Математическая логика

Курс Косовской Т.М.

Весна 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Пропозициональные формулы

14.02.23

Определение 1.1 (Высказывание)**.** Высказывание — это утверждение, про которое можно сказать, истинное оно или ложное.

Определение 1.2 (Пропозициональные переменные)**.** Переменные для высказывания — пропозициональные переменные.

Всего есть 2 константы: $Const$={истина, ложь}. Для них есть много разных обозначений:

$true$; t; T; $\top$; 1; 0 — истина,

$false$; f; F; $\bot$; 0; 1 — ложь.

Здесь и далее запись $*$ | ... будет означать, что $*$ — обозначение, которое будет использоваться в курсе, а всё, что после | — альтернативные обозначения.

Дальше напишем логические связки:

1. Конъюнкция & | $\wedge$; $\cdot$; and — логическое «и»
2. Дизъюнкция $\vee$ | +; or — логическое «или»
3. Импликация $\to$ | $\supset$; $\Rightarrow$ — «если ... , то»
4. Эквивалентность $\leftrightarrow$ | $\equiv$; $\Leftrightarrow$; $\sim$

5. Операции неэквивалентность ($\not\Leftrightarrow$), исключающее «или» ($\dot\vee$), сложение по модулю 2 ($+_2$) имеют одинаковые таблицы истинности. Мы будем обозначать эту операцию символом $\oplus$

6. Символ Шеффера $|$. $x \mid y = \neg(x \,\&\, y)$

7. Стрелка Пирса $\downarrow$. $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$

8. Отрицание $\neg \mid\ \sim$; $\overline{x}$

Определение 1.3 (Пропозициональные формулы).

1. Пропозициональные переменные и $Const$ — пропозициональные формулы.

2. Если A — пропозициональная формула, то и $\neg A$ — пропозициональная формула.

3. Если A, B — пропозициональные формулы, $*$ — любая бинарная связка, то $(A * B)$ — пропозициональная формула.

Приоритеты идут в таком порядке:

1. $\neg$

2. &

3. Всё остальное

Замечание. Важно заметить, что в данном курсе формула $x \& y \to y \vee z$ равносильна формуле $((x \,\&\, y \to y) \vee z)$.

Определение 1.4 (Равносильность формул). Две формулы равносильны, если их значения совпадают на любом наборе значений, входящих в них пропозициональных переменных.

Основные равносильности:

1. $A \,\&\, B \Leftrightarrow B \,\&\, A$ коммутативность конъюнкции

2. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ коммутативность дизъюнкции

3. $A \,\&\, A \Leftrightarrow A$ идемпотентность конъюнкции

4. $A \vee A \Leftrightarrow A$ идемпотентность дизъюнкции

5. $A \mathbin{\&} (B \vee C) \Leftrightarrow A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C$ дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

6. $A \vee B \mathbin{\&} C \Leftrightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$ дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

7. $A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C$ ассоциативность конъюнкции

8. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ ассоциативность дизъюнкции

9. $\neg\neg x \Leftrightarrow x$ правило двойного отрицания

10. $\neg(A \mathbin{\&} B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ правило де Моргана

11. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \mathbin{\&} \neg B$ правило де Моргана

12. $A \vee A \mathbin{\&} B \Leftrightarrow A$ правило поглощения

13. $A \mathbin{\&} (A \vee B) \Leftrightarrow A$ правило поглощения

14. $A \mathbin{\&} B \vee \neg A \mathbin{\&} C \Leftrightarrow A \mathbin{\&} B \vee \neg A \mathbin{\&} C \vee B \mathbin{\&} C$ правило склеивания

15. $(A \vee B) \mathbin{\&} (\neg A \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (\neg A \vee C) \mathbin{\&} (B \vee C)$ правило склеивания

16. $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

17. $$\begin{aligned} A \Leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \to B) \mathbin{\&} (B \to A) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \mathbin{\&} (\neg B \vee A) \\ &\Leftrightarrow A \mathbin{\&} B \vee \neg A \mathbin{\&} \neg B \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} A \oplus B &\Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow B) \\ &\Leftrightarrow \neg A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} \neg B \\ &\Leftrightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

19. $A \mid B \Leftrightarrow \neg(A \mathbin{\&} B)$

20. $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$

Определение 1.5 (Тавтология)**.** Формула называется тавтологией, если она истинна на любых наборах пропозициональных переменных.

Определение 1.6 (Противоречие)**.** Формула называется противоречием, если она ложна на любых наборах пропозициональных переменных.

Основные тавтологии:

1. $x \vee \neg x$
2. $x \to x$ или $x \leftrightarrow x$

Основные противоречия:

1. $x \mathbin{\&} \neg x$
2. $x \oplus x$

Глава 2

Секвенциальное исчисление высказываний (СИВ)

21.02.23

2.1. Исчисления

Определение 2.1 (Исчисление). Для того, чтобы задать исчисление, достаточно задать:

1. Алфавит (конечный набор символов)
2. Формулы исчисления (подмножество выражений из символов алфавита)
3. Правила вывода (отношения между формулами $R(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ т.ч. если «верен» набор первых n формул, то «верна» и последняя)
4. Аксиомы (множество формул, которые «верны» в этом исчислении)

Заметьте, что слово «верно» здесь взято в кавычки, потому что такого понятия изначально нет. Исчисление — это строго формальная вещь без семантики.

Определение 2.2 (Непосредственно выводимая формула)**.** Формула f называется непосредственно выводимой из множества формул $f_1, \dots, f_n$, если имеется правило вывода, такое что $R(f_1, \dots, f_n, f)$.

Определение 2.3 (Выводимая формула)**.** Формула f называется выводимой в исчислении C, если существует последовательность формул $f_1, \dots, f_n, f$, такая что $f_j \, \forall j$ является непосредственно выводимой из некоторых предыдущих или является аксиомой. Обозначение: $(\vDash_C f)$.

Определение 2.4 (Полнота)**.** Исчисление называется полным, если всякая истинная формула выводима в этом исчислении.

Определение 2.5 (Непротиворечивость)**.** Исчисление называется непротиворечивым, если не существует формулы f, такой что $\vDash f$ и $\vDash \neg f$.

2.2. Секвенциальное исчисление высказываний

Определение 2.6 (Секвенция)**.** Формулы СИВ — секвенция. То есть выражения вида $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ, Δ — наборы пропозициональных формул.

Определение 2.7 (Формульный образ секвенции)**.**

$$\Phi(\overbrace{A_1, \dots, A_n}^{\text{антецедент}} \vdash \overbrace{B_1, \dots, B_m}^{\text{сукцедент}}) \risingdotseq A_1 \& A_2 \& \cdots \& A_n \to (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m),$$

где $\risingdotseq$ — графическое равенство, т.е. то, что слева это «точь в точь» то, что справа.

Правила вывода в СИВ

$(* \ \vdash)$ — правило вывода в антецеденте для бинарной связки $*$

$(\vdash\ *)$ — правило вывода в сукцеденте для бинарной связки $*$
Далее будут выписаны (почти) все правила вывода:

$$(\&\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1 A \Gamma_2 B \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1 A \,\&\, B \Gamma_2 \Gamma_3 \vdash \Delta} \qquad (\vdash\ \&)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 B \Delta_2 \quad \Gamma \vdash \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 A \,\&\, B \Delta_2}$$

$$(\vee\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1 B \Gamma_2 \vdash \Delta \quad \Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 A \vee B \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (\vdash\ \vee)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 A \Delta_2 B \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1 A \vee B \Delta_2 \Delta_3}$$

$$(\to \vdash)\ \frac{\Gamma_1 B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2 \quad \Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma_1 A \to B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2} \qquad (\vdash \to)\ \frac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 B \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \to B \Delta_2}$$

$$(\neg\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma_1 \neg A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2} \qquad (\vdash\ \neg)\ \frac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \neg A \Delta_2}$$

$$(\Leftrightarrow \vdash)\ \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2 B \quad \Gamma_1 A \Gamma_2 B \vdash \Delta_1 \Delta_2}{\Gamma_1 A \Leftrightarrow B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2} \qquad (\vdash \Leftrightarrow)\ \frac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 B \Delta_2 \quad \Gamma_1 B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Leftrightarrow B \Delta_2}$$

$$(\oplus\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 B \Delta_2 \quad \Gamma_1 B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma_1 A \oplus B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2} \qquad (\vdash\ \oplus)\ \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A B \Delta_2 \quad \Gamma_1 A B \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \oplus B \Delta_2}$$

В дальнейшем будут использоваться обозначения $(*\ \vdash)$ и $(\vdash\ *)$, ссылаясь на эту таблицу.

Определение 2.8 (Секвенциальное исчисление высказываний).

1. Алфавит:
   - символы для обозначения пропозициональных переменных (например, $(x, y, z, 0, \dots, 9)$)
   - логические связки $\&, \neg$
   - знак секвенции $\vdash$
   - Скобки (,)
2. Формулы: секвенции из пропозициональных формул
3. Правила вывода:
   - $(\vdash\ \&)$
   - $(\&\ \vdash)$
   - $(\vdash\ \neg)$
   - $(\neg\ \vdash)$
4. Аксиомы: любые формулы вида $\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2$

Лемма 2.1. Формульный образ аксиомы является тавтологией.

Доказательство. Если применить правило де Моргана и раскрыть импликацию, то аргумент Φ в общем виде можно записать так:

$$A_1 \,\&\, \dots \,\&\, A_n \to B_1 \vee \dots \vee B_m \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

из этого следует, что

$$\begin{gathered}\Phi(A_1, \dots, A_k, A, A_{k+1}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_l, A, B_{l+1}, \dots, B_m) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k \vee \color{red}{\neg A} \vee \neg A_{k+1} \vee \dots \vee \neg A_n \vee \\ \vee B_1 \vee \dots \vee B_l \vee \color{red}{A} \vee B_{l+1} \vee \dots \vee B_m\end{gathered}$$

красное даёт нам тавтологию. ■

Определение 2.9 (Допустимое правило)**.** Правило вывода называется допустимым, если по всякому выводу, содержащему применение этого правила можно построить вывод без применения этого правила.

Предложение 2.2. В СИВ допустимыми являются:

$$(\vee\ \vdash), (\vdash\ \vee), (\to\vdash), (\vdash\to), (\Leftrightarrow\vdash), (\vdash\Leftrightarrow), (\oplus\ \vdash), (\vdash\ \oplus),$$
$$(|\vdash), (\vdash|), (\downarrow\vdash), (\vdash\downarrow).$$

Доказательство. Здесь будет приведено только доказательство допустимости $(\vee\ \vdash)$, остальное доказывается аналогично.

$$(\vee\ \vdash)\ \frac{\begin{array}{r}\Gamma_1 B\Gamma_2\vdash\Delta\quad s_1\\ \Gamma_1 A\Gamma_2\vdash\Delta\quad s_2\end{array}}{\Gamma_1\neg(\neg A\mathbin{\&}\neg B)\Gamma_2\vdash\Delta\quad s}$$

s может быть получено из s' по $(\neg\ \vdash)$, где

$$s':\quad \Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta(\neg A\mathbin{\&}\neg B)$$

s' может быть получено из s'' и s''' по $(\vdash\ \&)$, где

$$\begin{array}{rl} s'': & \Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta\neg A\\ s''': & \Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta\neg B\end{array}$$

s'' может быть получена из s_2 по $(\neg\ \vdash)$
s''' может быть получена из s_1 по $(\neg\ \vdash)$. ■

Правила сокращения повторений:

$$\frac{\Gamma_1 A\Gamma_2 A\Gamma_3\vdash\Delta}{\Gamma_1 A\Gamma_2\Gamma_3\vdash\Delta}\qquad\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta_1 A\Delta_2 A\Delta_3}{\Gamma\vdash\Delta_1 A\Delta_2\Delta_3}$$

Правила перестановки:

$$\frac{\Gamma_1 A\Gamma_2 B\Gamma_3\vdash\Delta}{\Gamma_1 B\Gamma_2 A\Gamma_3\vdash\Delta}\qquad\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta_1 A\Delta_2 B\Delta_3}{\Gamma\vdash\Delta_1 B\Delta_2 A\Delta_3}$$

Правила добавления:

$$\frac{\Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1\Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 A \Delta_2}$$

Каждое из этих правил является очевидным, если расписать формульные образы.

Предложение 2.3. В СИВ допустимы обратные правила:

$$(\&^- \ \vdash)\ \frac{\Gamma_1 A \,\&\, B \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 A B \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

$$(\vdash \ \&_1^-)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 A \,\&\, B \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 A \Delta_2}$$

$$(\vdash \ \&_2^-)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 A \,\&\, B \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 B \Delta_2}$$

Определение 2.10 (Производное правило). Правило вывода называется производным правила исчисления, если всякая формула, выводимая с применением этого правила является выводимой и без его применения.

Пример 2.1. Правило сечения:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_3\Gamma_4 \vdash \Delta_3 A \Delta_4 \\ \Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 B \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 \vdash \Delta_1\Delta_2 B \Delta_3\Delta_4} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\begin{array}{c}\vdash A \\ A \vdash B\end{array}}{\vdash B}$$

Лемма 2.4. Для всякого правила вывода в СИВ формульный образ заключения равносилен конъюнкции формул образов посылок.

Доказательство. На примере $(\& \ \vdash)$ и $(\vdash \ \&)$.
$(\& \ \vdash)$:

заключение: $\Phi(\Gamma_1 A \& B \vdash \Delta) \Leftrightarrow \neg((\&\Gamma_1)\& A \& B \& (\&\Gamma_2)) \vee (\vee\Delta)$

посылка: $\Phi(\Gamma_1 A B \Gamma_2 \vdash \Delta) \Leftrightarrow \neg((\&\Gamma_1) \,\&\, A \,\&\, B \,\&\, (\&\Gamma_2)) \vee (\vee\Delta)$

$(\vdash \ \&)$:

посылка1: $\Phi(\Gamma \vdash \Delta_1 A \Delta_2) \Leftrightarrow \neg((\&\Gamma)) \vee (\vee\Delta_1) \vee A \vee (\vee\Delta_2)$

посылка2: $\Phi(\Gamma \vdash \Delta_1 B \Delta_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg((\&\Gamma)) \vee (\vee\Delta_1) \vee B \vee (\vee\Delta_2)$

Обозначим красное за F_1, а зелёное за F_2

посылка1 & **посылка2:** $(F_1 \vee A \vee F_2) \,\&\, (F_1 \vee B \vee F_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (F_1 \vee F_2) \vee (A \,\&\, B)$

заключение: $\Phi(\Gamma \vdash \Delta_1 A \,\&\, B \Delta_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg((\&\Gamma)) \vee (\vee\Delta_1) \vee A \,\&\, B \vee (\vee\Delta_2)$

■

Теорема 2.5. СИВ полно (то есть формульный образ всякой секвенции, выводимой в СИВ является тавтологией).

Доказательство. Как-то методом возвратной математической индукции. ■

Теорема 2.6. СИВ непротиворечиво.

Глава 3

Метод резолюции для исчисления высказываний

Определение 3.1 (Литерал)**.** Литералом называется атомарная формула (кроме 0 и 1), или её отрицание (то есть либо x, либо $\neg x$).

В дальнейшем l будет обозначать литерал.

Определение 3.2 (Исчисление высказываний).

1. Алфавит: конечное множество пропозициональных переменных
2. Формулы: предложения (клозы, clauses), то есть элементарные дизъюнкции (дизъюнкции литералов)
3. Правила вывода:
   - правило резолюции (обозначения самого вывода не совпадают, оставил за собой право написать так, как считаю нужным):
   $$\frac{D_1 \vee x \vee D_2 \qquad D_3 \vee \neg x \vee D_4}{D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4}$$
   - правило сокращения повторений:
   $$\frac{D_1 \vee l \vee D_2 \vee l \vee D_3}{D_1 \vee l \vee D_2 \vee D_3}$$
4. Аксиомы: нет

Определение 3.3 (Пустое предложение). nill $\mid \varnothing;\ 0; \Lambda$.

Определение 3.4 (Неудовлетворительное множество предложений). Множество предложений называется неудовлетворительным, если из него выводимо пустое предложение.

Замечание. Единственный случай, когда множество неудовлетворительное:

$$\frac{x \qquad \neg x}{\text{nill}}$$

Встаёт вопрос, как доказывать какие-либо выражения в таком исчислении? Разберём общий случай. Хотим доказать

$$A_1 \dots A_n \Rightarrow B_1 \dots B_m \tag{*}$$

где A_i B_j — это какие-то выражения, которые можно привести к виду элементарных дизъюнкций.

Алгоритм действий следующий:

1. Раскрываем $(*)$:

$$\begin{aligned}&A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \to B_1 \vee \ldots \vee B_m \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow \neg(A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n) \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m \Leftrightarrow \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m\end{aligned}$$

2. Если $(*)$ истинно, то $\neg(*)$ должно быть ложным. Раскроем $\neg(*)$:

$$\begin{aligned}&\neg(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m) \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow A_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} \neg B_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \neg B_m \quad (**)\end{aligned}$$

3. Убрав конъюнкции, $(**)$ можно записать в виде:

$$\frac{A_1 \quad \ldots \quad A_n \quad \neg B_1 \quad \ldots \quad \neg B_m}{\text{вывод из правила резолюции}}$$

4. Если мы смогли получить хотя бы один nill в выводе, то мы доказали, что $\neg(*)$ ложно, а это значит, что $(*)$ истинно.

В виду того, что лично я ничего не понял без примера, приведу его здесь:

Пример 3.1. Пусть в наших обозначениях будет:

$$A_1 = x_1 \mathbin{\&} x_2$$
$$A_2 = x_1 \to x_3 \Leftrightarrow A_2 = \neg x_1 \vee x_3$$
$$B = x_3$$

Хотим доказать следующее:

$$A_1 A_2 \Rightarrow B \qquad (*)$$

1. $(*) \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee B$
2. $\neg(*) \Leftrightarrow A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} \neg B \quad (**)$
3. Вспомним, что мы обозначали за A_1, A_2, B и получим:

$$\cfrac{x_1 \mathbin{\&} x_2 \qquad \neg x_1 \vee x_3 \qquad \neg x_3}{\cfrac{x_1 \quad x_2 \quad \neg x_1 \vee x_3 \quad \neg x_3}{\cfrac{x_2 \quad x_3 \quad \neg x_3}{x_2 \quad \text{nill}}\ \text{правило резолюции к } x_3 \text{ и } \neg x_3}\ \text{правило резолюции к } x_1 \text{ и } \neg x_1 \vee x_3}$$

4. Получили nill, значит, доказали, что $(*)$ верна

Глава 4

Формулы исчисления предикатов

Определение 4.1 (Предметная переменная)**.** Переменная для констант называется предметной переменной.

Определение 4.2 (Терм)**.** Определение индуктивное:

- Предметная переменная и предметная константа являются термом
- Если $t_1, \dots, t_n$ — термы, f — n-местный функциональный символ, то $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм

Определение 4.3 (Атомарная формула)**.** Если $t_1, \dots, t_n$ — термы, p — n-местный предикатный символ, то $p(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная формула.

Определение 4.4 (Предикатная формула).

- Атомарная формула является предикатной
- Если F_1, F_2 — предикатные формулы, $*$ — бинарная логическая связка, то $\neg F_1$, $(F_1 * F_2)$ — предикатные формулы
- Если F — предикатная формула, x — предметная переменная, то $\forall x F$, $\exists x F$ — предикатные формулы

Определение 4.5 (Кванторный комплекс). Выражения $\forall x$, $\exists x$ называются кванторными комплексами.

Определение 4.6 (Область действия квантора). Область действия квантора — формула, стоящая непосредственно за кванторным комплексом.

Пример 4.1. $\forall x(P \to \exists y(Q \vee R) \mathbin{\&} \exists y P)$. Цветом выделены области действия соответствующих кванторов.

Определение 4.7 (Связанное вхождение переменной). Вхождение переменной, которая находится в области действия квантора по этой переменной называется связанным.

Определение 4.8 (Свободное вхождение переменной). В противном случае вхождение называется свободным.

Пример 4.2. $\forall x(P(x, y, z) \to \exists y(Q(y, z) \vee \forall z R(x, z)))$. Красным помечены все связанные переменные.

Определение 4.9 (Интерпретация). Для её задания достаточно:

1. Область интерпретации D, то есть множество констант
2. Каждому n-местному предикатному символу поставить в соответствие конкретное отношение из D^n
3. Каждому n-местному функциональному символу поставить в соответствие конкретную функцию $f : D^n \to D$

Определение 4.10 (Замкнутая формула). Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется замкнутой.

Заметим тот факт, что замкнутая формула в каждой конкретной интерпретации задаёт высказывание, которое либо истинное, либо ложное.

Определение 4.11 (Свойство). Формула с одной свободной переменной задаёт свойство объекта в этой интерпретации

Определение 4.12 (Общезначимость). Предикатная формула называется общезначимой, если она истинна в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных

Определение 4.13 (Равносильность). Две формулы называются равносильными, если в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных значение формул совпадают. (Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$)

Основные равносильности:

1. $\neg\forall x P \Leftrightarrow \exists x \neg P$
2. $\neg\exists x P \Leftrightarrow \forall x \neg P$
3. $\forall x(P \mathbin{\&} Q) \Leftrightarrow \forall x P \mathbin{\&} Q$, если x не входит свободно в Q
4. $\exists x(P \mathbin{\&} Q) \Leftrightarrow \exists x P \mathbin{\&} Q$, если x не входит свободно в Q
5. $\forall x(P \vee Q) \Leftrightarrow \forall x P \vee Q$, если x не входит свободно в Q
6. $\exists x(P \vee Q) \Leftrightarrow \exists x P \vee Q$, если x не входит свободно в Q
7. $P \to \forall x Q \Leftrightarrow \forall x(P \to Q)$, если x не входит свободно в P
8. $P \to \exists x Q \Leftrightarrow \exists x(P \to Q)$, если x не входит свободно в P
9. $\forall x P \to Q \Leftrightarrow \exists x(P \to Q)$, если x не входит свободно в Q
10. $\exists x P \to Q \Leftrightarrow \forall x(P \to Q)$, если x не входит свободно в Q

Определение 4.14 (Свобода для подстановки). Терм t свободен для подстановки в формулу F вместо свободно входящих предметных переменных x, если он не содержит переменных, в области действия которых имеются его вхождения.

Пример 4.3. $S(x) \vee \forall x(P(x, y, z) \to \forall x \exists y(Q(x, z) \vee R(y, x, z)))$

Напишем, табличку, какой терм (обозначенный за t) свободен для подстановки в написанную выше формулу вместо соответствующих переменных:

t	x	y	z	u
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(y)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(z)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(u)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x, y)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(x, z)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(x, u)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(y, z)$	$+$	$+$	$-$	$+$
...				

Логика здесь такая: смотрим на то, какие переменные есть в терме, смотрим, сломается ли что-то, если мы везде вместо переменной напишем терм (то есть не станет ли то, что было свободным вдруг связным). Если ничего не ломается, то можем подставить, а если ломается, то, соответственно, не можем.

Глава 5

Секвенциальное исчисление предикатов

Обозначим символом $[P]^x_y$ результат замены всех секвенциальных переменных x на переменную y; а символом $[P]^x_t$ результат замены всех секвенциальных переменных x на терм t. В дальнейшем будем активно использовать эти обозначения.

Кванторные правила:

Следующие две формулы работают только если терм t свободен для подстановки в формулу P вместо переменной x

$$(\vdash\ \exists)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1[P]^x_t\Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1\exists xP\Delta_2} \qquad\qquad (\forall\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1[P]^x_t\Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1\forall xP\Gamma_2 \vdash \Delta}$$

Следующие две формулы работают только если переменная y свободна для подстановки в формулу P вместо переменной x И НЕ ВХОДИТ СВОБОДНО В ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПРАВИЛА!!!

$$(\vdash\ \forall)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1[P]^x_y\Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1\forall xP\Delta_2} \qquad\qquad (\exists\ \vdash)\ \frac{\Gamma_1[P]^x_y\Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1\exists xP\Gamma_2 \vdash \Delta}$$

Определение 5.1 (Секвенциальное исчисление предикатов).

1. Алфавит:
   {алфавит для записи пропозициональных формул, $\vdash$}
2. Формулы: секвенции вида $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ, Δ — списки пропозициональных формул
3. Правила вывода: все правила вывода для СИВ и ещё кванторные правила:
   - ($\vdash\ \exists$)
   - ($\forall\ \vdash$)
   - ($\vdash\ \forall$)
   - ($\exists\ \vdash$)
4. Аксиомы: секвенции вида $\Gamma_1 A \Gamma_2 \vdash \Delta_1 A \Delta_2$

Правило сокращения повторений:

$$\frac{\Gamma_1 P \Gamma_2 P \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1 P \Gamma_2 \Gamma_3 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 P \Delta_2 P \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1 P \Delta_2 \Delta_3}$$

Теорема 5.1. СИП полно и непротиворечиво.

Доказательство. В курсе не будет. ■