))$  есть натуральная параметризация. Хотим убедиться, что

$$\left| \frac{d\mathbf{f}(\psi(s))}{ds} \right| = 1.$$

Для этого

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \frac{1}{\varphi'(t(s))} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|} \\ \frac{d}{ds} \mathbf{f}(\psi(s)) &= \mathbf{f}'(\psi(s)) \psi'(s) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \\ \left| \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \right| &= 1 \end{aligned}$$

■

---

## Глава 4

### Репёр Френé

---

Есть кривая и  $\mathbf{f}(s)$  — ее натуральная параметризация, тогда  $\mathbf{v}(s)$  — ее касательный вектор.  $|\mathbf{v}(s)| = 1$ . Тогда  $\mathbf{v}'(s) \perp \mathbf{v}(s)$  по лемме 3.1.

**Определение 4.1** (Кривизна кривой). Определим  $\mathbf{n}(s)$ :  $\mathbf{n}(s) \uparrow\uparrow \mathbf{v}'(s)$ ,  $|\mathbf{n}(s)| = 1$ , такой  $\mathbf{n}$  — вектор главной нормали.

$$k = \frac{\mathbf{v}'(s)}{\mathbf{n}} \Leftrightarrow \mathbf{v}' = k\mathbf{n}$$

Такая  $k$  — кривизна кривой. А выражение  $\mathbf{v}' = k\mathbf{n}$  называется первой формулой Френе.

**Замечание.**  $k \geq 0$ .

**Замечание.**  $\mathbf{n}$  — не везде определен, необходима бирегулярность.

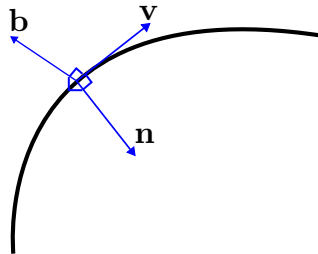
**Определение 4.2** (Бирегулярная параметризация). Кривая называется бирегулярной, если  $\mathbf{f}''(t) \nparallel \mathbf{f}'(t)$  для любой параметризации. Или, если  $\mathbf{v}'(s) \neq 0$  для натуральной параметризации. Или  $\mathbf{n}$  корректно определен. (почему они эквивалентны — вопрос будущего)

По умолчанию считаем, что все кривые бирегулярны.

У нас есть вектор  $\mathbf{v}$  и перпендикулярный ему  $\mathbf{n}$ . Они единичные, хотим превратить их в базис пространства. Для этого построим вектор



$\mathbf{b}$  перпендикулярный им обоим и тоже единичный.



**Определение 4.3** (Вектор бинормали).

$$\mathbf{b} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$

Правая тройка  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  — репер Френе.

Изучим  $\mathbf{b}'$ :  $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$  из леммы 3.1, также  $\mathbf{b}' \perp \mathbf{v}$ . Почему?

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{v} \times \mathbf{n})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' = 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' \perp \mathbf{v}$$

Таким образом,  $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}' = -\kappa \mathbf{n}$  — вторая формула Френе.

**Определение 4.4** (Кручение кривой).  $\kappa$ , определенная выше — кручение кривой.

Изучим  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b} \times \mathbf{v})' = \mathbf{b}' \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times \mathbf{v}' = -\kappa \mathbf{n} \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times k\mathbf{n} = \kappa \mathbf{b} - k\mathbf{v}$$

получили третью формулу Френе.

**Определение 4.5** (Формулы Френе).

	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{v}'$	0	$k$	0
$\mathbf{n}'$	$-k$	0	$\kappa$
$\mathbf{b}'$	0	$-\kappa$	0

Производная везде берется по натуральному параметру.

**Определение 4.6** (Нормальная плоскость кривой). Плоскость  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$  — нормальная плоскость кривой.

**Определение 4.7** (Соприкасающаяся плоскость кривой). Плоскость  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  — соприкасающаяся плоскость кривой.

**Определение 4.8** (Спрямяющая плоскость кривой). Плоскость  $(\mathbf{v}, \mathbf{b})$  — спрямяющая плоскость кривой.

Вопрос: а как это посчитать?

**Пример 4.1.** Есть окружность:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

Хотим найти натуральную параметризацию: сейчас мы проходим окружность за время  $2\pi$ , наверное нужно проходить окружность за время  $2\pi R$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} x = R \cos(t/R) \\ y = R \sin(t/R) \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -\sin(t/R) \\ y' = \cos(t/R) \end{cases}$$

---

## Глава 5

# Соприкасающаяся плоскость

---

19.09.22

В натуральной параметризации  $\mathbf{v} = \mathbf{f}'$  и  $\mathbf{n} = \mathbf{f}''/k$ . Тогда плоскость  $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$  — соприкасающаяся плоскость для натуральной параметризации.

А что будет в случае не натуральной параметризации? Посмотрим, что в таком случае происходит с вектором  $\mathbf{f}''$ , будет ли он перпендикулярен  $\mathbf{f}'$ ? Нет, не будет, потому что, если вектор  $\mathbf{f}'' \perp \mathbf{f}'$ , то  $|\mathbf{f}'| = \text{const}$  и параметризация почти натуральная, в том смысле, что наша скорость постоянная, но возможно не единичная. Вывод: в обычной ситуации  $\mathbf{f}''$  не перпендикулярен  $\mathbf{f}'$ , однако плоскость в которой он лежит не меняется.

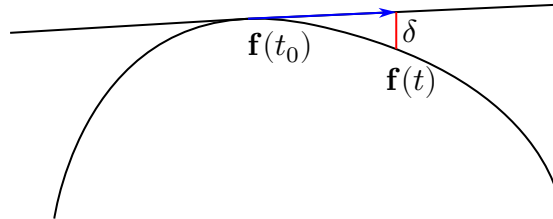
**Теорема 5.1.** Плоскость  $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$  не зависит от параметризации.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(s)$ , где  $s$  не обязательно натуральный параметр и  $s = \varphi(t)$ , тогда  $\mathbf{g}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(t)$ . Уже доказано, что  $\mathbf{f}' \parallel \mathbf{g}'$ . Теперь выясним, что

$$\begin{aligned}\mathbf{f}''(t) &= (\mathbf{g}(\varphi(t)))'' = (\mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi'(t))' = \\ &= \mathbf{g}''(\varphi(t))\varphi'^2(t) + \mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi''(t) \in \langle \mathbf{g}', \mathbf{g}'' \rangle\end{aligned}$$

■

**Теорема 5.2.** Есть регулярная параметризация  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\delta(t)$  — расстояние от  $\mathbf{f}(t)$  до прямой, проходящей через точку  $\mathbf{f}(t_0)$ .



$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|} = 0.$$

Такой  $\lim = 0$  тогда и только тогда, когда касательная прямая.

**Доказательство.** Выберем удобную для нас координатную систему:

- $\mathbf{f}(t_0) = (0, 0, 0)$
- $t_0 = 0$
- Касательная прямая — прямая  $OX$ . Тогда  $\mathbf{f}'(0) = (a, 0, 0)$ .

Пусть  $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ , выясним что такое  $\delta$ .

$$\delta = \sqrt{f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Разложим  $f_1$  по Тейлору:

$$f_1(t) = f_1(0) + f_1'(0)t + o(|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|) = at + o(t)$$

На малом промежутке  $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| \approx t$ . Аналогично с  $f_2, f_3$ :

$$f_2(t) = f_2(0) + f_2'(0)t + o(t) = o(t)$$

$$f_3(t) = o(t)$$

Отсюда,  $\delta(t) = o(t)$  и

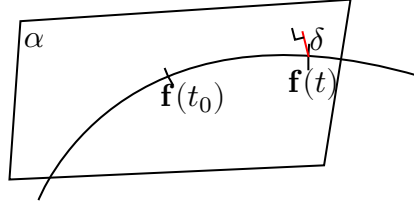
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta(t)}{t} = 0$$

А так же

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)|}{t} = |\mathbf{f}'(0)|$$

Обратное доказательство — упражнение. (Hint: если  $\delta$  — расстояние от данной точки до любой прямой, кроме  $OX$ , то в формуле для  $\delta$  появится слагаемое  $f_1^2(t)$ ) ■

**Теорема 5.3.** Пусть  $\mathbf{f}(t)$  — бирегулярная параметризация.  $\delta$  — расстояние от  $\mathbf{f}(t)$  до плоскости  $\alpha$ .



$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{t^2} = 0 \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|^2} = 0 \right)$$

Такой  $\lim = 0 \Leftrightarrow \alpha$  — соприкасающаяся плоскость.

**Доказательство.** Введем удобную систему координат:

1.  $t_0 = 0$
2.  $\mathbf{f}(0) = (0, 0, 0)$
3.  $\mathbf{f}'(0) = (a, 0, 0)$  и  $\mathbf{f}''(0) = (b, c, 0)$

Тогда соприкасающаяся плоскость описывается уравнением  $z = 0$  (это следует из вида  $\mathbf{f}'(0)$  и  $\mathbf{f}''(0)$ ).

Запишем вектор-функцию в координатах:

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)).$$

Пусть плоскость  $\alpha$  задана уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$  и  $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ . Подсчитаем  $\delta$  используя разложение по Тейлору:

$$\begin{aligned} \delta &= |Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) + D| = \\ &= \left| A \left( f_1(0) + f_1'(0)t + \frac{f_1''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + \right. \\ &\quad + B \left( f_2(0) + f_2'(0)t + \frac{f_2''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + \\ &\quad \left. + C \left( f_3(0) + f_3'(0)t + \frac{f_3''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + D \right| = \\ &= \left| Aat + \frac{Ab}{2}t^2 + \frac{Bc}{2}t^2 + D + o(t^2) \right| \end{aligned}$$

Теперь хотим выяснить чему равносильно  $\delta = o(t^2)$ .

$$\begin{cases} Aa = 0 \\ Bc = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

При этом  $a \neq 0$ , т.к. это единственная ненулевая координата касательного вектора, она не может быть нулем. И  $c \neq 0$ , иначе  $\mathbf{f}''$  коллинеарно  $\mathbf{f}'$ . Тогда

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

и  $\alpha$  имеет единственно возможное уравнение  $z = 0$ . ■

Посмотрим как задаются все эти плоскости в координатах. Пусть  $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  и  $\mathbf{f}$  не натуральная параметризация (т.к. к натуральной параметризации тяжело перейти).

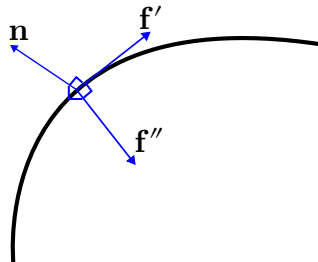
$$\mathbf{f}'(t) = (f'_1, f'_2, f'_3)$$

Построим нормальную плоскость:

$$f'_1(t_0)(x - f_1(t_0)) + f'_2(t_0)(y - f_2(t_0)) + f'_3(t_0)(z - f_3(t_0)) = 0$$

Построим соприкасающуюся плоскость: для этого найдем вектор главной нормали

$$\mathbf{n} = \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = (f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2, f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3, f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)$$



и уравнение плоскости

$$(f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2)(x - f_1) + (f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3)(y - f_2) + (f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)(z - f_3) = 0$$

Построение спрямляющей плоскости опущено в виду громоздкости выкладок.

---

## Глава 6

# Вычисление кривизны и кручения

---

В натуральной параметризации  $k(s_0) = |\mathbf{f}''(s_0)|$ .

**Теорема 6.1.**  $k \equiv 0 \Leftrightarrow$  кривая является частью прямой.

**Доказательство.** В натуральной параметризации  $k = 0$  равносильно  $\mathbf{f}''(t) = 0$ , а это равносильно тому, что  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v} = \text{const}$ . ■

**Теорема 6.2.** Для любой регулярной параметризации

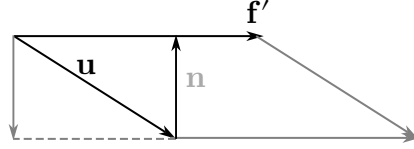
$$k = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{g}(s)$  — натуральная параметризация, а  $\mathbf{f}(t)$  любая другая параметризация.

$$s = \varphi(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Тогда связь между ними:  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t))$ . И существует  $\psi(s) = t$  —

обратная функция и  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\psi(s))$ .  
 Пусть  $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$



$$|\text{Пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|}$$

Вычислим  $k$ :

$$\begin{aligned} k &= |\mathbf{g}''(s)| = |(\mathbf{f}(\psi(s)))''| = \\ &= |\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)| = \\ &= \left| \text{Пр}_{\mathbf{n}}(\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)) \right| \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' \times \mathbf{u} &= \mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\psi'^2 + 0 \\ \psi'(s) &= \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|} \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|} = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|} \psi'^2(s) = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3}$$



Если  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ , то

$$k = \frac{\sqrt{(f_2'f_3'' - f_3'f_2'')^2 + (f_3'f_1'' - f_1'f_3'')^2 + (f_1'f_2'' - f_2'f_1'')^2}}{(f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{3/2}}$$

В случае плоских кривых ( $f_3 = 0$ ):

$$k = \frac{|f_1'f_2'' - f_2'f_1''|}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{3/2}}$$



При явном задании

$$y = f(x) \quad \begin{cases} x = f_1 = t \\ y = f_2 = f(t) \end{cases}$$

$$k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

В полярных координатах

$$r = r(\varphi) \quad \begin{cases} f_1 = x = r \cos \varphi \\ f_2 = y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$|f'| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}$$

$$\begin{cases} f_1' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ f_2' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1'' = r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi \\ f_2'' = r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi \end{cases}$$

Чему равно  $|f_1' f_2'' - f_2' f_1''|$  — упражнение.

**Теорема 6.3.** Кривая плоская тогда и только тогда, когда ее  $\kappa = 0$ .

26.09.22

**Доказательство.** Вспомним, что  $\mathbf{b}' = -\kappa \mathbf{n}$  в натуральной параметризации. Тогда  $\kappa = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} = \text{const} \Leftrightarrow$  соприкасающаяся плоскость  $= \text{const}$ .

Если соприкасающаяся плоскость постоянная, то кривая лежит в ней. Докажем это.

Ориентируем систему так, чтобы  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ . Кривая в натуральной параметризации имеет уравнение  $\mathbf{g}(s) = (g_1(s), g_2(s), g_3(s))$ . И мы хотим доказать, что  $g_3(s) = 0$ . Рассмотрим вектор  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{g}' \times \mathbf{g}''}{k}$$

(Напоминание: в натуральной параметризации  $\mathbf{v} = \mathbf{g}'$ ,  $k\mathbf{n} = \mathbf{v}' = \mathbf{g}''$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$ )

$$\mathbf{g}' \times \mathbf{g}'' = \underbrace{(g_2' g_3'' - g_3' g_2'')}_{=0}, \underbrace{(g_3' g_1'' - g_1' g_3'')}_{=0}, \underbrace{(g_1' g_2'' - g_2' g_1'')}_{\neq 0}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} g'_2 g''_3 - g'_3 g''_2 = 0 & | \cdot g'_1 \\ g'_1 g''_3 - g''_1 g'_3 = 0 & | \cdot g'_2 \end{cases} \implies$$

$$g'_1 g'_3 g''_2 - g''_1 g'_3 g'_2 = 0$$

$$g'_3 (g'_1 g''_2 - g''_1 g'_2) = 0 \implies g'_3 = 0 \quad \forall s \implies g_3 = \text{const}$$

значит третья координата кривой всегда одна и та же, а значит кривая лежит в плоскости  $z = g_3 = \text{const}$ . ■

**Теорема 6.4.** В натуральной параметризации

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}''')}{k^2}.$$

**Доказательство.** Посмотрим, чем являются производные  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}' &= \mathbf{v} \\ \mathbf{g}'' &= \mathbf{v}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{g}''' &= k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} + k(-k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}) = k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{b} \\ \mathbf{g}' \times \mathbf{g}'' &= \mathbf{v} \times k\mathbf{n} = k\mathbf{b} \end{aligned}$$

теперь посчитаем такое выражение:

$$(\mathbf{g}' \times \mathbf{g}'') \cdot \mathbf{g}''' = k \cdot k\varkappa$$

итого получаем

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}''')}{k^2}$$

■

**Теорема 6.5.** Для любой параметризации:

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2}.$$

**Доказательство.** Введем

$$s = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau = \varphi(t)$$

— натуральный параметр.

Пусть  $t = \psi(s)$ , тогда  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\psi(s))$  и  $\psi'(s) = 1/\varphi'(t) = 1/|\mathbf{f}'(t)|$ . Рассмотрим производные  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(t) &= \mathbf{f}'(t)\psi'(s) = \frac{\mathbf{f}'}{|\mathbf{f}'|} \\ \mathbf{g}'' &= \mathbf{f}''\psi'^2 + \mathbf{f}'\psi'' \\ \mathbf{g}''' &= \mathbf{f}'''\psi'^3 + 3\mathbf{f}''\psi'\psi'' + \mathbf{f}'\psi''' \end{aligned}$$

по свойствам смешанного произведения, все коллинеарные слагаемые можно записать один раз

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}''') &= (\mathbf{f}'\psi', \mathbf{f}''\psi'^2, \mathbf{f}'''\psi'^3) = \psi'^6(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') \\ \kappa &= \frac{(\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}''')}{k^2} = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}'|^6} \cdot \frac{|\mathbf{f}'|^6}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2} \end{aligned}$$

■

---

## Глава 7

# Натуральные уравнения кривой

---

Есть кривая в натуральной параметризации. Знаем  $k(s)$  и  $\kappa(s)$ . Верно ли, что существует ровно одна кривая, что эти функции являются ее кривизной и кручением? Единственность точно верно, с существованием — не всегда,  $k$  должно быть положительно.

**Теорема 7.1.** Если  $\mathbf{g}_1(s)$  и  $\mathbf{g}_2(s)$  — кривые с одинаковыми  $k$  и  $\kappa$ , тогда они отличаются друг от друга движением.

**Доказательство.** В точке  $s_0$  состыкуем реперы Френе.  $(\mathbf{v}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s))$  — репер Френе для  $\mathbf{g}_1$ . Аналогично,  $(\mathbf{v}_2(s), \mathbf{n}_2(s), \mathbf{b}_2(s))$  — репер Френе для  $\mathbf{g}_2$ . Что означает «состыкуем»?

$$\mathbf{v}_1(s_0) = \mathbf{v}_2(s_0)$$

$$\mathbf{n}_1(s_0) = \mathbf{n}_2(s_0)$$

$$\mathbf{b}_1(s_0) = \mathbf{b}_2(s_0)$$

Заведем скалярную функцию

$$h(s) = \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s) + \mathbf{n}_1(s)\mathbf{n}_2(s) + \mathbf{b}_1(s)\mathbf{b}_2(s)$$

заметим, что

- $h(s_0) = 3$
- $h(s) \leq 3$  и  $h(s) = 3 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$

Как доказать, что скалярная функция равна константе во всех точках, если мы знаем, что она равна константе в одной точке? Достаточно взять производную и показать, что она ноль. Возьмем производную  $h$ :

$$\begin{aligned} h'(s) &= \mathbf{v}'_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{n}'_1 \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}'_2 + \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}'_2 = \\ &= k \mathbf{n}_1 \mathbf{v}_2 + k \mathbf{v}_1 \mathbf{n}_2 + \varkappa \mathbf{b}_1 \mathbf{n}_2 + \varkappa \mathbf{n}_1 \mathbf{b}_2 \\ &\quad - k \mathbf{n}_1 \mathbf{v}_2 - k \mathbf{v}_1 \mathbf{n}_2 - \varkappa \mathbf{b}_1 \mathbf{n}_2 - \varkappa \mathbf{n}_1 \mathbf{b}_2 = 0 \end{aligned}$$

тогда  $h(s) = 3 \forall s$ . ■

**Определение 7.1** (Натуральные уравнения кривой).  $(k(s), \varkappa(s))$  — натуральные уравнения кривой.

Практический вывод: хотим спроектировать резьбу. Что такое резьба — кривая. Нам известна такая резьба — винтовая линия:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = at \end{cases}$$

Меняем  $R$  — меняем радиус резьбы, меняем  $a$  — меняем шаг резьбы. Вопрос: есть ли другая кривая, подходящая для нарезки резьбы? Ответ: нет, нельзя. Выясним почему: когда мы завинчиваем (то есть делаем движение одной кривой, относительно другой кривой) болт в гайку, кривые болта и гайки должны самосовместиться, то есть кривизна и кручение у кривой в во всех точках одинаковые. То есть наша кривая должна удовлетворять условию, что  $k = const, \varkappa = const$ . Подсчитаем

их для винтовой кривой:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= (R \cos t, R \sin t, at) \\
 \mathbf{f}' &= (-R \sin t, R \cos t, a) \\
 \mathbf{f}'' &= (-R \cos t, -R \sin t, 0) \\
 \mathbf{f}''' &= (R \sin t, -R \cos t, 0) \\
 \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= (aR \sin t, -aR \cos t, R^2) \\
 |\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''| &= \sqrt{a^2 R^2 + R^4} = R\sqrt{R^2 + a^2} \\
 |\mathbf{f}'| &= \sqrt{R^2 + a^2} \\
 k &= \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3} = \frac{R\sqrt{R^2 + a^2}}{(R^2 + a^2)\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{R}{R^2 + a^2} \\
 (\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') &= \begin{vmatrix} -R \sin t & R \cos t & a \\ -R \cos t & -R \sin t & 0 \\ R \sin t & -R \cos t & 0 \end{vmatrix} = aR^2 \\
 \varkappa &= \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2} = \frac{aR^2}{R^2(R^2 + a^2)} = \frac{a}{R^2 + a^2}.
 \end{aligned}$$

**Часть II**

**Дифференциальная  
геометрия поверхностей**

---

## Глава 8

# Касательная плоскость

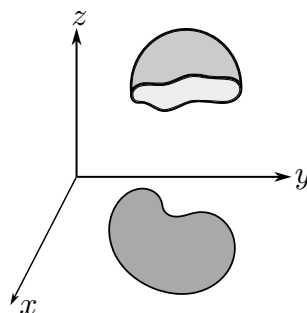
---

03.10.22

**Теорема (О неявной функции).** Если  $F(x, y, z) = 0$  и  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , а так же  $\frac{\partial F}{\partial z}|_{z=z_0} \neq 0$ , тогда в некоторой окрестности  $(x_0, y_0)$ , тогда существует  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ .

Как задать поверхность?

- Явная формула:  $z = f(x, y)$ , если  $(x, y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{D}$  — область, то есть открытое и связное множество)



- Неявное задание:  $F(x, y, z) = 0$ . Классический пример — сфера  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

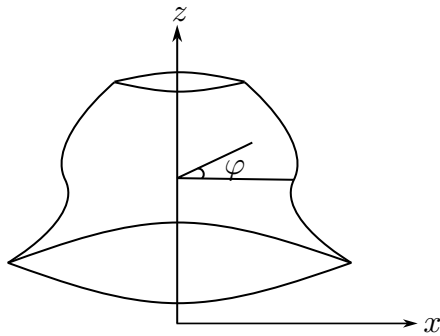


- Параметрическое задание: есть  $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  — область,  $(u, v)$  — внутренние координаты.

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Иначе говоря,  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(u, v)$ , где  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Пример 8.1.** Поверхность вращения. Есть кривая с параметризацией  $x = f(t), z = g(t)$ :



$$\begin{cases} x = f(t) \cos \varphi \\ y = f(t) \sin \varphi \\ z = g(t) \end{cases}$$

**Пример 8.2.** Еще более частный пример: сфера. Зададим полуокружность в плоскости  $Oxz$

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

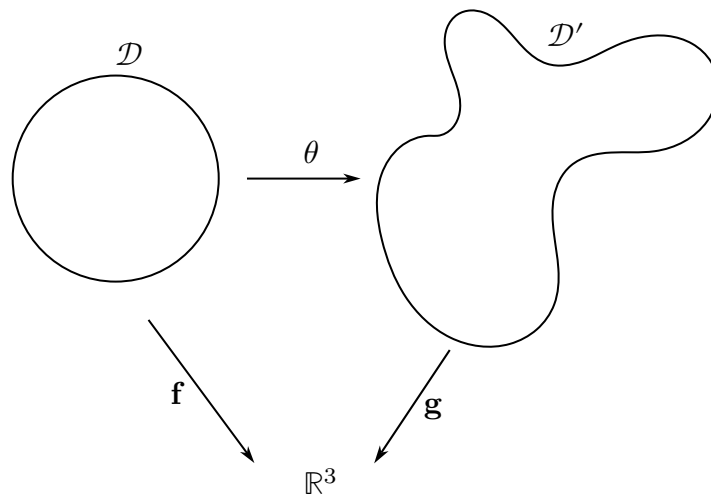
Тогда параметризация поверхности вращения

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \varphi \\ y = R \cos \psi \sin \varphi \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

Получили стандартные географические координаты, где  $\varphi$  — долгота ( $\varphi \in [0; 2\pi]$ ),  $\psi$  — широта ( $\psi \in [-\pi/2; \pi/2]$ )

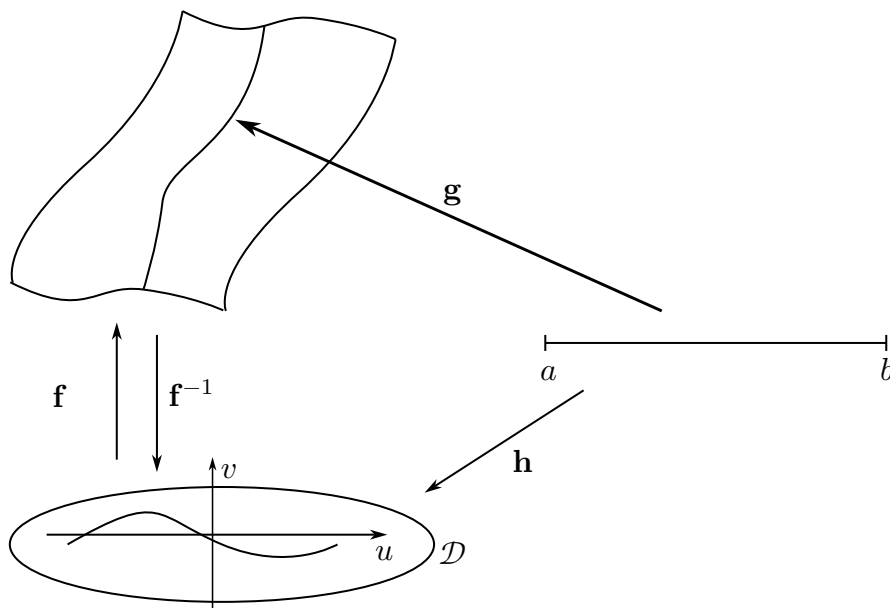
## 8.1. Перепараметризация поверхности

**Определение 8.1** (Диффеоморфизм). Диффеоморфизм — дифференцируемый гомеоморфизм, обратный к которому тоже дифференцируем.



Если  $\theta$  — диффеоморфизм, то  $\mathbf{f} = \mathbf{g}\theta$  и  $\mathbf{g} = \mathbf{f}\theta^{-1}$ .

## 8.2. Кривая на поверхности



Считаем, что поверхность несамопересекается, то есть  $\mathbf{f}$  — инъекция. Тогда  $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1}\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{h} : [a, b] \rightarrow \mathcal{D}$  и  $u = h_1(t), v = h_2(t)$  — внутренние уравнения кривой на поверхности.

**Определение 8.2** (Касательный вектор поверхности). Вектор  $\mathbf{v}$  называется касательным вектором поверхности в точке  $M$ , если существует кривая на поверхности, проходящая через  $M$ , так что  $\mathbf{v}$  — касательный вектор к данной кривой в точке  $M$ .

Верно ли что касательные векторы образуют плоскость? Ответ не тривиальный.

Есть 2 касательных вектора  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}$  к кривым

$$\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases} .$$

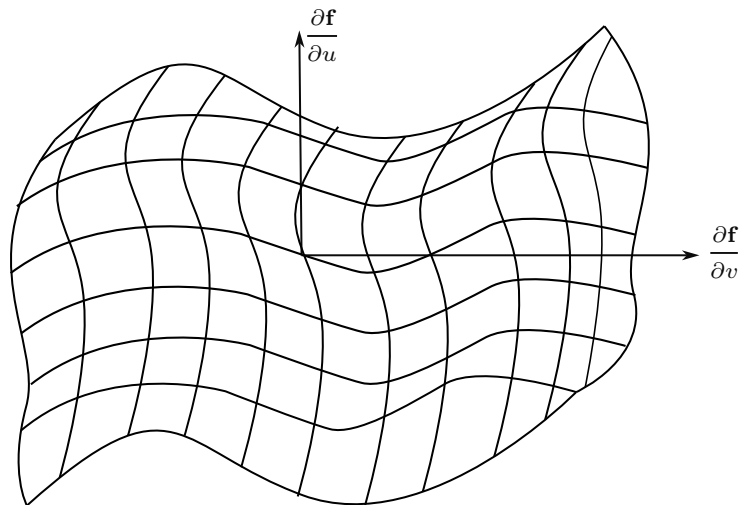
Векторы получены из

$$\frac{d\mathbf{f}(u, v)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} u'_t + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} v'_t.$$

**Определение 8.3** (Регулярная параметризация). Параметризация называется регулярной, если  $\forall (u_0, v_0) \in \mathcal{D}$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \nparallel \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} .$$

Теперь будем последовательно фиксировать  $v_0$  и строить кривые, потом повторим то же самое с  $u_0$ , получим семейство координатных кривых:



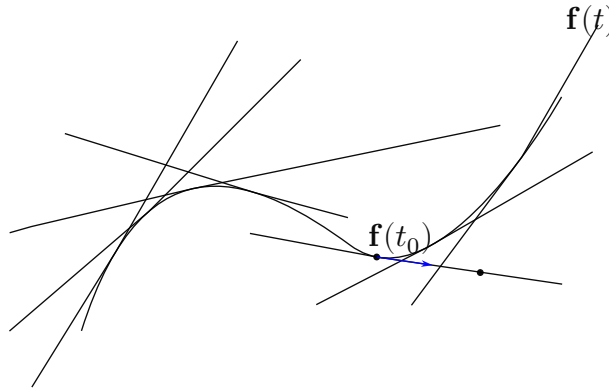
Параметризация регулярная  $\Leftrightarrow$  любые 2 линии пересекаются под углом, не равном 0.

Если  $\mathbf{f}$  регулярная, то

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \mathbf{f}'_u \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \mathbf{f}'_v \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v}{|\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v|}$$

образуют базис (свой для каждой точки). При этом  $\mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{f}'_v$  не обязательно ортогональны.

**Пример 8.3** (Поверхность с нерегулярной параметризацией). Есть кривая в пространстве, рассмотрим множество касательных прямых. Эти прямые будут заметать некоторую поверхность, в некоторой окрестности эта поверхность даже будет несамопересекающейся.



Найдем параметризацию этой поверхности:

$$\mathbf{g}(t, \tau) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}'(t)\tau$$

При  $\tau = 0$  параметризация не регулярная.

$$\mathbf{g}'_t|_{\tau=0} = \mathbf{g}'_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{f}'(t)$$

**Теорема 8.1.**  $\mathbf{f}$  — регулярная параметризация, тогда касательные векторы в точке  $(u_0, v_0)$  образуют плоскость с базисом  $\mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{f}'_v$ .

**Доказательство.** Рассмотрим кривую на поверхности с внутренними координатами  $u(t), v(t)$ , при этом  $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$ .

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}u'_t + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}v'_t = \mathbf{f}'_u u'_t + \mathbf{f}'_v v'_t \in \langle \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v \rangle$$

так как  $u'_t$  и  $v'_t$  константы в точке  $t_0$ . ■

**Определение 8.4** (Касательная плоскость). Касательная плоскость это плоскость, состоящая из касательных векторов.

**Определение 8.5** (Вектор нормали).

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v}{|\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v|}$$

Формально докажем, что любой вектор плоскости  $\langle \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v \rangle$  — касательный вектор. Рассмотрим  $\alpha \mathbf{f}'_u + \beta \mathbf{f}'_v$ , пусть внутренние координаты  $u = \alpha t, v = \beta t$ , которые задают кривую на поверхности, которая, очевидно, имеет касательный вектор  $\alpha \mathbf{f}'_u + \beta \mathbf{f}'_v$ .

Как написать уравнение касательной плоскости, если поверхность задана параметрически?

Пусть  $\mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , тогда  $\mathbf{f}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$  и  $\mathbf{f}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ . В таком случае нормаль к касательной плоскости —  $\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v$ . А уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} (X - x_0) + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} (Y - y_0) + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} (Z - z_0) = 0$$

(и все определители не равны 0)

Явный вид сводится к параметрическому:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

В случае неявного вида:  $F(x, y, z) = 0$ , у нас есть градиент  $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ , и тогда  $\nabla F|_M$  — вектор нормали к поверхности в точке  $M$ . Докажем это:

Пусть  $x(t), y(t), z(t)$  — любая кривая на поверхности. Это означает, что  $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \forall t$ , соответственно  $\frac{d}{dt}F = F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' = 0$ , а это  $\nabla F \cdot (x', y', z') = 0$ , где  $(x', y', z')$  — касательный вектор к кривой, тогда градиент перпендикулярен касательному вектору. По заданию у нас любая прямая, значит градиент — вектор нормали.

---

## Глава 9

# Первая квадратичная форма

---

Есть кривая на поверхности. Как сосчитать ее длину? Пусть кривая задана регулярной параметризацией:

$$\mathbf{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

и  $u = u(t), v = v(t)$ . Чему равна длина от  $t_0$  до  $t_1$ ?

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= (x'_u u' + x'_v v', y'_u u' + y'_v v', z'_u u' + z'_v v') = \mathbf{f}'_u u' + \mathbf{f}'_v v' \\ \left| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right| &= \sqrt{(\mathbf{f}'_u u' + \mathbf{f}'_v v') \cdot (\mathbf{f}'_u u' + \mathbf{f}'_v v')} = \sqrt{\mathbf{f}'_u{}^2 u'^2 + 2\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_v u' v' + \mathbf{f}'_v{}^2 v'^2} \end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{f}'_v$  не зависят от кривой и зависят только от поверхности. Обозначим  $E := \mathbf{f}'_u{}^2$ ,  $F := \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_v$ ,  $G := \mathbf{f}'_v{}^2$ . В чем удобство? Эта штука определяется только поверхностью.

Теперь длина принимает вид

$$\left| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

**Определение 9.1** (Первая квадратичная форма поверхности).

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = I(u', v')$$

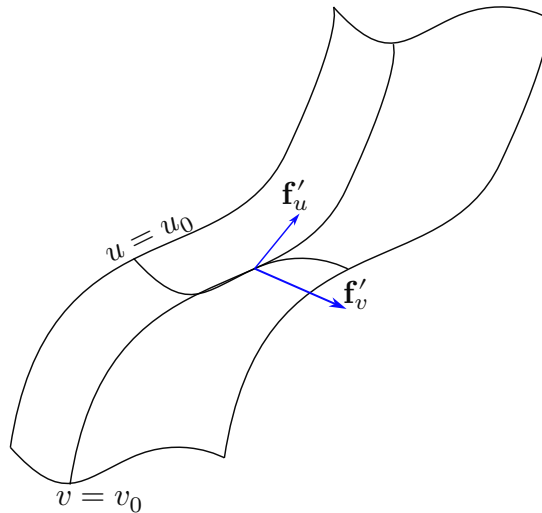
**Теорема 9.1.** Длина кривой

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I(u', v')} dt$$

**Теорема 9.2.** Угол между кривыми  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$ , где  $u_1(t), v_1(t), u_2(\tau), v_2(\tau)$  — функции.

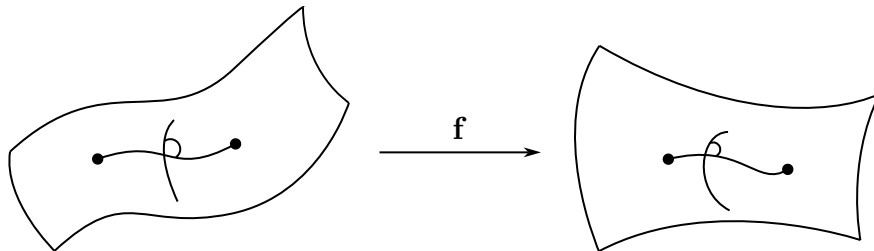
$$\cos \angle = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{I(u'_1, v'_1)I(u'_2, v'_2)}} = \frac{\mathbf{f}'_t \mathbf{f}'_\tau}{|\mathbf{f}'_t| |\mathbf{f}'_\tau|}$$

Что такое  $E, F, G$ ?



$E = |\mathbf{f}'_u|^2$  и  $G = |\mathbf{f}'_v|^2$  — длины соответствующих касательных векторов, а  $F = \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_v$  — мера непрямоугольности системы координат.

Хотим решить задачу: как нарисовать карту без искажений? (в том смысле, что если, например, мы рисуем карту горной местности, то мы теряем высоты) Пусть у нас есть 2 поверхности:



- Что означает, что мы рисуем карту одной поверхности на другой поверхности? Это означает, что мы просто задаем отображение  $\mathbf{f}$  из одной поверхности в другую.
- Что означает без искажений? Если кривая имела определенную длину на первой поверхности, то ее образ будет иметь такую же длину на второй поверхности.

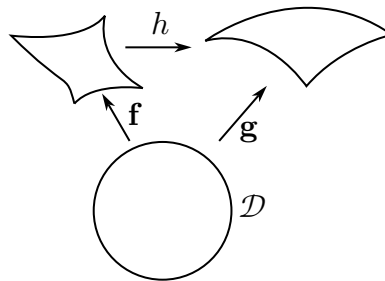
ИЛИ  $\mathbf{f}$  — изометрия, если  $\mathbf{f}$  сохраняет длины кривых.

А что происходит с углами? Сохраняются ли они? Проведем еще кривую и построим ее образ, длины сохранятся. Допустим, что не сохраняются углы. Около точки пересечения положим кривую соединяющую близкие точки и ее образ. Если один угол меньше другого, то длина ее будет меньше в одной поверхности чем в другой. (это не строгое доказательство, а объяснение почему сохраняются углы)

Если две поверхности изометричны, то они в некотором смысле не отличаются друг от друга.

Внутренняя геометрия поверхности — характеристики, которые сохраняются при изометрии.

Есть область  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Введем отображение  $h : \mathbf{g}(x, y) = h(\mathbf{f}(x, y))$ .



**Теорема 9.3.** При введенных обозначениях,  $h$  — изометрия  $\Leftrightarrow$  у двух поверхностей совпадают коэффициенты  $E, F, G$ .

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ : Вспомним длину кривой

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\varphi_1'^2 + 2F\varphi_1'\varphi_2' + G\varphi_2'^2} dt$$

Если совпадают  $E, F, G$ , то длина кривых тоже  $\Rightarrow$ : Пусть  $E_1, G_1, F_1$  — коэффициенты первой плоскости,  $E_2, G_2, F_2$  — коэффициенты второй плоскости, а так же  $\varphi_1(t) =$



$t, \varphi_2(t) = c$ , тогда

$$L_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1 \cdot 1 + 2F_1 \cdot 1 \cdot 0 + G \cdot 0} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1} dt$$

$$L_2 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2} dt$$

и по изометрии  $L_1 = L_2$

$$\frac{d}{dt_1} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1} dt = \frac{d}{dt_1} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2} dt$$

$$\sqrt{E_1} = \sqrt{E_2}$$

$$E_1 = E_2$$

Аналогично, пусть  $\varphi_1(t) = c, \varphi_2(t) = t$ , тогда  $G_1 = G_2$ .  
Далее возьмем кривую  $\varphi_1(t) = t + c_1, \varphi_2(t) = t + c_2$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt$$

$$F_1 = F_2$$

■

**Замечание.** Если первые квадратичные формы разные, то из этого не следует, что поверхности не изометричны.

**Пример 9.1.** Плоскость  $z = 0$ :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$$

Как посчитать первую квадратичную форму?

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$$

и первая квадратичная форма:  $du^2 + dv^2$ .

**Пример 9.2.** А теперь зададим эту же плоскость в полярных координатах:

$$\begin{cases} x = u \cos v & E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \\ y = u \sin v & F = \cos v(-u \sin v) + \sin v(u \cos v) = 0 \\ z = 0 & G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 \end{cases}$$

Задали одну и ту же поверхность разными способами, а получили разные коэффициенты, почему так? Первая параметризация задает координатные линии на плоскости (лист бумаги в клетку), где  $E$  и  $G$  квадраты скорости при движении по соответствующим координатным линиям, а  $F$  — мера непрямоугольности, она равна 0, действительно у нас прямоугольная система. В полярных координатах сетка — лучи из полюса и окружности, пересекающие их. Относительно лучей идем со скоростью 1, а по окружностям идем равномерно со скоростью  $R = u$ , а  $G$  соответствующий квадрат скорости. Самый простой пример одной и той же поверхности, но с разными квадратичными формами.

---

## Глава 10

### Площадь поверхности

---

**Теорема 10.1.**

$$S = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

**Доказательство.** Не будет. ■

[Здесь был ликбез по двойному интегралу]

**Теорема 10.2.**

$$EG > F^2$$

**Доказательство.**

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\right)^2 > \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\right)^2$$

потому что по сути справа скалярное произведение векторов, то есть произведение длин векторов на косинус угла между ними, а слева просто квадраты длин. Почему не равенство? Оно не достигается, т.к. иначе  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \parallel \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}$ , что невозможно, т.к. мы рассматриваем только регулярные поверхности. ■

## 10.1. Что такое площадь поверхности?

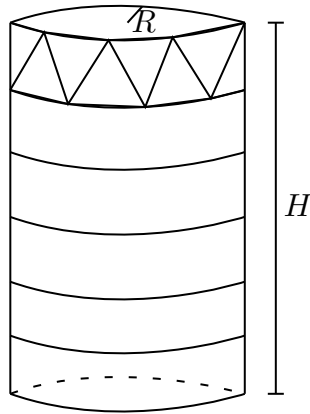
В данный момент, доказательство у теоремы о площади поверхности отсутствует не только, из-за недостаточного математического инструментария, но и в силу того, что мы не определили, что такое площадь. Однако площадь не просто определить, а некоторыми способами площадь определить вообще нельзя.

Как определялась длина кривой? Разбивали кривую точками, проводили прямые, считали их длину, а потом переходили к пределу. Можно ли сделать то же самое с поверхностями? Заведем триангуляцию поверхности, дальше попытаемся перейти к пределу, если максимальная длина грани треугольника стремится к 0. Но эта штука не работает, и таким образом нельзя даже подсчитать площадь цилиндра.

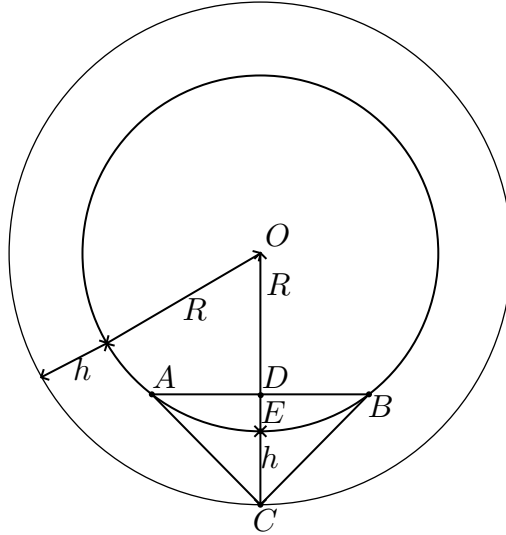
**Пример 10.1.** Контрпример (сапог) Шварца.

Антипризма — фигура, у которой в нижнем основании правильный  $n$ -угольник, в верхнем тоже, и они смещены друг от друга.

Возьмем цилиндр и разобьем его на маленькие цилиндрики, а затем каждый кусочек заменим на антипризму. Пусть у нас  $k$  кусочков по высоте. Найдем площадь получившегося барабана и поймем к чему она стремится если  $k$  и  $n$  стремятся к бесконечности.



Пусть  $h = H/k$  — высота каждого участка. Тогда  $S = k \cdot 2n \cdot S_{\Delta}$  и нам нужно вычислить  $S_{\Delta}$ .



$$OD = r, \alpha = AOD$$

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n} \implies \angle \alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$AD = AO \sin \alpha = R \sin \frac{\pi}{n} \text{ по определению антипризмы}$$

$$AB = 2AD = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

$CED$  — прямоугольный треугольник в пространстве

$$h_{ABC} = \sqrt{CE^2 + DE^2} = \sqrt{h^2 + \left(R - R \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB h_{ABC} = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$S = 2kn \cdot R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

$$n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$$

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} S_{k, n} = 2\pi R \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \sqrt{H^2 + 4R^2 k^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

если  $k^2 \sin^4(\pi/2n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow k^2/n^4 \rightarrow 0$  или  $k/n^2 \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} S_{k, n} = 2\pi RH.$$

Если нет, то есть проблемы. Например если  $k = n^2$ , то

$$\lim_{k,n \rightarrow \infty} S_{k,n} = 2\pi R \sqrt{H^2 + 4R^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4}$$

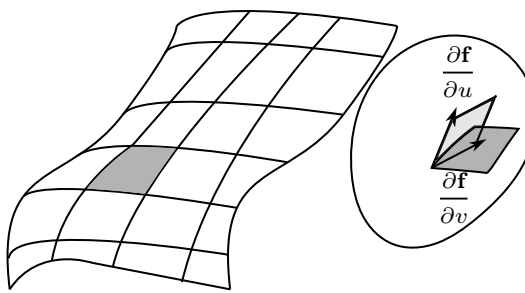
если  $k = n^3$ , то

$$2\pi R \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{H^2 + 4R^2 n^6 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \infty$$

Почему вообще так происходит? Посмотрим на треугольник  $ABC$ , там как раз видно, что  $k$  довольно велико относительно  $n$ , то есть полоса узкая, но нарезаем довольно грубо на  $n$ -угольник. В таком случае это треугольник НЕ параллелен плоскости боковой поверхности, и получается нарезка из треугольников стоящих довольно сильно поперек, за счет этого площадь поверхности увеличивается. Поэтому подбирая  $k$  и  $n$  можно прийти к любому пределу, большему чем настоящая площадь.

Тогда как правильно определить площадь поверхности?

**Определение 10.1** (Площадь поверхности). Есть поверхность, разобьем ее координатными линиями и рассмотрим конкретный параллелограмм. К нему есть 2 касательных вектора, они формируют касательную плоскость к данной поверхности. Спроецируем каждый параллелограмм на свою касательную плоскость. Посчитаем площадь в касательной плоскости, сложим их и перейдем к пределу.



**Теорема 10.3.**

$$\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{f} = (x, y, z)$ , где  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , тогда  $\mathbf{f}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ ,  $\mathbf{f}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ . Посчитаем в координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v &= (y'_u z'_v - z'_u y'_v; z'_u x'_v - x'_u z'_v; x'_u y'_v - y'_u x'_v) \\ |\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v| &= \\ &= \sqrt{y'^2_u z'^2_v + z'^2_u y'^2_v + z'^2_u x'^2_v + x'^2_u z'^2_v + x'^2_u y'^2_v + y'^2_u x'^2_v - 2(y'_u z'_v z'_u y'_v + z'_u x'_v x'_u z'_v + x'_u y'_v y'_u x'_v)} = \\ &= \sqrt{(x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u)(x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v) - (x'^2_u x'^2_v + y'^2_u y'^2_v + z'^2_u z'^2_v) - 2(y'_u z'_v z'_u y'_v + z'_u x'_v x'_u z'_v + x'_u y'_v y'_u x'_v)} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

■

---

## Глава 11

# Кривизна кривой на поверхности

---

31.10.22

Есть поверхность с параметризацией  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  $u = u(s), v = v(s)$  — внутренние координаты кривой на поверхности. Тогда  $\boldsymbol{\psi}(s) = \mathbf{f}(u(s), v(s))$ , где  $s$  — натуральный параметр. И  $|\boldsymbol{\psi}'(s)| = 1, |\boldsymbol{\psi}''(s)| = k$ .

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}' &= \mathbf{f}'_u u' + \mathbf{f}'_v v' \\ \boldsymbol{\psi}'' &= \mathbf{f}''_{uu} u'^2 + \mathbf{f}''_{uv} u' v' + \mathbf{f}'_u u'' + \mathbf{f}''_{vu} u' v' + \mathbf{f}''_{vv} v'^2 + \mathbf{f}'_v v''\end{aligned}$$

Хотим избавиться от слагаемых  $\mathbf{f}'_u u''$  и  $\mathbf{f}'_v v''$ , для этого умножим  $\boldsymbol{\psi}''$  на вектор нормали  $\mathbf{n}$ , и т.к.  $\mathbf{f}'_u \perp \mathbf{n}, \mathbf{f}'_v \perp \mathbf{n}$ , получим

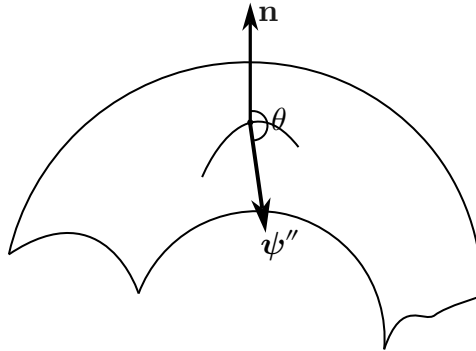
$$\boldsymbol{\psi}'' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}''_{uu} \mathbf{n} u'^2 + 2\mathbf{f}''_{uv} \mathbf{n} u' v' + \mathbf{f}''_{vv} \mathbf{n} v'^2$$

Обозначим

$$\mathbf{f}''_{uu} \mathbf{n} = L(u, v) \quad \mathbf{f}''_{uv} \mathbf{n} = M(u, v) \quad \mathbf{f}''_{vv} \mathbf{n} = N(u, v)$$

При этом  $\boldsymbol{\psi}'' \cdot \mathbf{n} = k \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол и  $|\mathbf{n}| = 1$ .





Отсюда получаем:

$$k \cos \theta = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$

**Определение 11.1** (Вторая квадратичная форма).  $L, M, N$  — коэффициенты  $\mathbb{II}$  квадратичной формы поверхности, где

$$L(u, v) := \mathbf{f}_{uu}'' \mathbf{n} \quad M(u, v) := \mathbf{f}_{uv}'' \mathbf{n} \quad N(u, v) := \mathbf{f}_{vv}'' \mathbf{n}$$

и

$$\mathbb{II}(u', v') := Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$

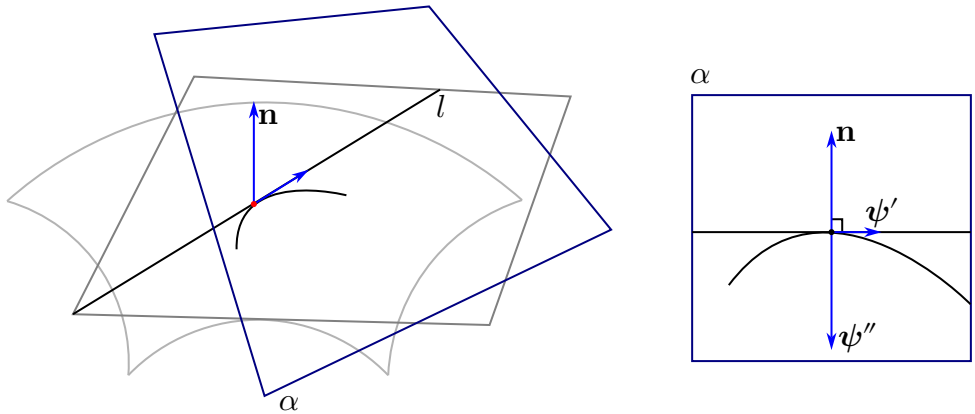
**Теорема 11.1.** Если у кривых совпадает угол  $\theta$  и  $u', v'$  в данной точке во внутренних координатах, тогда у них совпадает кривизна.

**Теорема 11.2.** Если  $\cos \theta = \pm 1$ , то кривизна такой кривой зависит только от касательного вектора  $(u', v')$ .

Существует ли ситуация, когда  $\cos \theta = \pm 1$ ?

Пусть есть поверхность и точка на ней, для которой построены вектор нормали  $\mathbf{n}$  и касательная плоскость. Проведем направление  $l$  в касательной плоскости. Хотим провести кривую на поверхности с касательным вектором в этом направлении. Кривую рассматриваем в натуральной параметризации, т.ч. касательный вектор будет единичным. И все еще хотим  $\cos \theta = \pm 1$ , можем ли мы провести такую прямую? Да, можем. Для этого через  $l$  и  $\mathbf{n}$  строим плоскость  $\alpha$ , она единственна.  $\alpha$  пересекает поверхность по какой-то кривой, эта кривая плоская, значит ее вектор нормали лежит в плоскости. У этой кривой есть касательный вектор  $\psi'$  и есть вектор  $\psi''$ , поскольку  $\psi'$  единичный,

то  $\psi' \perp \psi''$  всегда. И раз вся эта конструкция лежит в плоскости  $\alpha$ , то получается, что  $\cos \theta = \pm 1$ .



**Определение 11.2** (Нормальная кривизна).  $l$  — направление в касательной плоскости поверхности.  $k_n(l)$  — кривизна, построенной кривой с  $\cos \theta = \pm 1$ . Такая  $k_n(l)$  называется нормальной кривизной поверхности в направлении  $l$ .

**Теорема 11.3** (Мёнье). Нормальная кривизна  $k_n(l)$  не зависит от кривой.

$\psi''$  можно разложить на 2 компоненты

$$\psi'' = \psi''_n + \psi''_g$$

где  $\psi''_n$  — проекция на вектор нормали, а  $\psi''_g$  — проекция на касательную плоскость. В таком случае  $\psi''_n = k_n(l)$ . Кроме того  $k_g(l)$  — геодезическая кривизна кривой,

$$\begin{cases} k_1 := k_n \text{ min} \\ k_2 := k_n \text{ max} \end{cases}$$

главные кривизны поверхности в точке, а

$$\begin{cases} l_{\text{min}} \\ l_{\text{max}} \end{cases}$$

главные направления соответственно.

**Определение 11.3** (Гауссова кривизна).

$$K := k_1 k_2$$

**Определение 11.4** (Средняя кривизна).

$$H := \frac{k_1 + k_2}{2}$$

**Теорема 11.4** (Egregium, Гаусс).  $K$  зависит только от  $E, F, G$  и их производных.

[Здесь воспроизведение магии вживую, посмотрите сами]

До этого все рассуждения были в натуральной параметризации, теперь перейдем к любой.

Пусть  $\varphi(t)$  — любая параметризация, а  $\psi(s)$  — натуральная, тогда

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

Тогда  $k \cos \theta = \psi'' \mathbf{n}$ .  $\psi(s)$  соответствует внутренним координатам  $\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)$ . А  $\varphi(t)$  соответствует  $u(t), v(t)$ . В таком случае

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(s) &= \frac{u'(t)}{|\varphi'(t)|} & \tilde{v}'(s) &= \frac{v'(t)}{|\varphi'(t)|} \\ k \cos \theta &= L\tilde{u}'^2 + 2M\tilde{u}'\tilde{v}' + N\tilde{v}'^2 = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{|\varphi'(t)|^2} = \\ &= \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = \frac{\mathbb{II}(u', v')}{\mathbb{I}(u', v')} \end{aligned}$$

**Теорема 11.5.** В произвольной параметризации

$$k_n(u', v') = k \cos \theta = \frac{\mathbb{II}(u', v')}{\mathbb{I}(u', v')}$$

---

## Глава 12

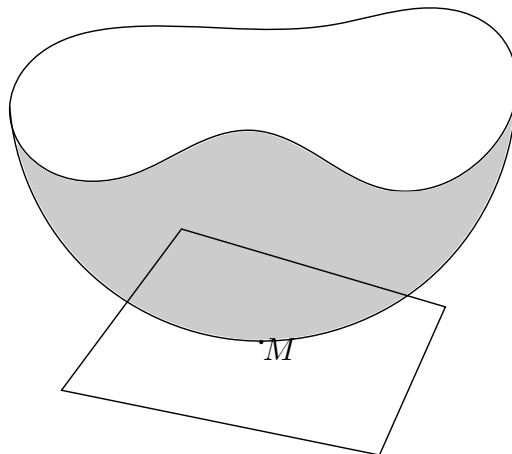
# Соприкасающийся параболоид

---

Сейчас идея такая: хотим заменить поверхность на параболоид, так чтобы в данной конкретной точке  $I, II$  квадратичные формы и все, что с ними связано не изменились. Попробуем её реализовать.

Пусть у нас есть поверхность и точка  $M$  на ней. Введем координаты:

- точка  $M = (0, 0, 0)$
- $T_M = OXY$  — касательная плоскость к точке  $M$  поверхности это  $OXY$
- $\mathbf{n}_M = (0, 0, 1)$



Тогда можем параметризовать поверхность таким образом  $z = \mathbf{f}(x, y)$ , по крайней мере в окрестности точки  $M$ .

Рассмотрим некоторое приближение этой поверхности, для этого применим формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{f}(x, y) \\ &= \mathbf{f}(x_0, y_0) + \mathbf{f}'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathbf{f}'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{\mathbf{f}''_{xx}(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{2\mathbf{f}''_{xy}(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{\mathbf{f}''_{yy}(x_0, y_0)}{2!}(y - y_0)^2 \\ &\quad + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned}$$

Т.к.  $M = (0, 0, 0)$ , то  $\mathbf{f}(x_0, y_0) = 0$ . Из того, что  $T_M = OXY$ , следует, что  $\mathbf{f}'_x(0, 0) = \mathbf{f}'_y(0, 0) = 0$ , тогда формула Тейлора приобретает вид:

$$z = \frac{\mathbf{f}''_{xx}(0, 0)}{2}x^2 + \mathbf{f}''_{xy}xy + \frac{\mathbf{f}''_{yy}(0, 0)}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Тогда в окрестности точки  $M$  это в точности уравнение параболоида, т.к. остаток бесконечно мал.

**Определение 12.1** (Соприкасающийся параболоид). Этот параболоид называется соприкасающимся параболоидом. Повернем  $OXY$ , так чтобы слагаемое при  $xy$  исчезло, получим:

$$z = Ax^2 + Cy^2$$

Считаем, что

$$\mathbf{f}''_{xx}(0, 0) = 2A \quad \mathbf{f}''_{yy}(0, 0) = 2C \quad \mathbf{f}''_{xy}(0, 0) = 0$$

Рассмотрим  $\mathbf{f}_1(x, y) = Ax^2 + Cy^2$

07.11.22

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right|_{(0,0)} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} \right|_{(0,0)} \\ \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} \end{aligned}$$

и т.д., таким образом приходим к теореме:

**Теорема 12.1.** I и II квадратичные формы у поверхности и соприкасающегося параболоида в данной точке одинаковы.

Теорема очевидна, рассмотрим векторную форму поверхности  $z = \mathbf{f}(x, y): \mathbf{r}(x, y, \mathbf{f}(x, y))$ .

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left( 1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \Big|_{(0,0)} \right) = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

$$L = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} \mathbf{n} = (0, 0, 2A) \cdot (0, 0, 1) = 2A$$

$$M = (0, 0, \mathbf{f}''_{xy}|_{(0,0)}) \mathbf{n} = 0$$

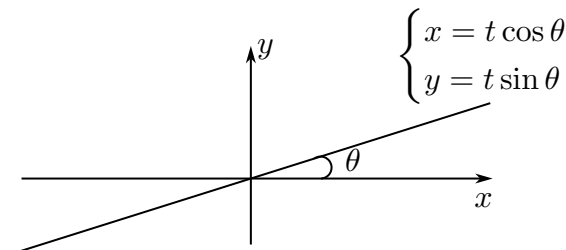
$$N = 2C$$

У  $\mathbf{f}_1$  коэффициенты те же самые, т.к. это многочлен Тейлора. Но это только в одной конкретной точке, даже не в окрестности.

**Следствие 12.1.1.**  $k_n, k_1, k_2, K, H$  одинаковы у поверхности и соприкасающегося параболоида.

Когда нам нужно что-то сосчитать попробуем заменить поверхность на соприкасающийся параболоид.

**Теорема 12.2 (Эйлера).**

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$


$k_1, k_2$  — нормальные кривизны, в направлениях  $OX$  и  $OY$  в выбранной системе координат.

Посмотрим на нормальную кривизну в направлении  $\theta$ :

$$k_n(\theta) = \frac{\text{II}(\cos \theta, \sin \theta)}{\text{I}(\cos \theta, \sin \theta)} = \frac{2A \cos^2 \theta + 2C \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

в нашем определении

$$\begin{aligned} \theta = 0 & & 2A = k_1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & & 2C = k_2 \end{aligned}$$

Докажем, что  $k_1, k_2$  — главные кривизны. Для этого исследуем  $k_n(\theta)$  на минимум и максимум:

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2(1 - \cos^2 \theta) = (k_1 - k_2) \cos^2 \theta + k_2.$$

- Если  $k_1 \geq k_2$ 
  - минимум при  $\cos^2 \theta = 0$  и  $k_n = k_2$
  - максимум при  $\cos^2 \theta = 1$  и  $k_n = k_1$
- Если  $k_1 \leq k_2$ , то минимум и максимум меняются местами

**Следствие 12.2.1.** Главные направления перпендикулярны.

**Следствие 12.2.2.** Направления  $\theta$  и  $\pi - \theta$  имеют одинаковые нормальные кривизны.

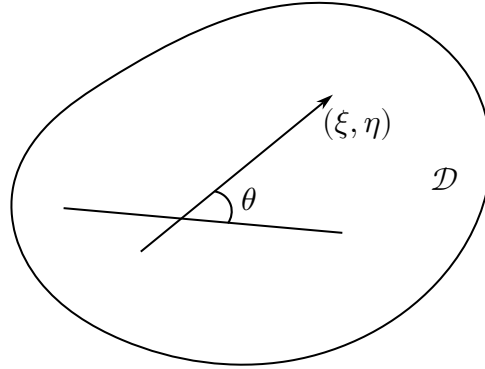
**Замечание.**  $K = 4AC$

Каким может быть параболоид  $z = Ax^2 + Cy^2$ ?

1. Если  $A, C$  — одного знака, то параболоид эллиптический  $\Leftrightarrow K > 0$ , такая точка называется эллиптической
  - Если  $A = C$ , то это параболоид вращения (в любом направлении одинаковые кривизны), такая точка — точка округления
2. Если  $A, C$  — разных знаков, то параболоид гиперболический  $\Leftrightarrow K < 0$  и эта точка называется гиперболической
3. Если  $A = 0$  или  $C = 0 \Leftrightarrow K = 0$ , то параболоид является параболическим цилиндром, и такая точка называется параболической
  - если  $A = C = 0$ , параболоид является плоскостью, и точка называется точкой уплощения

## 12.1. Вычисление главных направлений

Выберем направление  $(\xi, \eta)$  в области  $\mathcal{D}$ :



Введем замену  $x = \xi/\eta$

$$k_n(\xi, \eta) = \frac{\text{II}(\xi, \eta)}{\text{I}(\xi, \eta)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$

Хотим вычислить главные направления, т.е. понять при каких  $x$ ,  $\xi$  и  $\eta$  задают главные направления, т.к.  $x = \text{tg } \theta$ , где  $\theta$  — угол с произвольным направлением. Для этого найдем минимум и максимум:

$$\begin{aligned} (k_n(x))' &= \\ &= \frac{(2Lx + 2M)(Ex^2 + 2Fx + G) - (2Ex + 2F)(Lx^2 + 2Mx + N)}{(Ex^2 + 2Fx + G)^2} = 0 \\ & \quad Ex^2 + 2Fx + G > 0 \text{ т.к. } \frac{D}{4} = F^2 - EG < 0 \\ & \quad \left( \sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \right) \end{aligned}$$

в таком случае приравняем к нулю числитель

$$\begin{aligned} (Lx + M)(Ex^2 + 2Fx + G) - (Ex + F)(Lx^2 + 2Mx + N) &= 0 \\ 2LFx^2 + LGx + MEx^2 + 2MFx + MG - & \\ - 2MEx^2 - NEx - FLx^2 - 2FMx - FN &= 0 \\ (FL - ME)x^2 + (LG - NE)x + (MG - FN) &= 0 \end{aligned}$$

решать данное уравнение неудобно, сделаем обратную замену и домножим на  $\eta^2$

$$(FL - ME)\xi^2 + (LG - NE)\xi\eta + (MG - FN)\eta^2 = 0$$



и это равенство можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & -\xi\eta & \eta^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0$$

## 12.2. Вычисление главных кривизн

В данном разделе везде используется  $k$  вместо  $k_n$ .

$$k = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$

запишем в другом виде

$$Lx^2 + 2Mx + N = k(Ex^2 + 2Fx + G)$$

если нам дано  $k$ , то это просто квадратное уравнение

$$(L - kE)x^2 + 2(M - kF)x + (N - kG) = 0$$

Если  $k$  не главная кривизна, то у этого уравнения есть 2 решения,

Если  $k$  главная кривизна — 1 решение,

Если  $k$  не кривизна — 0 решений, такое может быть, т.к. нормальная кривизна может быть заключена только между главными кривизнами.

Т.к. мы ищем главные кривизны, то необходимое для нас условие:  $D/4 = 0$ , то есть

$$\begin{aligned} (M - kF)^2 - (L - kE)(N - kG) &= 0 \\ k^2(F^2 - EG) - k(2MF - LG - EN) + (M^2 - LN) &= 0 \end{aligned}$$

$k_1, k_2$  — корни соответствующего уравнения

$$\begin{aligned} K = k_1 k_2 &= \frac{M^2 - LN}{F^2 - EG} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H &= \frac{2MF - LG - EN}{2(F^2 - EG)} \end{aligned}$$

## 12.3. Блистательная теорема Гаусса

**Лемма 12.3.**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$  — векторы.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ad} & \mathbf{ae} & \mathbf{af} \\ \mathbf{bd} & \mathbf{be} & \mathbf{bf} \\ \mathbf{cd} & \mathbf{ce} & \mathbf{cf} \end{vmatrix}$$

**Доказательство.**  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и так далее

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{ad} & \mathbf{ae} & \mathbf{af} \\ \mathbf{bd} & \mathbf{be} & \mathbf{bf} \\ \mathbf{cd} & \mathbf{ce} & \mathbf{cf} \end{vmatrix}$$

■

**Теорема 12.4.**

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

**Доказательство.** Хотим выразить  $LN - M^2$  через  $E, F, G$  и их производные. Вспомним:

$$L(u, v) := \mathbf{f}_{uu}'' \mathbf{n} \quad M(u, v) := \mathbf{f}_{uv}'' \mathbf{n} \quad N(u, v) := \mathbf{f}_{vv}'' \mathbf{n}$$

Что же такое  $\mathbf{n}$ ?

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v}{|\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v|} = \frac{\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

тогда

$$L = \frac{(\mathbf{f}'_u \times \mathbf{f}'_v) \mathbf{f}_{uu}''}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\mathbf{f}_{uu}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \frac{(\mathbf{f}_{uv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \frac{(\mathbf{f}_{vv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$LN - M^2 = \frac{(\mathbf{f}_{uu}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}_{vv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v) - (\mathbf{f}_{uv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}_{uv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)}{EG - F^2}$$

Теперь выразим

$$(\mathbf{f}_{uu}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}_{vv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v) - (\mathbf{f}_{uv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}_{uv}'', \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)$$

через коэффициенты I формы. Применим лемму 12.3, тогда

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{f}''_{uu}, \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}''_{vv}, \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v) - (\mathbf{f}''_{uv}, \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v)(\mathbf{f}''_{uv}, \mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v) = \\
 & = \begin{vmatrix} \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} & \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}'_v \\ \mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{vv} & \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'_v \\ \mathbf{f}'_v\mathbf{f}''_{vv} & \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv} & \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}'_v \\ \mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{uv} & \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'_v \\ \mathbf{f}'_v\mathbf{f}''_{uv} & \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'_u & \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'_v \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} & \frac{1}{2}E'_u & F'_u - \frac{1}{2}E'_v \\ F'_v - \frac{1}{2}G'_u & E & F \\ \frac{1}{2}G'_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv} & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u \\ \frac{1}{2}E'_v & E & F \\ \frac{1}{2}G'_u & F & G \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из формул:

$$\begin{aligned}
 E'_u &= (\mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_u)'_u = 2\mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{uu} & F'_u &= (\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v)'_u = \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}'_v + \mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{vu} \\
 E'_v &= (\mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_u)'_v = 2\mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{uv} & F'_v &= \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}'_v + \mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{vv} \\
 G'_u &= 2\mathbf{f}'_v\mathbf{f}''_{uv} & \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}'_v &= F'_u - \frac{1}{2}E'_v \\
 G'_v &= 2\mathbf{f}'_v\mathbf{f}''_{vv} & \mathbf{f}'_u\mathbf{f}''_{vv} &= F'_v - \frac{1}{2}G'_u
 \end{aligned}$$

Отдельно взятый, каждый определитель не выражается через коэффициенты I формы. Разложим определители по первой строке:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2}E'_u \begin{vmatrix} F'_v - \frac{1}{2}G'_u & F \\ \frac{1}{2}G'_u & G \end{vmatrix} + \left(F'_u - \frac{1}{2}E'_v\right) \begin{vmatrix} F'_v - \frac{1}{2}G'_u & E \\ \frac{1}{2}G'_v & F \end{vmatrix} - \\
 & - \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \frac{1}{2}E'_v \begin{vmatrix} F'_v - \frac{1}{2}G'_u & F \\ \frac{1}{2}G'_v & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2}G'_u \begin{vmatrix} F'_v - \frac{1}{2}G'_u & E \\ \frac{1}{2}G'_v & F \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Нас интересуют только  $\mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} - \mathbf{f}''_{uv}^2$ , т.к. все остальное уже зависит только от I квадратичной формы. Возьмем вторые производные  $E, F, G$ :

$$\begin{aligned}
 E''_{vv} &= 2(\mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv} + \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'''_{uvv}) \\
 G''_{uu} &= 2(\mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv} + \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'''_{uuv}) \\
 F''_{uv} &= \mathbf{f}'''_{uuv}\mathbf{f}'_v + \mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} + \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'''_{uvv} + \mathbf{f}''_{uv}\mathbf{f}''_{uv}
 \end{aligned}$$

Итого

$$\mathbf{f}''_{uu}\mathbf{f}''_{vv} - \mathbf{f}''_{uv}^2 = F''_{uv} - \mathbf{f}'_v\mathbf{f}'''_{uuv} - \mathbf{f}'_u\mathbf{f}'''_{uvv} - 2\mathbf{f}''_{uv}^2 = F''_{uv} - \frac{1}{2}G''_{uu} - \frac{1}{2}E''_{vv}$$

■

---

## Глава 13

# Деривационные формулы

---

Для кривых были формулы Френе в базисе  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ . Для поверхностей тоже есть базис:  $(\mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v, \mathbf{n})$ , однако векторы  $\mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v$  не единичные, и более того могут быть не ортогональны. Попробуем сделать аналог формул Френе продифференцировав базисные векторы.

**Определение 13.1** (Деривационные формулы). Основная тройка деривационных формул

$$\begin{aligned}\mathbf{f}''_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{f}'_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}'_v + L \mathbf{n} \\ \mathbf{f}''_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{f}'_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{f}'_v + M \mathbf{n} \\ \mathbf{f}''_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{f}'_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}'_v + N \mathbf{n}\end{aligned}$$

есть еще отдельные формулы, которые тоже можно называть деривационными

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'_u &= \alpha \mathbf{f}'_u + \beta \mathbf{f}'_v \\ \mathbf{n}'_v &= \gamma \mathbf{f}'_u + \delta \mathbf{f}'_v\end{aligned}$$

**Определение 13.2** (Символы Кристоффеля).  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля.

Выясним, что такое  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Для начала скалярно умножим каж-

дое равенство на  $\mathbf{f}'_u, \mathbf{f}'_v$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_u \mathbf{f}'_u &= \alpha E + \beta F = -L & \mathbf{n}'_v \mathbf{f}'_u &= \gamma E + \delta F = -M \\ \mathbf{n}'_u \mathbf{f}'_v &= \alpha F + \beta G = -M & \mathbf{n}'_v \mathbf{f}'_v &= \gamma F + \delta G = -N \end{aligned}$$

где последние равенства следуют из

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{f}'_u, \mathbf{n})'_u = \mathbf{f}''_{uu} \mathbf{n} + \mathbf{f}'_u \mathbf{n}'_u = L + \mathbf{f}'_u \mathbf{n}'_u \\ 0 &= (\mathbf{f}'_u, \mathbf{n})'_v = M + \mathbf{f}'_u \mathbf{n}'_v \end{aligned}$$

Отсюда  $\alpha, \beta$  находятся

$$\begin{cases} \alpha E + \beta F = -L \\ \alpha F + \beta G = -M \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{-LG + MF}{EG - F^2} \quad \beta = \frac{-EM + LF}{EG - F^2}$$

$$\gamma = \frac{-MG + NF}{EG - F^2} \quad \delta = \frac{-EN + MF}{EG - F^2}$$

**Теорема 13.1.**  $\Gamma^k_{ij}$  относятся к внутренней геометрии поверхности.

**Доказательство.** Возьмем деривационные формулы и помножим их на базисные векторы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E'_u &= \mathbf{f}''_{uu} \mathbf{f}'_u = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \\ F'_u - \frac{1}{2} E'_v &= \mathbf{f}''_{uv} \mathbf{f}'_v = \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G \end{aligned}$$

получили систему

$$\begin{cases} E\Gamma^1_{11} + F\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} E'_u \\ F\Gamma^1_{11} + G\Gamma^2_{11} = F'_u - \frac{1}{2} E'_v \end{cases}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E'_u & F \\ F'_u - \frac{1}{2} E'_v & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} \quad \Gamma^2_{11} = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2} E'_u \\ F & F'_u - \frac{1}{2} E'_v \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

$\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}$  вычисляются аналогично.

Верно ли, что  $\Gamma_{12}^1$  и  $\Gamma_{12}^2$  вычисляются так же?

$$\mathbf{f}_{uv}'' \mathbf{f}'_u = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E'_v$$

$$\mathbf{f}_{uv}'' \mathbf{f}'_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G'_v$$

Ответ: да. ■

**Теорема 13.2.**

$$\begin{aligned} L &= -\mathbf{r}'_u \mathbf{n}'_u \\ M &= -\mathbf{r}'_u \mathbf{n}'_v = -\mathbf{r}'_v \mathbf{n}'_u \\ N &= -\mathbf{r}'_v \mathbf{n}'_v \end{aligned}$$

**Доказательство.**  $L + \mathbf{r}'_u \mathbf{n}'_u = \mathbf{r}''_{uu} \mathbf{n} + \mathbf{r}'_u \mathbf{n}'_u = (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{n})'_u = 0$ , т.к.  $\mathbf{r}'_u \perp \mathbf{n}$ . ■

**Теорема 13.3.**

$$|\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v| = \frac{|LN - M^2|}{\sqrt{EG - F^2}}$$

**Доказательство.** Вспомним:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_u &= \alpha \mathbf{r}'_u + \beta \mathbf{r}'_v \\ \mathbf{n}'_v &= \gamma \mathbf{r}'_u + \delta \mathbf{r}'_v \end{aligned}$$

тогда

$$\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v = (\alpha \mathbf{r}'_u + \beta \mathbf{r}'_v) \times (\gamma \mathbf{r}'_u + \delta \mathbf{r}'_v) = (\alpha\delta - \beta\gamma) \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$$

минус появляется, т.к.  $\mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u = -\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$

$$|\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v| = |\alpha\delta - \beta\gamma| \sqrt{EG - F^2} =$$

коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  посчитаны выше

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|(FM - GL)(FM - EN) - (FL - EM)(FN - GM)|}{(EG - F^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{|F^2M^2 - EFMN - FGLM + EGLN - F^2LN + FGLM + EFMN - EGM^2|}{(EG - F^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{|(EG - F^2)(LN - M^2)|}{(EG - F^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

■

**Следствие 13.3.1.**

$$\frac{|\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v|}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

## 13.1. Уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци

Вспомним:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}''_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}'_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}'_v + L\mathbf{n} \\
 \mathbf{r}''_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}'_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}'_v + M\mathbf{n} \\
 \mathbf{r}''_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}'_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}'_v + N\mathbf{n}
 \end{aligned}$$

тогда

$$\mathbf{r}'''_{uvv} = (\Gamma_{11}^1)'_v \mathbf{r}'_u + \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}''_{uv} + (\Gamma_{11}^2)'_v \mathbf{r}'_v + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}''_{vv} + L'_v \mathbf{n} + L\mathbf{n}'_v = \mathbf{r}'''_{uvv}$$

умножим на  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}'''_{uvv} \mathbf{n} &= \Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L'_v = \mathbf{r}'''_{uvv} \mathbf{n} = \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M'_u \\
 M'_u - L'_v &= \Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N - \Gamma_{12}^1 L - \Gamma_{12}^2 M
 \end{aligned}$$

аналогично

$$\Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N'_u = \mathbf{r}'''_{uvv} \mathbf{n} = \Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M'_v$$

**Теорема 13.4** (Петерсона). Если даны функции  $E, F, G, L, M, N$ , такие, что  $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0, LN - M^2$  равно результату теоремы 12.4 и выполнены равенства выше, то существует единственная с точностью до положения в пространстве поверхность с такими коэффициентами.

**Доказательство.** Не будет. ■



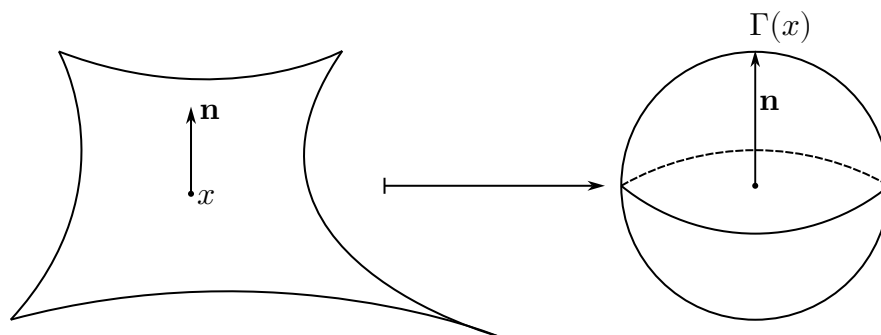
---

## Глава 14

# Сферическое отображение

---

**Определение 14.1** (Сферическое отображение).  $\Gamma : S \rightarrow S^2$ ,  $S$  — поверхность,  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .



**Пример 14.1.** • Для окружности оно тождественно

- Для плоскости это отображение в точку
- Для цилиндра — отображение в экватор сферы

**Теорема 14.1** (Родрига). Формулы

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'_u &= -k_1 \mathbf{r}'_u \\ \mathbf{n}'_v &= -k_2 \mathbf{r}'_v\end{aligned}$$

верны, если  $u, v$  — главные направления и  $k_1, k_2$  — главные кривизны.

**Определение 14.2** (Основной оператор). Основной оператор в точке — это дифференциал сферического отображения.

$$R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ — линейный оператор}$$

Если  $l$  — направление, считаем, что  $|l| = 1$ , тогда  $R(l) := \mathbf{n}'_l \perp \mathbf{n}$ .

Теорема Родрига  $\Leftrightarrow -k_1, -k_2$  — собственные числа  $R$ ,  $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$  — собственные векторы  $R$ , если  $u, v$  — главные направления.

**Доказательство.** Вместо поверхности рассмотрим соприкасающийся параболоид:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = k_1 u^2 + k_2 v^2 + o(u^2 + v^2) \end{cases}$$

В таком случае  $2k_1, 2k_2$  — главные кривизны. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{n}|_{(0,0,0)} &= (0, 0, 1) \\ \mathbf{r}'_u &= (1, 0, 2k_1 u + o(u)) \\ \mathbf{r}'_v &= (0, 1, 2k_2 v + o(v))\end{aligned}$$

для удобства откинем  $o$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = \frac{(-2k_1 u; -2k_2 v, 1)}{\sqrt{4k_1^2 u^2 + 4k_2^2 v^2 + 1}}$$

обозначим  $t := 4k_1^2 u^2 + 4k_2^2 v^2 + 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'_u|_{\substack{u=0 \\ v=0}} &= \left( \frac{\frac{-2k_1}{\sqrt{t}} - 2k_1 u (\sqrt{t})'_u}{t}; -2k_2 v \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)'_u; \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)'_u \right) = \\ &= (-2k_1, 0, 0) = -2k_1 \mathbf{r}'_u|_{\substack{u=0 \\ v=0}}\end{aligned}$$

$\mathbf{n}'_v$  аналогично. ■

Что делает сферическое отображение с площадью? Глобально не очень понятно, но есть геометрический смысл локально, т.е. в предельном случае, в окрестности одной точки.

**Теорема 14.2.** Пусть  $S(X)$  — отображение площади. Тогда

$$\lim_{\text{diam } \mathcal{D} \rightarrow 0} \frac{S(\Gamma(\mathcal{D}))}{S(\mathcal{D})} = K$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{D}'$  — прообраз  $\mathcal{D}$ . Вспомним, что

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}'} \sqrt{EG - F^2} dudv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|_M \cdot S(\mathcal{D}') \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из теоремы о среднем. В  $\Gamma(\mathcal{D})$  роль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  выполняет вектор  $\mathbf{n}$ , тогда

$$S(\Gamma(\mathcal{D})) = \iint_{\mathcal{D}'} |\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v| dudv = |\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v|_{\tilde{M}} \cdot S(\mathcal{D}')$$

$$\lim_{\text{diam } \mathcal{D} \rightarrow 0} \frac{S(\Gamma(\mathcal{D}))}{S(\mathcal{D})} = \lim_{\text{diam } \mathcal{D} \rightarrow 0} \frac{S(\mathcal{D}') |\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v|_{\tilde{M}}}{S(\mathcal{D}') |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|_M} = \frac{|\mathbf{n}'_u \times \mathbf{n}'_v|_{\tilde{M}}}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|_M} = K$$

предел можно снять в силу того, что при  $\text{diam } \mathcal{D} \rightarrow 0$ , точки  $M$  и  $\tilde{M}$  стремятся друг к другу и мы можем считать их одной точкой. ■

---

## Глава 15

# Геодезическая кривизна

---

**Определение 15.1** (Вектор кривизны). Есть кривая и её кривизна  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_1$ , где  $\mathbf{n}_1$  — вектор главной нормали к кривой.

**Определение 15.2** (Разложение вектора кривизны).

$$k_g = \text{Пр}_{TM_{x_0}} \mathbf{k}$$

проекция  $\mathbf{k}$  на касательную плоскость к точке  $x_0$ .

$$k_n = \text{Пр}_{\mathbf{n}_2} \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{n}_2$  — нормаль к поверхности. Тогда

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

(из теоремы Пифагора)

**Теорема 15.1.**  $k_g$  зависит только от  $E, F, G$  и их производных.

**Доказательство.** Кривая задана внутренней натуральной параметризацией:  $u = u(t), v = v(t)$ . Поверхность задана параметри-

зацией  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Подсчитаем  $\mathbf{k} = \mathbf{f}_{tt}''$  (это равенство следует из натуральности параметризации):

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'_t &= \mathbf{f}'_u u' + \mathbf{f}'_v v' \\ \mathbf{f}''_{tt} &= \mathbf{f}''_{uu} u'^2 + 2\mathbf{f}''_{uv} u'v' + \mathbf{f}''_{vv} v'^2 + \mathbf{f}'_u u'' + \mathbf{f}'_v v''\end{aligned}$$

вспомним деривационные формулы

$$\begin{aligned}\mathbf{f}''_{tt} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{f}'_u u'^2 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}'_v u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 \mathbf{f}'_u u'v' + 2\Gamma_{12}^2 \mathbf{f}'_v u'v' + \\ &+ \Gamma_{22}^1 \mathbf{f}'_u v'^2 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}'_v v'^2 + \mathbf{f}'_u u'' + \mathbf{f}'_v v'' + \mathbf{n}(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)\end{aligned}$$

При таком разложении

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_g &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{f}'_u u'^2 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}'_v u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 \mathbf{f}'_u u'v' + 2\Gamma_{12}^2 \mathbf{f}'_v u'v' + \\ &+ \Gamma_{22}^1 \mathbf{f}'_u v'^2 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}'_v v'^2 + \mathbf{f}'_u u'' + \mathbf{f}'_v v''\end{aligned}$$

Умножим на  $\mathbf{f}'_u$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u &= \Gamma_{11}^1 E u'^2 + \Gamma_{11}^2 F u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 E u'v' + 2\Gamma_{12}^2 F u'v' + \\ &+ \Gamma_{22}^1 E v'^2 + \Gamma_{22}^2 F v'^2 + E u'' + F v''\end{aligned}$$

$\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u$  зависит только от I. Аналогично,  $\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_v$  зависит только от I. Заметим, что если есть вектор на плоскости, его проекции на  $\mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{f}'_v$  зависят только от I, то и сам вектор зависит только от I. Почему?

$$\mathbf{k}_g = A\mathbf{f}'_u + B\mathbf{f}'_v$$

домножим на  $\mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{f}'_v$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u = AE + BF \\ \mathbf{k}_g \mathbf{f}'_v = AF + BG \end{cases}$$

$$A = \frac{\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u G - F \mathbf{k}_g \mathbf{f}'_v}{EG - F^2} \quad B = \frac{\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_v E - F \mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u}{EG - F^2}$$

при этом  $\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_u$  и  $\mathbf{k}_g \mathbf{f}'_v$  зависят только от I. ■

**Теорема 15.2.**

$$k_g = \frac{|(\varphi'', \varphi', \mathbf{n})|}{|\varphi'|^3},$$

где  $\varphi(t) = \mathbf{f}(u(t), v(t))$

**Доказательство.**

$$k = \frac{|\varphi' \times \varphi''|}{|\varphi'|^3}$$

заменяем  $\varphi''$  на  $\varphi''_{\perp}$ , где  $\varphi''_{\perp}$  — проекция  $\varphi''$  на вектор перпендикулярный  $\varphi'$  и лежащий в плоскости  $\langle \varphi', \varphi'' \rangle$

$$\varphi''_{\perp} = \frac{(\varphi'' \times \varphi') \times \varphi'}{|\varphi'|^2}$$

$$|(\varphi'' \times \varphi') \times \varphi'| = |\varphi'' \times \varphi'| |\varphi'| = |\varphi''| |\varphi'|^2 \sin \alpha$$

$$|\varphi''_{\perp}| = |\varphi''| \sin \alpha = |\varphi''| \cos \beta$$

теперь у нас

$$k = \frac{|\varphi' \times \varphi''_{\perp}|}{|\varphi'|^3}$$

$\mathbf{k}$  — вектор кривизны

$$|\mathbf{k}| = \frac{|\varphi' \times \varphi''|}{|\varphi'|^3}$$

направление с точности до знака это  $\varphi' \times (\varphi'' \times \varphi')$

$$\mathbf{k} = \frac{\varphi' \times (\varphi'' \times \varphi')}{|\varphi'| |\varphi'' \times \varphi'|} \cdot \frac{|\varphi' \times \varphi''|}{|\varphi'|^3} = \frac{\varphi' \times (\varphi' \times \varphi'')}{|\varphi'|^4}$$

$$|\mathbf{n}| = 1$$

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{n}| = |\mathbf{k}| |\mathbf{n}| \sin \alpha = |\mathbf{k}| \cos \beta$$

$$|\sin \alpha| = |\cos \beta|$$

$$\text{Пр}_{\alpha} \mathbf{k} = |\mathbf{k} \times \mathbf{n}|$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k} = \frac{\mathbf{n} \times (\varphi' \times (\varphi' \times \varphi''))}{|\varphi'|^4} = \frac{\varphi' (\mathbf{n}; \varphi' \times \varphi'')}{|\varphi'|^4} - (\varphi'' \times \varphi') \frac{(\mathbf{n}, \varphi')}{|\varphi'|^4}$$

$$k_g = |\mathbf{n} \times \mathbf{k}| = \frac{|\varphi'| |(\varphi', \varphi'', \mathbf{n})|}{|\varphi'|^4} = \frac{|(\varphi', \varphi'', \mathbf{n})|}{|\varphi'|^3}$$

■

---

## Глава 16

### Геодезические линии

---

**Теорема 16.1.** Следующие условия равносильны:

1.  $k_g = 0$
2. спрямляющая плоскость кривой в точности касательная плоскость поверхности
3. соприкасающаяся плоскость содержит  $\mathbf{n}$
4.  $k = k_n$  в данном направлении
5.  $k$  — минимальная среди всех кривизн в данном направлении

**Доказательство.** Из равенства

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g$$

следует равносильность (1) и (4).

А из

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

где  $k_n^2$  зависит от поверхности, следует равносильность (1) и (5). Спрямляющая плоскость — плоскость на касательном векторе и векторе бинормали, т.е. плоскость перпендикулярная вектору главной нормали. (2) означает, что вектор главной нормали

к кривой совпадает с вектором нормали к поверхности, а это означает (1). ■

**Определение 16.1** (Геодезическая кривая). Если эти условия выполнены, то кривая называется геодезической. Уравнение геодезической линии:  $(\varphi'', \varphi', \mathbf{n}) = 0$ .

**Теорема 16.2.** В любой точке в любом направлении проходит ровно одна геодезическая линия. (в локальном смысле, т.е. в окрестности точки, насколько она продолжима, мы не знаем)

**Доказательство.** Зададим эту геодезическую координатами  $u = t, v = v(t)$ , тогда  $u' = 1, v' = v'(t), u'' = 0$ .

Обозначим

$$A(v') = \Gamma_{11}^1 \mathbf{f}'_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{f}'_v + 2\Gamma_{12}^1 \mathbf{f}'_u v' + 2\Gamma_{12}^2 \mathbf{f}'_v v' + \Gamma_{22}^1 \mathbf{f}'_u v'^2 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{f}'_v v'^2$$

т.к.  $u' = 1$ .

Теперь уравнение геодезической можно записать в виде:

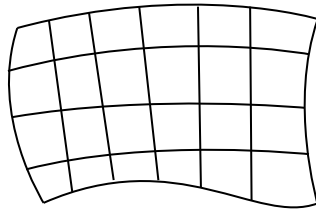
$$\begin{aligned} (A(v') + \mathbf{f}'_v v''; \mathbf{f}'_u + \mathbf{f}'_v v'; \mathbf{n}) &= 0 \\ (A(v'); \mathbf{f}'_u + \mathbf{f}'_v v'; \mathbf{n}) + v'' (\mathbf{f}'_v; \mathbf{f}'_u + \mathbf{f}'_v v'; \mathbf{n}) &= 0 \\ v'' &= - \frac{(A(v'); \mathbf{f}'_u + \mathbf{f}'_v v'; \mathbf{n})}{(\mathbf{f}'_v; \mathbf{f}'_u; \mathbf{n})} \\ (\mathbf{f}'_v; \mathbf{f}'_u, \mathbf{n}) &\neq 0 \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение  $v'' = F(t, v, v')$  имеет решения, если  $F$  непрерывна. Решение единственно, если  $\frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v'}$  существуют, у нас именно так. ■



## 16.1. Полугеодезическая система координат

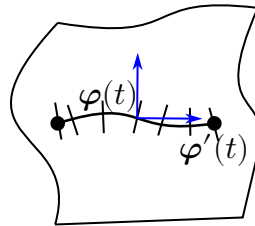
**Определение 16.2** (Полугеодезическая система координат). Система координат называется полугеодезической, если одно семейство координатных линий — геодезические, а второе им перпендикулярно.



В первом семействе все линии в натуральной параметризации. Это означает, что  $E = 1, F = 0$ .

**Теорема 16.3.** Полугеодезическая параметризация существует (в окрестности любой точки).

**Доказательство.** Рассмотрим некоторую кривую на поверхности, заданную координатами  $\varphi(t)$ , где  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



Возьмем каждую точку и выберем направление перпендикулярное  $\varphi'(t)$ . В этом перпендикулярном направлении проведем геодезическую  $\psi_t(s)$  в точке  $\varphi(t)$ , где  $\psi_t(s)$  в натуральной параметризации. Тогда участок поверхности в окрестности какой-то точки этой кривой характеризуется уравнением  $\mathbf{r}(s, t) := \psi_t(s)$ . Это в точности нужная нам параметризация. Почему?

Поймем что такое  $\mathbf{r}'_s$ .  $|\mathbf{r}'_s(s, t)| = 1$ , т.к.  $|(\psi_t)'_s(s)| = 1$  это означает, что  $|\mathbf{r}'_s(s, t)|^2 = E = 1$ .

А почему второе семейство ортогонально? Знаем:  $F(0, t) = 0$  (на линии  $\varphi(t)$  считаем  $s = 0$ ). Хотим доказать, что  $F$  в любой точке окрестности равен 0. Для этого достаточно проверить, что  $F'_s = 0$ .

$$F = \mathbf{r}'_s \mathbf{r}'_t$$

$$F'_s = (\mathbf{r}'_s \mathbf{r}'_t)'_s = \mathbf{r}''_{ss} \mathbf{r}'_t + \mathbf{r}'_s \mathbf{r}''_{st}$$

При этом  $\mathbf{r}''_{ss} \perp \mathbf{r}'_s$ , т.к.  $|\mathbf{r}'_s| = 1$ ;  $\mathbf{r}''_{st} \perp \mathbf{r}'_s$  по той же причине. Почему  $\mathbf{r}''_{ss} \mathbf{r}'_t = 0$ ? Линии геодезические, значит  $(\mathbf{r}'_s; \mathbf{r}''_{ss}, \mathbf{n}) = 0$ .

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}''_{ss} \perp \mathbf{n}$$

$$\mathbf{r}'_s \perp \mathbf{r}''_{ss} \implies \mathbf{n} = \alpha \mathbf{r}'_s + \beta \mathbf{r}''_{ss}$$

вектор нормали лежит в плоскости  $\langle \mathbf{r}'_s, \mathbf{r}''_{ss} \rangle$

$$\mathbf{r}''_{ss} = \frac{1}{\beta}(\mathbf{n} - \alpha \mathbf{r}'_s)$$

$$(\beta \neq 0, \text{ т.к. } \mathbf{n} \nparallel \mathbf{r}'_s)$$

$$\mathbf{n} \parallel \mathbf{r}''_{ss}, \alpha = 0$$

$$\mathbf{r}''_{ss} = \frac{\mathbf{n}}{\beta}$$

подставим это в  $\mathbf{r}''_{ss} \mathbf{r}'_t = 0$

$$\frac{1}{\beta} \mathbf{n} \mathbf{r}'_t = 0$$

■

**Теорема 16.4.** Геодезические линии локально кратчайшие.

**Доказательство.** Пусть у нас есть  $g(s)$  — геодезическая линия (в натуральной параметризации). Пусть эта линия  $t = 0$  в некоторой полугеодезической параметризации. Допустим, что есть кривая  $s = 1, t = t(\tau)$ , длина которой короче, чем длина геодезической.

$$l = \int_a^b \sqrt{E s'^2 + 2F s' t' + G t'^2} d\tau$$

но у нас  $E = 1, F = 0$

$$l = \int_a^b \sqrt{s'^2 + Gt'^2} d\tau = \int_0^{s_0} \sqrt{1 + Gt'^2} ds$$

В то же время длина геодезической

$$\int_0^{s_0} 1 ds$$

Получили противоречие. ■